TD 4 – Compacité

1 Quelques exercices clasiques

Exercice 1
Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que tout sous-ensemble fini de X est compact.

Corrigé Soit $\{O_i : i \in I\}$ une famille d'ouverts de X telle que $A \subseteq \cup_I O_i$. Montrons qu'il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $A \subseteq \cup_J O_j$. Écrivons $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$. Pour tout $x_k \in A \subseteq \cup_I O_i$, il y a $i_k \in I$ tel que $x_k \in O_{i_k}$. Donc $A = \{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_n}$. Le famille $J = \{i_1, \cdots, i_n\}$ nous donne donc un sous-recouvrement fini.

Exercice 2
Montrer que tout sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.

Corrigé Démontrons-le par le critère séquentiel. Soit F un sous-ensemble fermé de K compact. Soit aussi $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de F. Puisque $F \subseteq K$, c'est aussi une suite de K ; elle admet donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers $\ell \in K$. Or cette suis-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est à valeurs dans F fermé, sa limite ℓ est par conséquent elle aussi dans F. On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une suis-suite convergeant dans F, et donc que F est compact.

Exercice 3
Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X. Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

Corrigé Soit $(x_n) \in (K \cup L)^{\mathbf{N}}$ une suite de $K \cup L$; montrons qu'elle admet une valeur d'adhérence. En effet si $x_n \in K$ infiniment souvent, on peut trouver dans K une valeur d'adhérence pour la sous-suite associée. Sinon, alors $x_n \in L$ infiniment souvent, donc infiniment souvent, et le même raisonnement tient. Dans tous les cas il y a une valeur d'adhérence dans $K \cup L$.

Exercice 4
Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques compacts. Montrer que l'espace $X_1 \times X_2$, muni de la métrique δ définie par

$$\delta\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

pour tous $x_1, y_1 \in X_1$ et $x_2, y_2 \in X_2$, est compact,

1. pour la définition séquentielle de la compacité ;
2. pour la définition topologique de la compacité.

Corrigé Commençons par la définition séquentielle (Bolzano-Weierstrass). On se donne $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (X_1 \times X_2)^{\mathbf{N}}$ une suite de $X_1 \times X_2$ et on veut montrer quelle admet une sous-suite convergente. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire $x_n = (u_n, v_n) \in X_1 \times X_2$. Puisque X_1 est compact, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite $u_{\varphi(n)}$ convergeant vers $\ell_1 \in X_1$. On considère alors la suite $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$. C'est une suite de X_2, elle admet donc une sous-suite $v_{\varphi(\psi(n))}$ convergeant vers $\ell_2 \in X_2$. De plus, la suite $u_{\varphi(\psi(n))}$ est une sous-suite de $u_{\varphi(n)}$, elle converge donc vers ℓ_1. On vérifie alors facilement que la suite $x_n = (u_n, v_n)$ converge dans $X_1 \times X_2$ vers la limite (ℓ_1, ℓ_2).

Attention, ce raisonnement ne marche pas si on extrait indépendamment deux sous-suites de u_n et v_n. Attention aussi au sous-suites de sous-suites : une sous-suite de $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est bien de la forme $v_{\varphi(\psi(n))}$ (et pas $v_{\psi(\varphi(n))}$).

Passons à la définition topologique (Borel-Lebesgue). On veut montrer que l'espace $X_1 \times X_2$, muni de la distance

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \max\big(d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\big)$$

est compact pour la définition de Borel-Lebesgue.

Soit donc $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $X_1 \times X_2$ par des ouverts. On veut en extraire un sous-recouvrement fini.

On commence par définir un recouvrement plus fin : pour tout $i \in I$ et tout $z \in O_i$, il existe deux ouverts U_i^z et V_i^z de respectivement X_1 et X_2, tels que

— $z \in U_i^z \times V_i^z$;

— $U_i^z \times V_i^z \subset O_i$.

