TD 2 – Suites, continuité – Corrigé

Exercice 1
Soient (X, d) un espace métrique, $(u_n) \in X^{\mathbf{N}}$ une suite et $\ell \in X$. Montrer que si $u_n \to \ell$, alors $\{u_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ est fermé dans X.

Corrigé : On pose $E = \{u_n : n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$. On va montrer que le complémentaire de E est ouvert, c'est-à-dire que pour tout point $x \in E^{\complement}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset E^{\complement}$.

Soit donc $x \in E^{\complement}$. On pose $\delta = d(x, \ell)/2$. La remarque fondamentale est que $B(x, \delta) \cap B(\ell, \delta) = \emptyset$, et que tous les éléments de E, sauf un nombre fini, sont dans $B(\ell, \delta)$ (faites un dessin de la situation !). Mettons cela en forme.

On sait que $u_n \to_{n \to +\infty} \ell$. Donc il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $u_n \in B(\ell, \delta)$. Posons

$$\varepsilon = \min\big(\delta, d(u_1, x), d(u_2, x), \ldots, d(u_{n-1}, x)\big)$$

(on vérifie facilement que $\varepsilon > 0$). Alors $B(x, \varepsilon) \subset E^{\complement}$. En effet, x est éloigné d'au moins ε de tous les éléments de E :

(i) x est éloigné d'au moins ε de tous les éléments u_j pour $j < n$ par définition de ε comme minimum ;

(ii) x est éloigné d'au moins ε de tous les éléments u_j pour $j \geq n$, parce que $u_j \in B(\ell, \delta)$ et $B(\ell, \delta) \cap B(x, \varepsilon) \subset B(\ell, \delta) \cap B(x, \delta) = \emptyset$ (on a $\varepsilon \leq \delta$).

(iii) x est éloigné d'au moins ε de ℓ car $\varepsilon < \delta$.

On vient de montrer que pour tout $x \in E^{\complement}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset E^{\complement}$, ce qui prouve que E est fermé.

Exercice 2
Montrer que si une suite est convergente, alors elle est bornée.

Corrigé : Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in X$. Appliquons la définition de convergence de la suite à $\varepsilon = 1$:

$$\exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N,\, d(u_n, \ell) \leq 1.$$

Posons $R = \max(1, \max_{n<N} d(u_n, \ell)$. On vérifie alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $d(u_n, \ell) \leq R$. En effet, on a deux cas :

— soit $n < N$, auquel cas $d(u_n, \ell) \leq R$ par définition même de R ;

— soit $n < N$, auquel cas $d(u_n, \ell) \leq 1 \leq R$ par le choix de N.

Donc tous les termes de la suite dont dans le boule $B(\ell, R)$, ce qui signifie que la suite est bornée.

Exercice 3
Montrer que si une suite converge vers une limite ℓ, alors chacune de ses sous-suites converge vers ℓ.

Corrigé : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in X^{\mathbf{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in X$. Par la définition de la convergence,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbf{N} : \forall n \geq N_\varepsilon,\ d(u_n, \ell) \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Puisque la fonction φ est strictement croissante (par définition de suite extraite), on a $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, si $n \geq N_\varepsilon$, on a aussi $\varphi(n) \geq N_\varepsilon$ et donc par (1), $d(u_{\varphi(n)}, \ell) \leq \varepsilon$. Cela montre bien que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 4
Soient (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que si f est continue en $a \in X$ et g est continue en $f(a) \in Y$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Corrigé : On va montrer la continuité de $g \circ f$ avec la caractérisation par voisinages. Soit V un voisinage de $g(f(a))$. Alors par la continuité de g, $g^{-1}(V)$ est un voisinage de $f(a)$. De même, la continuité de f assure que $f^{-1}(g^{-1}(V)) = (g \circ f)^{-1}(V)$ est un voisinage de a. Cela montre la continuité de $g \circ f$ en a.

Exercice 5
Soit la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue. De même, pour tout $y_0 \in \mathbf{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ est continue.
2. Et pourtant… prouver que f n'est pas continue en 0.

