Modélisation et mathématiques – Sujets

*Voici les sujets de mathématiques pour le S4'. Pour le cours de jeudi, mettez-vous par groupes de 2 et choisissez quelques sujets. Envoyez-moi ensuite par mail (*pierre-antoine.guiheneuf@math.u-psud.fr*) les noms des personnes dans le groupe ainsi que les quelques sujets que vous avez choisi, par ordre de préférence. Les premiers à répondre seront bien entendu les premiers servis...*

1 Sujet – Équation de la chaleur

L'équation de la chaleur est une EDP qui modélise le phénomène de conduction de la chaleur dans un milieu ; autrement dit qui modélise l'évolution au cours du temps de la température dans un milieu lorsqu'il n'y a aucun déplacement de matière au niveau macroscopique, par exemple lorsque le milieu est un solide (par opposition au phénomène de convection où le transfert thermique se fait par déplacement de matière, comme c'est le cas par exemple lorsqu'on fait chauffer de l'eau dans une casserole). C'est lorsqu'il a voulu étudier cette équation de la chaleur que J. Fourier a développé sa théorie du développement en série de Fourier. Cette équation se présente comme suit :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \Delta T(x,t),$$

où x et t sont respectivement les variables d'espace et de temps, T est la température et Δ l'opérateur Laplacien qui, en dimension 3 et en coordonnées cartésiennes, vérifie $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Le but du projet sera de résoudre cette équation numériquement pour quelques exemples simples, notamment en dimension 1 où on essaiera de modéliser l'évolution de la température du sol terrestre au cours d'une année et tentera de répondre à la question : en Sibérie, jusqu'où creuser pour tomber sur de la terre non gelée ?

2 Sujet – Processus de Galton-Watson

Le processus de Galton-Watson est un modèle probabiliste visant à modéliser l'évolution du nombre de porteurs d'un nom de famille au cours du temps. Le modèle est construit comme suit (on ne considère que la descendance mâle) : on part d'un individu initial, et on se donne une suite de nombres positifs $(p_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Le nombre p_i représente la probabilité qu'un individu ait i enfants. À la seconde génération, on aura donc i individus avec une probabilité p_i. Chacun de ces i individus donnera lui-même naissance à un nombre d'individus donné par la distribution de probabilité

(p_i). Le but est de savoir si oui ou non il va exister une génération à laquelle il n'y aura plus d'individu (c'est-à-dire que la génération précédente n'aura donné naissance à aucun enfant) ; si tel est le cas on dira que le nom s'éteint : la lignée de l'individu initial s'arrête à un moment et son nom de famille n'est plus transmis.

Le but ici sera de simuler des processus de Galton-Watson pour différentes distributions de probabilité (p_i) et d'en déduire empiriquement un lien entre celles-ci et la probabilité d'extinction du nom.

3 Sujet – Compression JPEG

Une image numérique est constituée de pixels, et chacun de ces pixels possède une couleur appartenant à une palette finie de couleurs. Lorsque le nombre de pixels et de couleurs de l'image deviennent grands, la taille des données relatives à une image devient importante ; il se pose alors le problème du stockage de ces données. Une des solutions pour résoudre ce problème est de compresser ces données. Le JPEG est l'un des modes de compression des images les plus utilisés, en particulier sur internet, où la compression permet un affichage plus rapide. Ce format a néanmoins le désavantage d'engendrer des pertes de qualité de l'image (compression avec pertes ou *lossy*, c'est pourquoi il arrive que les images issues d'internet soient de très mauvaise qualité).

Le but de ce projet est de bien comprendre les étapes de la compression JPEG et de coder un algorithme permettant de compresser une image selon le principe du JPEG.

4 Sujet – Marches aléatoires

Une marche aléatoire peut être vue comme un déplacement aléatoire sur un espace discret. L'exemple le plus simple de marche aléatoire est la marche aléatoire isotrope sur $\mathbf{Z}$: on considère une particule située en 0 à l'instant initial. À tout instant t, la particule se déplace d'un pas vers la gauche avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et d'un pas vers la droite avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Le but de l'étude de la marche aléatoire est de s'intéresser à des trajectoires typiques de la particule et de regarder le comportement asymptotique de telles trajectoires : la particule revient-elle en 0 et si oui, à quels moments ? quel est l'ordre de grandeur typique de l'abscisse de la particule au temps t ?

Le but ici sera de simuler une marche aléatoire sur $\mathbf{Z}$ et d'observer son comportement. On pourra ensuite s'intéresser au cas des marches aléatoires en dimensions plus grandes, et répondre à des questions du type : un homme ivre reviendra-t-il chez lui au bout d'un moment ? Et que dire d'un pigeon ivre ?

5 Sujet – Méthode de Newton

La méthode de Newton est un algorithme visant à obtenir les valeurs approchées des zéros d'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (c'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$). Elle est largement utilisée grâce à sa simplicité et de sa rapidité de convergence (le nombre de chiffres significatifs double à chaque itération de l'algorithme). Elle permet, outre le calcul de zéros de fonctions, de calculer des points d'intersection de courbes (par exemple, de trouver des points fixes de f, c'est-à-dire des solutions de l'équation $f(x) = x$), de trouver les extremums d'une fonction, de calculer des racines n-ièmes, des logarithmes, de factoriser des polynômes etc. C'est d'ailleurs de l'impossibilité avérée de la factorisation exacte des polynômes de degré plus grand que 5 que cette méthode est née.

Le but ici sera de coder un algorithme de Newton. On pourra par la suite étudier le cas plus spécifique des polynômes pour résoudre des équations polynomiales comme $X^5 - 3X - 1 = 0$ (équation non résoluble par radicaux d'après la théorie de Galois).