En effet, par la définition de la distance d sur $X_1 \times X_2$, tout voisinage de x contient un ouvert de la forme $U \times V$, avec U un ouvert de X_1 et V un ouvert de X_2. Alors la famille d'ouverts $(U_i^z \times V_i^z)_{i\in I, x\in O_i}$ est un recouvrement de $X_1 \times X_2$ par des ouverts, dont chacun est inclus dans un des O_i. Par conséquent, si on arrive à en extraire un sous-recouvrement fini, alors on en déduira automatiquement un sous-recouvrement fini de la famille $(O_i)_{i\in I}$.

Soit maintenant $x \in X_1$. On voit facilement que l'ensemble $\{x\} \times X_2$ est compact (il est homéomorphe à X_2). Donc, du recouvrement de $\{x\} \times X_2$ par les ouverts $U_i^z \times V_i^z$, on peut extraire un sous-recouvrement fini $(U_x^j \times V_x^j)_{j=1}^{n_x}$ (où chacun des $U_x^j \times V_x^j$ est égal à un des $U_i^z \times V_i^z$).

On définit alors $\tilde{U}_x = \bigcap_{j=1}^{n_x} U_x^j$. En tant qu'intersection finie d'ouverts de X_1, c'est un ouvert de X_1, qui contient x. Par conséquent, la famille $(\tilde{U}_x)_{x\in X_1}$ est un recouvrement du compact X_1 par des ouverts, il en existe donc un sous recouvrement fini $(\tilde{U}_{x_k})_{k=1}^q$.

On vérifie alors que la famille finie d'ouverts

$$(U_{x_k}^j \times V_{x_k}^j)_{\substack{1\le k\le q \\ 1\le j\le n_{x_k}}}$$

recouvre bien l'ensemble $X_1 \times X_2$: si $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, alors il existe au moins un k tel que $x_1 \in \tilde{U}_{x_k}$, puis au moins un j tel que $x_2 \in V_{x_k}^j$. Par conséquent (puisque $\tilde{U}_{x_k} \subset U_{x_k}^j$), on a $(x_1, x_2) \in U_{x_k}^j \times V_{x_k}^j$. Donc la famille d'ouverts qu'on vient de définir est un recouvrement fini de $X_1 \times X_2$ par des ouverts, si bien que le recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ possède un sous-recouvrement fini.

Exercice 5

Soit $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$, qu'on identifie à $\mathbf{R}^{n^2}$. Montrer que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A^tA = I\}$ est compact. *Indication : on pourra montrer que l'application* $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^tB)$ *définit un produit scalaire sur* $M_n(\mathbf{R})$.

Corrigé Pour montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^t B)$ définit bien un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$, il suffit de vérifier point à point la définition de produit scalaire ! Le seul qui est non trivial est le caractère défini positif, mais il se résout facilement en passant en coordonnées (i.e. en écrivant $A = (a_{i,j})_{i,j}$). On remarque par ailleurs que ce produit scalaire correspond au produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}^{n^2}$.

Nous savons que pour la métrique usuelle, les parties compactes de $\mathbf{R}^{n^2}$ sont les parties fermées bornées. Il suffit donc de montrer que $O(n)$ est fermé et borné dans cet espace. Le caractère fermé est évident : la fonction $f : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ qui à M associe $M^t M$ est polynomiale, donc continue, et l'on voit que $O(n) = f^{-1}(\{I\})$, image réciproque d'un fermé.

De plus, on voit que pour la norme, $\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^t A)}$, on a $O(n) \subseteq B(0, \sqrt{n})$. L'ensemble est donc borné ; il est ainsi compact.

Exercice 6

On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ des fonctions continues qu'on munit de la métrique :

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

On veut montrer que la boule unité fermée *n'est pas compacte* (on rappelle que la boule unité fermée est l'ensemble $B = \{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}) \mid d_\infty(f, 0) \leq 1\}$, où 0 désigne la fonction constante égale à 0).

Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Expliquer, par un dessin, l'allure des fonctions appartenant à B.
2. Dessiner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une fonction $f_n : [0,1] \to [0,1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ et qui prend la valeur 1 au milieu de l'intervalle.
3. Pour tous n, m entiers, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$?
4. Conclure.

