Modélisation et mathématiques – Sujets

*Voici les sujets de mathématiques pour le S4'. Pour le cours de la semaine prochaine, mettez-vous par groupes de 2 ou 3 et choisissez quelques sujets. Envoyez-moi ensuite par mail (*pierre-antoine.guiheneuf@math.u-psud.fr*) les noms des personnes dans le groupe ainsi que les quelques sujets que vous avez choisi, par ordre de préférence. Les premiers à répondre seront bien entendu les premiers servis...*

1 Sujet – Équation de la Chaleur

L'équation de la chaleur est une EDP qui modélise le phénomène de conduction de la chaleur dans un milieu ; autrement dit qui modélise l'évolution au cours du temps de la température dans un milieu lorsqu'il n'y a aucun déplacement de matière au niveau macroscopique, par exemple lorsque le milieu est un solide (par oppposition au phénomène de convection où le transfert thermique se fait par déplacement de matière, comme c'est le cas par exemple lorsqu'on fait chauffer de l'eau dans une casserole). C'est lorsqu'il a voulu étudier cette équation de la chaleur que J. Fourier a développé sa théorie du développement en série de Fourier. Cette équation se présente comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \Delta T(x,t),$$

où x et t sont respectivement les variables d'espace et de temps, T est la température et Δ l'opérateur Laplacien qui, en dimension 3 et en coordonnées cartésiennes, vérifie $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Le but du projet sera de résoudre cette équation numériquement pour quelques exemples simples, notamment en dimension 1 où on essaiera de modéliser l'évolution de la température du sol terrestre au cours d'une année.

2 Sujet – Équation des ondes

L'équation des ondes est une EDP qui permet de modéliser des phénomènes physiques tels que la vibration d'une corde, la propagation du son dans un milieu homogène ou celle de la lumière dans le vide (onde électromagnétique). Cette équation s'énonce :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t) = \Delta U(x,t),$$

où x et t sont respectivement les variables d'espace et de temps, U la quantité étudiée (par exemple le déplacement de la corde, la pression ou le champ électrique) et Δ l'opérateur laplacien.

Le but de ce projet sera de résoudre cette équation numériquement pour des exemples simples tels que la dimension 1 (cas de la corde vibrante). On pourra ensuite étudier certaines solutions appelées ondes progressives et ondes stationnaires, ou bien s'intéresser au développement en séries de Fourier des solutions géénrales de l'équation.

3 Sujet – Modèle de Lotka-Volterra

Le système de Lotka-Volterra continu est le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}, \tag{E}$$

avec des conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $y(0) = y_0 > 0$. Ce modèle est censé représenter l'évolution de deux populations, l'une de proies (par exemple des souris, dont la population est notée x) et l'une de prédateurs (par exemple des chats, dont la population est notée y). L'idée de la modélisation du système proie-prédateur est de dire que la population de proies se reproduit à une vitesse a en l'abscence de prédateurs (quand le chat n'est pas là, les souris dansent), et se fait manger à une vitesse proportionnelle au nombre de prédateurs, à savoir by ; de même la population de prédateurs meurt à une vitesse c en l'absence de proies (les chats n'ont plus rien à manger) et se reproduit d'autant plus qu'il y a de proies (à la vitesse dx).

Le but de ce projet est d'étudier les solutions du modèle de Lotka-Volterra. Après avoir simulé numériquement les évolutions des populations x et y, on pourra soit s'intéresser aux démonstrations rigoureuses des phénomènes observés numériquement, soit étudier des modèles d'évolution des populations proches qui pourraient prendre en compte certains phénomènes négligés dans la modélisation de Lotka-Volterra.

4 Sujet – Processus de Galton-Watson

Le processus de Galton-Watson est un modèle probabiliste visant à modéliser l'évolution du nombre de porteurs d'un nom de famille au cours du temps. Le modèle est construit comme suit (on ne considère que la descendance mâle) : on part d'un individu initial, et on se donne une suite de nombres positifs $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} = 1$. Le nombre p_i représente la probabilité qu'un individu ait i enfants. À la seconde génération, on aura donc i individus avec une probabilité p_i. Chacun de ces i individus donnera lui-même naissance à un nombre d'individus donné par la distribution de probabilité (p_i). Le but est de savoir si oui ou non il va exister une génération à laquelle il n'y aura plus d'individu (c'est-à-dire que la génération précédente n'aura donné naissance à aucun enfant) ; si tel est le cas on dira que le nom s'éteint : la lignée de l'individu initial s'arrête à un moment et son nom de famille n'est plus transmis.

