TD 6 – Espaces vectoriels normés

Dans cette feuille, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$

Exercice 1
Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R}^2$, que l'on munit d'une norme $\|\cdot\|$, on considère l'application :

$$L \ : \ E \to E, \ (x, y) \mapsto (x, \ 2y - x).$$

1. Justifier que L est une application linéaire continue de E dans lui-même.
2. Expliciter $N(L)$ dans les cas où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1 : E \to \mathbf{R}_+, \ (x, y) \mapsto |x| + |y|$ et $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty : E \to \mathbf{R}_+, \ (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$.

Correction :
1. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est de dimension finie sur $\mathbf{R}$, l'application L qui est linéaire est donc continue.
2. On commence par le cas où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$. On a, par inégalité triangulaire pour $|\cdot|$,

$$\|L(x, y)\|_1 = |x| + |2y - x| \leq |x| + |2y| + |x| = 2\,\|(x, y)\|_1 \,.$$

   Par conséquent, $N(L) \leq 2$. De plus, si on choisit $(x, y) = (-1, 1)$, on a $\|(x, y)\| = 2$, et

$$\|L(x, y)\|_1 = |-1| + |2 + 1| = 4 = 2\,\|(x, y)\|_\infty \,,$$

   ce qui indique que $N(L) \geq 2$. On a montré que $N(L) = 2$.
   Passons au cas où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$. On a, par inégalité triangulaire pour $|\cdot|$,

$$\|L(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |2y - x|) \leq \max(|x|, |2y| + |x|) = 2|y| + |x| \leq 3\,\|(x, y)\|_\infty \,.$$

   Par conséquent, $N(L) \leq 3$. De plus, si on choisit $(x, y) = (-1, 1)$, on a $\|(x, y)\| = 1$, et

$$\|L(x, y)\|_1 = \max(|-1|, |2 + 1|) = 3 = 3\,\|(x, y)\|_\infty \,,$$

   ce qui indique que $N(L) \geq 3$. On a montré que $N(L) = 3$.

Remarquons que cela montre que la norme (subordonnée) d'une application linéaire dépend de la norme choisie au départ.

Exercice 2
Soient E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbf{R}_+, \ f \mapsto \sup\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\}$, et :

$$L \ : \ E \to \mathbf{R}, \ f \mapsto \int_0^1 f(t)dt.$$

1. Montrer que L est une forme linéaire continue de E dans $\mathbf{R}$, et déterminer sa norme $N(L)$.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des applications de E nulles en 0, que l'on munit de la restriction de $\|\cdot\|_\infty$ à F. Justifier que $L_{|F}$ est continue, et déterminer sa norme $N(L_{|F})$.

Correction :

1. On calcule, pour $f \in E$:
$$|L(f)| = \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|f\|_\infty \mathrm{d}t = \|f\|_\infty.$$
Cela montre que la norme subordonnée vérifie $N(L) \leq 1$ (et que donc L est continue par propriété du cours).
De plus, si on prend pour f la fonction constante égale à 1, on a $\|f|-_\infty = 1$ et $L(f) = 1$, donc $N(f) \geq 1$.
Cela montre que $N(f) = 1$.
2. La restriction d'une fonction continue est toujours continue, donc $L_{|F}$ est continue. De plus, sa norme est forcément inférieure à la norme de L : $N(L_{|F}) \leq N(L)$.
Considérons mainenant les fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ définies, pour $n \geq 1$, par
$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \leq 1/n \\ 1 & \text{si } x \geq 1/n \end{cases}$$
On a bien $f_n \in F$ pour tout entier $n > 0$, et $\|f_n\|_\infty = 1$. De plus,
$$L(f_n) = \int_0^{1/n} nx\mathrm{d}x + \int_{1/n}^1 1\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$
Cela montre que $N(L_{|F}) \geq 1$, et donc que $N(L_{|F}) = 1$.

