TD 5 – Connexité

Exercice 1
Soit (X, d) un espace métrique. Établir l'équivalence entre les conditions suivantes :

1. Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de (X, d) sont $\varnothing$ et X.
2. X n'est pas réunion de deux ouverts non vides et disjoints de X.
3. X n'est pas réunion de deux fermés non vides et disjoints de X.
4. Il n'existe pas de surjection continue définie sur X à valeurs dans le sous-espace $\{0, 1\}$ de $\mathbf{R}$.

Corrigé 1 $\Rightarrow$ 2 : Supposons 2 non vérifiée, et soient U_1, U_2 deux ouverts non vides et disjoints de X tels que $X = U_1 \cup U_2$. Il est alors clair que $U_1 = X \setminus U_2$ est une partie à la fois ouverte et fermée de X, distincte de $\varnothing$ et X. Par suite, 1 n'est pas vérifiée.
2 $\Rightarrow$ 3 : Supposons 3 non vérifiée, et soient F_1, F_2 deux fermés non vides et disjoints de X tels que $X = F_1 \cup F_2$. Alors $F_1 = X \setminus F_2$, $F_2 = X \setminus F_1$, donc F_1, F_2 sont également ouverts, et 2 n'est pas vérifiée.
3 $\Rightarrow$ 4 : Supposons 4 non vérifiée, et soit $f : X \to \{0, 1\}$ une surjection continue. On a alors $X = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ avec $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{0\})$ disjoints par définition, fermés par continuité de f, et non vides par surjectivité de f. Par suite, 4 n'est pas vérifiée.
4 $\Rightarrow$ 1 : Supposons 1 non vérifiée, et soit A une partie de X, distincte de $\varnothing$ et X, à la fois ouverte et fermée. Par passage au complémentaire, $X \setminus A$ est également distincte de $\varnothing$ et X, et fermée. On définit alors une surjection $f : X \to \{0, 1\}$ en posant $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in X \setminus A$. Et comme $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $f^{-1}(X) = X$, $f^{-1}(\{0\}) = X \setminus A$, $f^{-1}(\{1\}) = A$, l'image réciproque de tout fermé de $\{0, 1\}$ par f est un fermé de X, ce qui prouve que f est continue. En somme, 4 n'est pas vérifiée.

Exercice 2
Soient (X, d) un espace métrique, et A une partie connexe de X.

1. Prouver que toute partie B de X vérifiant $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe (en particulier, $\overline{A}$ est connexe).
2. A-t-on systématiquement $\mathring{A}$ connexe ?

Corrigé

1. Soit $f : B \to \{0, 1\}$ une fonction continue ; il s'agit de montrer que f est constante. Par connexité de A, on sait que $f_{|A}$ est constante, égale à 1 par exemple. Soit maintenant $b \in B$. Puisque $B \subset \overline{A}$, il existe une suite $(a_n)_n \in A^{\mathbf{N}}$ convergeant vers b. Par continuité de f, cela donne
$$1 = f(a_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(b).$$
Par conséquent, f est constante égale à 1 sur B, qui est donc convexe.

- A est connexe par arcs, puisque pour tout $(x, y) \in A$, l'application $\gamma : [0, 1] \to A$, $t \mapsto ((1-t)x, (1-t)y)$ est continue, et vérifie $\gamma(0) = (x, y)$, $\gamma(1) = (0, 0)$. En particulier, A est connexe.
- On a $\mathring{A} = Q_1 \cup Q_2$, et Q_1 et Q_2 étant deux ouverts non vides et disjoints de $\mathbf{R}^2$, $\mathring{A}$ n'est pas connexe.

La connexité de A n'implique donc généralement pas celle de $\mathring{A}$.

Exercice 3
Soit (X, d_X) un espace métrique, $f : X \to \mathbf{R}$ une application continue, et A une partie connexe de X.

