Probabilités

1 Premières définitions

Nous nous intéresserons ici à la partie la plus simple des probabilités : les probabilités discrètes.

Définition 1. Soit Ω un ensemble fini. Une *probabilité* sur Ω est une fonction $P : \Omega \to [0, 1]$ telle que $\sum_{x\in\Omega} P(x) = 1$. Le nombre $P(x)$ est appelé la *probabilité* de l'*évènement* x. Pour A un sous-ensemble de Ω, on notera $P(A) = \sum_{x\in A} P(x)$ la probabilité de l'*évènement* A.

Exemple 2. Dans le jeu de pile ou face, on prend l'ensemble $\Omega = \{\text{pile, face}\}$ et la probabilité P telle que $P(\text{pile}) = P(\text{face}) = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. Donner l'ensemble Ω et la probabilité P pour le jeu consistant à jeter un dé équilibré.

Exercice 4. Démontrer que si $A \subset \Omega$, alors $P(A) \leq 1$.

Exercice 5. On dispose d'une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard une boule dans cette urne. Donner un ensemble Ω et une probabilité P correspondants à ce jeu.

Exercice 6. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Donner l'ensemble Ω et la probabilité P correspondants.

Définition 7. L'*évènement contraire* d'un évènement $A \subset \Omega$ est l'ensemble complémentaire $\Omega \setminus A$ de A dans Ω, noté $\overline{A}$.

Exercice 8. Montrer que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2 Indépendance

Définition 9. Soient A et B deux sous-ensembles de Ω. On dit que A et B sont *indépendants* si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Exemple 10. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Les évènements « on obtient pile au premier lancer » et « on obtient face au second lancer » sont indépendants.

Exercice 11. On dispose d'une urne contenant deux boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard une boule dans cette urne, puis on la remet dans l'urne, et on tire à nouveau une boule dans l'urne. Montrer que les évènements « on a eu une boule blanche au premier tirage » et « on a eu une boule blanche au second tirage » sont indépendants.

Exercice 12. On lance un dé. Montrer que les évènements $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3, 5\}$ sont indépendants.

Exercice 13. Soient A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,5$. Déterminer $P(A \cup B)$.

Exercice 14. On lance plusieurs fois de suite une pièce truquée : on obtient pile avec une probabilité p et face avec une probabilité $1 - p$. Calculer la probabilité pour que la première fois qu'on obtient face soit exactement au n-ième lancer.

3 Conditionnement

Définition 15. Soient A et B deux sous-ensembles de Ω tels que $P(B) > 0$. La *probabilité conditionnelle* de A sachant B, notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, est

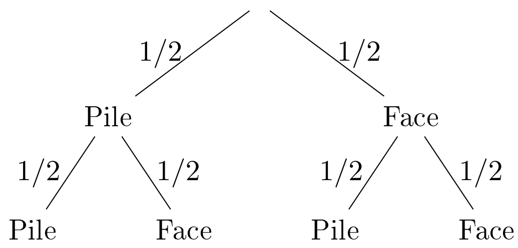
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exercice 16. Montrer que si A et B sont indépendants, alors $P(A|B) = P(A)$.

Exercice 17. On lance un dé. On pose $A =$« le résultat est pair » et $B = \{2\}$. Calculer $P(B|A)$.

Exercice 18. Soient A et B deux évènements indépendants tels que $P(A) = 0,2$ et $P(B) = 0,5$. Déterminer $P(A|B)$.

On peut représenter les probabilités conditionnelles sous forme d'arbres. Par exemple pour deux lancers successifs d'une pièce, on obtient :



Exercice 19. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois face sachant qu'on a obtenu au moins une fois pile.

4 Exercices

Exercice 20. Voici quelques vers d'un poème de Pablo Neruda :

Parmi les plumes qui effraient, parmi les nuits,
Parmi les magnolias, parmi les télégrammes,
Parmi le vent du sud et l'ouest marin,
Te voici qui viens en volant.

On recopie chacun des 29 mots de cette strophe (« l' » compte pour un mot) sur un carton que l'on place dans une urne.

1. On tire un seul carton de l'urne.

(a) Quelle est la probabilité d'obtenir le mot « parmi » ?

(b) On répète l'expérience 3 fois avec remise du carton tiré dans l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le mot « parmi ».

2. On tire simultanément et au hasard deux cartons parmi les 29.

(a) Calculer la probabilité d'obtenir ensemble les deux mots : « les, plumes ».

(b) Quelle est la probabilité de tirer au moins une fois le mot « parmi » ?

Les deux exercices suivants sont directement tirés des sujets du concours de l'ENSEA.

