TD 4 – Compacité

Exercice 4
Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques compacts. Montrer que l'espace $X_1 \times X_2$, muni de la métrique δ définie par

$$\delta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big)$$

pour tous $x_1, y_1 \in X_1$ et $x_2, y_2 \in X_2$, est compact,

1. pour la définition séquentielle de la compacité ;
2. pour la définition topologique de la compacité.

Corrigé (de la question 2). On veut montrer que l'espace $X_1 \times X_2$, muni de la distance

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\big(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\big)$$

est compact pour la définition de Borel-Lebesgue.

Soit donc $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $X_1 \times X_2$ par des ouverts. On veut en extraire un sous-recouvrement fini.

On commence par définir un recouvrement plus fin : pour tout $i \in I$ et tout $z \in O_i$, il existe deux ouverts U_i^z et V_i^z de respectivement X_1 et X_2, tels que

— $z \in U_i^z \times V_i^z$;
— $U_i^z \times V_i^z \subset O_i$.

En effet, par la définition de la distance d sur $X_1 \times X_2$, tout voisinage de x contient un ouvert de la forme $U \times V$, avec U un ouvert de X_1 et V un ouvert de X_2. Alors la famille d'ouverts $(U_i^z \times V_i^z)_{i\in I, x\in O_i}$ est un recouvrement de $X_1 \times X_2$ par des ouverts, dont chacun est inclus dans un des O_i. Par conséquent, si on arrive à en extraire un sous-recouvrement fini, alors on en déduira automatiquement un sous-recouvrement fini de la famille $(O_i)_{i\in I}$.

Soit maintenant $x \in X_1$. On voit facilement que l'ensemble $\{x\} \times X_2$ est compact (il est homéomorphe à X_2). Donc, du recouvrement de $\{x\} \times X_2$ par les ouverts $U_i^z \times V_i^z$, on peut extraire un sous-recouvrement fini $(U_x^j \times V_x^j)_{j=1}^{n_x}$ (où chacun des $U_x^j \times V_x^j$ est égal à un des $U_i^z \times V_i^z$).

On définit alors $\tilde{U}_x = \bigcap_{j=1}^{n_x} U_x^j$. En tant qu'intersection finie d'ouverts de X_1, c'est un ouvert de X_1, qui contient x. Par conséquent, la famille $(\tilde{U}_x)_{x\in X_1}$ est un recouvrement du compact X_1 par des ouverts, il en existe donc un sous recouvrement fini $(\tilde{U}_{x_k})_{k=1}^q$.

On vérifie alors que la famille finie d'ouverts

$$(U_{x_k}^j \times V_{x_k}^j)_{\substack{1\le k\le q \\ 1\le j\le n_{x_k}}}$$

recouvre bien l'ensemble $X_1 \times X_2$: si $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, alors il existe au moins un k tel que $x_1 \in \tilde{U}_{x_k}$, puis au moins un j tel que $x_2 \in V_{x_k}^j$. Par conséquent (puisque $\tilde{U}_{x_k} \subset U_{x_k}^j$), on a $(x_1, x_2) \in U_{x_k}^j \times V_{x_k}^j$. Donc la famille d'ouverts qu'on vient de définir est un recouvrement fini de $X_1 \times X_2$ par des ouverts, si bien que le recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ possède un sous-recouvrement fini.

Exercice 12

Soient A et B deux parties de $\mathbf{R}^n$. On note : $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.a famille

1. Montrer que si A est ouverte alors $A + B$ est ouverte.
2. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
3. Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors $A + B$ est fermée. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement compact ?
4. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement fermé si A et B sont seulement supposés fermés ?

Corrigé

1. Écrivons :
$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$$
Les ensembles de la forme $A + b$ sont des translatés d'ouverts de $\mathbf{R}^n$, donc des ouverts ; comme on en prend l'union, $A + B$ est ouvert.
2. C'est une autre technique. Considérons $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ qui à (x, y) associe $x + y$. Cette fonction est clairement continue. Par construction, $A + B = f(A \times B)$, image continue du compact $A \times B$, est donc compact.
3. Ça se complique un peu. Proposons une preuve séquentielle. Soit $(c_n) \in (A+B)^{\mathbf{N}}$ une suite de $A+B$. Supposons que (c_n) converge dans $\mathbf{R}^n$ vers un point x et montrons que $x \in A+B$. Écrivons $c_n = a_n + b_n$ avec des notations évidentes. Comme A est compact, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\alpha \in A$. Alors $b_{\varphi(n)} = c_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$ tend vers $x - \alpha$. Comme B est fermé, $\beta = x - \alpha \in B$. En conclusion, $x = \alpha + \beta \in A + B$, et donc $A + B$ est fermé.

