

TD 4 – Compacité

1 Quelques exercices classiques

Exercice 1

Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que tout sous-ensemble fini de X est compact.

Exercice 2

Montrer que tout sous-ensemble fermé d'un ensemble compact est compact.

Exercice 3

Soient K et L deux parties compactes d'un espace métrique X . Montrer que $K \cup L$ est une partie compacte.

Exercice 4

Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques compacts. Montrer que l'espace $X_1 \times X_2$, muni de la métrique δ définie par

$$\delta((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$$

pour tous $x_1, y_1 \in X_1$ et $x_2, y_2 \in X_2$, est compact,

1. pour la définition séquentielle de la compacité ;
2. pour la définition topologique de la compacité.

Exercice 5

Soit $M_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$, qu'on identifie à \mathbf{R}^{n^2} . Montrer que $O(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \mid A^t A = I\}$ est compact. *Indication : on pourra montrer que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A^t B)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbf{R})$.*

Exercice 6

On se place dans l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ des fonctions continues qu'on munit de la métrique :

$$d_\infty(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$$

On veut montrer que la boule unité fermée *n'est pas compacte* (on rappelle que la boule unité fermée est l'ensemble $B = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R}) \mid d_\infty(f, 0) \leq 1\}$, où 0 désigne la fonction constante égale à 0).

Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Expliquer, par un dessin, l'allure des fonctions appartenant à B .
2. Dessiner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, qui s'annule en dehors de l'intervalle $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$ et qui prend la valeur 1 au milieu de l'intervalle.

3. Pour tous n, m entiers, que vaut $d_\infty(f_n, f_m)$?
4. Conclure.

Exercice 7

Soit X un espace métrique et A un sous-espace compact non vide de X . Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable dense dans A . *Indication : pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$ on pourra considérer un recouvrement par des boules de rayon $\frac{1}{n}$.*

Exercice 8 (rappel?)

Soit (E, d) un espace métrique compact et soit (x_n) une suite d'éléments de E admettant une unique valeur d'adhérence x . Montrer que (x_n) est convergente.

Exercice 9

Si (X, d) est un espace métrique non-vidé compact. On note $\text{diam}(X) = \sup_{x, y \in X} d(x, y) \in [0, +\infty]$.

1. Montrer que $\text{diam}(X)$ est fini et qu'il existe $x, y \in X$ tels que $\text{diam}(X) = d(x, y)$.
2. Montrer que, si $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de X , alors $F := \bigcap_n F_n$ est un compact non-vidé de X et $\text{diam}(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n)$.
3. Si on ne suppose plus (X, d) compact, $\bigcap_n F_n$ est-il nécessairement non-vidé ?

Exercice 10

En utilisant que toute fonction numérique (i.e. à valeurs réelles) continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, montrer le théorème de Heine : toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. *Indication : pour $\varepsilon > 0$ on pourra considérer l'ensemble $E = \{(x, x') \in X \times X : d(f(x), f(x')) \geq \varepsilon\}$.*

2 Exercices supplémentaires**Exercice 11**

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convergente, de limite notée x , d'un espace métrique X . Montrer que $A := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ est une partie compacte de X .

Exercice 12

Soient A et B deux parties de \mathbf{R}^n . On note : $A + B = \{a + b \mid (a, b) \in A \times B\}$.

1. Montrer que si A est ouverte alors $A + B$ est ouverte.
2. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A + B$ est compacte.
3. Montrer que si A est compacte et B est fermée, alors $A + B$ est fermée. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement compact ?
4. L'ensemble $A + B$ est-il nécessairement fermé si A et B sont seulement supposés fermés ?

Exercice 13

Soit (X, d) un espace métrique tel que pour tout $x \in X$ et tout $r \geq 0$, la boule fermée $B_f(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ est compacte.

1. Montrer que X est complet.
2. Montrer que les parties compactes de X sont les sous-ensembles fermés bornés.

Exercice 14

Montrer que la distance entre deux compacts est atteinte, c'est-à-dire : si K et K' sont deux compacts d'un espace métrique, il existe $(x, x') \in K \times K'$ vérifiant $d(x, x') = d(K, K') := \inf_{(x, x') \in K \times K'} d(x, x')$.

Exercice 15

Dans un espace métrique (X, d) , on considère un fermé non-vide F et un compact non vide K tels que $K \cap F = \emptyset$.

1. Montrer que $d(K, F) := \inf_{x \in K, y \in F} d(x, y)$ est strictement positif. Ce résultat est-il vrai si K est seulement supposé fermé ?
2. Pour $\varepsilon > 0$ on note $K_\varepsilon := \{x \in X, d(x, K) < \varepsilon\}$. On considère un ouvert Ω de X tel que $K \subset \Omega$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, K_ε est un ouvert de X et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon \subset \Omega$.

Exercice 16

On note E l'espace euclidien \mathbf{R}^n , $n \geq 1$.

1. Soit F un fermé non borné de E et $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue telle que :

$$\lim_{x \in F, \|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe x dans F vérifiant $f(x) = \inf_{y \in F} f(y)$.

2. En déduire une démonstration du théorème de d'Alembert-Gauß : montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant admet une racine dans \mathbf{C} . *Indication : Si $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbf{C}} |P(z)| > 0$, construire un nombre complexe $z \in \mathbf{C}$ (proche de z_0) tel que $|P(z)| < |P(z_0)|$.*
3. Montrer que si ABC est un triangle du plan, alors il existe un point M du plan minimisant la somme des distances (euclidiennes) à A , B et C .

Exercice 17

1. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques avec (X, d) compact. Soit $f : X \rightarrow Y$ bijective et continue. Montrer que Y est compact et que f est un homéomorphisme.
2. Soient \mathbf{S}^1 le cercle unité dans le plan complexe et $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbf{S}^1$ telle que $f(t) = e^{it}$. Montrer que f est bijective et continue. Montrer que la réciproque n'est pas continue. Comparer avec la question précédente.

Exercice 18 (une version compacte du théorème de Picard)

Soit (E, d) un espace métrique complet non vide et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant :

$$\forall x, y \in E, \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

1. La fonction f admet-elle nécessairement un point fixe ? (Considérer $E = [1, \infty[$ et $f(x) = x + \frac{1}{x}$.)
Dans la suite on suppose de plus que E est compact.
2. Montrer que f admet un unique point fixe a . *Indication : On pourra étudier la fonction $x \mapsto d(f(x), x)$.*
3. Soit $x_0 \in E$ et soit (x_n) la suite de E définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, pour $n \in \mathbf{N}$. Montrer que (x_n) converge vers a quand n tend vers ∞ .