Corrigé :

1. Fixons $x_0 \in \mathbf{R}$. on a deux cas :
   — soit $x_0 \neq 0$, auquel cas la continuité de la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ vient de la continuité des fractions rationnelles sur tout intervalle où leur dénominateur ne s'annule pas ;
   — soit $x_0 = 0$, auquel cas la fonction $y \mapsto f(x_0, y)$ est la fonction nulle qui est donc continue.
   La symétrie des rôles assure de même la continuité de la fonction $x \mapsto f(x, y_0)$ pour tout $y_0 \in \mathbf{R}$.
2. Pour $x \neq 0$, on calcule $f(x, x) = x^2/(x^2 + x^2) = 1/2$. Par conséquent, on a $\lim_{x\to 0} f(x, x) = 1/2$, alors que $f(0, 0) = 0$. Cela implique la non continuité de f en 0.

Exercice 6
Montrer que :

1. si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \to a$ et $v_n \to b$, alors $u_n + v_n \to a + b$;
2. le produit de deux fonctions continues à valeurs dans $\mathbf{R}$ est continue.

Corrigé : On va corriger cet exercice dans le cas de deux fonctions $f, g : X \to \mathbf{R}$, où (X, d) est un espace métrique. Soit $a \in X$, et montrons que $f \times g$ est continue en a. On sait que f et g sont continues en a, donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0 : d(x, a) < \eta_1 \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0 : d(x,a) < \eta_2 \implies |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Calculons

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(a)g(a)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(a)| + |f(x)g(a) - f(a)g(a)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)|. \end{aligned}$$

Soit $\eta' = \min(\eta_1, \eta_2)$, et choisissons x tel que $d(x,a) < \eta'$. Alors $|f(x)| < |f(a)| + \varepsilon$, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ et $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. En remplaçant tout ça dans dans l'équation précédente, on obtient

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq (|f(a)| + \varepsilon)\varepsilon + |g(a)|\varepsilon = \varepsilon(|f(a)| + \varepsilon + |g(a)|),$$

et cela pour tout $\varepsilon > 0$. Conclusion : $f \times g$ est continue en a.

Exercice 7
Trouver une fonction continue $f : X \to Y$ et un ouvert $O \subset X$ tels que $f(O) \subset Y$ ne soit pas un ouvert. Même question avec un fermé.

Corrigé : Pour le premier point, on prend $X = Y = \mathbf{R}$, $f : x \mapsto 0$ et $O = \mathbf{R}$. L'image $f(O) = \{0\}$ n'est pas ouverte.

Pour le second point, on peut prendre $X = Y = \mathbf{R}$, $f : x \mapsto \arctan x$ et $F = \mathbf{R}$. L'image $f(F) =]-\pi/2, \pi/2[$ n'est pas fermée.

Il existe même de tels exemples avec la fonction f bijective : prendre $X = [0,1[$, $Y = \mathcal{U}$, $f : x \mapsto e^{2i\pi x}$, $O = [0, 1/2[$ et $F = [1/2, 1[$ (qui sont bien respectivement ouvert et fermé !).

Exercice 8
On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *uniformément continue* si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ d(x,y) < \eta \implies d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

Rappelons qu'une application $f : X \to Y$ est dite *k-lipschitzenne* si pour tous x, y,

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq k d(x,y).$$

1. Vérifier qu'une application lipschitzienne est uniformément continue.
2. Montrer qu'une application uniformément continue est continue.

Corrigé :

1. Soit $f : X \to Y$ une application k-lipschitzienne, et $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \varepsilon/k$, et soient $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta$. Alors

   $$d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y) < k\eta = \varepsilon.$$

   Cela montre l'uniforme continuité de f
2. Soit $f : X \to Y$ une application uniformément continue. Alors

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ d(x,y) < \eta \implies d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

   Fixons $x_0 \in X$. Alors

   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 :\ d(x_0,y) < \eta \implies d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

   Cela montre la continuité de f en x_0, et donc puisque x_0 est arbitraire la continuité de f.

Exercice 9

Soit $C^0([0,1],\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. On rappelle que $C^0([0,1],\mathbf{R})$ est muni d'une distance "canonique" $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, l'application
$$\begin{aligned}\varphi : C^0([0,1],\mathbf{R}) &\to \mathbf{R}\\ f &\mapsto f(x)\end{aligned}$$
est continue.
2. Vérifier que si $f_n \to f$ au sens de cette métrique, alors f est continue.
3. Montrer que l'ensemble des fonctions croissantes est fermé dans $C^0([0,1],\mathbf{R})$.

