DS 1 – Révisions
01/02/2013 – Durée : 2h

Les documents et les calculatrices sont interdits. Toutes les réponses devront être (même rapidement) justifiées.

Exercice 1
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^7}$,
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{2013}}$,
3. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$,
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sin(x)}{x}$.

Exercice 2
À l'aide de développements limités, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)-x}.$$

Exercice 3
Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur les intervalles indiqués :

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $\mathbf{R}$,
2. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $\mathbf{R}$,
3. $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0, +\infty[$,
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - (1+x^2)^2$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$,
2. $\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra faire une intégration par parties),
3. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^3}\,\mathrm{d}x$ (on pourra faire le changement de variables $u = \ln(x)$),
4. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{4}(1+\sin(u_n))$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n, u_n est positif.

2. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.
3. En déduire que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2^n}$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 6
Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}$,
2. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$,
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n^3+2n+3}$,
4. $u_n = \tan\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$.

Exercice 7
Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 7$,
2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$,
3. $f(x) = x^3 - 2x$,
4. $f(x) = \sin^2(x)$.

Quelques transformations de Laplace utiles (ou pas)

- Pour $\alpha \geq 0$, on a $\mathcal{L}\left(e^{-\alpha x}\right)(p) = \dfrac{1}{p+\alpha}$.
- $\mathcal{L}\left(\sin(\omega t)\right)(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.
- $\mathcal{L}\left(\cos(\omega t)\right)(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.
- $\left(\mathcal{L}(f(t))\right)'(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$.