DS 1 – Corrigé

Exercice 1
Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^7}$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{2013}}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}$,
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin(x)}{x}$.

Corrigé

1. On a $x^7 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$; en passant à l'inverse on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^7} = 0$.
2. Par croissance comparée, on sait que pour tout entier n, $\dfrac{e^x}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, en particulier pour $n = 2013$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^{2013}} = +\infty$.
3. On sait que $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1-x}{x^2}$; donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = +\infty$.
4. Pour tout x,
$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$
donc
$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3$$
et pour $x > 0$,
$$\frac{1}{x} \leq \frac{2+\sin x}{x} \leq \frac{3}{x}.$$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+\sin(x)}{x} = 0$.

Exercice 2
À l'aide de développements limités, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)-x}.$$

Corrigé
Par développement limité à l'ordre 2, $\dfrac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)-x} = \dfrac{1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-1}{x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-x} = \dfrac{-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}$, avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$; en multipliant en haut et en bas par $\dfrac{-2}{x^2}$, on obtient $\dfrac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)-x} = \dfrac{1+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}$, et par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)-x} = 1$.

Exercice 3
Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur les intervalles indiqués :

1. $f(x) = 3x^2 + 5x^4$ sur $\mathbf{R}$,
2. $f(x) = 3\cos(2x)$ sur $\mathbf{R}$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0, +\infty[$,
4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - (1 + x^2)^2$ sur $]0, +\infty[$.

Corrigé

1. On sait que pour tout entier n, $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbf{R}$. Donc $F(x) = x^3 + x^5$ est une primitive de f sur $\mathbf{R}$.
2. La fonction sinus est une primitive de la fonction sinus sur $\mathbf{R}$, donc une primitive de f sur $\mathbf{R}$ est donnée par $F(x) = \dfrac{3}{2}\sin(2x)$.
3. On reconnaît que f est de la forme $f(x) = -u'(x).v'(u(x))$, avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = e^x$. On en déduit que $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
4. On sait que $x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$. De plus, $(1+x^2)^2 = 1+2x^2+x^4$, donc $x \mapsto x + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5$ est une primitive de $x \mapsto (1 + x^2)^2$ sur $]0, +\infty[$. Par conséquent, $F(x) = 2\sqrt{x} - x - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{5}x^5$ est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra faire une intégration par parties),
3. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^3}\,\mathrm{d}x$ (on pourra faire le changement de variables $u = \ln(x)$),
4. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Corrigé

1. *Première méthode* : on linéarise le cosinus. On sait que $\cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$, donc

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{x}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 + \pi = \pi.$$

Deuxième méthode : on fait une intégration par parties : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ où $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$. Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [\cos(x)\sin(x)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\sin(x)\sin(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x = 2\pi - \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\mathrm{d}x,$$

puis, en rassemblant les intégrales à gauche de l'égalité, que

$$2\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi,$$

et finalement
$$\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi.$$

2. On a $\displaystyle\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^e u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ où $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. Par intégration par parties, on obtient :
$$\int_1^e \ln(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^e - \int_1^e u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{x}{x}\,\mathrm{d}x = e\ln(e) - 0 - [x]_1^e = 1.$$

3. Si on pose $u = \ln(x)$, alors $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ et donc
$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln(x))^3}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{u^3}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-1}{2u^2}\right]_1^2 = \frac{3}{8}.$$

4. On commence par vérifier que l'intégrale est bien définie : en effet, en $+\infty$ l'intégrande est équivalent à $\dfrac{1}{x^2}$ qui est intégrable. Décomposons $\dfrac{1}{x^2-1}$ en éléments simples :
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right).$$
On recherche ensuite une primitive de $\dfrac{1}{x^2-1}$ sur $[2, +\infty[$:
$$\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\big([\ln(x-1)] - [\ln(x+1)]\big) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$
Ainsi,
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^{+\infty} = 0 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\ln(3)}{2},$$
car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$.

Exercice 5

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}(1+\sin(u_n))$.