Exercice 3
Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $E = \mathbf{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère les normes :
$$\|\cdot\|_1 \, : \, E \to \mathbf{R}_+, \, \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k X^k \mapsto \sum_{k\in\mathbf{N}} |a_k| \quad \text{et} \quad \|\cdot\|_\infty \, : \, E \to \mathbf{R}_+, \, \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k X^k \mapsto \sup\{|a_k| \mid k \in \mathbf{N}\}.$$

1. Montrer que la dérivation $D : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$, $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k X^k \mapsto \sum_{k\in\mathbf{N}} (k+1)a_{k+1}X^k$ n'est pas continue.
2. (a) Montrer que la forme linéaire $\phi_1 : (E, \|\cdot\|_1) \to \mathbf{R}$, $P \mapsto P(1)$ est continue, et déterminer sa norme.
   (b) Montrer que la forme linéaire $\phi_2 : (E, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbf{R}$, $P \mapsto P(1)$ n'est pas continue.
   (c) Montrer que la forme linéaire $\phi_3 : (E, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbf{R}$, $P \mapsto P(1/2)$ est continue, et déterminer sa norme.
3. (a) Montrer que l'application identité $f : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$, $P \mapsto P$ est continue.
   (b) L'application identité $g : (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_1)$, $P \mapsto P$ est-elle continue ?

1. Il suffit de trouver une suite (P_n) de polynômes tendant vers 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ dont les dérivées ne tendent pas vers 0. Pour cela, on choisit $P_n = 1/nX^n$. On a $\|P_n\|_\infty = 1/n$ qui tend vers 0, mais $P_n' = X^{n-1}$ et donc $\|P_n'\|_\infty = 1$ qui ne tend pas vers 0. Cela montre que la dérivation n'est pas continue.
2. (a) On calcule
$$|\phi_1(P)| = |P(1)| = \left|\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\right| \leq \sum_{k\in\mathbf{N}} |a_k| = \|P\|_1 .$$
Donc ϕ_1 est continue pour $\|\cdot\|_1$ et de plus $N(\phi_1) \leq 1$. De plus, le polynôme $P = 1$ vérifie $\|P\|_1 = 1$ et $\phi_1(P) = 1$. Cela montre que $N(\phi_1) \geq 1$, et donc que $N(\phi_1) = 1$.

(b) On définit une suite $(P_n)_n$ de polynômes par $P_n = \sum_{k=0}^n X^n$. On a $\|P_n\|_\infty = 1$, mais $P_n(1) = n+1$ qui tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Cela montre que la norme de ϕ_2 ne peut pas être finie, et que donc ϕ_2 n'est pas continue.

(c) On calcule

$$|\phi_3(P)| = |P(1/2)| = \left|\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{a_k}{2^k}\right| \leq \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{|a_k|}{2^k} \leq \|P\|_\infty \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{1}{2^k} = 2\,\|P\|_\infty\,.$$

Par conséquent, ϕ_3 est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et de plus $N(\phi_3) \leq 2$.
D'autre part, si on pose comme au-dessus $P_n = \sum_{k=0}^n X^n$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\phi_3(P_n) = 2(1 - 1/2^{n+1})$, qui tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$. Cela montre que la norme de ϕ_3 est supérieure à 2, et donc que $N(\phi_3) = 2$.

3. (a) On calcule, pour $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\|P\|_1 \leq 1$,

$$\|P\|_\infty = \max\{|a_n|\} \leq \sum_{n\in\mathbf{N}} |a_n| = \|P\|_1 \leq 1.$$

Cela montre que l'identité est continue de $(E, \|\cdot\|_1)$ vers $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

(b) On choisit la même suite de polynômes qu'au-dessus, à savoir $P_n = \sum_{k=0}^n X^n$. On a $\|P_n\|_1 \,/\, \|P_n\|_\infty = n+1$, ce qui montre que l'identité n'est pas continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 4
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$, unitaire et de degré n, on ait $\int_0^1 |P| > C_n$.

