TD 3 – Espaces complets

Exercice 6
Soit (X, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de X vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall p \in \mathbf{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n}.$$

Montrer qu'elle est de Cauchy.

Corrigé : On veut montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, autrement dit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n \geq N, p \in \mathbf{N}, d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$, et N un entier supérieur à $1/\varepsilon$. Alors, pour tous $n \geq N$ et $p \in \mathbf{N}$, on a :

$$d(x_n, x_{n+p}) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon,$$

ce qui démontre que la suite est de Cauchy.

Exercice 10
Soit (X, d_X) un espace métrique et (E, d_E) un espace complet.

1. Montrer que l'espace $B(X, E)$, formé des fonctions bornées de X dans E, et muni de la distance
$$d(f, g) = \sup_{x\in X} d_E\big(f(x), g(x)\big)$$
est complet.
2. Montrer que $C_b^0(X, E)$, formé des fonctions continues et bornées de X dans E, est un sous-espace fermé de $B(X, E)$ pour d (et est donc complet).

Corrigé : Il y a une méthode plus ou moins générale pour démontrer qu'un espace de fonctions est complet. Elle se déroule en trois étapes : on commence par se donner une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui est de Cauchy (ici, c'est une suite de fonctions bornées de X dans E), autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N} : \forall n, m \geq N, d(f_n, f_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Première étape : construire le candidat limite. On commence par deviner une fonction f qui est la limite potentielle de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Ici, cette partie est déduite du fait que E est complet. Plus précisément, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $n, m \geq N$ (où N est donné par l'équation (1)), on a (par définition de la distance d)

$$d_E(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon. \tag{2}$$

Puisque c'est une suite de Cauchy, elle converge vers un élément de E, que l'on note $f(x)$; ceci nous construit notre fonction f.

Deuxième étape : vérifier que $f \in B(X, E)$. C'est une étape à ne pas oublier ! Il faut donc vérifier que f est bornée. Mais puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, elle est bornée : il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $d(f_n, g) \leq C$, où g désigne une fonction de X dans E, que l'on choisit constante égale à a. Autrement dit, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$d_E(f_n(x), a) \leq C.$$

Mais puisque pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$, il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ (qui a priori dépend de x) tel que

$$d_E(f(x), f_n(x)) < 1.$$

Donc, par inégalité triangulaire,

$$d_E(f(x), a) < C + 1.$$

Par conséquent, la fonction f est bornée, et appartient donc à $B(X, E)$.

Troisième étape : vérifier que f_n converge bien vers f. Il s'agit de vérifier qu'on a bien une convergence de f_n vers f *pour la distance* d (et pas seulement une convergence ponctuelle). Soit donc $\varepsilon > 0$ et $n \geq N$ (où N, de nouveau, est donné par (1)), on veut montrer que $d(f_n, f) < 2\varepsilon$. De par la définition de d, cela revient à montrer que pour tout $x \in X$, on a $d_E(f_n(x), f(x)) < 2\varepsilon$. Mais puisque la suite $(f_m(x))_{m\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$ (dans E), on sait qu'il existe $m \geq N$ tel que $d_E(f_m(x), f(x)) < \varepsilon$. On écrit donc :

$$d_E(f_n(x), f(x)) \leq d_E(f_n(x), f_m(x)) + d_E(f_m(x), f(x)) < 2\varepsilon$$

(où la première majoration par ε vient de (2)). Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge bien vers f au sens de la métrique d, par conséquent la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente

Conclusion : l'espace $B(X, E)$ est complet.

On veut maintenant montrer que le sous-espace $C^0_b(X, E)$ de $B(X, E)$ est fermé (pour d). Il s'agit donc de montrer que si une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $C^0_b(X, E)$ converge vers une fonction $f \in B(X, E)$, alors $f \in C^0_b(X, E)$; autrement dit une limite uniforme de fonctions continues et bornées est elle-même continue. Soit donc x un point quelconque de X, montrons que f est continue en x. Soit $\varepsilon > 0$, et $m \in \mathbf{N}$ tel que $d(f, f_m) < \varepsilon$.

