TD 3 – Espaces complets

Exercice 3
Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X. Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit $X_k = \{x_n \mid n \leq k\}$. Prouver l'équivalence entre les conditions suivantes :

1. La suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.
2. La suite $(\delta(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 (où $\delta(A)$ désigne le diamètre de la partie $A \subset X$).

Corrigé : On va montrer les deux implications. Rappelons que le diamètre de $A \subset X$ est défini par

$$\delta(A) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}.$$

— Supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} :\ \forall p, q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Soit alors $a, b \in X_N$. Alors il existe $p, q \geq N$ tels que $a = x_p$ et $b = x_q$. Donc $d(a, b) = d(x_p, x_q) < \varepsilon$, et par conséquent $\delta(X_N) < \varepsilon$. On vient de montrer que la suite $(\delta(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

— Réciproquement, supposons que la suite $(\delta(X_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} :\ \forall n \geq N,\ \delta(X_n) < \varepsilon,$$

donc pour tout $n \geq N$ et tous $a, b \in X_n$, on a $d(a, b) < \varepsilon$. Soit maintenant $p, q \geq N$. Alors $x_p, x_q \in X_N$, donc $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Cela montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy.

Exercice 6
Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.

Corrigé : On veut montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, autrement dit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N, p \in \mathbf{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$, et N un entier supérieur à $1/\varepsilon$. Alors, pour tous $n \geq N$ et $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite est de Cauchy.

Exercice 8

Soit ℓ^∞ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la distance uniforme, définie de la façon suivante : pour $x = (x(k))_{k\in\mathbf{N}}$ et $y = (y(k))_{k\in\mathbf{N}}$ dans ℓ^∞, on pose

$$d(x,y) = \sup_{k\geq 0} |x(k) - y(k)|.$$

On note les éléments de ℓ^∞ comme des fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, pour clarifier les notations concernant les suites de suites.

1. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0 \dots\right).$$

   Autrement dit, $x_n \in \ell^\infty$ est définie par $x_n(k) = \frac{1}{k}$ si $k \leq n$, et $x_n(k) = 0$ sinon. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est convergente, et donner sa limite.
2. Montrer que (ℓ^∞, d) est complet.
3. Soit c_0 le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞, puis que c_0 est complet.
4. Soit c_{00} le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. Est-il complet ?

Corrigé :

1. On pose x_∞ la suite définie par $x_\infty(k) = 1/k$ pour tout $k \geq 1$. On voit facilement que cette suite est bornée, et que donc $x_\infty \in \ell^\infty$. On va montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers x_∞. La suite $y_n = x_\infty - x_n$ est définie par $y_n(k) = 0$ si $k \leq n$ et $y_n(k) = 1/k$ si $k > n$. Par conséquent,

$$d(x_n, x_\infty) = \sup_{k\geq 0} |y_n(k)| = 1/(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_\infty$.
2. Montrons que (ℓ^∞, d) est complet. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de ℓ^∞. Par définition,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall p, q \geq N,\ \sup_{k\geq 0} |x_p(k) - x_q(k)| < \varepsilon. \tag{1}$$

   Première étape : construire le candidat limite. On fixe $k_0 \in \mathbf{N}$. On déduit de (1) que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N > 0 :\ \forall p, q \geq N,\ |x_p(k_0) - x_q(k_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

   Cela indique que la suite $\big(x_n(k_0)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy. Puisque $\mathbf{R}$ est complet, on en déduit que cette suite converge vers un réel, que l'on note $x_\infty(k_0)$. Cela définit une suite x_∞.

