TD 1 – Espaces métriques

1 Exercices classiques

Exercice 1 (Inégalité triangulaire inversée)
Soit (X, d) un espace métrique. Pour tous $x, y, z \in X$, montrer que $|d(x, y) - d(x, z)| \leqslant d(y, z)$.

Exercice 2
Soit (X, d) un espace métrique. Montrer qu'une boule ouverte est ouverte, et qu'une boule fermée est fermée.

Exercice 3 (Distances usuelles sur $\mathbf{R}^n$)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, d_2, d_\infty : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ définies, pour $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, par :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad ; \quad d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad ; \quad d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i \in [\![1, n]\!]\}.$$

1. Vérifier que d_1, d_2 et d_∞ sont effectivement des distances sur $\mathbb{R}^n$; on appelle d_2 la *distance euclidienne* sur $\mathbf{R}^n$.
2. On suppose $n = 2$. Dessiner, pour chacune de ces distances, la boule unité.

Exercice 4 (Ouverts et fermés de $\mathbf{R}$)
On se place dans l'espace métrique $\mathbf{R}$ muni de sa distance usuelle.

1. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ vérifiant $a \leqslant b$.
   (a) Montrer que les intervalles *fermés* $[a, b]$, $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que si $a < b$, l'intervalle $[a, b[$ n'est ni ouvert, ni fermé dans $\mathbf{R}$.
2. Les parties $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} \smallsetminus \mathbf{Q}$ de $\mathbf{R}$ sont elles ouvertes ? fermées ?

Exercice 5
Soient (X, d) un espace métrique, et A, B deux parties de X.

1. On suppose $A \subset B$. Montrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\operatorname{Int}(X \smallsetminus A) = X \smallsetminus \overline{A}$ et $\overline{X \smallsetminus A} = X \smallsetminus \mathring{A}$.

Exercice 6 (Frontière)
Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X. On appelle *frontière* d'un sous-ensemble B de X l'ensemble $\operatorname{Fr}(B) = \overline{B} \cap \overline{X \smallsetminus B}$.

1. Justifier que $\operatorname{Fr}(A)$ est fermée dans X.
2. Vérifier que $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} \cap \left(X \smallsetminus \mathring{A}\right) = \overline{A} \smallsetminus \mathring{A}$.
3. Établir les équivalences suivantes :
   (a) $\operatorname{Fr}(A) = \varnothing$ si et seulement si A est à la fois ouverte et fermée dans X.
   (b) A est ouverte dans X si et seulement si $A \cap \operatorname{Fr}(A) = \varnothing$.
   (c) A est fermée dans X si et seulement si $\operatorname{Fr}(A) \subset A$.
4. On suppose A fermée dans X. Montrer que $\operatorname{Fr}(A)$ est d'intérieur vide, puis que $\operatorname{Fr}[\operatorname{Fr}(A)] = \operatorname{Fr}(A)$.

5. en déduire que pour tout $A \subset X$, on a $\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(A)]] = \mathrm{Fr}[\mathrm{Fr}(A)]$.

Exercice 7 (Densité)
Soient (X, d) un espace métrique et A une partie de X. Prouver l'équivalence entre les assertions suivantes :

1. $\overline{A} = X$.
2. $\mathrm{Int}(X \setminus A) = \varnothing$.
3. Pour tout ouvert non vide U de X, on a $U \cap A \neq \varnothing$.

Un ensemble $A \subset X$ vérifiant l'une de ces propriétés est dit *dense* dans X.

Exercice 8 (Diamètre)
Soit (X, d) un espace métrique. On pose $\delta(\varnothing) = 0$ puis, pour toute partie non vide $A \subset X$:

$$\delta(A) \;=\; \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

le *diamètre* de A (éventuellement égal à $+\infty$). Soient $A, B \subset X$; établir les propriétés suivantes :

1. $\delta(A) = 0$ si et seulement si A contient au plus un point.
2. $\delta(A) \leqslant \delta(B)$ dès que $A \subset B$.
3. $\delta(\overline{A}) = \delta(A)$.
4. $\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$ dès que $A \cap B \neq \varnothing$.
5. $\delta(A) < +\infty$ si et seulement s'il existe $a \in A$ tel que l'ensemble $\{d(a, x) \mid x \in A\}$ soit borné.

Exercice 9 (Vrai ou faux ?)
On se place dans (X, d) un espace métrique. Dans chacun des cas suivants, dire si l'assertion proposée est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. $\varnothing$ et X sont des parties à la fois ouvertes et fermées dans X.
2. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans X sont $\varnothing$ et X.
3. Toute partie de X est ouverte ou fermée.
4. Si $a, a' \in X$ et $r, r' > 0$ vérifient $\mathrm{B}(a, r) = \mathrm{B}(a', r')$, alors $a = a'$ et $r = r'$.
5. Toute intersection d'ouverts de X est ouverte dans X.
6. Une boule *fermée* de X est effectivement fermée dans X.
7. Toute partie finie de X est fermée dans X.

2 Pour aller plus loin

Exercice 10 (Espaces discrets)
Soit (X, d) un espace métrique.

1. Prouver que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (a) Toute partie de X est à la fois ouverte et fermée.
   (b) Toute partie de X est ouverte.
   (c) Toute partie de X est fermée.
   (d) Tout singleton de X est ouvert.

   Si ces conditions sont satisfaites, l'espace métrique (X, d) est qualifié de *discret*.
2. On suppose que, pour tous $x, y \in X$:

$$d(x, y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } \; x = y, \\ 1 & \text{si } \; x \neq y. \end{cases}$$

   (a) Vérifier qu'étant ainsi définie, d est effectivement une distance sur X.
   (b) Montrer que l'espace métrique (X, d) est discret.

3. Montrer que si $X = \mathbf{Z}$, et $d(x,y) = |x-y|$ pour tous $x, y \in X$, l'espace métrique (X,d) est discret.

Exercice 11 (Distances équivalentes et topologie)
On se place dans $\mathbf{Z}$ que l'on munit des deux distances :

$$d_0 \ : \ \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbb{R}_+, \ (p,q) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = q \\ 1 & \text{si} \quad p \neq q \end{cases} \qquad \text{et} \qquad d_1 \ : \ \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{R}_+, \ (p,q) \mapsto |p-q|.$$

1. Vérifier que les distances d_0 et d_1 définissent les mêmes ouverts sur $\mathbf{Z}$.
2. (a) Existe-t-il une constante $C > 0$ telle que $d_1(p,q) \leqslant C d_0(p,q)$ pour tous $p, q \in \mathbf{Z}$?
   (b) Qu'en déduit-on ?

