Deux applications du théorème de la forme normale de Birkhoff

P.A. Guihéneuf

été 2009

Table des matières

1 Introduction

Ce document est issu d'un stage effectué durant l'été 2009 au laboratoire Jean Leray à Nantes, sous la direction de Georgi Popov.

Ce stage a commencé par une "mise à niveau" en géométrie différentielle, topologie différentielle et géométrie symplectique, présentée dans les deux premiers chapitres de ce rapport, suivie par l'étude des théorèmes de la forme normale de Birkhoff présentés dans [2], [3] et [4] ainsi que de leur démonstration, et par la rédaction des démonstrations, parfois elliptiques, de [4], pour finir par utiliser la méthode de cet article pour obtenir une forme normale de Birkhoff "d'ordre infini", similaire à celle de [6].

Le théorème de la forme normale de Birkhoff assure que si l'on considère un hamiltonien près d'un point d'équilibre elliptique, avec une condition de non-résonance à un ordre arbitraire r, on sait qu'à changement de coordonnées locales près, celui-ci ne dépendra que des variables d'action dans ses termes d'ordre plus petit que r. L'optimisation de cet ordre r permet d'obtenir une stabilité effective des solutions du système hamiltonien, i.e. un confinement dans une boule "petite" pendant des temps exponentiellement longs en la taille des données initiales. D'autre part le théorème de la forme normale de Birkhoff "d'ordre infini" assure que sous les hypothèses du théorème précédant, avec une non-résonnance pour tout ordre, toujours à changement de coordonnées près, le hamiltonien ne dépendra que des variables d'action pour tout ordre, en contrepartie il perd son caractère analytique pour se retrouver dans une classe de Gevrey.

Je tiens à remercier bien évidemment mon maître de stage Georgi Popov qui a accepté de me prendre comme stagiaire malgré un emploi du temps chargé, et qui a fait preuve de beaucoup d'attention, mais aussi toute l'équipe du laboretoire Jean Leray et plus particulièrement François Laudenbach pour toutes les réponses judicieuses qu'il a fournies à mes diverses questions, Benoît Grébert, ausssi bon conseiller qu'il fut (et reste) un agréable voisin, son thésard Rafik Imékraz pour m'avoir accueilli chaleureusement ainsi que les bibliothécaires souriants et aimables (!) du laboratoire.

2 Géométrie symplectique

Le cadre naturel du formalisme hamiltonien est celui de la géométrie symplectique. Nous en donnons la définition et quelques propriétés essentielles. Nous commencerons par le cadre vectoriel, puis généraliserons aux variétés. Une étude détaillée est faite dans [2].

2.1 Cadre vectoriel

Comme la géométrie euclidienne, la géométrie symplectique étudie les espaces vectoriels munis d'une forme bilinéaire, qui confère à l'espace son caractère géométrique ; la différence se situe dans le fait que la forme considérée est antisymétrique, et non symétrique.

Définition 1 Un *espace vectoriel symplectique* (E, ω) est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée ω i.e.

$$\forall\, u, v \in E, \quad \omega(u, v) = -\omega(v, u)$$

$$\forall\, u \neq 0,\, \exists v : \omega(u, v) \neq 0$$

Un exemple fondamental d'espace vectoriel symplectique est fourni par le doublet $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, avec ω_0 défini par :

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \omega_0(u, v) = \langle Ju, v\rangle$$

Et J définie par blocs :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Par la suite on aura tendance à différencier les n premières coordonées des n dernières : de par la forme de J, elles joueront des rôles "antisymétriques". Ainsi on notera, pour $z \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$z = (p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n)$$

p_j (resp. q_i) étant la projection sur la j-ième coordonnée (resp la n+i-ème coordonnée).

Théorème 1 *Tout espace vectoriel symplectique (E, ω) est de dimension paire, de plus il existe une base dans laquelle on a :*

$$\forall u, v \in E, \quad \omega(u, v) = \langle Ju, v\rangle = \omega_0(u, v)$$

Par la suite, on notera (E, ω) un espace vectoriel symplectique, le théorème 1 permet de l'identifier à $\mathbb{R}^{2n}$.

Définition 2 ("pull-back") Soit $\phi : E \to E$ un difféomorphisme de E. On définit la forme $\phi^*\omega$ par :

$$\forall\, u, v, z \in E, \quad (\phi^*\omega)_z(u, v) = \omega(\mathrm{d}\phi(z).u, \mathrm{d}\phi(z).v)$$

Définition 3 Un difféomorphisme $\phi : E \to E$ est dit *symplectique* s'il vérifie $\phi^*\omega = \omega$

On montre que le jacobien de telles applications est toujours constant égal à un.
Un bon exemple de difféomorphisme symplectique est fourni par les flots des champs de vecteurs hamiltoniens.

