

La chute en escalade

Le but de ce problème est d'étudier l'amortissement de la chute d'un grimpeur par une corde. Lors de sa progression le grimpeur fixe successivement sa corde au mur via des points d'ancrage ; il est lui-même relié à la corde par un harnais appelé baudrier. Une personne appelée assureur, située en bas du mur, est chargée de retenir la corde en cas de chute de ce dernier. Lorsqu'il chute, le grimpeur se situe en général au dessus du dernier point d'ancrage, il tombe donc d'abord en chute libre, jusqu'à être retenu par la corde (voir la figure 1). La force maximale exercée par la corde sur le grimpeur est appelée *force de choc*. Une force de choc importante peut avoir des conséquences graves, tant sur le matériel (arrachement du point d'ancrage, déchirement des coutures du baudrier...) que sur le grimpeur (lésions dues à la très forte décélération...), c'est pourquoi les constructeurs de cordes cherchent à minimiser cette force de choc.

Nous noterons par la suite :

- F_{choc} la force de choc
- m la masse du grimpeur
- g l'accélération de la pesanteur (nous prendrons $g = 9,81m.s^{-2}$)
- S la surface de la section de la corde
- E le module d'élasticité de la corde
- H la hauteur de chute
- L la longueur de corde entre le chuteur et son assureur
- $f = \frac{H}{L}$ le facteur chute.

Sur le site officiel de la Fédération Française de la Montagne et de l'Escalade on peut lire :

En négligeant les frottements de la corde sur les mousquetons, l'effort exercé sur la corde et le baudrier lorsque la corde se tend est égal à :

$$F_{choc} = mg \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2SHE}{Lmg}} \right).$$

Ceci n'est valable qu'avec une corde dynamique. Une chute de 120 cm au-dessus du point

sur lequel vous êtes « vaché » par l'intermédiaire d'une sangle, entraînerait une force choc de 18 KN !

À noter que même vert de peur :

- *Vous perdrez peu de poids.*
- *Le produit SE n'évolue pas (ou peu) après la fabrication de la corde (l'UIAA recommande des modules d'élasticité tels que la force de choc maximale soit inférieure à 1200 Kgf).*
- *Les seuls paramètres sur lesquels le grimpeur peut intervenir au cours d'une escalade sont : la hauteur de chute (H) et la longueur de corde (L).*
- *La force choc (ou d'interception) maximale d'une corde est l'effort maximal que peut ressentir le baudrier d'un grimpeur quelle que soit la hauteur de chute, dans la situation la plus défavorable ($f = 2$).*

1 Premières constatations

- Expliquer, grâce à la formule de la force de choc, pourquoi c'est moins la hauteur de chute H que le facteur chute f qui nous intéresse. Commenter la partie du texte : *Une chute de 120 cm au-dessus du point sur lequel vous êtes « vaché »*
- Le Kgf est une unité de force tel que $1Kgf$ correspond à la force exercée par l'attraction gravitationnelle terrestre sur une masse de $1Kg$. Convertir $1200Kgf$ en Newtons.
- Calculer le produit SE pour une sangle dont la force de choc exercée sur un grimpeur de masse $m = 80Kg$ avec un facteur chute $f = 2$ vaut $18KN$.
- Quelle est l'unité de E (justifier) ?

2 Chute libre

Lors de la première phase de la chute, le grimpeur est en chute libre. On considère qu'il se lâche sans vitesse initiale et fait une chute libre d'une hauteur H .

- Que néglige-t-on lorsqu'on parle de chute libre ? Quelles sont les forces s'exerçant sur le grimpeur ?
- Rappeler le théorème de l'énergie mécanique. L'appliquer au cas de la chute libre.
- Donner la formule de la vitesse v_0 atteinte par le grimpeur à la fin de la chute libre, en fonction de g et H .

3 Amortissement par la corde

Dans la seconde phase de la chute, le grimpeur est amorti par la corde. On modélise le système corde-grimpeur par une masse de masse m d'altitude notée z accrochée à un ressort de longueur au repos L et de constante de Hooke (ou constante de raideur) k . À l'instant initial la masse est à l'altitude $z(0) = 0$, a une vitesse verticale v_0 dirigée vers le bas, et le ressort est au repos. On néglige tous les frottements.