1. Prouver que les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles.
2. En déduire que f atteint toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, pour tous $a, b \in X$.

Corrigé

1) Soit I une partie de $\mathbf{R}$. Si I contient au plus un point, I est clairement connexe. Nous pouvons donc supposer que I contient au moins deux nombres réels distincts.
   - Si I n'est pas un intervalle, il existe alors $a_1, b, a_2 \in \mathbf{R}$ tels que $a_1 < b < a_2$, avec $a_1, a_2 \in I$ et $b \in \mathbf{R} \setminus I$. Posant $U_1 =]-\infty, b[$ et $U_2 =]b, +\infty[$, on a ainsi $I \subset U_1 \cap U_2$, $I \cap U_1 \cap U_2 = \varnothing$, mais $a_1 \in I \cap U_1$ et $a_2 \in I \cap U_2$, ce qui montre que $I \cap U_1$ et $I \cap U_2$ sont non vides, et donc I non connexe.
   - Tout intervalle de $\mathbf{R}$ est connexe car connexe par arcs car convexe (par définition). Attention : lorsqu'on démontre l'implication connexe par arcs $\Longrightarrow$ connexe, on utilise la connexité du segment $[0, 1]$. Pour éviter un raisonnement qui serait circulaire, il faut alors montrer la connexité de $[0, 1]$ à la main (i.e. sans passer par la connexité par arcs).

Exercice 4
Soit (X, d) un espace métrique. On considère la relarion définie sur X par xRy s'il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Montrer que R est une relation d'équivalence. *Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées composantes connexes par arcs de X.*

Corrigé Il faut vérifier les hypothèses de la définition de relation d'équivalence point par point.

- La réflexivité est évidente : pour tout $x \in X$, le chemin constant égal à x est bien un chemin reliant x à x.
- Pour la symétrie, on suppose que xRy. Il existe donc un chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ continu tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. L'application $t \mapsto \gamma(1-t)$ donne alors une chemin de X allant de y à x.
- Le point le plus difficile est la transitivité. On suppose que xRy et yRz, donc il existe $\gamma_1 : [0, 1] \to X$ continu tel que $\gamma_1(0) = x$ et $\gamma_1(1) = y$, et $\gamma_2 : [0, 1] \to X$ continu tel que $\gamma_2(0) = y$ et $\gamma_2(1) = z$. On construit alors la concaténation de γ_1 avec γ_2 de la manière suivante :

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$$
$$t \longmapsto \left| \begin{array}{ll} \gamma_1(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } t > 1/2. \end{array} \right.$$

  On vérifie alors que le chemin γ ainsi construit est continu (seule la continuité en $1/2$ demande un peu de réflexion), et vérifie $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = z$. Cela montre la transitivité de la relation R.

Exercice 5
On munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure naturelle d'espace métrique produit. Dans chacun des cas suivants, pour l'entier n explicité, la partie A de $\mathbf{R}^n$ proposée est-elle connexe ? connexe par arcs ?

1. $n = 1$ et $A = \mathbf{Q}$.
2. $n = 2$ et $A = \{(t, e^t) \mid t \in \mathbf{R}\}$.
3. $n = 2$ et $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy > 1\}$.
4. $n = 2$ et $A = \mathbf{R}^2 \setminus ([0, 1] \times \mathbf{R})$.

Corrigé On rappelle qu'un ensemble connexe par arcs est connexe (et donc un ensemble qui n'est pas connexe n'est pas non plus connexe par arcs).

1. Les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles. $\mathbf{Q}$ n'étant pas un intervalle de $\mathbf{R}$ ($\sqrt{2} \in [0, 1]$ mais $0, 1 \in \mathbf{Q}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$), $\mathbf{Q}$ n'est pas connexe (et donc pas connexe par arcs).
2. On a $A = f(\mathbf{R})$, avec $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $t \mapsto (t, e^t)$ et $\mathbf{R}$ intervalle, donc connexe par arcs de $\mathbf{R}$. Ainsi, A est connexe par arcs (donc connexe).