Définition 4 Soit $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$. Son champ de vecteurs *hamiltonien* X_f est défini par :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^{2n}, \quad X_f(z) = J\nabla f(z)$$

On obtient une définition équivalente en demandant que :

$$\forall\, z, a \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \omega_0(X_f(z), a) = -\mathrm{d}f(z).a$$

Définition 5 Soit X un un champ de vecteurs sur E. On définit ϕ^t le *flot* du champ X comme un ensemble de solutions de problèmes de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi^t(z) = X(\phi^t(z)) \\ \\ \phi^0(z) = z \end{cases} \tag{1}$$

Cette définition va se révéler capitale. En effet, les EDPs étudiées par la suite seront toutes du type (1).
On peut vérifier que le flot d'un champ de vecteurs hamiltonien est un difféomorphisme symplectique pour tout t fixé.

2.2 Cadre général

Définition 6 Une *variété symplectique* (E, ω) est une variété muni d'une 2-forme ω telle que :
(i) $\mathrm{d}\omega = 0$ i.e. ω , est fermée
(ii) ω est non dégénérée

Par la suite on prendra (V, ω) une variété symplectique.
Évidemment, un espace vectoriel symplectique a une structure de variété symplectique. Inversement, le théorème de Darboux affirme qu'une variéte symplectique peut être vue localement comme un espace vectoriel symplectique.

Théorème 2 (Darboux) *Pour tout $x \in V$, il existe un système de coordonnées locales en x (U, φ) telles que $\varphi^*\omega = \omega_0$.*

3 Forme normale de Birkhoff

3.1 Idées générales

Considérons une application analytique d'un espace vectoriel symplectique de dimension n vers $\mathbb{R}$, pour laquelle l'origine est un point d'équilibre elliptique, i.e. :

$$H(z) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \frac{p_j^2 + q_j^2}{2} + H_r(z) = H_2(z) + H_r(z) \tag{2}$$

Avec H_r l'ensemble des termes de plus haut ordre dans le développement en série au voisinnage de 0. Cette application est appellée hamiltonien. Le théorème de la forme normale de Birkhoff cherche à simplifier son expression. Plus précisément il va donner à H_r une forme facilement intégrable à un ordre arbitrairement grand.

Théorème 3 (Forme normale de Birkhoff) *Supposons que le n-uplet* $\omega \doteq (\omega_1, \cdots, \omega_n)$ *correspondant à* H_2 *soit non-résonnant d'ordre* r *i.e.*

$$\langle \omega, j \rangle \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}^n,\, 0 < \|j\| \leq r$$

Où l'on a posé $\|j\| = \sum_{i=1}^{n} |j_i|$.
Alors il existe une transformation symplectique $\tau^{(r)}$*, dite canonique, telle que* $H \circ \tau^{(r)}$ *soit une* forme normale de Birkhoff *à l'ordre* r*, c'est-à-dire que dans un voisinage de l'origine :*

$$H^{(r)} \doteq H \circ \tau^{(r)} = H_2 + Z^{(r)} + R^{(r)}$$

Avec $Z^{(r)}$ *un polynôme de degré* $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$ *en les polynômes*

$$I_j \doteq \frac{p_j^2 + q_j^2}{2}$$

tel que $\left\{H_2, Z^{(r)}\right\} = 0$ *; et* $R^{(r)}$ *un reste "petit" :* $R^{(r)} = O(\|z\|^{r+1})$.

La démonstration de ce théorème se fait par récurrence sur le degré de Z. Nous en donnons ici les idées essentielles.
En effet, supposons que le hamiltonien est déjà sous une forme normale à l'ordre $m-1$. On peut alors écrire

$$H^{(m)} = H_2 + H_3 + \cdots + H_{m-1} + H_m + \ldots$$

Avec $H_2 + \cdots + H_{m-1}$ vérifiant les propriétés énoncées dans le théorème.
Soit alors P un polynôme homogène de degré m en les coordonnées de z ; considérons le champ de vecteurs hamiltonien H_P et son flot ϕ^t. Posons τ

sa valeur en $t = 1$. On a alors, en faisant un développement en zéro de ϕ^t selon t :

$$\tau(z) = z + J\nabla P(z) + o(z^m)$$

Il y a bien sûr du travail à faire pour transformer le $o(t)$ en $o(z^m)$. Cela donne :

$$(H \circ \tau)(z) = H_2(z) + \cdots + H_m(z) + \mathrm{d}H_2(z).X_P(z)$$

Définissons le crochet de Poisson sur l'ensemble des fonctions à valeurs réelles tel que pour toutes fonctions f, g, $\{f, g\} \doteq \omega(X_f, X_g)$. On trouve donc

$$H \circ \tau = H_2 + \cdots + H_m - \{H_2, P\}$$

On voit là tout l'intérêt d'avoir pris un polynôme de valuation m : l'application τ ne modifie alors que les termes de degrés plus grands que m dans le développement de H, sa contribution vaut alors $\{H_2, P\}$. Cela nous ammène à nous intéresser à l'opérateur

$$\begin{aligned} L_{H_2} : E &\to E \\ F &\mapsto \{H_2, F\} \end{aligned}$$

Il est possible de le diagonaliser dans la base "complexe" composé des vecteurs suivants :

$$\xi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_k + iq_k), \quad \eta_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_k - iq_k), \quad k \in [\![0, n]\!]$$