Corrigé

1. Ce sont les fonctions da=ont le graphe est dans le rectangle $[0,1] \times [-1,1]$.
2. On trace une fonction aussi simple que possible, par exemple une fonction affine par morceaux, telle que pour tout n, $f_n \in B_f(0,1)$. Plus précisément, $\frac{3}{2^{n+2}}$ est le milieu de l'intervalle $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$, et on choisit f_n comme étant nulle sur $\left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right] \cup \left[\frac{1}{2^n}, 1\right]$ égale à 1 en $\frac{3}{2^{n+2}}$ et affine sur les deux intervalles $\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+2}}\right]$ et $\left[\frac{3}{2^{n+2}}, \frac{1}{2^n}\right]$.
3. Si $m \neq n$, $\frac{3}{2^{n+2}} \notin \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$ donc $d_\infty(f_n, f_m) \geq |f_n(a_n) - f_m(a_n)| \geq 1$. De plus, le fait que les fonctions f_i soient à valeurs dans $[0,1]$ implique que $d_\infty(f_n, f_m) \leq 1$.
4. La suite (f_n) ne peut donc avoir de valeur d'adhérence dans $B_f(0,1)$: en effet, si c'était le cas elle aurait une sous-suite convergente, donc de Cauchy, ce qui est impossible étant donnée le résultat de la question précédente. On en déduit que la boule unité fermée n'est pas compacte.

Exercice 7

Soit X un espace métrique et A un sous-espace compact non vide de X. Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable dense dans A. *Indication : pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$ on pourra considérer un recouvrement par des boules de rayon $\frac{1}{n}$.*

Corrigé Fixons $n \in \mathbf{N}^*$ et considérons le recouvrement suivant :

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} B\left(a, \frac{1}{n}\right)$$

Par compacité, il existe un nombre fini de points $a_{n,1}, \ldots, a_{n,d_n}$ de A tels que :

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{d_n} B\left(a_{n,k}, \frac{1}{n}\right)$$

Nous affirmons que la partie $D = \{a_{n,k} : k \leq d_n\}$, clairement dénombrable, est dense dans A.

Soit en effet U un ouvert de X rencontrant A en un point a ; on montre que U rencontre D. Comme U est ouvert, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $B(a, \frac{1}{n}) \subseteq U$. Par construction, $A \subseteq \cup_{k=1}^{d_n} B(a_{n,k}, \frac{1}{n})$. Donc il existe $k \in \{1, \ldots, d_n\}$ tel que $a \in B(a_{n,k}, \frac{1}{n})$. Ainsi $a_{n,k} \in B(a, \frac{1}{n}) \cap D \subseteq U \cap D$. Nous avons bien montré que D est dense dans A.

Exercice 8 (rappel ?)
Soit (E, d) un espace métrique compact et soit (x_n) une suite d'éléments de E admettant une unique valeur d'adhérence. Montrer que (x_n) est convergente.

Corrigé On note x la valeur d'adhérence de la suite. Supposons que (x_n) ne converge pas vers x :

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbf{N}, \exists p \geq n : d(x_p, x) > \varepsilon$$

Fixons un tel ε et notons, pour $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n)$ le plus petit entier p tel que $p > \varphi(n-1)$ et $d(x_p, x) > \varepsilon$. Ceci définit une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ ayant pour propriété : $\forall n \in \mathbf{N}, d(x_{\varphi(n)}, x) > \varepsilon$. Il est clair que cette sous-suite n'a pas x pour valeur d'adhérence : contradiction. On en déduit donc que (x_n) converge vers x.

Exercice 9
Si (X, d) est un espace métrique non-vide compact. On note $\operatorname{diam}(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y) \in [0, +\infty]$.