Exercice 12 (Boules fermées et adhérence)
Soient (X,d) un espace métrique, $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B}_f(a,r)$ et $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{Int}[\mathrm{B}_f(a,r)]$, mais que les inclusions réciproques sont généralement fausses.

Exercice 13 (Adhérence, unions et intersections)
Soient (X,d) un espace métrique, $n \in \mathbf{N}^*$, et $A_1, \dots, A_n$ des parties de X.
1. Montrer que $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.
2. Montrer que $\overline{A_1 \cap \cdots \cap A_n} \subset \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$. A-t-on toujours égalité ?

Exercice 14
Soient (X,d) un espace métrique et A, B deux parties de X. On suppose que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$, et que $A \cup B$ est fermée dans X. Montrer que A et B sont fermées dans X.

Exercice 15
Soient (X,d) un espace métrique et U une partie de X. Prouver l'équivalence entre les assertions :
1. U est un ouvert de X.
2. Pour tout $A \subset X$, on a $\overline{A \cap U} = \overline{\overline{A} \cap U}$.

Exercice 16 (Sous-espaces métriques)
Soient (X,d) un espace métrique, A une partie non vide de X et B une partie de A.
1. Montrer que l'intérieur de B dans A contient l'intérieur de B dans X, mais que l'inverse est généralement faux.
2. On suppose à présent A ouverte dans X. Montrer qu'alors, les intérieurs de B dans A et X coïncident.

Exercice 17 (*D'après l'examen de 2010*)
Soit (X,d) un espace *ultramétrique*, à savoir un espace métrique où la distance d vérifie, pour tous $x, y, z \in X$, l'axiome supplémentaire $d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y),\ d(y,z)\}$.
1. Montrer que tout triangle de X est isocèle, autrement dit que pour tous $x, y, z \in X$ vérifiant $d(x,z) \neq d(y,z)$, on a $d(x,y) = \max\{d(x,z),\ d(y,z)\}$.
2. (a) Montrer que tout point d'une boule ouverte ou fermée de X est centre de cette boule.
   (b) Prouver que toute boule ouverte ou fermée de X est à la fois ouverte et fermée dans X.
3. Montrer que si deux boules ouvertes de X s'intersectent, l'une est incluse dans l'autre.

Exercice 18
Soient (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. Démontrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
1. $\mathring{A} \neq \varnothing$.
2. Pour toute partie $D \subset X$ dense dans X, on a $D \cap A \neq \varnothing$.

Corrections

Exercice 1

Soient $x, y, z \in X$. Comme d est une distance sur X, on a d'une part $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$, donc $d(x,y) - d(x,z) \leqslant d(z,y) = d(y,z)$, et d'autre part $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$, donc $-d(y,z) \leqslant d(x,y) - d(x,z)$. D'où le résultat.

Exercice 2

Exercice 3

Pour $u \in \mathbf{R}^n$ et $i \in [\![1,n]\!]$, nous désignerons par u_i la i-ième composante du vecteur u.

1) — Vérifions que d_1 est une distance sur $\mathbf{R}^n$.

(i) Soient $x, y \in \mathbf{R}^n$. Si $x = y$, il est clair que $d_1(x,y) = 0$. Supposons maintenant $d(x,y) = 0$. Puisqu'une dans somme nulle de termes positifs, tous les termes sont nuls, on en déduit que $|x_i - y_i| = 0$ pour tout $iin[\![1,n]\!]$, puis que $x = y$.

(ii) Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, ayant $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a bien $d_1(x,y) = d_1(y,x)$.

(iii) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Ayant, par propriété de la valeur absolue, $|x_i - z_i| \leqslant |x_i - y_i| + |y_i - z_i|$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il est clair que $d_1(x,z) \leqslant d_1(x,y) + d_1(y,z)$.

— Le fait que d_2 soit une distance sur $\mathbf{R}^n$ résulte des propriétés du produit scalaire usuel $(\cdot \mid \cdot)$ sur $\mathbf{R}^n$ qui, rappelons-le, pour $u, v \in \mathbf{R}^n$, est défini par :

$$(u \mid v) \ = \ \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{1}$$

Pour tout $u \in \mathbf{R}^n$, on a $(u \mid u) \geqslant 0$, et on pose ainsi $\|u\|_2 = \sqrt{(u \mid u)}$. Pour tous $u, v \in \mathbf{R}^n$, on a alors :

$$|(u \mid v)| \ \leqslant \ \|u\|_2 \cdot \|v\|_2 \qquad (\textit{Inégalité de Cauchy-Schwarz}), \tag{2}$$

$$\|u+v\|_2 \ \leqslant \ \|u\|_2 + \|v\|_2 \qquad (\textit{Inégalité triangulaire}). \tag{3}$$

Étant donné que $d_2(x,y) = \|x - y\|_2$ pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$, 0i et 0ii résultent respectivement des caractères défini positif et symétrique de $(\cdot \mid \cdot)$. Pour obtenir 0iii, *i.e.* $d_2(x,z) \leqslant d_2(x,y) + d_2(y,z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, il suffit d'appliquer (3) à $u = x - y$ et $v = y - z$.
Le lecteur vérifiera sans peine que la relation (1) définit effectivement un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$, *i.e.* une forme bilinéaire symétrique définie positive. Vérifions à présent la validité de (2). Soient $u, v \in \mathbf{R}^n$; l'inégalité étant claire si v est nul, nous supposerons v non nul. Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on a alors :

$$0 \ \leqslant \ (u + \lambda v \mid u + \lambda v) \ = \ (u \mid u) + 2\lambda(u \mid v) + \lambda^2(v \mid v),$$

ce qui implique que le discriminant du trinôme $(u \mid u) + 2X(u \mid v) + X^2(v \mid v)$ de $\mathbf{R}[X]$ est négatif, *i.e.* $4(u \mid v)^2 - 4(u \mid u)(v \mid v) \leqslant 0$; d'où facilement (2). Dès lors, l'inégalité (3) en résulte, puisque si $u, v \in \mathbf{R}^n$:

$$\|u+v\|_2^2 \ = \ (u+v|u+v) \ = \ (u|u)+2(u|v)+(v|v) \ \leqslant \ \|u\|_2^2+2\|u\|_2 \cdot \|v\|_2+\|v\|_2^2 \ = \ (\|u\|_2 + \|u\|_2)^2 .$$

— Vérifions que d_∞ est une distance sur $\mathbf{R}^n$.

