# TD 4 – Compacité

## 1 Quelques exercices clasiques

**Exercice 1**
Soit $(X, d)$ un espace métrique. Montrer que tout sous-ensemble fini de $X$ est compact.

**Exercice 2**
Montrer que tout sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.

**Exercice 3**
Soient $K$ et $L$ deux parties compactes d'un espace métrique $X$. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

**Exercice 4**
Soient $(X_1, d_1)$ et $(X_2, d_2)$ deux espaces métriques compacts. Montrer que l'espace $X_1 \times X_2$, muni de la métrique $\delta$ définie par

$$\delta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big)$$

pour tous $x_1, y_1 \in X_1$ et $x_2, y_2 \in X_2$, est compact,

1. pour la définition séquentielle de la compacité ;
2. pour la définition topologique de la compacité.

**Exercice 5**
Soit $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$, qu'on identifie à $\mathbf{R}^{n^2}$. Montrer que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A^t A = I\}$ est compact. *Indication : on pourra montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$.*

**Exercice 6**
On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ des fonctions continues qu'on munit de la métrique :

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

On veut montrer que la boule unité fermée *n'est pas compacte* (on rappelle que la boule unité fermée est l'ensemble $B = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) \mid d_\infty(f, 0) \leq 1\}$, où 0 désigne la fonction constante égale à 0).

Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Expliquer, par un dessin, l'allure des fonctions appartenant à $B$.
2. Dessiner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une fonction $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ et qui prend la valeur 1 au milieu de l'intervalle.

3. Pour tous $n, m$ entiers, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$ ?
4. Conclure.

**Exercice 7**
Soit $X$ un espace métrique et $A$ un sous-espace compact non vide de $X$. Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable dense dans $A$. *Indication : pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$ on pourra considérer un recouvrement par des boules de rayon $\frac{1}{n}$.*

**Exercice 8** (rappel ?)
Soit $(E, d)$ un espace métrique compact et soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $E$ admettant une unique valeur d'adhérence. Montrer que $(x_n)$ est convergente.

**Exercice 9**
Si $(X, d)$ est un espace métrique non-vide compact. On note $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y) \in [0, +\infty]$.

1. Montrer que $\operatorname{diam}(X)$ est fini et qu'il existe $x, y \in X$ tels que $\operatorname{diam}(X) = d(x, y)$.
2. Montrer que, si $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de $X$, alors $F := \bigcap_n F_n$ est un compact non-vide de $X$ et $\operatorname{diam}(F) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(F_n)$.
3. Si on ne suppose plus $(X, d)$ compact, $\bigcap_n F_n$ est-il nécessairement non-vide ?

**Exercice 10**
En utilisant le fait que toute fonction numérique (i.e. à valeurs réelles) continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, montrer le théorème de Heine : toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. *Indication : pour $\varepsilon > 0$ on pourra considérer l'ensemble $E = \{(x, x') \in X \times X : d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon\}$.*

## 2 Exercices supplémentaires

**Exercice 11**
Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente, de limite notée $x$, d'un espace métrique $X$. Montrer que $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une partie compacte de $X$.

**Exercice 12**
Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbf{R}^n$. On note : $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si $A$ est ouverte alors $A + B$ est ouverte.
2. Montrer que si $A$ et $B$ sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
3. Montrer que si $A$ est compacte et $B$ est fermée, alors $A + B$ est fermée. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement compact ?
4. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement fermé si $A$ et $B$ sont seulement supposés fermés ?

**Exercice 13**
Soit $(X, d)$ un espace métrique tel que pour tout $x \in X$ et tout $r \geq 0$, la boule fermée $B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ est compacte.

1. Montrer que $X$ est complet.
2. Montrer que les parties compactes de $X$ sont les sous-ensembles fermés bornés.

**Exercice 14**
Montrer que la distance entre deux compacts est atteinte, c'est-à-dire : si $K$ et $K'$ sont deux compacts d'un espace métrique, il existe $(x,x') \in K \times K'$ vérifiant $d(x,x') = d(K,K') := \inf_{(x,x')\in K\times K'} d(x,x')$.

**Exercice 15**
Dans un espace métrique $(X,d)$, on considère un fermé non-vide $F$ et un compact non vide $K$ tels que $K \cap F = \emptyset$.

1. Montrer que $d(K,F) := \inf_{x\in K, y\in F} d(x,y)$ est strictement positif. Ce résultat est-il vrai si $K$ est seulement supposé fermé ?
2. Pour $\varepsilon > 0$ on note $K_\varepsilon := \{x \in X, \quad d(x,K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert $\Omega$ de $X$ tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $K_\varepsilon$ est un ouvert de $X$ et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

**Exercice 16**
On note $E$ l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$.

1. Soit $F$ un fermé non borné de $E$ et $f : F \to \mathbf{R}$ une application continue telle que :
$$\lim_{x\in F, \|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Montrer qu'il existe $x$ dans $F$ vérifiant $f(x) = \inf_{y\in F} f(y)$.
2. En déduire une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss : montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbf{C}$. *Indication : Si* $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbf{C}} |P(z)| > 0$, *construire un nombre complexe* $z \in \mathbf{C}$ *(proche de* $z_0$*) tel que* $|P(z)| < |P(z_0)|$.
3. Montrer que si $ABC$ est un triangle du plan, alors il existe un point $M$ du plan minimisant la somme des distances (euclidiennes) à $A$, $B$ et $C$.

**Exercice 17**

1. Soient $(X,d)$ et $(Y,\delta)$ deux espaces métriques avec $(X,d)$ compact. Soit $f : X \to Y$ bijective et continue. Montrer que $Y$ est compact et que $f$ est un homéomorphisme.
2. Soient $\mathbf{S}^1$ le cercle unité dans le plan complexe et $f : [0,2\pi[ \to \mathbf{S}^1$ telle que $f(t) = e^{it}$. Montrer que $f$ est bijective et continue. Montrer que la réciproque n'est pas continue. Comparer avec la question précédente.

**Exercice 18** (une version compacte du théorème de Picard)
Soit $(E,d)$ un espace métrique complet non vide et $f : E \to E$ une application vérifiant :
$$\forall x,y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x),f(y)) < d(x,y)$$

1. La fonction $f$ admet-elle nécessairement un point fixe ? (Considérer $E = [1,\infty[$ et $f(x) = x + \frac{1}{x}$.)

Dans la suite on suppose de plus que $E$ est compact.

2. Montrer que $f$ admet un unique point fixe $a$. *Indication : On pourra étudier la fonction* $x \mapsto d(f(x),x)$.
3. Soit $x_0 \in E$ et soit $(x_n)$ la suite de $E$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, pour $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $(x_n)$ converge vers $a$ quand $n$ tend vers $\infty$.