On sait que f_m est continue (en x), donc il existe $\eta > 0$ tel que si $d_X(x, y) < \eta$, alors $d_Y(f_m(x), f_m(y)) < \varepsilon$. Donc, pour tout y vérifiant $d_X(x, y) < \eta$, on a, par inégalité triangulaire :

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f_m(x)) + d_Y(f_m(x), f_m(y)) + d_Y(f_m(y), f(y)) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

On vient donc de montrer que f est continue en x, pour tout $x \in X$. Conclusion : $C^0_b(X, E)$ est fermé.

Exercice 14

Un nombre réel z est appelé *nombre de Liouville* s'il est irrationnel et possède la propriété que pour tout entier $n > 0$ il existe des entiers p et q tels que $q > 1$ et

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

1. Montrer que le nombre
$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^{k!}}$$
est un nombre de Liouville.

2. Écrire l'ensemble $I = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des irrationnels comme une intersection dénombrable d'ouverts denses.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{L}$ des nombres de Liouville est une intersection dénombrable d'ouverts denses. En déduire que tout intervalle contient une infinité de nombres de Liouville.

Corrigé :

1. Posons
$$x = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{10^{k!}} \qquad \text{et} \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}}.$$
Il est alors évident que x_n est rationnel pour tout $n \geq 1$, et que de plus son dénominateur q_n est inférieur à $10^{n!}$. De plus,
$$\begin{aligned}
|x - x_n| &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^{(n+1)!+i}} \\
&= \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{10^i} \\
&= \frac{1}{10^{n!(n+1)}} \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{(10^{n!})^{n+1}} \frac{10}{9} \\
&\leq \frac{1}{q_n^{n+1}} \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{q_n^n} \frac{10}{9q_n} \\
&\leq \frac{1}{q_n^n}.
\end{aligned}$$
Par conséquent, le nombre x vérifie bien l'inégalité de la question. Mais encore faut-il montrer que x est irrationnel…
Supposons que x soit rationnel, on peut donc écrire $x = p/q$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. On écrit de même $x_n = p_n/q_n$. Le calcul précédent se réécrit
$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^n}.$$
Mais
$$\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{pq_n + qp_n}{qq_n},$$
où $pq_n + qp_n$ est un entier non nul (sinon on aurait $x = x_n$), donc
$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \frac{1}{qq_n},$$
on en déduit que
$$\frac{1}{qq_n} \leq \frac{1}{q_n^n} \qquad \Longleftrightarrow \quad q_n^{n-1} \leq q,$$
et ce pour tout $n \in \mathbf{N}$. Or ceci est impossible : sinon les q_n seraient égaux à 1 à partir d'un certain rang. On aboutit à une contradiction, ce qui signifie que x est irrationnel.

2. On sait que $\mathbf{Q}$ est un ensemble dénombrable : on peut écrire
$$\mathbf{Q} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \{x_n\}.$$
Alors
$$\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{R}\setminus\{x_n\},$$
où pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathbf{R}\setminus\{x_n\}$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}$.
3. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble défini par $\mathcal{M} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \mathcal{M}_n$, avec
$$\mathcal{M}_n = \left\{ z \in \mathbf{R} \mid \exists p, q : \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\}.$$
On voit facilement que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathcal{M}_n$ est ouvert lorsqu'on l'écrit comme l'union d'ouverts (en fait d'intervalles ouverts)
$$\mathcal{M}_n = \bigcup_{p\in\mathbf{Z}} \bigcup_{q\in\mathbf{N}^*} \left\{ z \in \mathbf{R} \mid \left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \right\},$$
puis que $\mathcal{M}_n$ est dense, car il contient $\mathbf{Q}$.
Donc $\mathcal{M} \cap (\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses (par la question précédente, $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ est lui-même une intersection dénombrable d'ouverts denses), et coïncide avec l'ensemble des nombres de Liouville. Le théorème de Baire nous assure alors que cet ensemble est lui-même dense ; en particulier tout intervalle de longueur non nulle contient une infinité de nombres de Liouville.