1. Montrer que $\operatorname{diam}(X)$ est fini et qu'il existe $x, y \in X$ tels que $\operatorname{diam}(X) = d(x, y)$.
2. Montrer que, si $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de X, alors $F := \bigcap_n F_n$ est un compact non-vide de X et $\operatorname{diam}(F) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{diam}(F_n)$.
3. Si on ne suppose plus (X, d) compact, $\bigcap_n F_n$ est-il nécessairement non-vide ?

Corrigé

1. Considérons la fonction $f : X \times X \to \mathbf{R}$ qui à (x, y) associe $d_X(x, y)$. Cette fonction (de deux arguments) est continue. Le plus simple est de voir qu'elle est 1-lipschitzienne pour la distance $\delta((x, y), (x', y')) = d_X(x, x') + d_X(y, y')$. En effet, par inégalité triangulaire dans X :
$$d_X(x', y') \leq d_X(x', x) + d_X(x, y) + d_X(y, y')$$
et symétriquement, de sorte que $|f(x', y') - f(x, y)| = |d_X(x', y') - d_X(x, y)| \leq d_X(x', x) + d_X(y, y') = \delta((x, y), (x', y'))$.
La fonction numérique f étant continue sur le compact $X \times X$, y est bornée et atteint ses bornes.

2. Comme les fermés sont non-vides et emboîtés, toute intersection d'un nombre fini d'entre eux est non-vide ; par compacité de X, l'intersection $\cap_{\mathbf{N}} F_n$ est non-vide. En effet, si cette intersection était vide, on aurait, en passant au complémentaire, $X = (\cap_{\mathbf{N}} F_n)^{\complement} = \cup_{\mathbf{N}} F_n^{\complement}$. Cela constitue un recouvrement de X compact par des ouverts, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini : il existe $I \subset \mathbf{N}$ fini tel que $X = \cup_{n\in I} F_n^{\complement} = (\cap_{n\in I} F_n)^{\complement}$. Par conséquent, $\cap_{n\in I} F_n = \emptyset$, ce qui contredit le fait remarqué plus haut qu'une intersection finie de F_i est non vide.

   L'intersection $\cap_{\mathbf{N}} F_n$ est un fermé du compact X, donc un compact. En outre pour tout n, $F \subseteq F_n$, donc $\operatorname{diam}(F) \leq \operatorname{diam}(F_n)$ et l'on peut passer à la limite. Il nous reste à montrer $\lim \operatorname{diam}(F_n) \leq \operatorname{diam}(F)$.

   Or le diamètre est réalisé : donc pour tout n, il existe $a_n, b_n \in F_n$ tels que $\operatorname{diam}(F_n) = d(a_n, b_n)$. Par compacité de $X \times X$, on peut trouver une extraction simultanée $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $a_{\varphi(n)} \to \alpha$, $b_{\varphi(n)} \to \beta$. Or notons que si $n \geq m$ alors $a_n \in F_n \subseteq F_m$, donc à la limite $\alpha \in F_m$. Comme c'est vrai pour tout m on voit ainsi que $\alpha, \beta \in F$. Donc, en utilisant la continuité de la fonction distance, $\operatorname{diam}(F) \geq d(\alpha, \beta) = \lim d(a_n, b_n) = \lim \operatorname{diam}(F_n)$.

3. Ça ne marche pas sans compacité : considérer les fermés $[n, +\infty[$ de $\mathbf{R}$, dont l'intersection est vide.

Exercice 10
En utilisant le fait que toute fonction numérique (i.e. à valeurs réelles) continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, montrer le théorème de Heine : toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. *Indication : pour $\varepsilon > 0$ on pourra considérer l'ensemble $E = \{(x, x') \in X \times X : d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon\}$.*

Corrigé Soient X, Y deux espaces métriques avec X compact et $f : X \to Y$ une fonction continue. Montrons que f est uniformément continue.

Fixons $\varepsilon > 0$ et soit comme suggéré $E = \{(x, x') \in X \times X : d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon\}$. Par continuité de f, E est un fermé de X, donc compact. La fonction $d : E \to \mathbf{R}$ est continue sur le compact E donc bornée et atteint ses bornes : $\inf_E d = \min_E d$. Or E évite la diagonale $\{(x, x) : x \in X\}$ donc d ne s'annule pas sur E. Il suit que $\eta = \inf_E d > 0$. Notamment, pour $x, x' \in X$, on a $d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon \Rightarrow d(x, x') \geq \eta$. C'est la propriété d'uniforme continuité.