0i Soient $x, y \in \mathbf{R}^n$. Si $x = y$, il est clair que $d_\infty(x,y) = 0$. Supposons maintenant $x \neq y$. Il existe alors $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j \neq y_j$, d'où $d_\infty(x,y) \geqslant |x_j - y_j| > 0$.

0ii Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, ayant $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a bien $d_\infty(x,y) = d_\infty(y,x)$.

0iii Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, et fixons $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_j - z_j| = \max\{|x_i - z_i| \mid i \in [\![1,n]\!]\}$. Par propriété de la valeur absolue et définition de d_∞, on a alors :

$$d_\infty(x,z) \ = \ |x_j - z_j| \ \leqslant \ |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \ \leqslant \ d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z).$$

2) Désignons par B_1, B_2, B_∞ les boules de $\mathbf{R}^2$ centrée en $(0,0)$ et de rayon 1 pour d_1, d_2, d_∞.
— Soit $(x_1,x_2)\in B_1$. Par définition de d_1, on a $|x_1|+|x_2|\leqslant 1$. Or :
  — si $x_1\geqslant 0$ et $x_2\geqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2\leqslant 1-x_1$,
  — si $x_1\geqslant 0$ et $x_2\leqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2\geqslant x_1-1$,
  — si $x_1\leqslant 0$ et $x_2\geqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2\leqslant x_1+1$,
  — si $x_1\leqslant 0$ et $x_2\leqslant 0$, cette inégalité se réécrit $x_2\geqslant -1-x_1$.
  B_1 correspond donc à l'intersection des demi-plans d'équations $x_2\leqslant 1-x_1$, $x_2\geqslant x_1-1$, $x_2\leqslant x_1+1$ et $x_2\geqslant -1-x_1$.
— Soit $(x_1,x_2)\in B_2$. On a alors $\sqrt{x_1^2+x_2^2}\leqslant 1$, *i.e.* $x_1^2+x_2^2\leqslant 1$. Il est donc clair que B_2 correspond au disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
— Soit $(x_1,x_2)\in B_\infty$. Par définition de d_∞, ceci signifie que $\max\{|x_i| \mid i=1,2\}\leqslant 1$, autrement dit que $-1\leqslant x_i\leqslant 1$ pour $i=1,2$. Ainsi, B_∞ correspond à l'intersection des demi-plans d'équations $x_1\leqslant 1$, $x_1\geqslant -1$, $x_2\leqslant 1$ et $x_2\geqslant -1$.

Exercice 4

1) 1a. On commence par remarquer que pour tout $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$, l'intervalle $]a,b[$ est ouvert, puisqu'égal à la boule ouverte $B((a+b)/2,(b-a)/2)$. On en déduit que pour tout $a\in\mathbf{R}$, l'intervalle $]a,+\infty[$ est un ouvert de $\mathbf{R}$, en tant qu'union des ouverts $]a,a+n[$ pour $n\in\mathbf{N}^*$. De même, l'intervalle $]-\infty,a[$ est ouvert pour tout $a\in\mathbf{R}$. Maintenant, on a $[a,+\infty[\,=\mathbf{R}\smallsetminus]-\infty,a[$ et $]-\infty,a]=\mathbf{R}\smallsetminus]a,+\infty[$ où, d'après supra, les intervalles $]-\infty,a[$ et $]a,+\infty[$ sont ouverts dans $\mathbf{R}$. Par définition même d'un fermé, cela signifie que les intervalles $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ sont effectivement fermés dans $\mathbf{R}$. Une intersection de fermés étant fermée, on en déduit que $[a,b]=\,]-\infty,b]\cap[a,+\infty[$ est fermé dans $\mathbf{R}$.

1b. Comme $a<b$, on a $a\in[a,b[$. Or, pour tout $\varepsilon>0$:

$$a-\frac{\varepsilon}{2}\;\in\;]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\;=\;\mathrm{B}(a,\varepsilon)\qquad\text{mais}\qquad a-\frac{\varepsilon}{2}\;\notin\;[a,b[,$$

ce qui montre qu'il n'existe pas de boule ouverte centrée en a contenue dans $[a,b[$. Par suite, l'intervalle $[a,b[$ n'est pas ouvert dans $\mathbf{R}$.
Considérons à présent l'ensemble $\mathbf{R}\smallsetminus[a,b[\,=\,]-\infty,a[\,\cup\,[b,+\infty[$, qui contient b mais pas a, puisque $a<b$. Pour tout $\varepsilon>0$, posant $\alpha=\min(\varepsilon,b-a)>0$, on constate que $\alpha/2\notin\mathbf{R}\smallsetminus[a,b[$, et l'arbitraire sur ε prouve qu'il n'existe pas de boule centrée en b contenue dans $\mathbf{R}\smallsetminus[a,b[$. Ainsi, $\mathbf{R}\smallsetminus[a,b[$ n'est pas ouvert dans $\mathbf{R}$, et son complémentaire $[a,b[$ n'est donc pas fermé dans $\mathbf{R}$.