Une base de l'ensemble des polynômes homogènes de degré m est alors

$$\xi^J \eta^L \doteq \xi_1^{J_1} \xi_2^{J_2} \ldots \xi_n^{J_n} \eta_1^{L_1} \eta_2^{L_2} \ldots \eta_n^{L_n}, \quad \sum_{k=1}^{n} L_k + J_k = m$$

Un calcul montre alors que pour toutes familles J et L, le monôme $\xi^J \eta^L$ est vecteur propre de L, de valeur propre associée $i\,\omega \cdot (L - J)$. On peut alors décomposer l'espace des polynômes homogènes de degré m en somme directe du noyau et de l'image de L_{H_2}. Mais on a supposé que ω est non-résonnant d'ordre r, donc le noyau de L_{H_2} est composé des monômes $\xi^J \eta^L$, avec $L = J$. De par cette décomposition en somme directe, on peut prendre P de manière à ce que $H_m - \{H_2, P\}$ soit dans le noyau de L_{H_2}. Alors $H \circ \tau$ est alors sous forme normale à l'ordre m, ce qui termine la récurrence.
L'utilité de ce théorème réside dans le fait que si un hamiltonien H ne dépend que des I_j, le système hamiltonien est intégrable. En effet, on peut passer en coordonnées polaires :

$$\xi_j = \sqrt{I_j} e^{i\theta_j}$$

On remarque qu'alors H ne dépend pas des angles θ_j. L'équation (1) du système hamiltonien s'écrit alors, dans ce système de coordonnées :

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_\theta^t = \nabla_I H(\varphi^t) \\ \\ \dot{\varphi}_I^t = -\nabla_\theta H(\varphi^t) \end{cases}$$

Ce qui s'intègre facilement en :

$$\varphi^t(I,\theta) = (I, \theta + t\omega)$$

Ayant posé $\omega = \nabla_I H(I)$.
Ainsi le système hamiltonien mis sous une forme canonique grâce à l'aide du théorème de la forme normale de Birkhoff est "presque" intégrable.
Il est possible de raffiner ce théorème, par exemple dans [3], D. Bambusi l'étend, sous certaines conditions, à la dimension infinie ; et dans [4] sont données des estimations sur la transformation canonique.

3.2 Cas analytique et applications

Dans [4], les auteurs utilisent une méthode différente de celle exposée supra pour démontrer le théorème de la forme normale de Birkhoff : ils définissent une transformation canonique sur l'ensemble des applications analytiques de E dans $\mathbb{R}$, T_χ, dépendant de la forme linéaire analytique χ comme suit : pour $f = \sum_{k\geq 1} f_k$, avec f_k polynôme homogène de degré k (notation reprise par la suite), on pose :

$$T_\chi f = \sum_{k\geq 1} F_k$$

Avec

$$F_k = \sum_{l=1}^{k} f_{l,k-l}$$

Et

$$\forall l,k, \quad f_{l,0} = f_l, \quad f_{l,k} = \sum_{m=1}^{k} \frac{m}{k} L_{\chi_{2+m}} f_{l,k-m}$$

On montre dans [4] que cette transformation définit bien une application (convergence des séries dans un voisinage de l'origine) ; de plus elle préserve les produits et le crochet de Poisson (voir [8]). Définission une norme sur l'ensemble des polynômes homogènes de degré k arbitraire pour $P = \sum_i P_i x^i$, $\|P\| = \sum_i |P_i|$ On a alors un théorème de la forme normale de Birkhoff semblable au précédant :

Théorème 4 (Forme normale de Birkhoff) *Supposons que le n-uplet ω correspondant à H_0 soit non-résonnant d'ordre r, alors il existe une fonction*

génératrice polynômiale d'ordre r, $\chi^{(r)} = \sum_{k=3}^{r} \chi_k$, *avec* χ_k *ne dépendant pas de l'ordre* r, *telle que* $T_{\chi^{(r)}}H$ *soit une* forme normale de Birkhoff *à l'ordre* r.
De plus, si pour des constantes réelles c *et* d *on a* $\|H_k\| \leq c^{k-2}d$ *(il en existe car le hamiltonien est analytique) et si on a l'estimation* $|\nu.\omega| \geq \alpha_r$ *pour tout* ν *vérifiant* $1 \leq |\nu| \leq r$, *on obtient une estimation sur les normes des polynômes homogènes composant* $\chi^{(r)}$:

$$\|\chi_k\| \leq \frac{cd}{\alpha_k}\left(6c\left(1+\frac{d}{\alpha_k}\right)\right)^{k-3}(k-2)!$$

La transformation induite par $\chi^{(r)}$ *converge dans toute boule de rayon* $R < R_r^*$, *avec*

$$R_r^* = \left[\left(9+\frac{32}{5}r\right)\frac{d}{\alpha_r}+1+\frac{32}{5}r\right]^{-1} c^{-1}$$

Démonstration : en annexe.
L'estimation sur χ permet d'obtenir un théorème de "quasi-stabilité" que l'on appelle stabilité effective : pour des conditions initiales assez proches de l'origine, la solution reste confinée dans une boule centrée à l'origine pendant des temps exponentiellement longs. On se place dans l'hypothèse diophantienne à savoir qu'on peut prendre $\alpha_r = \frac{C_2}{r^{m-1}}$.