Exercice 21. Dans une urne blanche, il y a 3 boules rouges et 5 boules vertes. Dans une urne noire il y a 2 boules rouges et 3 vertes. L'expérience consiste à tirer simultanément deux boules de l'urne blanche, de les mettre dans l'urne noire puis de tirer une boule de l'urne noire. On appelle r : l'événement "on a tiré 2 boules rouges de l'urne blanche", d : "on a tiré 2 boules de couleur différentes de l'urne blanche", et v : "on a tiré 2 boules vertes de l'urne blanche" et R l'événement "on a finalement tiré une boule rouge de l'urne noire". Les boules sont indiscernables.

(A) La probabilité de tirer deux boules rouges de l'urne blanche est $P(r) = \dfrac{9}{64}$.

(B) La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes de l'urne blanche est $P(d) = \dfrac{15}{28}$.

(C) La probabilité de tirer une boule rouge de l'urne noire sachant que l'on avait tiré deux boules de couleurs différentes de l'urne blanche est $P(R|d) = \dfrac{3}{7}$.

(D) La probabilité de tirer une boule rouge de l'urne noire est $P(R) = \dfrac{55}{196}$.

(E) Sachant que l'on a tiré une boule rouge de l'urne noire, la probabilité d'avoir tiré précédemment deux boules rouges de l'urne blanche est $P(r|R) = \dfrac{12}{77}$.

Exercice 22. Un examen comporte 10 questions auxquelles il faut répondre par "vrai" ou "faux". Si la réponse à une question est juste, elle rapporte 1 point, et si elle ne l'est pas, elle fait perdre 1 point. Les candidats répondent tous aux 10 questions. Pour la note (sur 10) on calcule

$$S = N_J - (10 - N_J) = 2N_J - 10,$$

où N_J est le nombre de réponses justes. La note est fixée ainsi : $N = S$ si $S = 0$, $N = 0$ si $S < 0$. L'ensemble des candidats se décompose en deux catégories, les candidats sérieux (événement S) et les non sérieux (événement $\overline{S}$). Si on tire "au hasard" un des candidats, on considère que

$$P(S) = P(\overline{S}) = \frac{1}{2}.$$

Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\dfrac{3}{4}$, s'il n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\dfrac{1}{2}$. Dans tous les cas, les réponses aux différentes questions sont indépendantes. On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B peut s'écrire $P_B(A) = P(A|B)$.

(A) Les notes possibles sont les entiers de 0 à 10.

(B) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 9 bonnes réponses et une fausse, et donc qu'il obtienne 8 sur 10 (soit $9 - 1$) est $P_{\overline{S}}(N = 8) = P(\{N = 8\}|\overline{S}) = \dfrac{10}{2^{10}}$.

(C) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 10 réponses justes et obtienne donc 10 sur 10 est $P_{\overline{S}}(N = 10) = P(\{N = 10\}|\overline{S}) = \dfrac{1}{20}$.

(D) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 0 sur 10 est $P(\{N=0\}|\overline{S}) = \frac{1}{2}$.

(E) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 1 sur 10 est $P(\{N=0\}|\overline{S}) = 0$.

(A) Il est impossible qu'un candidat sérieux ait 0.

(B) Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il obtienne 10 sur 10 est $P_S(N=10) = P(\{N=10\}|S) = \frac{3^{10}}{4^{10}}$.

(C) Pour un candidat dont on ne sait pas s'il est sérieux ou non, la probabilité d'avoir 10 sur 10 est $P(N=10) = \frac{3^{10}+2^{10}}{2\times 4^{10}}$.

(D) Sachant qu'un candidat a eu 10 sur 10, la probabilité qu'il soit sérieux est $P_{\{N=10\}}(S) = P(S|\{N=10\}) = \frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}$.

(E) La probabilité qu'un élève obtienne la note 10 est $\left(\frac{3}{4}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$.

A Formules à retenir

1. A et B sont deux evènements indépendants, alors $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.
2. La probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $P_B(A)$ ou $P(A|B)$; elle vérifie $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

B Quelques lois classiques

1. La *loi uniforme* sur un ensemble Ω de cardinal n est définie par
$$P(x) = \frac{1}{n}$$
pour tout $x \in \Omega$. Exemple : le lancer d'un dé à n faces.
2. On se donne $p \in [0,1]$. La *loi de Bernoulli* de paramètre p est la loi sur $\Omega = \{0,1\}$ définie par
$$P(1) = p \quad \text{et} \quad P(0) = 1-p.$$
Exemple : pour $p = \frac{b}{\ell}$, le tirage d'une boule dans un ensemble de b boules blanches et $\ell - b$ boules noires.
3. On se donne $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in [0,1]$. La *loi binomiale* est la loi sur $\Omega = \{0,\dots,n\}$ définie par
$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
Exemple : pour $p = \frac{b}{\ell}$, le résultat de la somme de n tirages avec remise d'une boule dans un ensemble de b boules blanches et $\ell - b$ boules noires.