

TD 3 – Transformée en z

1 Calculs de transformées en z

Exercice 1

Soient $a \in \mathbf{C}$, $\omega \in \mathbf{R}_+$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $u_n = a^n \cos(n\omega)$. Calculer la transformée en z de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Exercice 2

Calculer les transformées en z des suites suivantes :

$$\begin{aligned} 1. & u_n = n, \\ 2. & u_n = \begin{cases} e^{-n} & \text{si } n \leq m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}, \\ 3. & u_n = n^2, \\ 4. & u_n = \frac{1}{n!}, \end{aligned}$$

$$5. u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } n \leq 1 \end{cases},$$

$$6. u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases},$$

Exercice 3

Calculer la transformée en z de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par : $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Exercice 4

Calculer la transformée en z de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} u_n = 1 & \text{si } n \in \{0, 1, 2, 3\} \\ u_{n+4} = u_n \end{cases}$.

2 Transformées en z inverses

Exercice 5

Trouver l'original de $F(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$
 – à l'aide d'une décomposition en éléments simples,
 – à l'aide des séries entières.
 Même question pour $F(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}$.

Exercice 6

Trouver l'original des fonctions $F(z) = \frac{z+1}{z-2}$, $G(z) = \frac{1}{1+z^2}$ et $H(z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right) e^{-\frac{1}{z}}$.

Exercice 7

Soit $\omega > 0$. Montrer que $u_n = \sin(\omega n)$ a pour transformée en z

$$F(z) = \frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}.$$

En déduire l'original de $G(z) = \frac{z^2}{z^2 + z + 1}$.

Exercice 8

Trouver l'original de $F(z) = \frac{1}{(z-1)^3}$, avec trois méthodes différentes !

3 Applications**Exercice 9**

Résoudre l'équation de récurrence $u_{n+1} - 2u_n = n$ pour $u_0 = 0$.

Exercice 10

Soient $a > 0$ et $\omega > 0$. Résoudre l'équation de récurrence $u_n - au_{n-1} = e^{i\omega n}$ pour $u_0 = 0$.

Exercice 11

Résoudre les équations de récurrence :

1. $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = \delta_1$ pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.
2. $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 1$ pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice 12

Soit le système régi par l'équation

$$u_n = 1, 2u_{n-1} - 0.1v_{n-1}$$

(v_n représente l'entrée du système et u_n sa sortie). Déterminer la réponse impulsionnelle du système, ainsi que la réponse à un signal créneau d'amplitude $\frac{1}{2}$ et de durée 10.

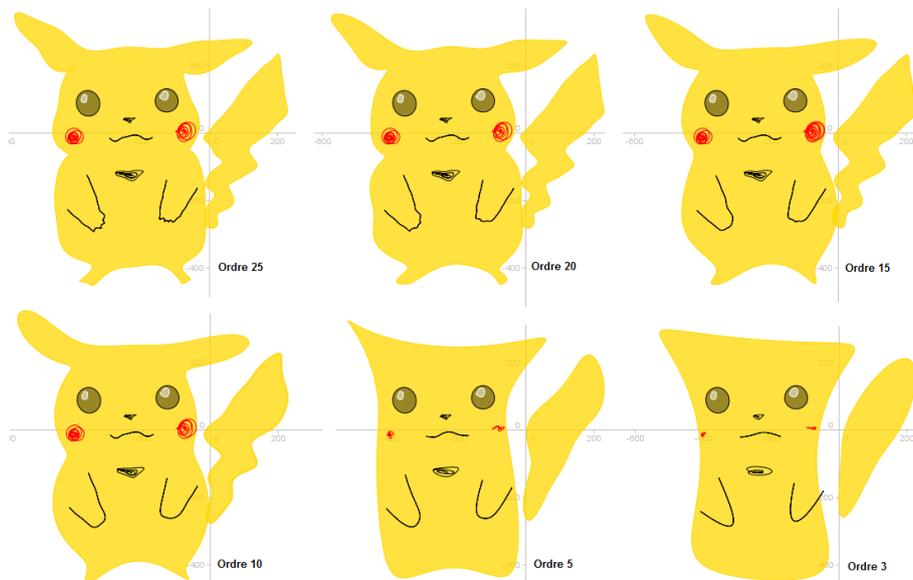


FIGURE 1 – Les séries de Fourier tronquées de Pikachu, ou comment certains matheux occupent leur temps libre...