6 Sujet – Problème des trois corps

Depuis Newton (fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle) et sa loi de la gravitation universelle, ainsi que ses lois de la dynamique, on connaît parfaitement le comportement de deux corps célestes en attraction mutuelle : on démontre que si on prend comme base du repère le centre de gravité des deux corps, alors soit ces deux corps vont vers l'infini, soit leurs deux trajectoires décrivent chacune une ellipse. Jusqu'à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, on a en vain cherché une formule pour les trajectoires de trois corps en attraction mutuelle. C'est Poincaré qui le premier démontra des résultats qualitatifs sur ce problème des trois corps : celui-ci est chaotique, dans le sens qu'une infime perturbation des conditions initiales de ce système pourra engendrer d'énormes différences de comportement dans un avenir plus ou moins proche.

Le but de ce sujet sera de modéliser numériquement ce problème des trois corps et d'observer les différents comportements de ce système selon les conditions initiales et les masses des trois objets. On pourra par le suite éventuellement s'attaquer à la simulation du problème à N corps, ou bien de tenter de répondre à la question : la Terre va-t-elle être expulsée du système solaire dans les 10 prochaines années ?

7 Sujet – Un modèle de propagation des épidémies

Un modèle SIR (Sain-Infecté-Résistant) vise à représenter l'évolution d'une maladie contagieuse au cours du temps. La question est notamment de savoir si une épidémie aura lieu ou pas. Un des modèles les plus simples est constitué du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t) + \gamma R(t), \\ R'(t) = \nu I(t) - \gamma R(t), \\ I'(t) = -\nu I(t) + \beta I(t)S(t), \end{cases}$$

avec les conditions initiales $S(0) = S_0$, $R(0) = R_0$ et $I(0) = I_0$.

Le but de ce projet est de comprendre ces équations et leur rapport avec la propagation d'une maladie, et d'effectuer des simulations numériques pour différents paramètres β, ν et γ afin de tester pour lesquels il y a épidémie ou non.

8 Sujet – Table de billard, jeu de miroirs et modèle de gaz

Issus de problèmes concernant la dynamique des gaz, les billards mathématiques sont depuis des décennies un sujet de recherche très active. Ce sont des objets très simples à comprendre : on considère une boule de billard que l'on place sur une table dont le bord a une forme déterminée. On fait plusieurs approximations : la boule est ponctuelle (elle a un rayon nul), il n'y a aucun frottement et les rebonds sur les bords de la table sont élastiques (la vitesse après le rebond est la même que celle avant) et suivent le loi de la réflexion de Descartes. Sous ces conditions, la boule continue sa trajectoire indéfiniment, la question est de savoir quelles propriétés aura sa trajectoire, en fonction de comment on l'a lancée au départ mais aussi en fonction de la forme de la table [1].

Le but est ici de traiter ce problème du point de vue numérique : pour différentes formes de tables (triangulaires, rectangulaires, pentagonales, circulaires, elliptiques, voire plus compliquées !) on essaiera de détecter sur les simulations le comportement global des trajectoires des boules sur la table.

9 Sujet – Le pendule double

Contrairement au pendule simple qui a un comportement très régulier — il est périodique, on possède même une formule exacte pour sa période — le pendule double a un comportement chaotique. Celui-ci est constitué d'une tige (de masse négligeable) dont une extrémité est fixée sur un pivot et une autre comporte une masse, ainsi qu'un deuxième pivot auquel est attachée une autre tige (de masse elle aussi négligeable) au bout de laquelle il y a une autre masse.

Le but de ce projet est de simuler le comportement d'un pendule double. On pourra s'intéresser à la sensibilité aux conditions initiales du système, en particulier au premier temps auquel la seconde tige effectue un tour complet. Si le temps le permet on pourra étudier le régime forcé et observer si oui ou non il y a des fréquences propres au système.

10 Sujet – Le dilemme du prisonnier

Alice et Bob viennent de se faire attraper par leur prof de maths : l'un ou l'une a recopié mot pour mot son DS sur l'autre. Le prof leur propose de jouer au jeu suivant :

- S'ils se balancent mutuellement. Ils se retrouvent tous les deux avec un 2.
- Si l'un d'eux balance l'autre et l'autre se tait, le premier récupère un 15 (la note du DS corrigé) et le second 0.
- Si aucun des deux ne parle, ils auront tous les deux 10.

Alice, machiavélique, fait le raisonnement suivant : si Bob se tait, il vaut mieux que je le balance, j'aurai un 15 plutôt qu'un 10 ; s'il parle il vaut mieux que je le balance aussi, j'aurai un 2 plutôt qu'un 0. Bob, tout aussi machiavélique, fait le même raisonnement. Ils se balancent tous les deux et se prennent 2 à leur DS. On remarquera qu'ils ont opté pour la solution où la somme de leurs notes est la plus faible.

Ce paradoxe est appelé *dilemme du prisonnier*. Il est utilisé en économie ou en sociologie pour expliquer pourquoi des groupes de personnes optent parfois pour des solutions qui sont loin de maximiser le "gain total". Une généralisation classique de ce jeu est le "dilemme du prisonnier répété" : deux personnes jouent plusieurs fois de suite au dilemme du prisonnier et tentent de maximiser leur gain propre sur la somme des parties, chaque joueur jouant en fonction des parties précédentes. Le but est de trouver des stratégies (éventuellement probabilistes) qui donnent de bons résultats.

Le but de ce projet sera de construire un programme qui "joue" au dilemme du prisonnier répété, de concevoir des stratégies et de les comparer entre elles.

1. Il revient au même d'étudier le trajet d'un rayon lumineux dans un domaine dont le bord est constitué de miroirs parfaits et a la même forme que le bord de la table.