2) On rappelle que $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}\smallsetminus\mathbf{Q}$ sont des parties *denses* de $\mathbf{R}$, *i.e.* pour tous $a,b\in\mathbf{R}$ vérifiant $a<b$, l'intervalle $]a,b[$ contient (au moins) un élément de $\mathbf{Q}$ et un élément de $\mathbf{R}\smallsetminus\mathbf{Q}$.
— $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ ne sont pas ouverts dans $\mathbf{R}$, puisque toute boule ouverte de $\mathbf{R}$ centrée en 0 contient un irrationnel. En revanche, une union quelconque d'ouverts étant ouverte, ayant :

$$\mathbf{N}\;=\;\mathbf{R}\smallsetminus\left[\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}}]n,n+1[\right)\cup\,]-\infty,0[\right]\qquad\text{et}\qquad\mathbf{Z}\;=\;\mathbf{R}\smallsetminus\left(\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}]k,k+1[\right),$$

on déduit de 1.1a que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ sont des parties fermées de $\mathbf{R}$.
— $\mathbf{Q}$ n'est pas ouvert dans $\mathbf{R}$, puisque pour tous $q\in\mathbf{Q}$ et $\varepsilon>0$, l'intervalle $]q-\varepsilon,q+\varepsilon[\,=\mathrm{B}(q,\varepsilon)$ contient un irrationnel. De même, $\mathbf{R}\smallsetminus\mathbf{Q}$ n'est pas ouvert puisque pour tous $x\in\mathbf{R}\smallsetminus\mathbf{Q}$ et $\varepsilon>0$, $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\,=\mathrm{B}(x,\varepsilon)$ contient un rationnel. Par passage au complémentaire, on en déduit que $\mathbf{Q}=\mathbf{R}\smallsetminus(\mathbf{R}\smallsetminus\mathbf{Q})$ et $\mathbf{R}\smallsetminus\mathbf{Q}$ ne sont pas fermés dans $\mathbf{R}$.

Exercice 5

1) — Par définition de $\mathring{A}$, on a $\mathring{A}\subset A$. Or $A\subset B$, d'où $\mathring{A}\subset B$. $\mathring{A}$ est donc un ouvert de X contenu dans B, ce qui entraine $\mathring{A}\subset\mathring{B}$ par définition même de $\mathring{B}$.
— Par définition de $\overline{B}$, on a $B\subset\overline{B}$. Or $A\subset B$, d'où $A\subset\overline{B}$. $\overline{B}$ est donc un fermé de X qui contient A, ce qui implique $\overline{A}\subset\overline{B}$ par définition même de $\overline{A}$.

2) — L'égalité $\mathrm{Int}(X\smallsetminus A)=X\smallsetminus\overline{A}$ résulte des équivalences :

$$x\in X\smallsetminus\overline{A}\iff\exists V\in\mathcal{V}(x)\,/\,V\cap A=\varnothing\iff\exists V\in\mathcal{V}(x)\,/\,V\subset X\smallsetminus A\iff x\in\mathrm{Int}(X\smallsetminus A).$$

— D'après le point précédent, $\mathrm{Int}(X\smallsetminus B)=X\smallsetminus\overline{B}$ pour toute partie B de X. En appliquant ce résultat à $B=X\smallsetminus A$, on trouve $\mathring{A}=\mathrm{Int}(X\smallsetminus(X\smallsetminus A))=X\smallsetminus\overline{X\smallsetminus A}$. Par passage au complémentaire, il vient :

$$X\smallsetminus\mathring{A}\;=\;X\smallsetminus\left[X\smallsetminus\overline{X\smallsetminus A}\right]\;=\;\overline{X\smallsetminus A}.$$

Exercice 6

1) $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{X\smallsetminus A}$ est fermée dans X car $\overline{A}$ et $\overline{X\smallsetminus A}$ sont fermées dans X.

2) Il est clair que $\overline{A}\cap\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)=\overline{A}\smallsetminus\mathring{A}$. Par ailleurs, comme $\overline{X\smallsetminus A}=X\smallsetminus\mathring{A}$, on a bien $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)$.

3) 3a. Supposons $\mathrm{Fr}(A)=\varnothing$. D'après 2, on a alors $\overline{A}\cap\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)=\varnothing$, d'où $\overline{A}\subset X\smallsetminus\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)=\mathring{A}$. Mais comme $\mathring{A}\subset A\subset\overline{A}$, il vient $\mathring{A}=A=\overline{A}$, ce qui montre bien que A est à la fois ouverte et fermée dans X.
Réciproquement, supposons A ouverte et fermée dans X. On a alors $\mathring{A}=A=\overline{A}$ et donc, d'après 2, $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)=A\cap(X\smallsetminus A)=\varnothing$.

3b. Supposons A ouverte dans X, *i.e.* $\mathring{A}=A$. On a alors $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap(X\smallsetminus A)$ en vertu de 2. Par ailleurs, ayant $A\subset\overline{A}$, il vient $A\cap\mathrm{Fr}(A)=A\cap\overline{A}\cap(X\smallsetminus A)=A\cap(X\smallsetminus A)=\varnothing$.
À l'inverse, supposons $A\cap\mathrm{Fr}(A)=\varnothing$. D'après 2, on a ainsi $\varnothing=A\cap\overline{A}\cap\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)=A\cap\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)$, ce qui entraine $A\subset X\smallsetminus\big(X\smallsetminus\mathring{A}\big)=\mathring{A}$. En somme, $A=\mathring{A}$, et A est bien ouverte dans X.

3c. Si A est fermée dans X, alors $\overline{A}=A$, et donc $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap\overline{X\smallsetminus A}=A\cap\overline{X\smallsetminus A}\subset A$. Inversement, si $\mathrm{Fr}(A)\subset A$, on a $\varnothing=\mathrm{Fr}(A)\cap(X\smallsetminus A)=\overline{A}\cap\overline{X\smallsetminus A}\cap(X\smallsetminus A)=\overline{A}\cap(X\smallsetminus A)$ puisque $X\smallsetminus A\subset\overline{X\smallsetminus A}$. Ainsi, $\overline{A}\subset X\smallsetminus(X\smallsetminus A)=A$, donc $\overline{A}=A$ et A est bien fermée dans X.

4) Supposons A fermée dans X, *i.e.* $\overline{A}=A$. On a alors $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\setminus\mathring{A}=A\setminus\mathring{A}$. Supposons que $\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(A))\neq\emptyset$, il existe donc un ouvert non vide $O\subset A\setminus\mathring{A}$. En particulier, $O\subset A$ et donc $O\subset\mathring{A}$, contradiction.

5) Comme $\mathrm{Fr}(A)$ est fermée dans X, le résultat est conséquence directe de 4).