Correction : On sait que l'application

$$\|\cdot\|_\infty : \sum_{k=1}^n a_k X^k \mapsto \max_{0\leq k\leq n} |a_k|$$

est une norme sur $\mathbf{R}_n[X]$ (c'est la norme infinie lorsqu'on identifie $\mathbf{R}_n[X]$ à $\mathbf{R}^{n+1}$). De même, l'application

$$N : P \mapsto \int_0^1 |P|$$

est elle aussi une norme sur $\mathbf{R}_n[X]$ (c'est la restriction de la norme L^1 à $\mathbf{R}_n[X]$). Puisque $\mathbf{R}_n[X]$ est de dimension finie, par équivalence des normes, on sait qu'il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$ on ait $N(P) \geq C_n\|P\|_\infty$. Or, pour tout polynôme P unitaire, on a $\|P\|_\infty \geq 1$. Par conséquent, $N(P) \geq C_n$, ce qui est exactement ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 5
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E :

- On appelle *série de terme général* x_n la suite, notée $\sum x_n$, $\left(x_n, \sum_{k=0}^n x_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$.
- La série $\sum x_n$ est dite *convergente* si la suite $\left(\sum_{k=0}^n x_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E converge dans E.

— La série $\sum x_n$ est dite *absolument convergente* si la suite numérique $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \|x_k\|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

1. $(E, \|\cdot\|)$ est un K-espace de Banach.
2. Toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Correction : $\underline{1 \implies 2}$ Soit $\sum x_n$ une série absolument convergente dans un espace de Banach E. Alors la suite $(\sum_{k=0}^{n} \|x_k\|)_n$ est convergente, donc de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall p > q \geq N, \sum_{k=0}^{p} \|x_k\| - \sum_{k=0}^{q} \|x_k\| = \sum_{k=q+1}^{p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Par conséquent, par inégalité triangulaire, on a

$$\left\| \sum_{k=0}^{p} x_k - \sum_{k=0}^{q} x_k \right\| = \left\| \sum_{k=q+1}^{p} x_k \right\| \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|x_k\| < \varepsilon.$$

Cela montre que la série $\sum x_n$ est de Cauchy, donc convergente.

$\underline{2 \implies 1}$ On suppose que toute série absolument convergente de E est convergente. Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de E. Par conséquent, pour tout $j \in \mathbf{N}$, il existe $N_j \in \mathbf{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N_j$, on a $\|y_p - y_q\| \leq 2^{-j}$. On peut toujours supposer la suite $(N_j)_{j\in\mathbf{N}}$ strictement croissante. On considère alors la série de terme général $x_0 = y_{N_0}$ et pour tout $j \geq 1$, $x_j = y_{N_{j+1}} - y_{N_j}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} x_{N_k} = y_{n_0} + \sum_{k=1}^{n} y_{N_{k+1}} - y_{N_k} = y_{N_{n+1}}.$$

Cette série est absolument convergente, puisque

$$\sum_{k=0}^{n} \|x_{N_k}\| \leq \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 2.$$

Elle converge donc dans E, autrement dit la limite $\lim_{n\to+\infty} y_{N_{n+1}}$ existe. Cela fournit une valeur d'adhérence à la suite (y_n), qui par ailleurs est de Cauchy ; cette suite converge donc.

Exercice 6

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbf{K}$-espace de Banach et $\mathcal{E}$ une base de E. En utilisant le théorème de Baire, prouver que $\mathcal{E}$ n'est pas dénombrable (*i.e.* n'est pas en bijection avec $\mathbf{N}$).

