Devoir n° 1

Contrôle continu du vendredi 30 septembre 2016
Durée : 1h15

L'usage de tout document ou matériel électronique est strictement interdit.

La qualité de la rédaction et de la présentation, ainsi que la clarté et la précision des raisonnements, constitueront des éléments importants dans l'évaluation des copies. En particulier, les résultats de cours utilisés devront être mentionnés de façon claire, et les réponses non justifiées ne seront pas prises en compte.

Question de cours

Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques, $f : X \to Y$ une application, et $a \in X$. Énoncer le critère séquentiel (*i.e.* utilisant les suites) de continuité de f en a.

Exercice 1

Soit (X, d) un espace métrique.

1) Soit D une partie de X.
   a. À quelle condition, portant sur $\overline{D}$, qualifie-t-on D de *dense* dans X ?
   b. En utilisant la définition de la densité énoncée en 1.a, établir l'équivalence entre les conditions suivantes :
      (i) D est dense dans X.
      (ii) Pour tout ouvert non vide U de X, $U \cap D \neq \varnothing$.
2) Soient A et B deux parties denses de X.
   a. On suppose que A ou B est ouverte dans X. Montrer que $A \cap B$ est dense dans X.
   b. Le résultat de 2.a reste-t-il vrai si l'on ne suppose plus nécessairement A ou B ouverte dans X ?

Exercice 2

Soit (X, d) un espace métrique. Si A est une partie non vide de X et $x \in X$, on pose :

$$d(x, A) \;=\; \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

1) Soit A une partie non vide de X.
   a. Justifier que, pour tout $x \in X$, la quantité $d(x, A)$ est bien définie, et qu'elle vérifie $d(x, A) \geqslant 0$.
   b. Soit $x \in X$. Établir l'équivalence entre les conditions suivantes :
      (i) $d(x, A) = 0$.
      (ii) $x \in \overline{A}$.
   c. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$.
2) On munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Soient F_1, F_2 deux fermés non vides de X vérifiant $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, et :

$$\varphi \;:\; X \to \mathbb{R},\; x \mapsto d(x, F_1) - d(x, F_2).$$

   a. En utilisant 1.c, justifier que φ est une application continue.
   b. En utilisant 1.b, montrer que $\varphi(x) < 0$ pour tout $x \in F_1$. Nous admettrons par ailleurs que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in F_2$.
   c. En déduire l'existence de deux ouverts U_1 et U_2 de X tels que :

$$F_1 \;\subset\; U_1, \qquad F_2 \;\subset\; U_2, \qquad U_1 \cap U_2 \;=\; \varnothing.$$