Exercice 7

$1\Rightarrow 2$: Supposons $\overline{A}=X$, alors $\mathrm{Int}(X\smallsetminus A)=X\smallsetminus\overline{A}=X\smallsetminus X=\varnothing$.
$2\Rightarrow 3$: Supposons 3 non vérifiée, *i.e.* qu'il existe U ouvert non vide de X tel que $U\cap A=\varnothing$. On a alors $U\subset X\smallsetminus A$, d'où $U\subset\mathrm{Int}(X\smallsetminus A)$ par définition de l'intérieur. Par suite, 2 n'est pas vérifiée.
$3\Rightarrow 1$: Supposons 3 vérifiée, et soient $x\in X$, $V\in\mathcal{V}(x)$. Il existe alors U ouvert de X tel que $\{x\}\subset U\subset V$. Or, d'après 3, on a $U\cap A\neq\varnothing$, ce qui implique $V\cap A\neq\varnothing$ puisque $U\subset V$. L'arbitraire sur V montre que $x\in\overline{A}$, et l'arbitraire sur x entraine $X\subset\overline{A}$. D'où 1.
Si A vérifie les conditions équivalentes 1 à 3, A est qualifiée de *dense* dans X.

Exercice 8

1) Il est clair que $\delta(A)=0$ si A contient au plus un point. Si A contient au moins deux points distincts $a,b\in X$, on a alors $d(a,b)>0$, et donc $\delta(A)\geqslant d(a,b)>0$. D'où l'équivalence.

2) Le résultat étant clair si $A=\varnothing$ ou $\delta(B)=+\infty$, nous supposerons ces cas de figure exclus. Soient donc $x,y\in A$. Comme $A\subset B$, on a $x,y\in B$, d'où $d(x,y)\leqslant\delta(B)$. Pour tous $x,y\in A$, $\delta(B)$ est donc un majorant de $d(x,y)$. Par définition de la borne supérieure, ceci implique $\delta(A)\leqslant\delta(B)$.

3) Comme $A\subset\overline{A}$, on a $\delta(A)\leqslant\delta(\overline{A})$ d'après 2) ; le résultat est donc clair si $A=\varnothing$ ou $\delta(A)=+\infty$. Supposons ces cas de figure exclus, et soient $x,y\in\overline{A}$, $\varepsilon>0$. On a alors $\mathrm{B}(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$ et $\mathrm{B}(y,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$; fixons donc $a\in\mathrm{B}(x,\varepsilon)\cap A$ et $b\in\mathrm{B}(x,\varepsilon)\cap A$. Il vient ainsi $d(a,x)<\varepsilon$, $d(b,x)<\varepsilon$ et $d(a,b)\leqslant\delta(A)$, d'où :

$$d(x,y)\;\leqslant\;d(x,a)+d(a,b)+d(b,x)\;\leqslant\;2\varepsilon+\delta(A).$$

L'arbitraire sur x et y entraine $\delta\left(\overline{A}\right) \leqslant 2\varepsilon + \delta(A)$, et l'arbitraire sur ε implique $\delta\left(\overline{A}\right) \leqslant \delta(A)$. D'où l'égalité.

4) L'assertion est claire si $\delta(A \cup B) = +\infty$; supposons ainsi $\delta(A \cup B)$ fini. Comme $A \cap B \neq \varnothing$, on a $A \cup B \neq \varnothing$. Soient donc $x, y \in A \cup B$.
   — Si $x \in A$ et $y \in A$, on a $d(x,y) \leqslant \delta(A) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.
   — De même, si $x \in B$ et $y \in B$, on a $d(x,y) \leqslant \delta(B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.
   — Supposons à présent $x \in A$, $y \in B$. Comme $A \cap B \neq \varnothing$, donnons-nous $z \in A \cap B$. On a alors $z \in A$, donc $d(x,z) \leqslant \delta(A)$, mais aussi $z \in B$, donc $d(z,y) \leqslant \delta(B)$. Par suite, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.
   — Si $x \in B$ et $y \in A$, par symétrie de d, on se ramène au cas où $x \in A$ et $y \in B$.

   Dans tous les cas, on a $d(x,y) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$. Et x, y étant quelconques dans $A \cup B$, on en déduit bien $\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B)$.

5) Supposons d'abord que $\delta(A) = D < +\infty$, et fixons $a \in A$ quelconque. Soit aussi $x \in A$, alors $d(a,x) \leq D$ par définition, l'ensemble $\{d(a,x) \mid x \in A$ est donc borné.
   Réciproquement, supposons que pour tout $x \in A$, on a $d(a,x) \leq D$. Soit $y \in A$, alors $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2D$. L'ensemble $\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$ est donc borné et le diamètre de A est fini.

Exercice 9

1) Vrai : $\varnothing$ et X sont deux ouverts de X, puisque :

$$\varnothing = \bigcup_{a \in \varnothing} \mathrm{B}(a,1) \qquad \text{et} \qquad X = \bigcup_{a \in X} \mathrm{B}(a,1).$$

   Par passage au complémentaire, $\varnothing = X \smallsetminus X$ et $X = X \smallsetminus \varnothing$ sont donc aussi fermés dans X.

2) Faux : D'après l'exercice 10, si $X = \mathbf{N}$ et d est définie par $d(x,y) = |x-y|$ pour tous $x, y \in \mathbf{N}$, (X,d) est alors discret. En particulier, le singleton $\{0\}$, distinct de $\varnothing$ et $\mathbf{N}$, y est à la fois ouvert et fermé.

3) Faux : Si $X = \mathbf{R}$ et d est la distance usuelle sur $\mathbf{R}$, l'intervalle $[0,1[$ n'est, d'après la question 1.1b de l'exercice 4, ni ouvert, ni fermé dans $\mathbf{R}$.

4) Faux : Si $X = \{0,2,3,6\}$ et $d : X \times X \to \mathbf{R}_+^*$, $(x,y) \mapsto |x-y|$, alors $\mathrm{B}(2,2) = \mathrm{B}(3,3)$. Pourtant, $2 \neq 3$.

5) Faux : Pour $X = \mathbf{R}$ et d la distance usuelle sur $\mathbf{R}$, on a :

$$\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]-2^{-n}, 2^{-n}\right[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{B}(0, 2^{-n}). \tag{4}$$

   Supposons à présent qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ et $r > 0$ tels que $\mathrm{B}(a,r) = \{0\}$. Comme $a \in \mathrm{B}(a,r)$, on constate que $a = 0$. Mais alors, $r/2 \in \left]-r, r\right[= \mathrm{B}(0,r) = \{0\}$: contradiction. Il n'existe ainsi pas de boule ouverte dans $\mathbf{R}$ qui égale $\{0\}$, ce qui, compte tenu de (4), montre que l'assertion proposée est fausse.