1. Montrer par récurrence que pour tout entier n, u_n est positif.
2. Montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$.
3. En déduire que pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{3}{2^n}$.
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Corrigé

1. On veut montrer par récurrence que pour tout entier n, u_n est positif. Posons $P(n)$: "u_n est positif". Pour l'initialisation, c'est simple : on sait par hypothèse que $u_0 = 3 \geq 0$; donc $P(0)$ est vraie. Passons à l'hérédité : on suppose $P(n)$ vraie et on veut montrer que $P(n+1)$ est elle aussi vraie. L'hypothèse de récurrence nous indique que u_n est positif. Or $1+\sin(u_n)$ est lui aussi positif, donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{4}(1+\sin(u_n))$ est positif. On vient de montrer que $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout n, autrement dit que u_n est positif pour tout entier n.
2. On sait que pour tout n, $\sin(u_n) \leq 1$, donc $1+\sin(u_n) \leq 2$. Puisque $u_n \geq 0$ (c'est la conclusion de la question précédente), on en déduit que $\dfrac{u_n}{4}(1+\sin(u_n)) \leq \dfrac{u_n}{2}$, autrement dit que $u_{n+1} \leq \dfrac{u_n}{2}$ pour tout entier n.

3. L'inégalité $0 \leq u_n$ pour tout n a été traitée à la question 1. Reste l'autre inégalité, que l'on montre par récurrence. Posons $P(n)$: "$u_n \leq \frac{3}{2^n}$". Par hypothèse, $u_0 = 3$, donc $P(0)$ est vraie. Supposons $P(n)$ vraie et montrons $P(n+1)$. Par hypothèse de récurrence, on a $u_n \leq \frac{3}{2^n}$. On applique alors la question précédente : on sait que $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$, donc $u_{n+1} \leq \frac{3}{2^n}\frac{1}{2} = \frac{3}{2^{n+1}}$. On vient de montrer $P(n+1)$; par récurrence $P(n)$ est vraie pour tout n. Ainsi, pour tout entier n, on a $0 \leq u_n \leq \frac{3}{2^n}$.
4. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2^n} = 0$, donc par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 6

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries de terme général :

1. $u_n = \frac{1}{n}$,
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n!}$,
3. $u_n = \frac{n+1}{n^3+2n+3}$,
4. $u_n = \tan\left(\frac{1}{3^n}\right)$,

Corrigé

1. Le critère de Riemann indique que la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.
2. On a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par le critère de d'Alembert, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n!}$ converge.
3. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (par le critère de Riemann), donc la série de terme général $\frac{n+1}{n^3+2n+3}$ converge. On peut aussi utiliser le critère des séries alternées : $u_n = (-1)^n a_n$ avec $a_n = \frac{1}{n!}$, en n'oubliant pas de préciser que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 en $+\infty$.
4. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$. Or la série de terme général $\frac{1}{3^n}$ converge (sa somme vaut $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$), donc la série de terme général $\tan\left(\frac{1}{3^n}\right)$ converge.

Exercice 7

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 7$,
2. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.
3. $f(x) = x^3 - 2x$,
4. $f(x) = \sin^2(x)$.

Corrigé

1. On sait que la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside $\mathcal{H}$ est $\frac{1}{p}$; par linéarité le tranformée de Laplace la transformée de $7\mathcal{H}$ est $\frac{7}{p}$.
2. On a
$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} e^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-2p}}{p}.$$

3. On sait que la transformée de Laplace de $x \mapsto x^n$ est $\dfrac{n!}{p^{n+1}}$; par linéarité on obtient :

$$\mathcal{L}f(p) = \frac{3!}{p^4} - \frac{2!}{p^2} = \frac{6}{p^4} - \frac{2}{p^2}.$$

4. *Première méthode* : on linéarise et on utilise le transformée de Laplace du cosinus.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(p) &= \mathcal{L}(\sin^2(x))(p) \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)(p) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}(1)(p) - \frac{1}{2}\mathcal{L}(\cos(2x))(p) \\
&= \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+4}
\end{aligned}$$

Deuxième méthode : on passe en complexe.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(p) &= \int_0^{+\infty} \sin^2(x)e^{-px}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 e^{-px}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{2ix}}{-4} - \frac{2e^{ix}e^{-ix}}{-4} + \frac{e^{-2ix}}{-4}\right) e^{-px}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{2ix}}{4} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-2ix}}{4}\right) e^{-px}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{(2i-p)x}}{4} + \frac{e^{-px}}{2} - \frac{e^{(-2i-p)x}}{4}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{e^{(2i-p)x}}{4(2i-p)} + \frac{e^{-px}}{2(-p)} - \frac{e^{(-2i-p)x}}{4(-2i-p)}\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2p} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2i-p} + \frac{1}{-2i-p}\right) \\
&= \frac{1}{2p} + \frac{1}{4}\,\frac{-2i-p+2i-p}{(2i-p)(-2i-p)} \\
&= \frac{1}{2p} + \frac{1}{4}\,\frac{-2p}{4+p^2} \\
&= \frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+4}
\end{aligned}$$