Théorème 5 (Quasi-stabilité) *Soit* $H = \sum_{k\geq 2} H_k$ *un hamiltonien analytique dont 0 est un point d'équilibre elliptique de n-uplet corrrespondant* ω. *Supposons que* $\|H_k\| \leq c^{k-2}d$ *pour* c *et* d *des réels positifs donnés, et que pour tout entier non nul* r *on ait* $|\nu.\omega| \geq \alpha_r$, $\forall \nu \in \mathbb{Z}^n$, $0 < |\nu| \leq r$. *Posons :*

$$\begin{aligned}
\overline{\delta} &= \frac{\sqrt{2}}{3(e^m-1)} \\
C_3 &= \frac{4d}{3c}(1-e^{-m})^{-2} \\
\hat{R} &= (1+\overline{\delta})\frac{C_2}{M} \\
\sigma_0 &= \frac{1+\overline{\delta}}{1-\overline{\delta}}
\end{aligned}$$

Avec la constante M *définie en annexe. Alors pour toutes données initiales* $(q,p)(0) \in D_{R_0}$, *la trajectoire de la solution du système hamiltonien reste confinée dans le disque* $D_{\sigma R_0}$ *pour tous les temps* $|t| \leq T$, *où on a posé*

$$T = T_0 \exp\left(m\left\lfloor C_1(\sigma R_0)^{-1/m}\right\rfloor\right)$$

avec

$$T_0 = R_0\, e\, \frac{\sigma^2-\sigma_0^2}{2\sigma\sigma_0}\left(C_3(1-\overline{\delta})\left(\frac{\hat{R}}{\sigma R_0}\right)^{1/m}\right)^{-1}$$

pourvu que

$$\sigma > \sigma_0 \quad et \quad R_0 \leq \frac{\hat{R}}{\sigma(3e)^m}$$

Démonstration : en annexe.

4 Forme normale de Birkhoff et classes de Gevrey

4.1 Classes de Gevrey

Définition 7 Soit $\rho \geq 1$ et D une partie ouverte bornée de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est dans la *classe de Gevrey* d'ordre ρ, notée $G^\rho(D)$, si $f \in C^\infty(D)$ et si :

$$\exists C > 0 : \forall \alpha \doteq (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ \forall x \in D, \quad |\partial^\alpha f(x)| \leq C^{|\alpha|+1}(\alpha!)^\rho \tag{3}$$

Où on a posé $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ et $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$

On remarque (!) que la suite des classes de Gevrey pour ρ croissant est croissante au sens de l'inclusion, et que l'ensemble $G^1(D)$ correspond à l'ensemble des fonctions analytiques [1] sur l'ouvert D. Ainsi, on peut les voir comme des classes de fonctions intermédiaires entre celle des fonctions infiniement différentiables et celle des fonctions analytiques.
Exemple : la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

n'est pas analytique. En effet sa série de Taylor en 0 est nulle, alors qu'elle est non nulle au voisinage de 0. Néamoins elle est dans une classe de Gevrey, en l'occurence $G^2([-1,1])$ (preuve en annexe).
Par la suite nous aurons besoin du théorème de Borel appliqué aux classes de Gevrey :

Théorème 6 (Borel) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant une inégalité du type Gevrey :*

$$\exists C > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq C^{n-1}(n!)^\rho$$

Alors il existe une fonction $g \in G^\rho(\mathbb{R})$ telle que pour tout entier n, $g^{(n)}(0) = a_\alpha$.

1. Cela se vérifie aisément par double inclusion : l'une est fournie par le fait que le rayon de convergence de la série est non nul, l'autre s'obtient par majoration du reste de Taylor.

Ce théorème montre bien toute la différence entre les fonctions Gevrey et les fonctions analytiques : il existe une fonction de $G^2(\mathbb{R})$ ayant pour dérivées successives en 0 les $u_n = (n!)^2$, mais la série $\sum_{n\geq 0} n!\,x^n$ a un rayon de convergence nul.
Remarque : Soit $f \in G^\rho(D)$, où D est un voisinage connexe de 0, avec $\partial^\alpha f(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Si $\rho = 1$ on sait que dans ce cas $f \equiv 0$. Si $\rho > 1$, par la formule de Taylor d'ordre m en $x = 0$, on obtient pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $m \in \mathbb{N}$:

$$|\partial^\alpha f(x)| \;\leq\; A\,C^{|\alpha|+m}\,\alpha!^{\,\rho} m!^{\,\rho-1}|x|^m\,,$$

avec $A > 0$. En utilisant la formule de Stirling, on minimise la partie de droite par rapport à $m \in \mathbb{N}$. Un choix optimal de m est :

$$m \sim (C|x|)^{-\frac{1}{\rho-1}}\,.$$

On obtient alors une majoration exponentielle des dérivées successives de f :

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq A\,C^{|\alpha|}\,\alpha!^{\,\rho}\,\exp\Big(-(C|x|)^{-\frac{1}{\rho-1}}\Big) \tag{4}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $x \in D$.