2 Exercices supplémentaires

Exercice 11
Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente, de limite notée x, d'un espace métrique X. Montrer que $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une partie compacte de X.

Corrigé Soit $A \subset \cup_{i\in I} O_i$ un recouvrement de A par des ouverts. Alors, puisque $x \in A$, il existe $\tilde{i} \in I$ tel que $x \in O_{\tilde{i}}$. Par définition de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $x_n \in O_{\tilde{i}}$. De plus, pour tout $n < N$, il existe $i_n \in I$ tel que $x_n \in O_{i_n}$. On a donc l'inclusion $A \subset O_{\tilde{i}} \cup \cup_{n<N} O_{i_n}$, ce qui donne un sous-recouvrement fini de A.

Exercice 12
Soient A et B deux parties de $\mathbf{R}^n$. On note : $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est ouverte alors $A + B$ est ouverte.
2. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.

3. Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors $A + B$ est fermée. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement compact ?
4. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement fermé si A et B sont seulement supposés fermés ?

Corrigé

1. Écrivons :
$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$$
Les ensembles de la forme $A + b$ sont des translatés d'ouverts de $\mathbf{R}^n$, donc des ouverts ; comme on en prend l'union, $A + B$ est ouvert.
2. C'est une autre technique. Considérons $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ qui à (x, y) associe $x + y$. Cette fonction est clairement continue. Par construction, $A + B = f(A \times B)$, image continue du compact $A \times B$, est donc compact.
3. Ça se complique un peu. Proposons une preuve séquentielle. Soit $(c_n) \in (A+B)^{\mathbf{N}}$ une suite de $A+B$. Supposons que (c_n) converge dans $\mathbf{R}^n$ vers un point x et montrons que $x \in A+B$. Écrivons $c_n = a_n + b_n$ avec des notations évidentes. Comme A est compact, il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\alpha \in A$. Alors $b_{\varphi(n)} = c_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$ tend vers $x - \alpha$. Comme B est fermé, $\beta = x - \alpha \in B$. En conclusion, $x = \alpha + \beta \in A + B$, et donc $A + B$ est fermé.

   En revanche $A + B$ n'est pas forcément compact : prendre $B = \mathbf{R}^n$ pour s'en convaincre !
4. L'argument précédent semble en fait incontournable. Et de fait, si A et B sont seulement fermés, alors $A + B$ ne l'est pas forcément. Prenons $A = \mathbf{R} \times \{0\}$ et $B = \{(x, e^x) : x \in \mathbf{R}\}$. Il est clair que ce sont des fermés. Pourtant $A+B = \{a+b : (a, b) \in A \times B\} = \{(x+a, e^x) : (a, x) \in \mathbf{R}^2\} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_{>0}$ qui n'est pas fermé.

Exercice 13

Soit (X, d) un espace métrique tel que pour tout $x \in X$ et tout $r \geq 0$, la boule fermée $B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ est compacte.

1. Montrer que X est complet.
2. Montrer que les parties compactes de X sont les sous-ensembles fermés bornés.

Corrigé

1. Rappelons que toute suite de Cauchy est bornée, et que toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence. Montrons que X est complet. Soit $(x_n) \in X^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy. Nous savons que (x_n) est bornée ; il existe donc une boule fermée $B_f(x, r)$ la contenant. Par hypothèse cette boule est compacte. Donc (x_n) admet dans $B_f(x, r)$ une valeur d'adhérence. Il suit que (x_n) est convergente. Nous avons bien montré la complétude.
2. Dans tout espace métrique, les compacts sont fermés et bornés. Montrons la réciproque dans notre espace (X, d) : soient $Y \subseteq X$ une partie fermée et bornée. Par hypothèse, il existe une boule fermée $B_f(x, r)$ contenant Y. Or cette boule est compacte, Y est donc compact en tant que sous-ensemble fermé d'un ensemble compact.