3) Soient $U_1 =]0, +\infty[^2$, $U_2 =]-\infty, 0[^2$; U_1, U_2 sont deux ouverts de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Or comme $(2, 2) \in A \cap U_1$ et $(-2, -2) \in A \cap U_2$, on a $A \cap U_1 \neq \varnothing$ et $A \cap U_2 \neq \varnothing$, donc A n'est pas connexe (et donc pas connexe par arcs).

4) Soient $U_1 =]-\infty, 0[$, $U_2 =]1, +\infty[$; U_1, U_2 sont deux ouverts de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Or comme $(-1, 0) \in A \cap U_1$ et $(2, 0) \in A \cap U_2$, on a $A \cap U_1 \neq \varnothing$ et $A \cap U_2 \neq \varnothing$, donc A n'est pas connexe (et donc pas connexe par arcs).

Exercice 6
Étudier, pour tous $x \in \mathbf{R}$ et $z \in \mathbf{R}^2$, la connexité de $\mathbf{R} \setminus \{x\}$ et $\mathbf{R}^2 \setminus \{z\}$. Les espaces $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ sont-ils homéomorphes ?

Corrigé

— Soient $x \in \mathbf{R}$, $U_1 =]-\infty, x[$ et $U_2 =]x, +\infty[$; U_1 et U_2 sont deux ouverts de $\mathbf{R}$ tels que $\mathbf{R} \setminus \{x\} \subset U_1 \cap U_2$ et $(\mathbf{R} \setminus \{x\}) \cap U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Ayant $(\mathbf{R} \setminus \{x\}) \cap U_1 \neq \varnothing$ et $(\mathbf{R} \setminus \{x\}) \cap U_2 \neq \varnothing$, $\mathbf{R} \setminus \{x\}$ n'est pas connexe.

— Soient $z \in \mathbf{C}$, $x, y \in \mathbf{C} \setminus \{z\}$, et considérons $[x, y] = \{(1 - t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$. Si $z \notin [x, y]$, alors $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus \{z\}$, $t \mapsto (1 - t)x + ty$ est une application continue vérifiant $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Si $z \in [x, y]$, alors $x \neq y$, et :
$$\gamma \ : \ [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus \{z\}, \ t \mapsto \frac{x + y}{2} + \left| \frac{x - y}{2} \right| e^{it + \theta},$$
où θ est un argument de $x - y$, est une application continue vérifiant $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.
Pour tous $x, y \in \mathbf{C} \setminus \{z\}$, il existe ainsi $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C} \setminus \{z\}$ continue telle que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, ce qui prouve que $\mathbf{C} \setminus \{z\}$ est connexe par arcs, donc connexe.

Supposons maintenant qu'il existe un homéomorphisme $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. On a alors f^{-1} continue, et $\mathbf{R} \setminus \{f(0)\} = f^{-1}(\mathbf{C} \setminus \{0\})$ par bijectivité de f. Or, d'après **??**), $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ est connexe, tandis que $\mathbf{R} \setminus \{f(0)\}$ ne l'est pas. L'image d'un connexe par une application continue étant connexe, ceci est absurde. Par suite, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 7
On note $\mathbf{S}^1$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est égal à 1.

1. Prouver que $\mathbf{S}^1$ est connexe par arcs.
2. (a) Montrer qu'il n'existe pas de bijection continue de $\mathbf{S}^1$ dans $[0, 1]$.
   (b) En déduire qu'il n'existe pas d'injection continue de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}$.
3. Soit $f : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$ une application continue. Établir l'existence de $z \in \mathbf{S}^1$ tel que $f(z) = f(-z)$.

