TD 1 – Séries entières

Les divers documents du cours pourront être trouvés à la page http://www.math.u-psud.fr/~guiheneu/Enseignement.html.

1 Calcul du rayon de convergence

Exercice 1
Calculer les rayons de convergence des séries suivantes ; lorsque le rayon de convergence est fini, préciser s'il y a convergence aux extrémités de l'intervalle de convergence :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\ x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n}\ x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n+\frac{1}{n+1}\right)\ x^n$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n^n\ x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}\ x^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(n+1)\ x^n$,
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{n^2+1}\ x^n$,
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}\ x^{2n+1}$,
7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sin\left(\frac{n\pi}{2013}\right)\ x^n$.

Exercice 2
Le but de cet exercice est de calculer le rayon de convergence d'une série de terme général polynomial.

1. Soit k un entier positif. Montrer que $(n+1)^k = n^k + n^k\varepsilon(n)$, où ε est une fonction qui tend vers 0 en $+\infty$.
2. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} p_k x^k$ un polynôme non nul. Montrer que $P(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} P(n)$.
3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}P(n)x^n$.

2 Calcul de sommes de séries entières

Exercice 3
Après avoir donné leur rayon de convergence, calculer la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\ x^n$,
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$,
3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left((-2)^n + n\right)\ x^n$,
4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n!}\ x^n$.

Exercice 4
On considère la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}.$$

1. Déterminer son rayon de convergence. On appelera f la somme de la série.
2. Calculer f' ; en déduire f.
3. Décomposer $\frac{1}{n(n+2)}$ en éléments simples ; en déduire une autre méthode pour calculer f.

Exercice 5
Soit la série entière suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Déterminer son rayon de convergence R, étudier la convergence en $-R$ et R, et calculer la somme de la série dans l'intervalle $]-R, R[$.

3 Calcul de DSE

Exercice 6
On pose $f(x) = \arctan(1-x)$.

1. Montrer que f est dérivable et vérifier que

$$f'(x) = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{x-(1+i)} - \frac{1}{x-(1-i)}\right)$$

2. Montrer que pour tout $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$f'(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n x^n.$$

3. En déduire le développement en série entière de f en 0

4 Divers

Exercice 7 (Résolution d'équation différentielle 1)
Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$xy' + 2y = x^3 + 1.$$

Exercice 8 (Résolution d'équation différentielle 2)
Trouver une solution développable en série entière de l'équation différentielle :

$$y' - 2xy = x$$

telle que $y(0) = 0$.

Exercice 9 (Résolution d'équation différentielle 3)
On cherche une solution de l'équation différentielle :

$$y'' + 2xy' + 2y = 0$$

Avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1. Trouver sous forme de série entière la solution de cette équation différentielle.
2. Identifier cette solution avec une fonction « classique ».

Exercice 10 (Suite de Fibonacci)
La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par les données initiales $u_0 = u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$. Le but de cet exercice est d'obtenir une expression de u_n en fonction de n à l'aide des séries entières. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 2$. Qu'est ce que cela implique pour le rayon de convergence de la série ?
3. Montrer que $S(x) = 1 + (x^2 + x)S(x)$ puis que $S(x) = \frac{1}{1-X-X^2}$.
4. En décomposant $\frac{1}{1-X-X^2}$ en éléments simples, donner une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 11 (Principe des zéros isolés)
Soit f la somme d'une série entière de rayon supérieur à 1. On suppose que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on a $f(\frac{1}{k}) = 0$. À l'aide de la formule de Taylor-Young, montrer que f est nulle.

Pour rappel, voici la formule de Taylor-Young, à découper et à encadrer chez vous :

✂··

Théorème (Formule de Talor-Young)**.** *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ et soit a un point de I. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction et n un entier positif. On suppose que f est n fois d´erivable sur l'intervalle I. Alors, il existe une fonction $\varepsilon(x)$ définie sur I, qui tend vers 0 lorsque x tend vers a, telle que l'on ait pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

✂··