Exercice 14

Montrer que la distance entre deux compacts est atteinte, c'est-à-dire : si K et K' sont deux compacts d'un espace métrique, il existe $(x, x') \in K \times K'$ vérifiant $d(x, x') = d(K, K') := \inf_{(x,x') \in K \times K'} d(x, x')$.

Corrigé C'est essentiellement comme à l'exercice 9 : on forme la fonction $f : K \times K' \to \mathbf{R}$ qui à (x, x') associe $d(x, x')$. Cette fonction est continue sur un compact, donc bornée et atteint ses bornes.

Exercice 15
Dans un espace métrique (X, d), on considère un fermé non-vide F et un compact non vide K tels que $K \cap F = \emptyset$.

1. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y)$ est strictement positif. Ce résultat est-il vrai si K est seulement supposé fermé ?
2. Pour $\varepsilon > 0$ on note $K_\varepsilon := \{x \in X, \;\; d(x, K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert Ω de X tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est un ouvert de X et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Corrigé

1. Rappelons que la fonction $d_F : X \to \mathbf{R}$ qui à $x \in X$ associe $d(x, F)$ est continue, et ne s'annule que sur F. Notamment, sa restriction à K est une fonction continue et jamais nulle sur un compact. Elle atteint donc son infimum, qui est strictement positif. En conséquence, $d(K, F) > 0$.

   C'est faux pour deux fermés. On peut penser au graphe de l'exponentielle dans $\mathbf{R}^2$, et à l'axe horizontal. Comme la droite est asymptote à la courbe, la distance entre ces deux fermés est 0. En revanche ils sont disjoints.
2. Géométriquement, K_ε est un léger « épaississement »de K. En tout cas $K_\varepsilon = \cup_{x \in K} B(x, \varepsilon)$ est une union d'ouverts, donc un ouvert. Montrons la propriété voulue.

   Posons $F = \Omega^\complement$ (qui est donc fermé). On a deux cas :
   — $F = \emptyset$ i.e. $\Omega = X$. Dans ce cas, tout $\varepsilon > 0$ convient.
   — $F \neq \emptyset$. Alors on peut appliquer le résultat de la question 1, et poser $\varepsilon = d(K, F) > 0$. On a alors $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Exercice 16
On note E l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, $n \geq 1$.

1. Soit F un fermé non borné de E et $f : F \to \mathbf{R}$ une application continue telle que :
$$\lim_{x \in F, \|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
   Montrer qu'il existe x dans F vérifiant $f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$.
2. En déduire une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss : montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant admet une racine dans $\mathbf{C}$. *Indication : Si* $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbf{C}} |P(z)| > 0$, *construire un nombre complexe* $z \in \mathbf{C}$ *(proche de* z_0*) tel que* $|P(z)| < |P(z_0)|$.
3. Montrer que si ABC est un triangle du plan, alors il existe un point M du plan minimisant la somme des distances (euclidiennes) à A, B et C.

Corrigé

1. Soit $x_0 \in F$. Comme f tend vers $+\infty$ avec $\|x\|$, il existe A tel que $\forall x \in F, \|x\| \geq A \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$. On voit alors que $\inf_{y \in F} f(y) = \inf_{y \in K} f(y)$. Le problème d'optimisation (inférieure) de f sur F est ainsi ramené à $K = F \cap B_f(0, A)$, qui est fermé et borné, donc compact dans $\mathbf{R}^n$. Sur K la fonction numérique continue f est bornée et atteint ses bornes : $\exists x \in K : f(x) = \inf_{y \in K} f(y) = \inf_{y \in F} f(y)$.

2. Rappelons que le module $|z|$ d'un nombre complexe correspond à sa norme euclidienne $\|z\|$ dans l'identification $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.