4.2 Forme normale de Birkhoff "infinie"

On cherche à améliorer le théorème de la forme normale de Birkhoff en l'étendant à l'ordre infini, i.e. à mettre le hamiltonien sous forme d'une fonction ne dépendant que des variables d'action, modulo un reste "petit". Ledit reste sera une fonction Gevrey ; ainsi le hamiltonien perd son caractère analytique lorsqu'on passe à une forme normale d'ordre infini. Pour cela, on va utiliser les estimations sur la fonction génératrice obtenues dans [4].
On se place dorénavant dans l'hypothèse diophantienne à savoir :

$$\alpha_r \leq \frac{C_2}{r^{m-1}}$$

Avec des constantes $C_2 > 0$ et $m \geq 1$. On obtient alors l'estimation des χ_k :

$$\begin{aligned}
\|\chi_k\| &\leq \frac{cd}{\alpha_k}\bigg(6c\Big(1+\frac{d}{\alpha_k}\Big)\bigg)^{k-3}(k-2)! \\
&= \frac{cd}{C_2}k^{m-1}\bigg(6c\Big(1+\frac{dk^{m-1}}{C_2}\Big)\bigg)^{k-3}(k-2)! \qquad \text{car} \quad \alpha_k = \frac{C_2}{k^{m-1}} \\
&\leq \frac{cd}{C_2}k^{m-1}(6c)^{k-3}\bigg(1+\frac{d}{C_2}\bigg)^{k-3}\Big(k^{m-1}\Big)^{k-3}(k-2)! \\
&= \frac{cd}{C_2}k^{m-1-3(m-1)}\bigg(6c\Big(1+\frac{d}{C_2}\Big)\bigg)^{k-3}\Big(k^k\Big)^{m-1}(k-2)! \\
&\leq A\,B^{k-3}\Big(k^k\Big)^{m-1}(k-2)!
\end{aligned}$$

Avec
$$A = \frac{cd}{C_2} \quad \text{et} \quad B = 6c\Big(1 + \frac{d}{C_2}\Big) = 6(c+a)$$
Or la formule de Stirling donne :
$$n^n \leq e^{\frac{1}{12n}} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} n!$$
Donc
$$\begin{aligned} \|\chi_k\| &\leq A\, B^{k-3} \left(\frac{e^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{2\pi}} e^k k! \right)^{m-1} \\ &\leq A'\, B'^k \, \big(k!\big)^m \end{aligned}$$
Où on a posé :
$$A' = A\, B^{-3} \left(\frac{e^{\frac{1}{12}}}{\sqrt{2\pi}} \right)^{m-1} \quad \text{et} \quad B' = B\, e^{m-1}$$
On a donc trouvé une inégalité du type Gevrey d'ordre $m+1$ pour les coefficients des $\chi^{(r)}$ successifs, et cela en les variables p et q. Le théorème de Borel assure alors l'existence de $\chi_\infty \in G^{m+1}(\mathbb{R}^{2n})$ dont les dérivées en 0 coïncident avec celles des $\chi^{(r)}$ pour tout r assez grand.
Or on sait que $\chi^{(r)}$ et $T_{\chi^{(r)}}$ vérifient l'équation de changement de coordonnées de (p,q) vers (P,Q) [8] :
$$\begin{cases} T_{\chi^{(r)},p}(p,q) \; = P \\ T_{\chi^{(r)},q}(p,q) \; = \nabla_P \, \chi^{(r)}(P,q) \\ \qquad p \qquad\; = \nabla_q \, \chi^{(r)}(P,q) \end{cases} \tag{5}$$
Où les indices p et q dénotent une projection. On dit alors que $\chi^{(r)}$ est une fonction génératrice de $T_{\chi^{(r)}}$. Partant du χ_∞ obtenu par le théorème de Borel, on va chercher un T_∞ vérifiant une équation similaire, ce qui revient à résoudre :
$$\begin{cases} T_{\infty,p}(p,q) \; = P \\ T_{\infty,q}(p,q) \; = \nabla_P \, \chi_\infty(P,q) \\ \qquad p \qquad = \nabla_q \, \chi_\infty(P,q) \end{cases} \tag{6}$$
La dernière équation fournit la fonction $p(P,q)$, inversible dans un voisinage de 0 car le premier terme non nul du développement de Taylor dans χ_∞ est d'ordre 3. Par le théorème des fonctions implicites dans les Gevrey (voir l'appendice de [7]), il existe une fonction $P(p,q)$ définie dans un voisinage de l'origine qui de plus appartient à $G^{m+1}(\mathbb{R}^{2n})$. On en déduit l'existence des fonctions $T_{\infty,p}$ et $T_{\infty,q}$ dans $G^{m+1}(\mathbb{R}^{2n})$
De par les propriétés du système d'équations (4), T_∞ est une transformation symplectique (voir [1]). De plus $T_\infty(0) = 0$ et $\mathrm{d}T_\infty(0) = Id$; par conséquent