   Deuxième étape : vérifier que $x_\infty \in \ell^\infty$. Pour cela, on va utiliser de manière cruciale le fait que la suite (x_n) est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, N l'entier donné par (1) et $n \geq N$. Soit aussi $k_0 \in \mathbf{N}$. On veut majorer $x_n(k_0) - x_\infty(k_0)$ indépendamment de k_0. Mais on sait que la suite $\big(x_n(k_0)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $x_\infty(k_0)$. Donc

$$\exists N' \in \mathbf{N} :\ \forall m \geq N',\ |x_m(k_0) - x_\infty(k_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

   Prenons $m \geq \max(N, N')$. Alors en combinant (2) et (3), on obtient

$$|x_n(k_0) - x_\infty(k_0)| \leq |x_n(k_0) - x_m(k_0)| + |x_m(k_0) - x_\infty(k_0)| < 2\varepsilon, \tag{4}$$

   cela pour tout $n \geq N$. Or la suite x_n est bornée : il existe $R > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $|x_n(k)| \leq R$. Par conséquent, on a, pour tout $k \in \mathbf{N}$,$|x_\infty(k)| \leq R + 2\varepsilon$: la suite x_∞ est bien bornée.

Troisième étape : vérifier que x_n converge bien vers x_∞. Cette étape est une conséquence directe de (4), qui nous dit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N} :\ \forall k_0 \in \mathbf{N},\ |x_n(k_0) - x_\infty(k_0)| < 2\varepsilon.$$

3. On va montrer que c_0 est fermé par la caractérisation séquentielle des fermés. Soit donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de c_0 convergeant vers une suite x_∞ de ℓ^∞. On veut montrer que $x_\infty \in c_0$, autrement dit que $\lim_{k\to+\infty} x_n(k) = 0$.

   Soit donc $\varepsilon > 0$. Alors, puisque x_n converge vers x_∞, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et tout $k \in \mathbf{N}$, on a $|x_n(k) - x_\infty(k)| < \varepsilon$. De plus, on sait que $x_N \in c_0$, donc il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geq K$, on a $|x_N(k)| < \varepsilon$. On en déduit que pour tout $k \geq K$, on a

$$|x_\infty(k)| \leq |x_\infty(k) - x_N(k)| + |x_N(k)| < 2\varepsilon.$$

   Cela montre que la suite x_∞ converge vers 0, donc que c_0 est fermé.

   Puisque c_0 est un sous-ensemble fermé de l'espace complet ℓ^∞, on en déduit qu'il est lui-même complet.

4. La question 1. fournit l'exemple d'une suite d'éléments de c_{00}, convergeant dans ℓ^∞, mais de limite n'étant pas dans c_{00}. Cela montre que c_{00} n'est pas fermé dans ℓ^∞, et donc qu'il n'est pas complet.

Exercice 10

Soit (X, d_X) un espace métrique et (E, d_E) un espace complet.

1. Montrer que l'espace $B(X,E)$, formé des fonctions bornées de X dans E, et muni de la distance
$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d_E\big(f(x), g(x)\big)$$
est complet.
2. Montrer que $C^0_b(X,E)$, formé des fonctions continues et bornées de X dans E, est un sous-espace fermé de $B(X,E)$ pour d (et est donc complet).

Corrigé : Il y a une méthode plus ou moins générale pour démontrer qu'un espace de fonctions est complet. Elle se déroule en trois étapes : on commence par se donner une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est de Cauchy (ici, c'est une suite de fonctions bornées de X dans E), autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n,m \geq N, d(f_n, f_m) < \varepsilon. \tag{5}$$

Première étape : construire le candidat limite. On commence par deviner une fonction f qui est la limite potentielle de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Ici, cette partie est déduite du fait que E est complet. Plus précisément, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $n, m \geq N$ (où N est donné par l'équation (5)), on a (par définition de la distance d)

$$d_E(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon. \tag{6}$$

Puisque c'est une suite de Cauchy, elle converge vers un élément de E, que l'on note $f(x)$; ceci nous construit notre fonction f.

Deuxième étape : vérifier que $f \in B(X,E)$. C'est une étape à ne pas oublier ! Il faut donc vérifier que f est bornée. Mais puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée : il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $d(f_n, g) \leq C$, où g désigne une fonction de X dans E, que l'on choisit constante égale à a. Autrement dit, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$d_E(f_n(x), a) \leq C.$$

Mais puisque pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ (qui a priori dépend de x) tel que

$$d_E(f(x), f_n(x)) < 1.$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$d_E(f(x), a) < C + 1.$$

Par conséquent, la fonction f est bornée, et appartient donc à $B(X, E)$.