- Quelles sont les forces s'exerçant sur la masse ?
- Rappeler la seconde loi de Newton. L'appliquer à notre cas.
- Montrer que la formule

$$z(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi) + \beta$$

définit bien une solution de l'équation différentielle obtenue pour ω et β que l'on déterminera.

- Que dire de la forme de la solution obtenue ? Exprimer la vitesse lorsque la masse repasse en $z = 0$ en fonction de v_0 . En se rappelant que pour $z > 0$, la force exercée par la corde (le ressort) sur le grimpeur est nulle (cas d'une chute libre), donner l'altitude maximale atteinte après le premier rebond. Commenter.
- Écrire les conditions initiales données par $z(0)$ et v_0 . En déduire que

$$\tan \varphi = -\frac{v_0}{\omega \beta}$$

et que

$$\alpha^2 = \beta^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

(indication : on se servira de la formule $\cos^2 + \sin^2 = 1$).

- En déduire que

$$F_{choc} = mg \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Hk}{mg}} \right).$$

Montrer que la vitesse maximale atteinte par le grimpeur est

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg^2}{k} + mgH}.$$

- Montrer que la hauteur de chute totale du grimpeur est

$$\frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Hk}{mg}} \right) + H.$$

4 Associations de ressorts

4.1 Ressorts en parallèle

On considère une association de deux ressorts en parallèle de même longueur au repos et de même constante de Hooke k .

- Montrer que ce système de ressorts est équivalent à un ressort de même longueur au repos et de constante de Hooke $2k$.
- Choisir la bonne affirmation : à longueur fixée, la constante de raideur d'une corde est proportionnelle :
 - à l'inverse du diamètre de la corde,
 - au diamètre de la corde,
 - au carré du diamètre de la corde.

4.2 Ressorts en série

On considère maintenant une association de deux ressorts en série de même longueur au repos l_0 et de même constante de Hooke k .

- On pose l_1 et l_2 les longueurs respectives des deux ressorts. En appliquant la seconde loi de Newton au point situé entre les deux ressorts, montrer qu'on a toujours $l_1 = l_2$.

- b) En calculant la force subie à l'extrémité de l'un des deux ressorts, montrer que ce système de ressorts est équivalent à un ressort de longueur au repos $2L$ et de constante de Hooke $\frac{k}{2}$.
- c) Choisir la bonne affirmation : à diamètre fixé, la constante de raideur d'une corde est proportionnelle :
- à l'inverse de la longueur de la corde,
 - à la longueur de la corde,
 - au carré de la longueur de la corde.
- d) Expliquer la formule de la force de choc :

$$F_{choc} = mg \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2SHE}{LMg}} \right).$$

5 Applications numériques

- a) On dispose d'une corde de diamètre $10mm$ et de module d'élasticité $E = 3,5 \cdot 10^8 Pa$. Cal-

culer F_{choc} pour un grimpeur de $75Kg$ pour $f = 1$, $f = 0.5$ et $f = 2$.

- b) Pour un saut à l'élastique, l'élastique est constitué d'un faisceau de n petits élastiques (en parallèle) de même longueur l_0 . Le paramètre n et la longueur l_0 sont modifiés en fonction de la masse du sauteur. Une sauteuse de masse $M = 60Kg$ souhaite faire le "maxi bungy", d'une hauteur de $100m$. L'instructeur veut que la force de choc soit inférieure à $3Mg$ et que la chute libre soit la plus longue possible. Il se donne une marge d'erreur de $10m$, le saut sera donc d'une hauteur de $90m$. Chaque élastique est de diamètre $10mm$ et a pour module d'élasticité $E = 1,4 \cdot 10^6 Pa$. Combien faudra-t-il d'élastiques et quelle sera leur longueur ?

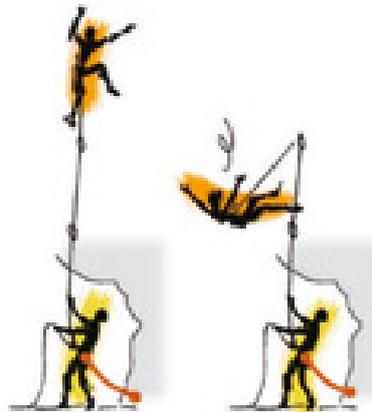


FIGURE 1 – Schéma de la chute