Le but ici sera de simuler des processus de Galton-Watson pour différentes distributions de probabilité (p_i) et d'en déduire empiriquement un lien entre celles-ci et la probabilité d'extinction du nom.

5 Sujet – Compression JPEG

Une image numérique est constituée de pixels, et chacun de ces pixels possède une couleur appartenant à une palette finie de couleurs. Lorsque le nombre de pixels et de couleurs de l'image deviennent grands, la taille des données relatives à une image devient importante ; il se pose alors le problème du stockage de ces données. Une des solutions pour résoudre ce problème est de compresser ces données. Le JPEG est l'un des modes de compression des images les plus utilisés, en particulier sur internet, où la compression permet un affichage plus rapide. Ce format a néanmoins le désavantage d'engendrer des pertes de qualité de l'image (compression avec pertes ou *lossy*, c'est pourquoi il arrive que les images issues d'internet soient de très mauvaise qualité).

Le but de ce projet est de bien comprendre les étapes de la compression JPEG et de coder un algorithme permettant de compresser une image selon le principe du JPEG.

6 Sujet – Codes de Huffman et Lempel-Ziv

Les codes de Huffman et de Lempel-Ziv visent, comme le code JPEG, à compresser des données numériques. Ils ont l'avantage de fonctionner pour n'importe quelle donnée initiale et permettent une compression sans pertes ou *lossless*, néanmoins ils ne sont pas aussi performants (en termes de compression) que les codes avec pertes. Ils interviennent néamoins dans beaucoup d'algorithmes plus élaborés de compression tels que le JPEG pour Huffman ou la compression zip pour le Lempel-Ziv.

Le but de ce projet est de coder des algorithmes permettant de compresser des données à l'aide des méthodes de Huffman et Lempel-Ziv. On pourra par la suite essayer de comprendre en quel sens ces algorithmes sont optimaux.

7 Sujet – Marches aléatoires

Une marche aléatoire peut être vue comme un déplacement aléatoire sur un espace discret. L'exemple le plus simple de marche aléatoire est la marche aléatoire isotrope sur $\mathbf{Z}$: on considère une particule située en 0 à l'instant initial. À tout instant t, la particule se déplace d'un pas vers la gauche avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et d'un pas vers la droite avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Le but de l'étude de la marche aléatoire est de s'intéresser à des trajectoires typiques de la particule et de regarder le comportement asymptotique de telles trajectoires : la particule revient-elle en 0 et si oui, à quels moments ? quel est l'ordre de grandeur typique de l'abscisse de la particule au temps t ?

Le but ici sera de simuler une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$ et d'observer son comportement. On pourra ensuite s'intéresser au cas des marches aléatoires en dimensions plus grandes, et répondre à des questions du type : un homme ivre reviendra-t-il chez lui au bout d'un moment ? Et que dire d'un pigeon ivre ?

8 Sujet – Codes correcteurs d'erreurs

Un code correcteur d'erreurs est un moyen de codage permettant une ou plusieurs erreurs lors de la transmission de l'information. Par exemple, le code phonétique international (Alpha, Bravo, Charlie, Delta...) permet de sécuriser les communications dans l'aviation : lorsqu'un mot est épelé, chacune de ses lettres est remplacée par le mot correspondant, afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté entre les sons semblables (comme « m » et « n ») s'il y a des parasites lors de la transmission. Il existe beaucoup de codes correcteurs différents, permettant entre autres de vérifier les numéros INSEE (les deux derniers chiffres sont une clé de contrôle), de transmettre des données par des voies de communication bruitées (fibre optique, téléphones mobiles, communication avec les sondes spatiales), de pouvoir lire un CD légèrement rayé etc.

Le but de ce projet est de mettre en place et de tester un ou plusieurs algorithmes permettant de coder des messages dans lesquels il sera possible de détecter, voire mieux de corriger, une ou plusieurs erreurs .

9 Sujet – Méthode de Newton

La méthode de Newton est un algorithme visant à obtenir les valeurs approchées des zéros d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$). Elle est largement utilisée grâce à sa simplicité et de sa rapidité de convergence (le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération de l'algorithme). Elle permet, outre le calcul de zéros de fonctions, de calculer des points d'intersection de courbes (par exemple, de trouver des points fixes de f, c'est-à-dire des solutions de l'équation $f(x) = x$), de trouver les extremums d'une fonction, de calculer des racines n-ièmes, des logarithmes, de factoriser des polynômes etc. C'est d'ailleurs de l'impossibilité avérée de la factorisation exacte des polynômes de degré plus grand que 5 que cette méthode est née.

Le but ici sera de coder un algorithme de Newton. On pourra par la suite étudier le cas de la dimension 2, ou le cas plus spécifique des polynômes.