Corrigé

1) Soient $x, y \in \mathbf{S}^1$, $\theta_x, \theta_y \in [0, 2\pi[$ des arguments respectifs de x, y, et $\gamma : [0,1] \to \mathbf{S}^1$, $t \mapsto e^{(1-t)\theta_x + t\theta_y}$. Alors γ est une application continue vérifiant $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. D'où la connexité par arcs de $\mathbf{S}^1$.

2) 2a. Soient $f : [0,1] \to \mathbf{S}^1$ une application bijective, et $z = f^{-1}(1/2) \in \mathbf{S}^1$.
   — On a $f\left(\mathbf{S}^1 \setminus \{z\}\right) = [0,1] \setminus \{1/2\}$, et que $[0,1] \setminus \{1/2\}$ n'est pas connexe.
   — Montrons que $\mathbf{S}^1 \setminus \{z\}$ est connexe. Soient $x, y \in \mathbf{S}^1 \setminus \{z\}$, et notons $\theta_x, \theta_y, \theta_z \in [0, 2\pi[$ des arguments respectifs de x, y, z ; quitte à échanger les rôles de x et y, on peut supposer $\theta_x \leq \theta_y$. Si $\theta_z \notin [\theta_x, \theta_y]$, alors $\gamma : [0,1] \to \mathbf{S}^1 \setminus \{z\}$, $t \mapsto e^{(1-t)\theta_x + t\theta_y}$ est continue et vérifie $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. En revanche, si $\theta_z \in [\theta_x, \theta_y]$, $\gamma : [0,1] \to \mathbf{S}^1 \setminus \{z\}$, $t \mapsto e^{(1-t)\theta_x + t(\theta_y - 2\pi)}$ est continue et vérifie $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Par suite, $\mathbf{S}^1 \setminus \{z\}$ est connexe par arcs, donc connexe.

   L'image d'un connexe par une application continue étant connexe, il résulte des deux points précédents que f n'est pas continue.

   2b. Supposons disposer d'une injection continue $j : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$.
   — Par continuité de j et connexité par arcs, donc connexité, de $\mathbf{S}^1$, $j(\mathbf{S}^1)$ est une partie connexe de $\mathbf{R}$, à savoir un intervalle.
   — On rappelle que les parties compactes de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ sont les parties fermées et bornées. Il est clair que $\mathbf{S}^1$ est fermée et bornée dans $\mathbf{C}$, donc compacte dans $\mathbf{C}$. Par suite, $j(\mathbf{S}^1)$ est une partie compacte de $\mathbf{R}$, donc fermée et bornée dans $\mathbf{R}$.

   D'après les deux points précédents, il existe $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $j(\mathbf{S}^1) = [a, b]$, et on a $a < b$ par injectivité de j. L'intervalle $[a, b]$ étant homéomorphe à $[0, 1]$, nous disposerions ainsi d'une bijection continue entre $\mathbf{S}^1$ et $[0, 1]$, ce qui est absurde en vertu de 2.2a. Il n'existe donc pas d'injection continue de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{R}$.

3) Pour tout $z \in \mathbf{S}^1$, on a $-z \in \mathbf{S}^1$. Nous pouvons donc considérer $\varphi : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{R}$, $z \mapsto f(z) - f(-z)$; cette application est continue par composition. Elle vérifie de plus $\varphi(z) = -\varphi(-z)$ pour tout $z \in \mathbf{S}^1$. En particulier, il existe donc $\zeta \in \mathbf{S}^1$ tel que $\varphi(\zeta) \geq 0$ et $\varphi(-\zeta) \leq 0$. Or, φ étant continue et $\mathbf{S}^1$ connexe par arcs, donc connexe, $\varphi(\mathbf{S}^1)$ est un intervalle de $\mathbf{R}$. Et comme $\varphi(-\zeta) \leq 0 \leq \varphi(\zeta)$, on a donc $0 \in \varphi(\mathbf{S}^1)$, d'où l'existence de $z \in \mathbf{S}^1$ tel que $\varphi(z) = 0$, *i.e.* $f(z) = f(-z)$.