   Supposons que $P \in \mathbf{C}[X]$ n'est pas constant, et ne s'annule pas ; écrivons $P = a_n X^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Comme x^n croît plus vite que x^k pour $k < n$, on a $\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty$. Nous pouvons donc appliquer la question précédente à la fonction numérique continue $|P|$ sur $\mathbf{C}$: il existe $z_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\inf_{\mathbf{C}} |P(z)| = \min_{\mathbf{C}} |P(z)| = |P(z_0)| > 0$. Nous allons faire un développement limité autour de z_0 et contredire la minimalité.

   Or avec les formules de Taylor on trouve $P(z_0+h) = P(z_0) + qh^k + o(h^k) = P(z_0)(1 + q'h^k + o(h^k))$ où q (et donc q') est un nombre complexe non-nul. Écrivons $q' = \rho e^{i\theta}$; considérons un nombre complexe $h = re^{it}$ avec $t = \frac{\pi-\theta}{k}$. On trouve :

   $$1 + q'h^k + o(h^k) = 1 + \rho e^{i\theta} r^k e^{ikt} + o(r^k) = 1 + \rho r^k e^{i\pi} + o(r^k) = 1 - \rho r^k + o(r^k)$$

   Cette quantité est réelle, proche de 1 mais inférieure à 1 quand r tend vers 0. En conclusion, pour h de cette forme :

   $$|P(z_0+h)| = |P(z_0)(1 + q'h^k + o(h^k))| = |P(z_0)|(1 - \rho r^k + o(r^k)) < |P(z_0)|$$

   C'est une contradiction. Le polynôme s'annule donc.

3. Fixons des points k_0 et f_0 de K et F, respectivement. Alors $d(K,F) \leq d(k_0, f_0) = d_0$. Pour « faire mieux », on peut donc se restreindre, en ce qui concerne F, aux points de F qui sont à distance au plus d_0 de K. Or K étant compact est borné donc dans une boule $B_f(0,r)$. On peut donc se restreindre à $F \cap B_f(0, r+d_0)$, qui est fermé et borné dans $\mathbf{R}^n$, donc compact. Nous voici ramenés à supposer F compact : et c'est alors bien connu.

   On peut aussi minimiser par suites, extraire dans le compact K, et se ramener à une suite dans une partie bornée de F pour extraire à nouveau.

   Cet argument paraît utiliser de façon cruciale l'équivalence, valable seulement dans les espaces vectoriels normés de dimension finie, entre « compact »et « fermé borné ». En effet, on peut produire un contre-exemple en dimension infinie. Considérons dans l'espace $\ell^1(\mathbf{R})$ des suites (absolument) sommables, l'élément $u_n = (0, \ldots, 0, 1 + \frac{1}{n}, 0, \ldots)$ qui est non-nul seulement en $k = n$. Alors $\|u_n\|_{\ell^1(\mathbf{R})} = 1 + \frac{1}{n}$. La suite (u_n) (suite de suites) n'a pas de valeur d'adhérence : en effet la convergence ℓ^1 entraîne la convergence simple, mais la limite simple de (u_n) est la suite nulle, qui reste à distance ≥ 1 de chaque terme. Soit $F = \{u_n : n \in \mathbf{N}^*\}$. Nous affirmons que F est fermé. En effet c'est $\{u_n : n \in \mathbf{N}^*\} \cup V$, où $V = \emptyset$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) ! Prenons enfin $K = \{0\}$, le singleton suite nulle. Alors $\forall n \in \mathbf{N}, d(0, u_n) = 1 + \frac{1}{n}$ donc $d(K,F) = 1$. Mais la distance n'est pas réalisée.

Exercice 17

1. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques avec (X,d) compact. Soit $f : X \to Y$ bijective et continue. Montrer que Y est compact et que f est un homéomorphisme.
2. Soient $\mathbf{S}^1$ le cercle unité dans le plan complexe et $f : [0, 2\pi[\to \mathbf{S}^1$ telle que $f(t) = e^{it}$. Montrer que f est bijective et continue. Montrer que la réciproque n'est pas continue. Comparer avec la question précédente.