Supposons que E possède une base $\mathcal{E}$ dénombrable : la base $\mathcal{E}$ peut s'écrire $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots)$. Posons $F_n = \mathrm{vect}(e_1, \cdots, e_n)$. C'est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, qui est donc fermé (propriété du cours). De plus, F_n est d'intérieur vide : si $x \in F_n$, alors la suite de points $x_k = x + 1/ke_{n+1}$ est une suite de points dans $E \setminus F_n$ qui converge vers x. Le théorème de Baire assure alors que $E = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est d'intérieur vide, ce qui est absurde.

Exercice 7

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, c'est-à-dire un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tel que la norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire rende $\mathcal{H}$ complet. Soit aussi C un sous-ensemble convexe, fermé en non vide de $\mathcal{H}$. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique

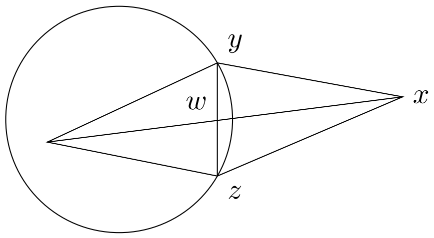

FIGURE 1 – Projection sur un convexe fermé

point $P_C(x) \in C$ (appelée *projection* sur le convexe C) tel que la distance de x à C soit égale à celle de x à $P_C(x)$.
Indication : on pourra faire un dessin, utiliser le théorème des fermés emboîtés version Banach, ainsi que l'identité du parallélogramme (valable uniquement dans les espaces préhilbertiens) :

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2.$$

Tout d'abord, dans un espace préhilbertien, on a

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = \left(\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2\right) + \left(\|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2\right) = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

ce qui démontre l'identité du parallélogramme.
Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$ on considère l'ensemble

$$E_\varepsilon = \{y \in C \mid \|x-y\| \leq d(x,C) + \varepsilon\}.$$

Cet ensemble est un fermé de $\mathcal{H}$, en tant qu'intersection du fermé C avec l'image réciproque de $[0, d(x,C)+\varepsilon]$ par l'application continue $y \mapsto \|x-y\|$. De plus, on peut majorer le diamètre de E_ε. En effet, pour $y, z \in E_\varepsilon$, l'identité du parallélogramme donne (voir la figure **??**

$$2\|x-y\|^2 + 2\|x-z\|^2 = \|y-z\|^2 + \|2(x-w)\|^2,$$

d'où

$$\|y-z\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-z\|^2 - 4\|x-w\|^2,$$

où $w = (y+z)/2 \in C$ puisque C est convexe. En particulier, on a $\|x-w\| \geq d(x,C)$ et donc

$$\|y-z\|^2 \leq 2(d(x,C)+\varepsilon)^2 + 2(d(x,C)+\varepsilon)^2 - 4d(x,C)^2 = \varepsilon(8d(x,C)+4\varepsilon).$$

Cela montre que le diamètre de E_ε tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. La suite d'ensembles $(E_{1/n})_{n\geq 1}$ est donc une suite de fermés emboîtés dont le diamètre tend vers 0, dans l'espace complet $\mathcal{H}$. L'intersection de ces ensembles est donc réduite à un unique point, que l'on note $P_C(x)$ et qui est l'unique point de C réalisant la distance de x à C.

Exercice 8
Soient $n \in \mathbf{N}$, et D l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{K})$. On munit $M_n(\mathbf{K})$, qui s'identifie naturellement à $\mathbf{K}^{n^2}$, de sa structure usuelle d'espace métrique produit. L'objet de cet exercice est de montrer que D est dense dans $M_n(\mathbf{K})$ si et seulement si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, ou $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $n = 1$.

1. Traiter le cas $n = 1$. On supposera $n \geq 2$ dans la suite de l'exercice.
2. On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, et soit $A \in M_n(\mathbf{K})$.

(a) Justifier l'existence de $T \in M_n(\mathbf{K})$ triangulaire supérieure et de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$.

(b) Trouver une suite de matrices triangulaires supérieures convergeant vers T, formée de matrices ayant toutes leurs valeurs propres distinctes.

(c) En déduire que $A \in \overline{D}$.