Exercice 8

Soit (X, d) un espace métrique.

1. L'intersection de deux parties connexes de X est-elle connexe ?
2. La réunion de deux parties connexes de X est-elle connexe ?

Corrigé

1. Dans $\mathbf{C}$, $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{S}^1 \mid |z| = 1\}$ est connexe par arcs (question 1) de l'exercice 7), donc connexe, tout comme $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re} z = 0\}$, qui est homéomorphe à $\mathbf{R}$. Or $\mathbf{S}^1 \cap D = \{\pm 1\}$, et $\{\pm 1\}$ n'est clairement pas une partie connexe de $\mathbf{C}$.
2. Dans $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$ sont connexes ; pourtant, $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}_-^* \cup \mathbf{R}_+^*$ n'est pas une partie connexe de $\mathbf{R}$.

Exercice 9

Soient (X, d) un espace métrique, $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de parties connexes de X, et $A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n$. On suppose que $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Prouver que A est connexe.

Corrigé Soit $f : A \to \{0,1\}$ une application continue.

- Par connexité de A_0, on a $f_{|A_0}$ constante et donc, par exemple, $f_{|A_0} = 0$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $f_{|A_n} = 0$. Par connexité de A_{n+1}, on a $f_{|A_{n+1}}$ constante. Or, $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$; fixant $a \in A_n \cap A_{n+1}$, il vient ainsi $f_{|A_{n+1}}(x) = f_{|A_{n+1}}(a) = f_{|A_n}(a) = 0$ pour tout $x \in A_{n+1}$, *i.e.* $f_{|A_{n+1}} = 0$.

Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, on a ainsi montré que $f_{|A_n} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par définition de A, on en déduit que $f = 0$, cela prouve la connexité de A.

Exercice 10
Soient (X, d_X) un espace métrique connexe, (Y, d_Y) un espace métrique, et $f : X \to Y$ une application continue telle que, pour tout $x \in X$, il existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que $f_{|V_x}$ soit constante. Montrer que f est constante.

Corrigé Fixons $x_0 \in X$, et posons $A = \{x \in X \mid f(x) = f(x_0)\}$.

- On a $A = f^{-1}(\{f(x_0)\})$. Par continuité de f, A est donc fermée dans X.
- Soit $x \in A$. Par hypothèse, il existe $V_x \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V_x \subset A$. On a donc existence de $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$, et l'arbitraire sur x montre alors que A est ouverte.

Ainsi, A est une partie à la fois ouverte et fermée de X. Et puisqu'elle contient, par définition, x_0, on a $A \neq \varnothing$, et donc $A = X$ par connexité de X. Par conséquent, $f(x) = f(x_0)$ pour tout $x \in X$, et f est donc constante.

Exercice 11
Soient $\mathbf{K}$ un corps parmi $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Une partie C de E est dite *convexe* si, pour tous $x, y \in C$ et tout $t \in [0,1]$, on a $(1-t)x + ty \in C$.

1. Montrer que toute partie convexe de E est connexe par arcs.
2. (a) Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est convexe.
   (b) Montrer que toute boule ouverte ou fermée de E est convexe.

Corrigé

1) Soient $x, y \in C$, et posons $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ pour tout $t \in [0,1]$; par hypothèse, $\gamma(t) \in C$ pour tout $t \in [0,1]$. L'application $\gamma : [0,1] \to C$, $t \mapsto (1-t)x + ty$ ainsi obtenue étant continue, avec $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, on en déduit que C est connexe par arcs.

2) 2a. Soient F un sous-espace vectoriel de E, $x, y \in [0,1]$. Comme F est un sous-espace de E, on a, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)x + ty \in F$. Ceci montre que F est convexe.

