TD 2 – Séries de Fourier

1 Polynômes et séries trigonométriques

Exercice 1
Pour commencer, quelques rappels...

1. Linéariser $\cos^3 x$ et exprimer $\sin(2x) - 3\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
2. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ et montrer que $S_n = e^{i\frac{n}{2}x}\dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$.

Exercice 2
Passer de la représentation en sinus/cosinus à la représentation exponentielle (et *vice-versa*) pour les séries trigonométriques suivantes :

1. $2\cos x - \dfrac{1}{3}\sin(4x)$,
2. $\dfrac{e^{ix} - e^{-2ix} + 5}{2}$,
3. $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}(\cos(kx) - \sin(kx))$,
4. $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k}\left(\cos(kx) + e^{ikx}\right)$.

Exercice 3
Soient $x \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \cos^k x$.

1. S est-elle une série trigonométrique ?
2. Calculer la somme de cette série

Exercice 4
Calculer la somme de la série trigonométrique $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(kx)}{k \cdot 2^k}$ (pour un nombre complexe $z = re^{i\theta}$, on a par définition $\ln(z) = \ln(r) + i\theta$).

2 Séries de Fourier

Exercice 5 (Phénomène de Gibbs)
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } \ -\pi < x \le 0 \\ 1 & \text{si } \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

1. Montrer que si f est une fonction impaire, alors pour tout entier k, $a_k(f) = 0$ et $b_k(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et donner la série de Fourier de f.

Figure 1 – Phénomène de Gibbs : quand on compresse trop l'image, la qualité s'en ressent…

3. Tracer sur un même graphique la fonction f et les sommes partielles $S_0(x)$, $S_2(x)$ et $S_4(x)$ de la série de Fourier de f.

Exercice 6
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π périodique telle que $f(x) = x$ si $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Représenter f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire la série de Fourier de f.
3. À l'aide du théorème de Parseval, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 7 (Piano *vs* guitare, tome I)
On considère les fonctions f et g comme dessinées sur les figures 2 et 3, que l'on étend à des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui sont impaires et 2π-périodiques.

1. Donner l'expression de $f(x)$ et de $g(x)$ en fonction de $x \in [0, \pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et de g, puis exprimer les séries de Fourier de f et g.

Exercice 8
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π-périodique égale à $1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier a_k et b_k de f (on pourra faire des intégrations par parties). En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

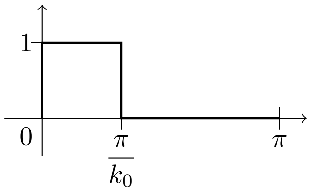

Figure 2 – Graphe de la fonction f

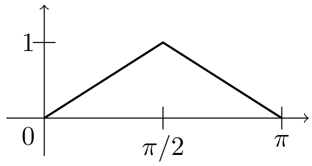

Figure 3 – Graphe de la fonction g

Exercice 9
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction 2π périodique telle que $f(x) = \operatorname{ch} x$ si $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Représenter f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$.

Exercice 10
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction telle que $f(x) = \big|\sin(nx)\big|$. Calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire la série de Fourier de f.

Exercice 11 (Circuit RC)
On considère le circuit RC comme représenté à la figure 4.

1. Établir l'équation différentielle reliant $u_C(t)$ à $e(t)$ (on posera comme d'habitude $\tau = RC$).
2. On considère cette dernière équation différentielle et suppose que $e(t) = e^{i\omega t}$ (on sort du monde des réels) et que $u_C(t)$ est une série trigonométrique. Déterminer $u_C(t)$
3. On suppose que $e(t) = f(t)$ où f est la fonction donnée à l'exercice 5. Déterminer $u_C(t)$, et représenter $e(t)$ et $u_C(t)$ sur un même graphique, interpréter.

Exercice 12 (Circuit RLC)
On considère le circuit RLC comme représenté à la figure 5.

1. Établir l'équation différentielle reliant $u_C(t)$ à $e(t)$ (on posera comme d'habitude $\tau = RC$).
2. On considère cette dernière équation différentielle et suppose que $e(t) = e^{i\omega t}$ (on sort du monde des réels) et que $u_C(t)$ est une série trigonométrique. Déterminer $u_C(t)$ (question subsidiaire : que reconnaît-on ?).
3. On suppose que $e(t) = g(t)$ où g est la fonction donnée à l'exercice 7 (cf figure 3). Déterminer $u_C(t)$, et représenter $e(t)$ et $u_C(t)$ sur un même graphique, interpréter.

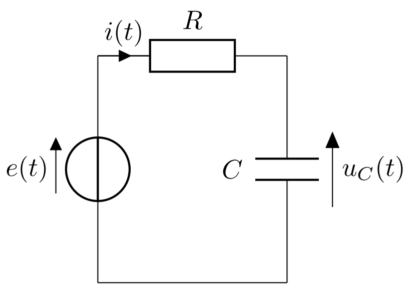

Figure 4 – Circuit RC

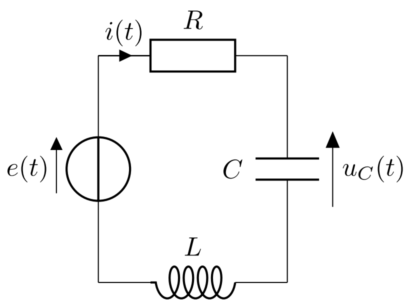

Figure 5 – Circuit RLC