Corrigé :

1. Il suffit de montrer que φ est 1-lipschitzienne. Et cela est trivial vu que
$$|f(x) - g(x)| \leq \sup_{y\in[0,1]} |f(y) - g(y)| = d_\infty(f,g).$$
2. On suppose que $f_n \to f$ pour d_∞, et on veut montrer que f est continue. Soit donc $x \in [0,1]$, et $\varepsilon > 0$. On choisit $n \in \mathbf{N}$ tel que $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon/3$. On écrit maintenant la continuité de f_n pour $\varepsilon/3$:
$$\exists \eta > 0 : |x - y| < \eta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon/3. \tag{2}$$
Soit maintenant $y \in [0,1]$ tel que $|x - y| < \eta$. On calcule
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$
le premier et le troisième terme sont inférieurs à $\varepsilon/3$ car $d_\infty(f, f_n) < \varepsilon/3$, et le deuxième terme est est inférieur à $\varepsilon/3$ par (2). Finalement, on obtient
$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$
ce qui prouve que f est continue en x.
3. Pour montrer que l'ensemble des fonctions croissantes est fermé dans $C^0([0,1],\mathbf{R})$, on choisit une suite f_n de fonctions croissantes, suite qui converge vers une fonction f, et on montre que f est croissante. Soit donc $x \leq y$, on veut montrer que $f(x) \leq f(y)$. Calculons
$$f(y) - f(x) = \big(f(y) - f_n(y)\big) + \big(f_n(y) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f(x)\big).$$
Puisque f_n est croissante, on obtient $f_n(y) - f_n(x) \geq 0$, si bien que
$$f(y) - f(x) \geq \big(f(y) - f_n(y)\big) + \big(f_n(x) - f(x)\big).$$
Mais les deux termes de la droite de cette inéquation tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc
$$f(y) - f(x) \geq 0,$$
CQFD

Exercice 10

Soient $p, q \in \mathbf{N}^*$. Prouver que l'ensemble des solutions d'un système linéaire à p équations et q inconnues réelles forme un fermé de $\mathbf{R}^q$.

Corrigé : L'ensemble des solutions d'un système linéaire à p équations et q inconnues réelles s'écrit sous la forme

$$\{(x_1,\dots,x_q)\in \mathbf{R}^n \mid \forall i\in [\![1,p]\!], L_i(x_1,\dots,x_q)=0\} = \bigcap_{i=1}^{p}\{(x_1,\dots,x_q)\in \mathbf{R}^n \mid L_i(x_1,\dots,x_q)=0\},$$

où les L_i sont des formes linéaires de $\mathbf{R}^n$. Chacun des ensembles de l'intersection peut être vu comme l'ensemble $\ker L_i = L_i^{-1}(\{0\})$, où le singleton $\{0\}$ est fermé. Par conséquent, chacun de ces sous-ensembles est fermé. On conclut par le fait qu'une intersection de fermés est fermée.

Exercice 11

(D'après le partiel de 2013) Soient (X,d) un espace métrique et A,B deux parties non vides de X. On suppose que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $a\in A$ et $b\in B$ tels que $d(a,b)<\varepsilon$. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de B telles que la suite réelle $\big(d(a_n,b_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers 0.

Corrigé : Choisissons $\varepsilon = 1/(n+1)$. Par définition, il existe donc $a_n\in A$ et $b_n\in B$ tels que $d(a_n,b_n)<1/(n+1)$. On conclut par le fait que la suite $(1/(n+1))$ tend vers 0.

Exercice 12

On rappelle que $GL_n(\mathbf{R})$ désigne le sous-ensemble de $M_n(\mathbf{R})$ formé des matrices inversibles. Si on identifie $M_n(\mathbf{R})$ avec l'ensemble des familles de n vecteurs de $\mathbf{R}^n$, on voit qu'une matrice est inversible si et seulement si la famille forme une base de $\mathbf{R}^n$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $M_n(\mathbf{R})$.