T_∞ est une transformation canonique. Or on a vu que pour $k \in \mathbb{N}$ le terme d'ordre k dans $\chi^{(r)}$, $T_{\chi^{(r)}}$ et $\varphi^{(r)}$ ne change pas lorsqu'on fait varier r pourvu que $r \geq k$. Ainsi le terme d'ordre k dans T_∞ est le même que dans $T_{\chi^{(r)}}$ pour tout $r \geq k$, donc le terme d'ordre k dans $T_\infty H$ est celui de $T_{\chi^{(r)}}H$. Toujours par les propriétés de composition dans les Gevrey, $T_\infty H \in G^{m+1}(\mathbb{R}^{2n})$ et peut s'écrire, dans un voisinage de l'origine :

$$T_\infty H(p,q) = H^0(I) + R(p,q)$$

Avec H^0 analytique, $R \in G^{m+1}(\mathbb{R}^{2n})$ et :

$$\forall \alpha,\ \beta, \quad \frac{\partial R}{\partial p^\alpha \partial q^\beta}(0) = 0$$

$$\frac{\partial H^0}{\partial I^\alpha} = \frac{\partial H^{(r)}}{\partial I^\alpha} \quad \forall r \geq |\alpha|$$

Par (4) la fonction R est une fonction très plate en 0, exponentiellement petite près de l'origine.

5 Conclusion et perspectives

Récemment T. Mitev et G. Popov ont trouvé dans [6] une forme normale de Birkhoff de classe de Gevrey près d'un tore lagrangien convenable. Rappelons leur resultat.
Soit $H \in G^\rho(\mathbb{T}^n \times D)$ un hamiltonien de classe de Gevrey $\rho \geq 1$ dans $\mathbb{T}^n \times D$, où $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ et D est un domaine de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On se place toujours dans la condition diophantienne, avec $C_2 > 0$ et $m > n$. Alors le tore $\mathbb{T}^n_0 := \mathbb{T}^n \times \{0\}$ est invariant par rapport au flot hamiltonien φ^t de H et la restriction de φ^t à $\mathbb{T}^n_0$ est donnée par $\varphi^t(\theta, 0) = (\theta + t\omega, 0)$. Le résultat principal de [6] est le suivant :

Théorème 7 *Dans les hypothèses énoncées ci-dessus, on pose $\mu = \rho m + 1$. Alors il existe un voisinage D' de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction génératrice $g \in G^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times D')$, $g(\theta, I) = O(|I|^2)$ d'une transformation canonique $\chi \in G^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times D', \mathbb{T}^n \times D)$, tels que*

$$H(\chi(\varphi, I)) = H^0(I) + R^0(\varphi, I) \tag{7}$$

Où $H^0 \in \mathcal{G}^\mu(D', \mathbb{R})$, $R^0 \in G^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times D', \mathbb{R})$, et $\partial_I^\alpha R^0(\theta, 0) = 0\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Il serait possible de raffiner le résultat obtenu en travaillant directement en variables polaires I et θ comme dans [6], théorème 7 ; le changement de variables est donné par :

$$\forall j, \begin{cases} x_j = \sqrt{I}e^{-i\theta_j} \\ y_j = -i\sqrt{I}e^{i\theta_j} \end{cases}$$

On obtiendrait alors un hamiltonien appartenant à $G^{1,m+1}(\mathbb{T}^n \times D)$, ce qui le rendrait "analytique" par rapport aux variables d'angle et Gevrey d'ordre $m+1$ par rapport aux variables d'action. Plus génŕalement, si H est de classe de Gevrey G^ρ avec $\rho \geq 1$ on obtiendrait une forme normale dans la classe $G^{\rho,\rho m+1}(\mathbb{T}^n \times D)$.
Un autre problème intéresant serait de trouver une forme normale de Birkhoff dans les classes de Gevrey près d'un tore isotrope $\mathbb{T}_0^n := \mathbb{T}^n \times \{0\}$ de $\mathbb{A} := \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2d}$ de la forme

$$H(\theta, r, p, q) = \langle \omega, r \rangle + \sum_{j=1}^{n} \Omega_j (p_j^2 + q_j^2) + \tilde{H}(\theta, r, p, q),$$

où $\tilde{H}(\theta, r, p, q) = O(|r|^2 + |p|^3 + |q|^3)$ et $\Omega := (\Omega_1, \ldots, \Omega_d) \in \mathbb{R}^d$ si (ω, Ω) vérifie la condition diophantienne. Récement G. Popov a travailé sur ce problème. Il serait très intéresant de trouver une forme normale de Birkhoff de classe de Gevrey près d'un tore isotrope dans le cas de dimension infinie (EDPs non lineaires, [3]).

Références

[1] V. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics.*

[2] H. Hofer et E. Zhender. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics.*

[3] D. Bambusi. *A Birkhoff normal form theorem for some semilinear PDEs,* 2007 (notes de cours, Montréal).

[4] A. Giorgilli, A. Delshams, E. Fontich, L. Galgani et C. Simò. *Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three-body problem.* J. Differential Equations **77** (1989), no. 1, 167-198.

[5] F. Laudenbach. *Topologie différentielle.* Cours à l'école Polytechnique, 1994.

[6] T. Mitev et G. Popov. Gevrey normal form and effective stability of lagrangian tori, 2009, (à paraître),

[7] G. Popov. *KAM theorem for Gevrey Hamiltonians*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **26** (2004), 1753-1786.