Corrigé

1. Par surjectivité, $Y = f(X)$ est l'image continue du compact X, donc est un espace compact. Pour montrer que f est un homéomorphisme, il reste à démontrer que la réciproque $f^{-1} : Y \to X$ est continue. Or si F est un fermé de X, alors F est compact. Mais $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est alors compact, donc fermé dans Y. Ceci démontre bien que f^{-1} est continue.

2. La continuité et l'injectivité sont claires. La fonction réciproque n'est pourtant pas continue. En effet réfutons la caractérisation séquentielle : formons $z_n = e^{i(2\pi - \frac{1}{n})}$. Cette suite tend vers $e^{2i\pi} = 1$. Mais $f^{-1}(z_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$ ne tend pas vers $f^{-1}(1) = 0$. La fonction f^{-1} n'est pas continue en 1. C'est d'autant plus troublant que l'ensemble $\mathbf{S}^1$ est compact.

Exercice 18 (une version compacte du théorème de Picard)
Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $f : E \to E$ une application vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

1. La fonction f admet-elle nécessairement un point fixe ? (Considérer $E = [1, \infty[$ et $f(x) = x + \frac{1}{x}$.)

Dans la suite on suppose de plus que E est compact.

2. Montrer que f admet un unique point fixe a. *Indication : On pourra étudier la fonction* $x \mapsto d(f(x), x)$.
3. Soit $x_0 \in E$ et soit (x_n) la suite de E définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, pour $n \in \mathbf{N}$. Montrer que (x_n) converge vers a quand n tend vers ∞.

Corrigé

1. La réponse est évidemement non : on forme comme indiqué $E = [1, \infty[$ et $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Alors E est complet, et f vérifie bien, pour tous $x > y$ dans E :
$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| (x - y) - \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| < |x - y|$$
Pourtant f est sans point fixe, car l'équation $x = x + \frac{1}{x}$ est sans solution dans E.
Nous supposons dorénavant E compact.
2. Considérons comme indiqué la fonction $g : E \to \mathbf{R}$ qui à x associe $d(x, f(x))$. Il s'agit d'une fonction numérique continue (par composition) sur un compact : elle est donc bornée et atteint son minimum en $a \in E$. Nous affirmons que a est point fixe. En effet si $f(a) \neq a$, alors appliquant l'hypothèse à cette paire de points : $g(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) = g(a)$, ce qui contredit la minimalité. Il suit que $f(a) = a$.
L'unicité est aisée : si a et b sont des points fixes avec $a \neq b$, alors $d(a, b) = d(f(a), f(b)) < d(a, b)$: contradiction.
3. Si la suite converge, c'est clairement vers un point fixe, donc vers a ; mais on ne sait pas si la suite converge.
Posons $u_n = d(x_n, a)$. Observons que pour tout n,
$$u_{n+1} = d(x_{n+1}, a) = d(f(x_n), f(a)) < d(x_n, a) = u_n$$
donc la suite numérique et positive (u_n) est décroissante. Elle converge, par valeurs supérieures, vers un réel d. Montrons que $d = 0$ et supposons donc que ce n'est pas le cas. Formons le fermé $F = \{x \in K : d(x, a) \geq d\}$; il contient la suite (x_n) et c'est un compact de K. Introduisons la fonction $h(x) = d(x, a) - d(f(x), a)$. Notons que si $x \neq a$, alors $d(f(x), a) = d(f(x), f(a)) < d(x, a)$ donc h ne s'annule qu'en a. Mais puisque l'on a supposé $d > 0$, $a \notin F$, si bien que h ne s'annule pas sur le compact F.
Il y a donc $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in F$, $h(x) \geq \varepsilon$. Comme la suite (x_n) est dans F, on a ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = d(x_{n+1}, a) - d(x_n, a) = h(x_n) \geq \varepsilon$$
À la limite, $0 \geq \varepsilon$, ce qui est une contradiction.
Ainsi $d = 0$: et donc $x_n \to a$.