Troisième étape : vérifier que f_n converge bien vers f. Il s'agit de vérifier qu'on a bien une convergence de f_n vers f *pour la distance* d (et pas seulement une convergence ponctuelle). Soit donc $\varepsilon > 0$ et $n \geq N$ (où N, de nouveau, est donné par (5)), on veut montrer que $d(f_n, f) < 2\varepsilon$. De par la définition de d, cela revient à montrer que pour tout $x \in X$, on a $d_E(f_n(x), f(x)) < 2\varepsilon$. Mais puisque la suite $(f_m(x))_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$ (dans E), on sait qu'il existe $m \geq N$ tel que $d_E(f_m(x), f(x)) < \varepsilon$. On écrit donc :

$$d_E(f_n(x), f(x)) \leq d_E(f_n(x), f_m(x)) + d_E(f_m(x), f(x)) < 2\varepsilon$$

(où la première majoration par ε vient de (6)). Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge bien vers f au sens de la métrique d, par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente

Conclusion : l'espace $B(X, E)$ est complet.

On veut maintenant montrer que le sous-espace $C_b^0(X, E)$ de $B(X, E)$ est fermé (pour d). Il s'agit donc de montrer que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $C_b^0(X, E)$ converge vers une fonction $f \in B(X, E)$, alors $f \in C_b^0(X, E)$; autrement dit une limite uniforme de fonctions continues et bornées est elle-même continue. Soit donc x un point quelconque de X, montrons que f est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$, et $m \in \mathbf{N}$ tel que $d(f, f_m) < \varepsilon$.

On sait que f_m est continue (en x), donc il existe $\eta > 0$ tel que si $d_X(x, y) < \eta$, alors $d_Y(f_m(x), f_m(y)) < \varepsilon$. Donc, pour tout y vérifiant $d_X(x, y) < \eta$, on a, par inégalité triangulaire :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), f_m(y)) + d_Y(f_m(y), f(y)) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

On vient donc de montrer que f est continue en x, pour tout $x \in X$. Conclusion : $C_b^0(X, E)$ est fermé.

Exercice 12

Soient $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 sur un intervalle ouvert I et $a \in I$ un point fixe de f.

1. On suppose que $|f'(a)| < 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J stable par f et contenant a tel que, pour tout $x_0 \in J$, la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 1$ converge vers a.
2. Sous les hypothèses de la question précédente, on suppose de plus que f' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$, alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et que $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$.

Corrigé :

1. On sait que la fonction f est de classe C^1. Par conséquent, sa dérivée est continue et donc (puisque $|f'(a)| < 1$) il existe un réel $\alpha \in [0, 1[$ et un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \delta, a + \delta]$, on ait $|f'(x)| \leq \alpha$. Cette dernière condition implique que la restriction de la fonction f à l'intervalle $J = [a - \delta, a + \delta]$ est α-lipschitzienne[1], et par conséquent contractante. Il s'agit maintenant de montrer que l'intervalle J est stable par f.

   Soit $x \in J$. Alors $|x - a| \leq \delta$. Par le fait que f est α-lipschitzienne sur J, cela implique que $|f(x) - f(a)| \leq \alpha\delta$. Mais $f(a) = a$ et $\alpha \in [0, 1[$, donc $|f(x) - a| \leq \delta$, autrement dit $f(x) \in [a - \alpha, a + \alpha] = J$.

   Ainsi, J est stable par f et f y est contractante. De plus, J est un segment de $\mathbf{R}$ et est donc complet. On peut donc appliquer le théorème de Picard qui nous indique que pour tout $x_0 \in J$, la suite définie par $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n > 1$ converge vers a.