   2b. Faisons la preuve pour des boules ouvertes, la preuve pour des boules fermées étant identique. Soient donc $a \in E$, $r > 0$, et $x, y \in B(a,r)$. Ayant $\|x-a\| < r$ et $\|y-a\| < r$, il vient :

$$\begin{aligned}\|(1-t)x + ty - a\| = \|(1-t)(x-a) + t(y-a)\| &\leq (1-t)\,\|x-a\| + t\,\|y-a\| \\ &< \ (1-t)r + tr = r,\end{aligned}$$

   pour tout $t \in [0,1]$, donc $(1-t)x + ty \in B(a,r)$. Ceci montre la convexité de $B(a,r)$.

Exercice 12
Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et identifions $M_n(\mathbf{R})$ à $\mathbf{R}^{n^2}$ muni de sa structure naturelle d'espace métrique produit.

1. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs. *On pourra se souvenir du pivot de Gauss et utiliser le fait que* $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ *est engendré par les transvections.*

2. Justifier que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe, mais montrer que :

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid \det M > 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid \det M < 0\}$$

sont connexes par arcs.

Corrigé

1. L'application de l'algorithme du pivot de Gauss implique que toute matrice $A \in SL_n(\mathbf{R})$ peut s'écrire comme un produit de matrices de transpositions. Rappelons qu'une matrice de transposition est de la forme $T_{\lambda,i,j} = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, où $E_{i,j}$ est la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ ayant des 0 partout sauf en la position i, j où on a un 1. Autrement dit, on a

$$A = \prod_{k=0}^{N} T_{\lambda_k, i_k, j_k}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on pose alors, $A_t = \prod_{k=0}^{N} T_{t\lambda_k, i_k, j_k}$. Puisque toute matrice de transposition est de déterminant 1, on a $A_t \in SL_n(\mathbf{R})$ pour tout $t \in [0,1]$. On a de plus $A_0 = I_n$ et $A_1 = A$. Enfin, l'applicaiton $t \mapsto A_t$ est clairement continue car polynomiale en t coefficient par coefficient. Cela construit un chemin reliant A à l'identité, et implique donc que $SL_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

2. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ n'est pas connexe puisqu'il peut s'écrire comme l'union disjointe

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) = \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cup \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}),$$

avec

$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid \det M > 0\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \mid \det M < 0\}.$$

Ces deux derniers ensembles sont des ouverts non vides de $GL_n(\mathbf{R})$, en tant qu'images réciproques de respectivement $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$ par l'application déterminant.

En revanche, chacun de ces deux ensembles est connexe par arcs. En effet, par exemple, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ et tout $t \in [0,1]$, on peut définir la matrice

$$A_t = \big((1-t)(detA)^{-n} + t\big)\, A.$$

On remarque que $A_1 = 1$, que $\det A_t > 0$ et donc $A_t \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, et que $\det A_0 = 1$ et donc $A_1 \in SL_n(\mathbf{R})$. Cela fournit un chemin reliant A à une matrice de $SL_n(\mathbf{R})$, et par concaténation des chemins (on a vu que $SL_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs) un autre chemin allant de A jusqu'à I_n. Ceci montre que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercice 13

Dans $\mathbf{R}^2$, que l'on munit de sa structure usuelle d'espace métrique produit, on considère :

$$A = \left\{ \left(t,\, \sin\frac{1}{t}\right) \;\middle|\; t > 0 \right\}.$$

1. Montrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$.
2. Déterminer $\overline{A}$.
3. Prouver que $\overline{A}$ est connexe, mais que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.

Corrigé

1. A est l'image du connexe par arcs $\mathbf{R}_+^*$ par l'application continue
$$\begin{aligned}\mathbf{R}_+^* &\longrightarrow \mathbf{R}^2\\ t &\longmapsto \left(t,\, \sin\frac{1}{t}\right),\end{aligned}$$
c'est donc un ensemble connexe par arcs.