[8] A. Giorgilli et L. Galgani. *Formal integrals for an autonomous Hamiltonian system near an equilibrium point.*

A Annexes

Sont présentées ici les preuves les plus délicates, pour les plus faciles se référer à [4]

A.1 Preuve du théorème de la forme normale de Birkhoff

On va montrer ici que sous les conditions du théorème 7, il existe une fonction géneratrice $\chi^{(r)} = \sum_{k=3}^{r} \chi_k$ telle que $t_{\chi^{(r)}} H \doteq Z^{(r)}$ soit une forme normale à l'ordre r, avec :

$$\begin{aligned} Z_2 &= H_2 \\ l_{H_2}\chi_k + Z_k &= F_k \quad \forall k \geq 3 \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} F_3 &= H_3 \\ F_k &= \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} Z_{k-l} + \sum_{l=1}^{k-2} H_{2+l,k-l-2} \quad \forall k \geq 4 \end{aligned} \tag{8}$$

Passons à la preuve en elle-même. Pour toute fonction χ, on a par définition :

$$T_\chi H = \sum_{k\geq 1} \boldsymbol{H}_k = \sum_{k\geq 1} \sum_{l=1}^{k} H_{l,k-l}$$

Avec

$$H_{l,k} = \sum_{m=1}^{k} \frac{m}{k} L_{\chi_{2+m}} H_{l,k-m} \tag{9}$$

Or $H_1 = 0$, donc $\forall j$, $H_{1,j} = 0$. On en déduit que :

$$T_\chi H = \sum_{k\geq 2} \sum_{l=2}^{k} H_{l,k-l} = \sum_{k\geq 2} \sum_{l=0}^{k-2} H_{l+2,k-l-2}$$

Or $H_{l+2,k-l-2} \in E_k$, donc le terme d'ordre k dans $T_\chi H$ est

$$Z_k = \sum_{l=0}^{k-2} H_{l+2,k-l-2} \tag{10}$$

On va montrer par récurrence que Z_k ne dépend que des variables d'action $I_1 \dots I_n$ pour un χ_k bien choisi. Puisque H_2 est déjà sous une forme normale, on peut prendre $Z_2 = H_2$. D'autre part pour $k = 3$ on a $Z_3 = H_{2,1} + H_{3,0} = L_{\chi_3} H_{2,0} + H_{3,0}$ par la définition de l'opérateur T. L'écriture $L_{H_2}\chi_3 + Z_3 = H_3$ laisse apparaître une décomposition selon le noyau et l'image de L_{H_2} (on sait par les propriétés de cet opérateur que ceux-ci sont en somme directe dans

l'ensemble des polynômes homogènes de degré k). Prenant χ_3 de manière à ce que $L_{H_2}\chi_3 = p_{\mathrm{Im}\, L_{H_2}}(H_3)$, on a $Z_3 \in \mathrm{Ker}\, L_{H_2}$, qui ne dépend que des variables d'action (toujours par les propriétés de L_{H_2}, en l'occurence le fait qu'il soit diagonalisable ; son sous-espace propre correspondant à la valeur propre 0 est engendré par les vecteurs de la forme $x^l y^l$). Reste à montrer l'hérédité.
On a comme supra

$$Z_k = \sum_{l=0}^{k-2} H_{l+2,k-l-2} = \sum_{l=1}^{k-2} H_{l+2,k-l-2} + H_{2,k-2}$$

Or

$$H_{2,k-2} = \sum_{l=1}^{k-2} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} H_{2,k-2-l} = \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} H_{2,k-2-l} + L_{\chi_k} H_2$$

On isole le terme en $L_{\chi_k} H_2$ car c'est celui-ci que l'on est encore libres de faire varier. Ainsi

$$Z_k + L_{H_2}\chi_k = \sum_{l=1}^{k-2} H_{l+2,k-l-2} + \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} H_{2,k-2-l}$$

On voit là encore une décomposition suivant le noyau et l'image de L_{H_2}. Il ne nous reste plus qu'à retrouver l'expression de F_k dans le 2$^{\text{nd}}$ terme de l'équation précédente. De par les expressions de Z_k et $H_{i,j}$ dans respectivement (10) et (9), on a :

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} \left(\sum_{j=0}^{k-l-2} H_{2+j,k-l-j-2} \right) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} \left(\sum_{j=1}^{k-l-2} \frac{j}{k-l-2} L_{\chi_{2+j}} H_{2+l,k-j-l-2} \right) + H_k \end{aligned}$$

Où H_k correspond au terme en $l = k-2$ dans la 2$^{\text{de}}$ somme. Par la suite on isole le terme en $j = 0$ dans la 1$^{\text{ère}}$ somme.
Or on a la permutation des sommes

$$\sum_{l=1}^{k-3} \sum_{j=1}^{k-l-2} = \sum_{j=1}^{k-3} \sum_{l=1}^{k-j-2}$$

En échangeant le nom des variables j et l dans la 1$^{\text{ère}}$ somme on obtient :

