Preuve élémentaire de l'existence de la réduite de Jordan

Théorème 1 (Jordan). *Soient $\mathbf{K}$ un corps, E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal π_u est scindé sur $\mathbf{K}$. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est sous une forme appelée* réduite de Jordan*, c'est-à-dire diagonale par blocs*

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{\lambda_1,\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{\lambda_s,\alpha_s}} \end{pmatrix},$$

où les $J_{\lambda,\alpha}$ sont des blocs de Jordan *:*

$$J_{\lambda,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & (0) & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

On a de plus unicité de la réduite de Jordan de l'endomorphisme u, à permutation des blocs de Jordan près.

1 Preuve dans le cas nilpotent

Soit u un endomorphisme de E, nilpotent d'indice de nilpotence r. On commence par considérer le drapeau associé naturellement à u en posant $F_i = \ker u^i$ pour tout i allant de 0 à r. Alors pour tout i entre 0 et $r-1$, $u(F_{i+1})$ est inclus dans F_i. À ce stade, la matrice de l'endomorphisme u dans une base adaptée à ce drapeau est triangulaire supérieure stricte. Il s'agit maintenant d'améliorer la décomposition de l'espace selon les F_i pour pouvoir améliorer la forme de la matrice obtenue.

En pratique, on montre qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \dots, G_r$ de E tels que :

(i) pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, G_i est un supplémentaire de F_{i-1} dans F_i, autrement dit $F_i = F_{i-1} \oplus G_i$,

(ii) pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, l'endomorphisme u applique injectivement G_i dans G_{i-1}.

Lorsque l'on aura construit ces sous-espaces, l'espace E se décomposera suivant la somme directe

$$E = G_1 \overset{\overset{u}{\curvearrowleft}}{\oplus} G_2 \overset{\overset{u}{\curvearrowleft}}{\oplus} \cdots \overset{\overset{u}{\curvearrowleft}}{\oplus} G_{r-1} \overset{\overset{u}{\curvearrowleft}}{\oplus} G_r. \tag{1}$$

La construction des ensembles G_i se fait par récurrence descendante sur l'entier $i \in [\![1, r]\!]$.

Pour $i = r$, il suffit de prendre pour G_r un supplémentaire de F_{r-1} dans F_r.

Supposons maintenant que l'on ait construit des sous-espaces $G_r, \dots, G_{i+1}$ vérifiant les propriétés (i) et (ii). En particulier on a $F_{i+1} = F_i \oplus G_{i+1}$. Montrons que u applique injectivement G_{i+1} dans un sous-espace dont l'intersection avec F_{i-1} est triviale.

- $\ker u \cap G_{i+1} = F_1 \cap G_{i+1} \subset F_i \cap G_{i+1} = \{0\}$. Par consééquent $u_{|G_{i+1}}$ est injectif.
- Soit $x \in u(G_{i+1}) \cap F_{i-1}$. Alors on peut écrire $x = u(y)$, avec $y \in G_{i+1}$, et on a $0 = u^{i-1}(x) = u^i(y)$. On en déduit que $y \in G_{i+1} \cap F_i$, intersection qui est triviale par hypothèse de récurrence. Ainsi $y = 0$, donc $x = 0$; on a montré que $u(G_{i+1}) \cap F_{i-1} = \{0\}$.

Cela nous autorise à prendre G_i un supplémentaire de F_{i-1} dans F_i contenant $u(G_{i+1})$; ce sous-espace de E vérifie bien les hypothèses (i) et (ii) et donc la propriété est démontrée au rang i.

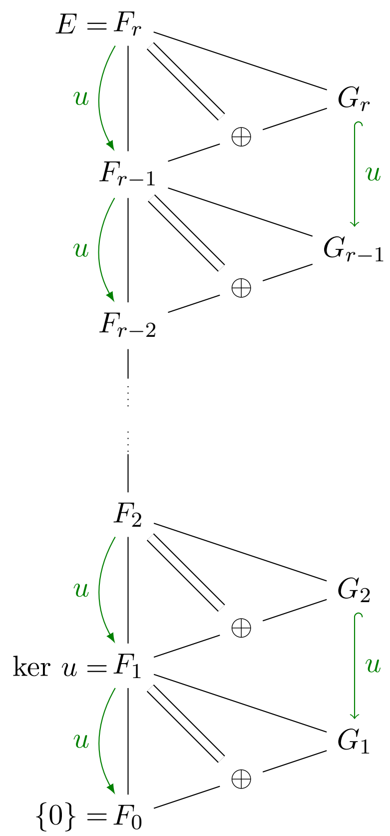

Figure 1 – Construction des ensembles G_i.