6) Vrai : Soient $a \in X$, $r > 0$, et posons $B = \mathrm{B}_f(a,r)$. Si $B = X$, le résultat est conséquence de 1). Supposons donc $B \neq X$, et soit $x \in X \smallsetminus B$. On a alors $d(a,x) > r$; posons $\rho = d(a,x) - r > 0$. Pour tout $y \in \mathrm{B}(x,\rho)$, on a $d(x,y) < \rho$, et donc, d'après l'exercice 1 :

$$d(a,y) \geqslant |d(x,a) - d(x,y)| \geqslant d(x,a) - d(x,y) > d(x,a) - \rho = d(a,x) - d(a,x) + r = r.$$

   Ainsi, $\mathrm{B}(x,\rho) \subset X \smallsetminus B$, et l'arbitraire sur x prouve que $X \smallsetminus B$ est ouvert. Moralité, B est fermée dans X.

7) Vrai : Une union *finie* de fermés étant fermée, pour toute partie finie $A \subset X$, $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ est fermée dans X en vertu du fait qu'un singleton est fermé. En effet, une suite à valeurs dans ce singleton est constante et donc converge vers ce même singleton.

2.1

Exercice 10

1) La condition 1a correspondant aux conditions 1b et 1c, il suffit de prouver l'équivalence entre les conditions 1b à 1d pour obtenir celle entre les conditions 1a à 1d.
1b $\Rightarrow$ 1c : Supposons 1b, et soit A une partie de X. Alors $X \smallsetminus A$ est ouverte donc, par définition même d'un fermé, $A = X \smallsetminus (X \smallsetminus A)$ est fermée. D'où 1c.
1c $\Rightarrow$ 1d : Supposons 1c, et soit $a \in X$. Alors $X \smallsetminus \{a\}$ est fermée, ce qui, par définition même d'un fermé, signifie que $\{a\}$ est ouverte. D'où 1d.
1d $\Rightarrow$ 1b : Supposons 1d, et soit A une partie de X. Comme :
$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\},$$
A est ouverte en tant que réunion de parties ouvertes de X. D'où 1b.

2) 2a. Il est clair que l'application d est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, et qu'elle vérifie les axiomes 0i et 0ii qui définissent une distance. Soient $x, y, z \in X$. Si $x = z$, on a $d(x,z) = 0 \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ puisque $d(x,y), d(y,z) \geqslant 0$. En revanche, si $x \neq z$, on a $x \neq y$ ou $y \neq z$, donc $d(x,y) = 1$ ou $d(y,z) = 1$, d'où $d(x,z) = 1 \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ car $d(x,y), d(y,z) \geqslant 0$. Par suite, d vérifie 0iii, et d est une distance sur X.

   2b. Pour tout $x \in X$, on a $\mathrm{B}(x,1) = \{x\}$. Ainsi, (X,d) satisfait à la condition 1d de 1), et est donc discret.

3) Ayant, comme en 2.2b, $\mathrm{B}(x,1) = \{x\}$ pour tout $x \in X$, (X,d) est bien discret.

Exercice 11

Pour $k \in \mathbf{Z}$ et $r > 0$, nous noterons respectivement $\mathcal{B}_0(k,r)$ et $\mathcal{B}_1(k,r)$ les boules de centre k et de rayon r des espaces métriques $(\mathbf{Z}, d_0)$ et $(\mathbf{Z}, d_1)$.

1) Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a $\{k\} = \mathcal{B}_0(k,1) = \mathcal{B}_1(k,1)$. Il en résulte que tous les singletons de $\mathbf{Z}$ sont ouverts pour d_0 et d_1, et donc, en vertu de la question 1) de l'exercice 10, que toute partie de $\mathbf{Z}$ est ouverte pour d_0 et d_1.

2) 2a. Supposons qu'une telle constante C existe. En désignant par $\mathrm{E}(C)$ la partie entière de C, pour $p = 0 \in \mathbf{Z}$ et $q = \mathrm{E}(C) + 1 \in \mathbf{Z}$, on trouve $d_0(p,q) = 1$, $d_1(p,q) = q$, et donc $d_1(p,q) > C d_0(p,q)$: contradiction ! Par suite, il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que $d_1(p,q) < C d_0(p,q)$ pour tous $p, q \in \mathbf{Z}$.

   2b. Nous savons que si deux distances sur un même ensemble X sont équivalentes, alors elles définissent les mêmes ouverts de X. Compte tenu de 1) et 2.2a, on constate que la réciproque est généralement fausse.

Exercice 12

On a $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}_f(a,r)$. Or $\mathrm{B}_f(a,r)$ étant fermée, il vient $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B}_f(a,r)$ par définition même de l'adhérence. De même, comme $\mathrm{B}(a,r)$ est ouverte, on a $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{Int}[\mathrm{B}_f(a,r)]$ par définition de l'intérieur.
En reprenant les notations de l'exercice 11, supposons à présent $X = \mathbf{Z}$, $d = d_0$, $a = 0$, $r = 1$. On a alors $\mathrm{B}(0,1) = \{0\}$ et $\mathrm{B}_f(0,1) = \mathbf{Z}$, donc $\overline{\mathrm{B}(0,1)} = \{0\}$ puisque $\{0\}$ est fermé dans X et $\mathrm{Int}[\mathrm{B}_f(0,1)] = \mathbf{Z}$ puisque $\mathbf{Z}$ est ouvert dans $\mathbf{Z}$. Sur cet exemple, on a donc $\mathrm{B}_f(a,r) \not\subset \overline{\mathrm{B}(a,r)}$ et $\mathrm{Int}[\mathrm{B}_f(a,r)] \not\subset \mathrm{B}(a,r)$.