   En revanche $A + B$ n'est pas forcément compact : prendre $B = \mathbf{R}^n$ pour s'en convaincre !
4. L'argument précédent semble en fait incontournable. Et de fait, si A et B sont seulement fermés, alors $A + B$ ne l'est pas forcément. Prenons $A = \mathbf{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, e^x) : x \in \mathbf{R}\}$. Il est clair que ce sont des fermés. Pourtant $A+B = \{a+b : (a, b) \in A \times B\} = \{(x+a, e^x) : (a, x) \in \mathbf{R}^2\} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{>0}$ qui n'est pas fermé.

Exercice 13

Soit (X, d) un espace métrique tel que pour tout $x \in X$ et tout $r \geq 0$, la boule fermée $B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ est compacte.

1. Montrer que X est complet.
2. Montrer que les parties compactes de X sont les sous-ensembles fermés bornés.

Corrigé

1. Rappelons que toute suite de Cauchy est bornée, et que toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. Montrons que X est complet. Soit $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy. Nous savons que (x_n) est bornée ; il existe donc une boule fermée $B_f(x, r)$ la contenant. Par hypothèse cette boule est compacte. Donc (x_n) admet dans $B_f(x, r)$ une valeur d'adhérence. Il suit que (x_n) est convergente. Nous avons bien montré la complétude.
2. Dans tout espace métrique, les compacts sont fermés et bornés. Montrons la réciproque dans notre espace (X, d) : soient $Y \subseteq X$ une partie fermée et bornée. Par hypothèse, il existe une boule fermée $B_f(x, r)$ contenant Y. Or cette boule est compacte, Y est donc compact en tant que sous-ensemble fermé d'un ensemble compact.

Exercice 15
Dans un espace métrique (X, d), on considère un fermé non-vide F et un compact non vide K tels que $K \cap F = \emptyset$.

1. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y)$ est strictement positif. Ce résultat est-il vrai si K est seulement supposé fermé ?
2. Pour $\varepsilon > 0$ on note $K_\varepsilon := \{x \in X, \ \ d(x, K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert Ω de X tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est un ouvert de X et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Corrigé

1. Rappelons que la fonction $d_F : X \to \mathbf{R}$ qui à $x \in X$ associe $d(x, F)$ est continue, et ne s'annule que sur F. Notamment, sa restriction à K est une fonction continue et jamais nulle sur un compact. Elle atteint donc son infimum, qui est strictement positif. En conséquence, $d(K, F) > 0$.

   C'est faux pour deux fermés. On peut penser au graphe de l'exponentielle dans $\mathbf{R}^2$, et à l'axe horizontal. Comme la droite est asymptote à la courbe, la distance entre ces deux fermés est 0. En revanche ils sont disjoints.
2. Géométriquement, K_ε est un léger « épaississement »de K. En tout cas $K_\varepsilon = \cup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$ est une union d'ouverts, donc un ouvert. Montrons la propriété voulue.

   Posons $F = \Omega^\complement$ (qui est donc fermé). On a deux cas :
   — $F = \emptyset$ i.e. $\Omega = X$. Dans ce cas, tout $\varepsilon > 0$ convient.
   — $F \neq \emptyset$. Alors on peut appliquer le résultat de la question 1, et poser $\varepsilon = d(K, F) > 0$. On a alors $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Exercice 16
On note E l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$.

1. Soit F un fermé non borné de E et $f : F \to \mathbf{R}$ une application continue telle que :
$$\lim_{x \in F, \|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
   Montrer qu'il existe x dans F vérifiant $f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$.
2. En déduire une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauß : montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbf{C}$. *Indication : Si* $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbf{C}} |P(z)| > 0$, *construire un nombre complexe* $z \in \mathbf{C}$ *(proche de* z_0*) tel que* $|P(z)| < |P(z_0)|$.
3. Montrer que si ABC est un triangle du plan, alors il existe un point M du plan minimisant la somme des distances (euclidiennes) à A, B et C.