On vient d'obtenir la décomposition de E selon la somme directe (1). Il suffit désormais de définir convenablement une base adaptée à cette décomposition. On commence par prendre une base $e_{r,1}, \dots, e_{r,s_r}$ de G_r. Puisque u applique injectivement G_r dans G_{r-1}, la famille $u(e_{r,1}), \dots, u(e_{r,s_r})$ est libre dans G_{r-1} ; on peut donc la compléter avec des vecteurs $e_{r-1,1}, \dots, e_{r-1,s_{r-1}}$ pour former une base de G_{r-1}. Ainsi de suite, on trouve une base de tout sous-espace G_i en complétant l'image d'une base de G_{i-1} par u ; cela donne le tableau suivant, où chaque ligne constitue une base de G_i :

G_r	$e_{r,1}$	$\cdots$	e_{r,s_r}						
G_{r-1}	$u(e_{r,1})$	$\cdots$	$u(e_{r,s_r})$	$e_{r-1,1}$	$\cdots$	$e_{r-1,s_{r-1}}$			
G_{r-2}	$u^2(e_{r,1})$	$\cdots$	$u^2(e_{r,s_r})$	$u(e_{r-1,1})$	$\cdots$	$u(e_{r-1,s_{r-1}})$	$e_{r-2,1}$	$\cdots$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
G_1	$u^{r-1}(e_{r,1})$	$\cdots$	$u^{r-1}(e_{r,s_r})$	$u^{r-2}(e_{r-1,1})$	$\cdots$	$u^{r-2}(e_{r-1,s_{r-1}})$	$u^{r-3}(e_{r-2,1})$	$\cdots$	e_{1,s_1}

Et dans la base de l'espace E obtenue par concaténation des bases des sous-espaces (supplémentaires !) G_i que l'on vient de définir, la matrice de u est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_{0,\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{J_{0,\alpha_s}} \end{pmatrix},$$

En ce qui concerne l'unicité, on suppose, quitte à permuter les blocs de Jordan [1], que l'on a $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_s$. On remarque alors que si on pose, pour tout entier i,

$$\widetilde{\alpha}_i = \mathrm{Card}\{j \in [\![1, s]\!] \mid \alpha_j \leq i\},$$

alors $\dim \ker u^i = \widetilde{\alpha}_i$. Or l'application qui à une suite finie décroissante d'entiers $(\alpha_j)_j$ associe la suite finie croissante d'entiers $(\widetilde{\alpha}_i)_i$ est bijective [2], en particulier la suite $(\widetilde{\alpha}_i)_i$ détermine uniquement la suite $(\alpha_j)_j$, de plus la suite $(\widetilde{\alpha}_i)_i$ est elle même entièrement déterminée par l'endomorphisme u, à l'aide des dimensions des noyaux itérés, par conséquent la suite $(\alpha_j)_j$ est unique pour l'endomorphisme u.

2 Preuve dans le cas général

Dans le cas général, on décompose l'espace E suivant les sous-espaces caractéristiques associés à l'endomorphisme u : si le polynôme minimal de u se décompose en facteurs premiers

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i},$$

alors par le lemme des noyaux, l'espace E se décompose lui-même selon la somme directe

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{\alpha_i},$$

appelée décomposition en *sous-espaces caractéristiques*. Pour tout entier i entre 1 et m, l'endomorphisme $u - \lambda_i \,\mathrm{Id}$ stabilise le sous-espace caractéristique $\ker(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{\alpha_i}$ et sa restriction à ce sous-espace est nilpotente. Par ce qu'on a vu précédemment, il existe une base de ce sous-espace dans laquelle la matrice de $u - \lambda_i \,\mathrm{Id}$ est sous une forme réduite de Jordan, avec des zéros sur la diagonale ; par conséquent dans

1. En conjuguant par une matrice de permutation !
2. Encore un coup des tableaux d'Young !

cette même base la matrice de u est sous une forme réduite de Jordan, avec des λ_i sur la diagonale. La base de E obtenue en concaténant les bases des sous-espaces caractéristiques (qui sont, rappelons-le, supplémentaires) fournit alors une base de réduction globale, dans laquelle la matrice de l'endomorphisme u est sous une forme réduite de Jordan.

En ce qui concerne l'unicité, il suffit, comme pour l'existence, de se ramener au cas nilpotent : en se restreignant au sous-espace carctéristique $\ker(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{\alpha_i}$ associé à la valeur propre α_i, on remarque que la réduite de Jordan est déterminée de manière unique à l'aide des entiers

$$\dim\big(\ker(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})^j\big),$$

pour λ_i parcourant l'ensemble des valeurs propres de u et j parcourant l'ensemble des entiers inférieurs à α_i. Or ces entiers sont constants sur toute classe de conjugaison (ou de similitude) de $M_n(\mathbf{K})$, d'où l'unicité de la réduite de Jordan.

Références

[1] V. Beck, J. Malick, G. Peyré. *Objectif Agrégation*, 2$^{\text{ème}}$ édition, H&K, 342 pages, 2005.

[2] X. Gourdon. *Algèbre*, 2$^{\text{ème}}$ édition, Les maths en tête, 304 pages, 2009.

[3] I. Kortchemski. *Réduction de Jordan et les tableaux de Young*, notes prises lors d'un exposé de R. Mneimné, 2006. http ://www.eleves.ens.fr/home/kortchem/travaux/jordan_young.pdf