Rappelons que l'application déterminant $\det : M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ est un polynôme en les coefficients de la matrice (par exemple, $\det(M)=ad-bc$ sur $M_2(\mathbf{R})$) ; d'autre part une matrice est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul.

2. Montrer que toute fonction polynomiale est continue.
3. En déduire que que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.
4. On rappelle que $SL_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices de déterminant 1, et que $O_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales (i.e. telles que $M^tM=\mathrm{Id}$). Les ensembles $SL_n(\mathbf{R})$ et $O_n(\mathbf{R})$ sont-ils ouverts ? fermés ?

Corrigé : Il est sous-entendu que l'on utilise la topologie classique sur l'espace des matrices, topologie qui vient de n'importe quelle norme sur $\mathbf{R}^{n^2}$ (toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). On peut donc choisir n'importe quelle distance qui vient d'une norme sur $M_n(\mathbf{R})$, et on choisira ici la norme

$$d_\infty(A,B)=\max_{i,j}|a_{i,j}-b_{i,j}|.$$

1. On veut montrer que $GL_n(\mathbf{R})$ est dense dans $M_n(\mathbf{R})$. L'énoncé suggère d'identifier $M_n(\mathbf{R})$ avec l'espace des n-uplets de vecteurs de $\mathbf{R}^n$. On va en fait montrer par récurrence la propriété :
   "Si $v_1,\dots,v_k$ est une famille de k vecteurs de $\mathbf{R}^n$, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe une famille libre $v_1',\dots,v_k'$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que pour tout i, $d_\infty(v_i,v_i')<\varepsilon$."
   La propriété est triviale pour $k=0$ (il n'y a rien à faire !).
   Supposons la propriété vraie au rang $k<n$, et montrons-la au rang $k+1$. Soit $v_1,\dots,v_{k+1}$ est une famille de $k+1$ vecteurs de $\mathbf{R}^n$, et $\varepsilon>0$. Alors par hypothèse de récurrence, il existe une famille libre $v_1',\dots,v_k'$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que pour tout $i\le k$, $d_\infty(v_i,v_i')<\varepsilon$. On a alors deux cas :

(i) $v_{k+1} \notin \mathrm{Vect}(v'_1, \ldots, v'_k)$. Alors on pose $v'_{k+1} = v_{k+1}$.

(ii) $v_{k+1} \in \mathrm{Vect}(v'_1, \ldots, v'_k)$. Alors choisit un vecteur $w \notin \mathrm{Vect}(v'_1, \ldots, v'_k)$ de norme inférieure à ε (ce qui est possible car $k < n$), et on pose $v'_{k+1} = v_{k+1} + w$.

Dans les deux cas, la famille $v'_1, \ldots, v'_{k+1}$ est libre et à distance inférieure à ε de $v_1, \ldots, v_{k+1}$. La propriété est donc vraie au rang $k + 1$.

Par conséquent, la propriété est vraie au rang n. On a donc trouvé un n-uplet de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ qui forme une famille libre (donc une base, autrement dit la matrice associée est inversible), et à distance au plus ε de la famille initiale.

2. Par définition, toute fonction polynomiale est obtenue par un nombre fini de produits et sommes de fonctions du type
$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_i,$$
pour un certain i entre 1 et k. Ces fonctions étant elles-mêmes continues (il aurait fallu le faire en TD...), la fonction polynomiale est continue.

3. Le déterminant est un polynôme en les coefficients de la matrice, donc est continu en tant qu'application de $M_n(\mathbf{R})$ vers $\mathbf{R}$. $GL_n(\mathbf{R})$ est donc ouvert, en tant qu'image réciproque par le déterminant de l'ouvert $\mathbf{R}^*$.

4. De même, $SL_n(\mathbf{R})$ est l'image réciproque par le déterminant du fermé $\{1\}$, et donc est fermé. Pour $O_n(\mathbf{R})$, l'application
$$\begin{aligned} M_n(\mathbf{R}) &\to M_n(\mathbf{R}) \\ A &\mapsto A^t A \end{aligned}$$
est polynomiale coordonnée par coordonnée, elle est donc continue. Et donc l'image réciproque du fermé $\{\mathrm{Id}\}$, à savoir $O_n(\mathbf{R})$, est fermée.