2. Puisque f' ne s'annule pas sur J, on sait que f est strictement monotone sur J. En particulier, elle y est injective et donc si $f(x) = a$, alors $f(x) = f(a)$ et donc $x = a$. Donc si $u_{n+1} = f(u_n) = a$, alors $u_n = a$. Par récurrence descendente, on montre que si $u_n = a$, alors $u_0 = x_0 = a$. En considérant la contraposée, on en déduit que si $x_0 \neq a$, alors $u_n \neq a$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   Prenons donc $x_0 \neq a$. On applique maintenant la formule de Taylor-Lagrange : pour tout n, il existe un point y_n situé entre a et u_n tel que

$$f(u_n) = f(a) + (u_n - a)f'(y_n),$$

   d'où

$$f(u_n) - f(a) = (u_n - a)f'(y_n),$$

   et puisque $f(u_n) = u_{n+1}$,$f(a) = a$ et $u_n \neq a$,

$$\frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = f'(y_n).$$

   Or, u_n tend vers a, donc par continuité de f', $f'(y_n)$ tend vers $f'(a)$. On a donc la limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1} - a}{u_n - a} = f'(a)$$

   et finalement $u_{n+1} - a \sim f'(a)(u_n - a)$.

Exercice 14

Un nombre réel z est appelé *nombre de Liouville* s'il est irrationnel et possède la propriété que pour tout entier $n > 0$ il existe des entiers p et q tels que $q > 1$ et

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

1. Montrer que le nombre

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{10^{k!}}$$

   est un nombre de Liouville.
2. Écrire l'ensemble $I = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des irrationnels comme une intersection dénombrable d'ouverts denses.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville est une intersection dénombrable d'ouverts denses. En déduire que tout intervalle contient une infinité de nombres de Liouville.

1. Par l'inégalité des accroissements finis.

Corrigé :

1. Posons
$$x = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^{k!}} \qquad \text{et} \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}.$$
Il est alors évident que x_n est rationnel pour tout $n \geq 1$, et que de plus son dénominateur q_n est inférieur à $10^{n!}$. De plus,
$$\begin{aligned}|x - x_n| &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}\\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{(n+1)!+i}}\\ &= \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i}\\ &= \frac{1}{10^{n!(n+1)}} \frac{10}{9}\\ &= \frac{1}{(10^{n!})^{n+1}} \frac{10}{9}\\ &\leq \frac{1}{q_n^{n+1}} \frac{10}{9}\\ &= \frac{1}{q_n^n} \frac{10}{9q_n}\\ &\leq \frac{1}{q_n^n}.\end{aligned}$$
Par conséquent, le nombre x vérifie bien l'inégalité de la question. Mais encore faut-il montrer que x est irrationnel…
Supposons que x soit rationnel, on peut donc écrire $x = p/q$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. On écrit de même $x_n = p_n/q_n$. Le calcul précédent se réécrit
$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^n}.$$
Mais
$$\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{pq_n + qp_n}{qq_n},$$
où $pq_n + qp_n$ est un entier non nul (sinon on aurait $x = x_n$), donc
$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n},$$
on en déduit que
$$\frac{1}{qq_n} \leq \frac{1}{q_n^n} \qquad \Longleftrightarrow \quad q_n^{n-1} \leq q,$$
et ce pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or ceci est impossible : sinon les q_n seraient égaux à 1 à partir d'un certain rang. On aboutit à une contradiction, ce qui signifie que x est irrationnel.
2. On sait que $\mathbf{Q}$ est un ensemble dénombrable : on peut écrire
$$\mathbf{Q} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}.$$

Alors

$$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{R} \setminus \{x_n\},$$

où pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathbf{R} \setminus \{x_n\}$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}$.

3. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble défini par $\mathcal{M} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{M}_n$, avec

$$\mathcal{M}_n = \left\{ z \in \mathbf{R} \mid \exists p, q : \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$

On voit facilement que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathcal{M}_n$ est ouvert lorsqu'on l'écrit comme l'union d'ouverts (en fait d'intervalles ouverts)

$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{p \in \mathbf{Z}} \bigcup_{q \in \mathbf{N}^*} \left\{ z \in \mathbf{R} \mid \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\},$$

puis que $\mathcal{M}_n$ est dense, car il contient $\mathbf{Q}$.

Donc $\mathcal{M} \cap (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q})$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses (par la question précédente, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est lui-même une intersection dénombrable d'ouverts denses), et coïncide avec l'ensemble des nombres de Liouville. Le théorème de Baire nous assure alors que cet ensemble est lui-même dense ; en particulier tout intervalle de longueur non nulle contient une infinité de nombres de Liouville.