Exercice 13

1. Il s'agit de montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que la propriété P_n : « pour toutes parties $A_1, \dots, A_n \subset X$, $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$ » est vraie. Pour ce faire, on procède par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, le cas $n = 1$ étant clair. Remarquons qu'il suffit ensuite d'établir le cas $n = 2$, puisque si P_2 est vérifiée et que P_n l'est aussi à un rang $n \geqslant 2$, on a alors, pour toutes parties $A_1, \dots, A_{n+1} \subset X$:
$$\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}} = \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} \cup \overline{A_{n+1}} = \overline{A_1} \cup \cdots \cup \overline{A_n} \cup \overline{A_{n+1}},$$

ce qui prouve que P_{n+1} est vérifiée. Montrons donc que P_2 est vraie ; soient $A_1, A_2 \subset X$.

— On a $A_1 \subset \overline{A_1}$ et $A_2 \subset \overline{A_2}$, d'où $A_1 \cup A_2 \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ étant deux fermés de X, $\overline{A_1} \cup \overline{A_2}$ est donc un fermé de X contenant $A_1 \cup A_2$. Par définition de l'adhérence, ceci implique $\overline{A_1 \cup A_2} \subset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

— Inversement, pour tout $j \in \{1, 2\}$, on a $A_j \subset A_1 \cup A_2$, d'où $\overline{A_j} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$, et donc $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \subset \overline{A_1 \cup A_2}$.

2. — Montrons que $\overline{A_1 \cap \cdots \cap A_n} \subset \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le cas $n = 1$ étant clair. Pour les cas où $n = 2$, il suffit là encore de traiter le cas $n = 2$. On a $A_1 \subset \overline{A_1}$ et $A_2 \subset \overline{A_2}$, donc $A_1 \cap A_2 \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$. $\overline{A_1}$ et $\overline{A_2}$ étant fermés dans X, ceci entraine $\overline{A_1 \cap A_2} \subset \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$ par définition même de l'adhérence.

— L'inclusion réciproque est vraie si $n = 1$, mais généralement fausse dès que $n \geqslant 2$. En effet, si $X = \mathbf{R}$ et d est la distance usuelle sur $\mathbf{R}$, pour $A_1 =]0, 1[$ et $A_2 =]1, 2[$, on trouve $\overline{A_1} = [0, 1]$ et $\overline{A_2} = [1, 2]$, d'où $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \{1\}$, tandis que $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{\varnothing} = \varnothing$.

Exercice 14

A et B jouant des rôles symétriques, il suffit de démontrer que A est fermée dans X. Le résultat étant clair si $A = \varnothing$, nous supposerons $A \neq \varnothing$. On a $A \subset \overline{A}$ par définition de $\overline{A}$. Soit inversement $a \in \overline{A}$; on a *a fortiori* $a \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Or $A \cup B$ étant fermée dans X, d'après l'exercice 13, question 1, il vient $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B} = A \cup B$. Par suite, on a $a \in A$ ou $a \in B$. Mais ayant $a \in \overline{A}$ et $\overline{A} \cap B = \varnothing$, on voit que $a \in A$. Moralité, $\overline{A} \subset A$, donc $\overline{A} = A$, et A est bien fermée dans X.

Exercice 15

1 $\Rightarrow$ 2 : Comme $A \subset \overline{A}$, on a $A \cap U \subset \overline{A} \cap U$, et donc l'inclusion $\overline{A \cap U} \subset \overline{\overline{A} \cap U}$ est toujours vraie. Supposons à présent U ouverte dans X, et montrons inversement que $\overline{\overline{A} \cap U} \subset \overline{A \cap U}$. $\overline{A \cap U}$ étant fermé dans X, il suffit de prouver que $\overline{A} \cap U \subset \overline{A \cap U}$. Le résultat étant clair si $\overline{A} \cap U = \varnothing$, envisageons le cas où $\overline{A} \cap U \neq \varnothing$. Soit $x \in \overline{A} \cap U$; il s'agit de montrer que $x \in \overline{A \cap U}$, c'est-à-dire que pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, on a $V \cap (A \cap U) \neq \varnothing$. Soit donc $V \in \mathcal{V}(x)$. Comme $x \in \overline{A} \cap U$, on a d'une part $x \in \overline{A}$, et donc, pour tout $W \in \mathcal{V}(x)$:

$$W \cap A \; \neq \; \varnothing. \tag{5}$$

D'autre part, on a $x \in U$ avec U ouvert, ce qui implique que $V \cap U \in \mathcal{V}(x)$. En prenant $W = V \cap U$ dans (5), on aboutit au résultat souhaité.

2 $\Rightarrow$ 1 : Supposons 2 vérifiée. Pour $A = X \smallsetminus U$, cette condition s'écrit :

$$\overline{\overline{X \smallsetminus U} \cap U} \;=\; \overline{(X \smallsetminus U) \cap U} \;=\; \overline{\varnothing} \;=\; \varnothing.$$

Mais comme $\overline{X \smallsetminus U} \cap U \subset \overline{\overline{X \smallsetminus U} \cap U}$, il vient $\overline{X \smallsetminus U} \cap U = \varnothing$, *i.e.* $\overline{X \smallsetminus U} \subset X \smallsetminus U$. Par suite, $\overline{X \smallsetminus U} = X \smallsetminus U$, donc $X \smallsetminus U$ est un fermé de X, ce qui signifie que U est un ouvert de X.

Exercice 16

Désignons par $\mathrm{Int}_X(B)$ et $\mathrm{Int}_A(B)$ les intérieurs respectifs de B dans X et A. On rappelle en outre que, par définition, les ouverts de A sont les sous-ensembles de A de la forme $U_X \cap A$, pour $U_X \subset X$ ouvert dans X.

1) Si $\mathrm{Int}_X(B) = \varnothing$, le résultat est clair. Supposons donc ce cas exclu, et soit $x \in \mathrm{Int}_X(B)$. Il existe alors U_X ouvert de X contenant x tel que $U_X \subset B$. Or $B \subset A$, donc $U_X \cap A = U_X$, et par suite, U_X est un ouvert de A contenant x, ce qui montre bien que $x \in \mathrm{Int}_A(B)$. Ainsi, $\mathrm{Int}_X(B) \subset \mathrm{Int}_A(X)$.
Dans le cas où $X = \mathbf{R}$, d est la distance usuelle sur $\mathbf{R}$, et $A = B = [0, 1]$, on a $\mathrm{Int}_X(B) =]0, 1[$, tandis que $\mathrm{Int}_A(B) = \mathrm{Int}_A(A) = A = [0, 1]$. Ceci montre bien qu'en règle générale, on a $\mathrm{Int}_A(B) \not\subset \mathrm{Int}_X(B)$.

