Corrigé du devoir n° 1

Question de cours

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exercice 1

1) *a.* D est qualifiée de *dense* dans X si $\overline{D} = X$.

b. $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons (i) non vérifiée, *i.e.* qu'il existe U un ouvert non vide de X tel que $U \cap D = \varnothing$. On a alors $U \subset X \smallsetminus D$, d'où $U \subset \mathrm{Int}(X \smallsetminus D)$ par définition de l'intérieur. Comme $\mathrm{Int}(X \smallsetminus D) = X \smallsetminus \overline{D}$, on a ainsi $X \smallsetminus \overline{D} \neq \varnothing$, et donc $\overline{D} \neq X$. Par suite, (i) n'est pas vérifiée.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons (ii) vérifiée, et soient $x \in X$, $\varepsilon > 0$. $\mathrm{B}(x, \varepsilon)$ étant un ouvert de X, non vide puisque $x \in \mathrm{B}(x, \varepsilon)$, (ii) appliquée à $U = \mathrm{B}(x, \varepsilon)$ fournit $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. L'arbitraire sur ε montre que $x \in \overline{D}$, et l'arbitraire sur x entraine $X \subset \overline{D}$. D'où (i).

2) *a.* Quitte à échanger les rôles de A et B, on peut supposer A ouverte. D'après 1.*b*, il s'agit de montrer que $U \cap (A \cap B) \neq \varnothing$ pour tout ouvert non vide U de X ; soit donc U un ouvert non vide de X. Comme A est dense dans X, on a $U \cap A \neq \varnothing$. Mais A et U étant ouvertes dans X, $U \cap A$ est donc un ouvert non vide de X. Il vient ainsi $U \cap (A \cap B) = (U \cap A) \cap B \neq \varnothing$ par densité de B dans X.

b. Dans $X = \mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ sont des parties denses mais non ouvertes de X, et $A \cap B = \varnothing$ n'est pas dense dans X. Le résultat de 2.*a* est donc généralement faux si l'on ne suppose plus A ou B ouverte dans X.

Exercice 2

1) *a.* Soit $x \in A$. Pour tout $a \in A$, on a $d(x, a) \geqslant 0$. Ainsi, $\{d(x, a) \mid a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 ; elle admet donc une borne inférieure $d(x, A) \geqslant 0$.

b. $(i) \Rightarrow (ii)$: Supposons $d(x, A) = 0$, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$, *i.e.* $a \in X$ tel que $a \in \mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap A$. Ainsi, $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$, et $x \in \overline{A}$.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Supposons $x \in \overline{A}$, et soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathrm{B}(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$, d'où l'existence de $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$. Par suite, on a $0 \leqslant d(x, A) < \varepsilon$, et l'arbitraire sur ε implique $d(x, A) = 0$.

c. Soient $x, y \in X$. Pour tout $a \in A$, on a $d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)$, d'où $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$ par définition de $d(y, A)$. Ainsi, $d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y)$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $d(x, A) - d(y, A) \geqslant -d(x, y)$ par symétrie de d. D'où le résultat.

2) *a.* Soient $j \in \{1, 2\}$, et $\varphi_j : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, F_j)$. D'après 1.*c*, on a $|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \leqslant d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$, ce qui signifie précisément que φ_j est 1-lipschitzienne ; en particulier, φ_j est donc continue. Et comme $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, φ est continue en tant que différence d'applications continues.

b. Soit $x \in F_1$. On a d'une part $F_1 \subset \overline{F_1}$, donc $x \in \overline{F_1}$, et $d(x, F_1) = 0$ d'après 1.*b*. D'autre part, on a $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, donc $x \notin F_2$. Or F_2 étant supposé fermé, $\overline{F_2} = F_2$, et $x \notin \overline{F_2}$; compte tenu de 1.*b*, il vient ainsi $d(x, F_2) > 0$. Au final, on a obtenu $\varphi(x) = -d(x, F_2) < 0$.

c. D'après 2.*b*, on a $\varphi(F_1) \subset]-\infty, 0[$ et $\varphi(F_2) \subset]0, +\infty[$; posons $U_1 = \varphi^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $U_2 = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$. On a ainsi $F_1 \subset U_1$ et $F_2 \subset U_2$, avec $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. Et puisque $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$ et que, d'après 2.*a*, φ est continue, U_1 et U_2 sont également ouverts dans X.