Corrigé

1. Soit $x_0 \in F$. Comme f tend vers $+\infty$ avec $\|x\|$, il existe A tel que $\forall x \in F, \|x\| \geq A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. On voit alors que $\inf_{y \in F} f(y) = \inf_{y \in K} f(y)$. Le problème d'optimisation (inférieure) de f sur F est ainsi ramené à $K = F \cap B_f(0, A)$, qui est fermé et borné, donc compact dans $\mathbf{R}^n$. Sur K la fonction numérique continue f est bornée et atteint ses bornes : $\exists x \in K : f(x) = \inf_{y \in K} f(y) = \inf_{y \in F} f(y)$.
2. Rappelons que le module $|z|$ d'un nombre complexe correspond à sa norme euclidienne $\|z\|$ dans l'identification $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.

Supposons que $P \in \mathbf{C}[X]$ n'est pas constant, et ne s'annule pas ; écrivons $P = a_n X^n + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Comme x^n croît plus vite que x^k pour $k < n$, on a $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty$. Nous pouvons donc appliquer la question précédente à la fonction numérique continue $|P|$ sur $\mathbf{C}$: il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\inf_{\mathbf{C}} |P(z)| = \min_{\mathbf{C}} |P(z)| = |P(z_0)| > 0$. Nous allons faire un développement limité autour de z_0 et contredire la minimalité.

Or avec les formules de Taylor on trouve $P(z_0+h) = P(z_0) + qh^k + o(h^k) = P(z_0)(1 + q'h^k + o(h^k))$ où q (et donc q') est un nombre complexe non-nul. Écrivons $q' = \rho e^{i\theta}$; considérons un nombre complexe $h = re^{it}$ avec $t = \frac{\pi-\theta}{k}$. On trouve :

$$1 + q'h^k + o(h^k) = 1 + \rho e^{i\theta} r^k e^{ikt} + o(r^k) = 1 + \rho r^k e^{i\pi} + o(r^k) = 1 - \rho r^k + o(r^k)$$

Cette quantité est réelle, proche de 1 mais inférieure à 1 quand r tend vers 0. En conclusion, pour h de cette forme :

$$|P(z_0+h)| = |P(z_0)(1 + q'h^k + o(h^k))| = |P(z_0)|(1 - \rho r^k + o(r^k)) < |P(z_0)|$$

C'est une contradiction. Le polynôme s'annule donc.

3. Fixons des points k_0 et f_0 de K et F, respectivement. Alors $d(K,F) \leq d(k_0, f_0) = d_0$. Pour « faire mieux », on peut donc se restreindre, en ce qui concerne F, aux points de F qui sont à distance au plus d_0 de K. Or K étant compact est borné donc dans une boule $B_f(0,r)$. On peut donc se restreindre à $F \cap B_f(0, r+d_0)$, qui est fermé et borné dans $\mathbf{R}^n$, donc compact. Nous voici ramenés à supposer F compact : et c'est alors bien connu.

   On peut aussi minimiser par suites, extraire dans le compact K, et se ramener à une suite dans une partie bornée de F pour extraire à nouveau.

   Cet argument paraît utiliser de façon cruciale l'équivalence, valable seulement dans les espaces vectoriels normés de dimension finie, entre « compact »et « fermé borné ». En effet, on peut produire un contre-exemple en dimension infinie. Considérons dans l'espace $\ell^1(\mathbf{R})$ des suites (absolument) sommables, l'élément $u_n = (0, \dots, 0, 1 + \frac{1}{n}, 0, \dots)$ qui est non-nul seulement en $k = n$. Alors $\|u_n\|_{\ell^1(\mathbf{R})} = 1 + \frac{1}{n}$. La suite (u_n) (suite de suites) n'a pas de valeur d'adhérence : en effet la convergence ℓ^1 entraîne la convergence simple, mais la limite simple de (u_n) est la suite nulle, qui reste à distance ≥ 1 de chaque terme. Soit $F = \{u_n : n \in \mathbf{N}^*\}$. Nous affirmons que F est fermé. En effet c'est $\{u_n : n \in \mathbf{N}^*\} \cup V$, où $V = \emptyset$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) ! Prenons enfin $K = \{0\}$, le singleton suite nulle. Alors $\forall n \in \mathbf{N}, d(0, u_n) = 1 + \frac{1}{n}$ donc $d(K,F) = 1$. Mais la distance n'est pas réalisée.