3. On suppose $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (et toujours $n > 1$). Trouver une matrice $A \in M_n(\mathbf{K})$ dont le polynôme caractéristique n'a qu'au plus une racine réelle, qui si elle existe est simple. Conclure.

1. Si $n = 1$, toute matrice est formée d'un unique élément, et est donc diagonale (et *a fortiori* diagonalisable).
2. (a) Le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbf{K})$ est un polynôme complexe, qui est donc scindé sur $\mathbf{C}$ (par le théorème fondamental de l'algèbre). Cela implique que la matrice A est triangularisable sur $\mathbf{C}$, ce qu'on voulait démontrer.

   (b) On munit l'espace $M_n(\mathbf{K})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée par le supremum des modules des coefficients. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_i = T_{i,i}$ le i-ème coefficient diagonal de T (les λ_i sont les valeurs propres de la matrice A). On construit alors facilement des nombres complexes $\varepsilon_{1,k}, \cdots, \varepsilon_{n,k}$ tels que d'une part pour tout i on a $|\varepsilon_{i,k}| \leq 1/k$, et d'autres part les nombres complexes $\lambda_i + \varepsilon_{i,k}$ sont deux à deux différents. On pose alors $T_k = T + \mathrm{diag}(\varepsilon_{1,k}, \cdots, \varepsilon_{n,k})$. Cette matrice est triangulaire supérieure et a toutes ses valeurs propres distinctes. De plus, on a $\|T - T_k\|_\infty \leq 1/k$, les matrices T_k convergent donc vers la matrice T.

   (c) Puisque T_n est triangulaire supérieure et a toutes ses valeurs propres distinctes, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples ; elle est donc diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Par conséquent, les matrices PT_kP^{-1} sont elles aussi toutes diagonalisables. De plus, par continuité de la multiplication matricielle, puisque T_k tend vers T, on a aussi que PT_kP^{-1} tend vers $PTP^{-1} = A$. Cela montre que $A \in \overline{D}$
3. On définit la matrice
$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
(R est la matrice de rotation d'angle $\pi/2$). On va définir la matrice A à partir de cette matrice R, avec deux cas suivant la parité de n :
   — Si $n = 2k$ est pair, on prend $A = \mathrm{diag}(R, \cdots, R)$. Le polynôme caractéristique de A vaut alors $\chi_A = (X^2 + 1)^k$ et n'a donc aucune racine sur $\mathbf{R}$. On a même $\chi_A(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Par continuité de $A \mapsto \chi_A$ (les coefficients du polynôme χ_A sont polynomiaux en les coefficients de A), il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que pour tout $B \in \mathcal{V}$, et tout $x \in \mathbf{R}$, on a $\chi_B(x) \geq 1/2$. Donc une telle matrice B n'a aucune valeur propre réelle, en particulier elle n'est pas diagonalisable. On vient de montrer que A possède un voisinage sur lequel aucune matrice n'est diagonalisable.
   — Si $n = 2k + 1$ est pair, on prend $A = \mathrm{diag}(R, \cdots, R, 1)$. Le polynôme caractéristique de A vaut alors $\chi_A = (X^2 + 1)^k(X - 1)$ et n'a donc qu'une racine sur $\mathbf{R}$, qui est simple. Par continuité de $A \mapsto \chi_A$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A dans $M_n(\mathbf{R})$ tel que pour tout $B \in \mathcal{V}$, et tout $x \in \mathbf{R}$, on a χ_B possède aussi une unique racine, qui est simple. Une telle matrice B n'a par conséquent qu'une valeur propre réelle, en particulier elle n'est pas diagonalisable. Cela prouve que A possède un voisinage sur lequel aucune matrice n'est diagonalisable.

   On a utilisé la continuité des racines d'un polynôme par rapport aux coefficients de ce polynôme, ce qui pourrait faire l'objet d'un exercice à part entière...