2. On va montrer par double inclusion que $\overline{A} = A \cup \{0\} \times [-1,1]$.
Soit $(x,y) \in \overline{A}$. Alors il existe une suite (t_n) de réels strictement positifs tels que $(t_n, \sin(1/t_n))$ converge vers (x,y). Il y a deux cas possibles. Soit $x > 0$, auquel cas $\sin(1/t_n)$ converge vers $\sin(1/x)$, et donc $y = \sin(1/x)$: dans ce cas $(x,y) \in A$. Soit $x = 0$, et pour tout n, on a $\sin(1/t_n) \in [-1,1]$; puisque $[-1,1]$ est fermé on en déduit que $(x,y) \in \{0\} \times [-1,1]$. Cela montre que $\overline{A} \subset A \cup \{0\} \times [-1,1]$.
Soit maintenant $(x,y) \in A \cup (\{0\} \times [-1,1])$. Si $(x,y) \in A$, puisque $A \subset \overline{A}$, on a $(x,y) \in \overline{A}$. Sinon, $(x,y) \in A \cup (\{0\} \times [-1,1])$, et on veut trouver une suite de points de A tendant vers $(x,y) = (0,y)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit
$$t_n = \frac{1}{\arcsin y + 2n\pi}.$$
La suite t_n tend vers 0, et on a $\sin(1/t_n) = \sin(\arcsin y + 2n\pi) = y$. Par conséquent, on a
$$A \ni \left(t_n, \sin\frac{1}{t_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,y).$$
On en déduit que $(x,y) \in \overline{A}$.

3. Le fait que $\overline{A}$ est connexe est une conséquence de l'exercice 2.
Montrons que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs. Supposons qu'il existe une chemin γ reliant $(0,1) \in \overline{A}$ à $(1, \sin 1) \in A$. On écrit en coordonnées $\gamma(t) = \big(\gamma_x(t), \gamma_y(t)\big)$. Soit
$$t_0 = \inf\{t \in [0,1] \mid \gamma_x(t) > 0\}.$$
Alors par continuité de γ, on a $\gamma_x(t_0) = 0$. De plus, pour tout $t > t_0$, on a $\gamma(t) \in A$; on peut donc écrire $\gamma(t) = \big(\gamma_x(t), \sin(1/\gamma_x(t))\big)$. De nouveau, par continuité de γ, on a $\lim_{t\to t_0+} \gamma_x(t) = 0$; rappelons qu'on a aussi $\gamma_x(1) = 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, posons
$$t_n = \inf\left\{t \in]t_0, 1] \;\middle|\; \gamma_x(t) > \frac{1}{2\pi n}\right\} \quad \text{et} \quad u_n = \inf\left\{t \in]t_0, 1] \;\middle|\; \gamma_x(t) > \frac{1}{2\pi n + \pi/2}\right\}$$
On vérifie que par continuité de γ_x, pour tout $n > 0$ on a $\gamma_x(t_n) = 1/(2\pi n)$, et $\gamma_x(u_n) = 1/(2\pi n + \pi/2)$, mais aussi que les suites (t_n) et (u_n) convergent vers t_0. On a de plus $\gamma_y(t_n) = \sin(2\pi n) = 0$, ainsi que $\gamma_y(t_n) = \sin(2\pi n + \pi/2) = 1$ pour tout $n > 1$. On a donc une suite de temps t_n tendant vers t_0, telle que $\gamma(t_n)$ tende vers $(0,0)$, ainsi qu'une suite de temps u_n tendant vers t_0, telle que $\gamma(u_n)$ tende vers $(0,1)$. Cela contredit la continuité de γ en t_0. On en déduit que $\overline{A}$ n'est pas connexe par arcs.

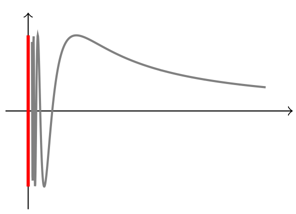

FIGURE 1 – L'ensemble A (gris) et son adhérence (union avec l'ensemble rouge)