2) D'après 1), il s'agit de montrer que $\mathrm{Int}_A(B) \subset \mathrm{Int}_X(B)$. Le résultat étant clair si $\mathrm{Int}_A(B) = \varnothing$, nous supposerons $\mathrm{Int}_A(B) \neq \varnothing$; soit ainsi $x \in \mathrm{Int}_A(B)$. Par définition des ouverts de A, cela signifie qu'il existe U_X un ouvert de X contenant x tel que $U_X \cap A \subset B$. A étant supposée ouverte dans X, $U_X \cap A$ est également ouverte dans X, et donc $x \in \mathrm{Int}_X(B)$. Par conséquent, $\mathrm{Int}_A(B) \subset \mathrm{Int}_X(B)$.

Exercice 17

1) Soient $x, y, z \in X$ tels que $d(x,z) \neq d(y,z)$. Quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer :

$$d(y,z) \ < \ d(x,z). \tag{6}$$

Comme d est ultramétrique, on a ainsi :

$$d(x,y) \ \leqslant \ \max\{d(x,z), d(y,z)\} \ = \ d(x,z). \tag{7}$$

Mais on a aussi :

$$d(x,z) \ \leqslant \ \max\{d(x,y), d(y,z)\}. \tag{8}$$

Supposons $d(x,y) < d(y,z)$; (8) se réécrirait alors $d(x,z) \leqslant d(y,z)$, ce qui contredirait (6). On a par suite $d(y,z) \leqslant d(x,y)$, et (8) implique ainsi $d(x,z) \leqslant d(x,y)$. Compte tenu de (7), on aboutit à $d(x,y) = d(x,z)$, ce qui, d'après (6), fournit le résultat souhaité.

2) 2a. Montrons le résultat pour des boules ouvertes, la preuve pour des boules fermées étant *mutatis mutandis* même. Soient $a \in X$, $r > 0$, et $x \in \mathrm{B}(a,r)$. On veut montrer que $\mathrm{B}(a,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$, c'est-à-dire que $\mathrm{B}(a,r) = \mathrm{B}(x,r)$. Soit donc $y \in \mathrm{B}(a,r)$. On a alors $d(a,y) < r$, mais aussi $d(x,a) < r$ puisque $x \in \mathrm{B}(a,r)$. d étant ultramétrique, on en déduit :

$$d(x,y) \ \leqslant \ \max\{d(x,a), d(a,y)\} \ < \ r.$$

Ainsi, $y \in \mathrm{B}(x,r)$, et $\mathrm{B}(a,r) \subset \mathrm{B}(x,r)$. Par un raisonnement similaire, on montre que $\mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{B}(a,r)$.

2b. Soient $a \in X$ et $r > 0$.

— $\mathrm{B}(a,r)$ est ouverte dans X ; montrons qu'elle est également fermée dans X. Pour cela, on va montrer que $\overline{\mathrm{B}(a,r)} = \mathrm{B}(a,r)$, l'inclusion $\mathrm{B}(a,r) \subset \overline{\mathrm{B}(a,r)}$ étant claire. Soit donc $x \in \overline{\mathrm{B}(a,r)}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathrm{B}(x,\varepsilon) \cap \mathrm{B}(a,r) \neq \varnothing$. Ceci étant en particulier vrai pour $\varepsilon = r$, fixons $y \in \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{B}(a,r)$. Compte tenu de 2.2a, il vient $\mathrm{B}(x,r) = \mathrm{B}(y,r) = \mathrm{B}(a,r)$. Par suite, $x \in \mathrm{B}(a,r)$, et $\overline{\mathrm{B}(a,r)} \subset \mathrm{B}(a,r)$.

— $\mathrm{B}_f(a,r)$ est fermée dans X ; montrons qu'elle est également ouverte dans X. Pour cela, on va montrer que $\mathrm{Int}\,[\mathrm{B}_f(a,r)] = \mathrm{B}_f(a,r)$, l'inclusion $\mathrm{Int}\,[\mathrm{B}_f(a,r)] \subset \mathrm{B}_f(a,r)$ étant claire. Soit donc $x \in \mathrm{B}_f(a,r)$. D'après 2.2a, on a alors $x \in \mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{B}_f(x,r) = \mathrm{B}_f(a,r)$, d'où $\mathrm{B}_f(a,r) \subset \mathrm{Int}\,[\mathrm{B}_f(a,r)]$.

3) Soient $a_1, a_2 \in X$ et $r_1, r_2 > 0$ tels que $\mathrm{B}(a_1,r_1) \cap \mathrm{B}(a_2,r_2) \neq \varnothing$. Quitte à échanger les rôles de a_1, r_1 et a_2, r_2, on peut supposer $r_1 \leqslant r_2$. Soit alors $x \in \mathrm{B}(a_1,r_1) \cap \mathrm{B}(a_2,r_2)$. D'après 2.2a, on a $\mathrm{B}(x,r_1) = \mathrm{B}(a_1,r_1)$ et $\mathrm{B}(x,r_2) = \mathrm{B}(a_2,r_2)$. Et comme $r_1 \leqslant r_2$, il suit $\mathrm{B}(a_1,r_1) = \mathrm{B}(x,r_1) \subset \mathrm{B}(x,r_2) = \mathrm{B}(a_2,r_2)$.

Exercice 18

1 $\Rightarrow$ 2 : Supposons 1, *i.e.* $\mathring{A} \neq \varnothing$. Il existe alors U un ouvert non vide de X tel que $U \subset A$. Si D est une partie dense de X, il vient ainsi $U \cap D \neq \varnothing$, d'où $A \cap D \neq \varnothing$ puisque $U \subset A$. Par suite, 2 est vérifiée.

2 $\Rightarrow$ 1 : Supposons 1 non vérifiée, *i.e.* $\mathring{A} = \varnothing$. Dans ce cas, $D = X \smallsetminus A$ est dense dans X et $D \cap A = \varnothing$, ce qui montre que 2 n'est pas vérifiée.