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{l=1}^{k-3} \sum_{j=1}^{k-l-2} \frac{j}{k-2} L_{\chi_{2+j}} H_{2+l,k-j-l-2} + \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} H_{2,k-l-2} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} \left(\sum_{j=1}^{k-l-2} \frac{j}{k-l-2} L_{\chi_{2+j}} H_{2+l,k-j-l-2} \right) + H_k \end{aligned}$$

Et puisque

$$\frac{j}{k-2} + \frac{jl}{(k-l-2)(k-2)} = j\frac{k-l-2+l}{(k-l-2)(k-2)} = \frac{j}{k-l-2}$$

on a

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} H_{2,k-l-2} + \sum_{l=1}^{k-3} \sum_{j=1}^{k-l-2} \frac{j}{k-l-2} L_{\chi_{2+j}} H_{2+l,k-j-l-2} + H_k \\ &= \sum_{l=1}^{k-3} \frac{l}{k-2} L_{\chi_{2+l}} H_{2,k-l-2} + \sum_{l=1}^{k-2} H_{2+l,k-l-2} \end{aligned}$$

Où on a reconnu l'expression de $H_{2,k-l-2}$ dans l'équation (9). On a retrouvé l'égalité demandée.
C.Q.F.D.

A.2 Preuve des estimations obtenues sur χ

On sait par le théorème de la forme normale que $L_{H_2}\chi_k + Z_k = F_k$, la somme étant directe orthogonale, ainsi $\|L_{H_2}\chi_k\| \leq \|F_k\|$ et $\|Z_k\| \leq \|F_k\|$. D'autre part on se place dans le cas où la déformation induite par χ_k est la plus faible possible, c'est-à-dire que $\chi_k \in \operatorname{Im} L_{H_2}$. On peut alors écrire

$$\chi_k = \sum_{\substack{|l+m|=k \\ l \neq m}} \chi_{l,m}\, x^l y^m, \quad l, m \in \mathbb{N}^n$$

Ce qui implique

$$L_{H_2}\chi_k = \sum_{\substack{|l+m|=k \\ l \neq m}} i\omega(l-m)\chi_{l,m}\, x^l y^m$$

D'où

$$\|L_{H_2}\chi_k\| = \sum_{\substack{|l+m|=k \\ l \neq m}} |\omega(l-m)|\, |\chi_{l,m}| \geq \|\chi_k\|\alpha_r$$

Où on a posé, pour $f \in E_k$, $\|f\| = \sum_{l,m} f_{l,m}$. On en déduit que

$$\|\chi_k\| \leq \frac{1}{\alpha_r}\|F_k\|$$

Il ne reste "plus" qu'à majorer $\|F_k\|$. On va chercher des nombres $\eta_1, \ldots, \eta_{r-2}$ et $\theta_{l,0}, \ldots, \theta_{l,l-r-2}$, $0 \leq l \leq r-2$ tels que $\|H_{2+l,k}\| \leq \theta_{l,k} cd$ et $\|F_{2+k}\| \leq \eta_k cd$.

Comme $H_{l,0} = H_l$ et $F_3 = H_3$, on peut prendre $\theta_{l,0} = c^{l-1}$ et $\eta_1 = 1$. Or par (9),

$$\begin{aligned}
\|H_{2+l,k}\| &\le \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} \|L_{\chi_{2+j}} H_{2+l,k-j}\| \\
&\le \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} (2+j)(2+l+k-j) \|\chi_{2+j}\| \|H_{2+l,k-j}\|
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.3 de [4]. Par conséquent

$$\|H_{2+l,k}\| \le \frac{(cd)^2}{k\alpha_r} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(2+l+k-j)\eta_j \theta_{l,k-j}$$

Car $\chi_{2+j} \le \frac{1}{\alpha_r}\|F_{2+j}\|$. D'autre part on a par (8) :

$$\begin{aligned}
\|F_{2+k}\| &\le \sum_{l=1}^{k-1} \frac{l}{k} \|L_{\chi_{2+l}} Z_{k-l+2}\| + \sum_{l=1}^{k} \frac{l}{k} \|H_{2+l,k-l}\| \\
&\le \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} (2+j)(2+k-j) \|\chi_{2+j}\| \|Z_{k-j+2}\| + \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} \|H_{2+j,k-j}\| \\
&\le \frac{(cd)^2}{k\alpha_r} \sum_{j=1}^{k-1} j(2+j)(2+k-j)\eta_j \eta_{k-j} + cd \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} \theta_{j,k-j}
\end{aligned}$$

Quitte à se placer dans le cas d'égalité $\|F_{2+k}\| = \eta_k cd$ et $\|H_{2+l,k}\| = \theta_{l,k} cd$, on peut donc supposer que

$$\begin{aligned}
\theta_{l,k} &\le \frac{cd}{k\alpha_r} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(2+l+k-j)\eta_j \theta_{l,k-j} \\
\eta_k &\le \frac{cd}{k\alpha_r} \sum_{j=1}^{k-1} j(2+j)(2+k-j)\eta_j \eta_{k-j} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j\theta_{j,k-j}
\end{aligned}$$

Pour obtenir les estimations voulues des suites $(\theta_{l,k})_{l,k}$ et $(\eta_k)_k$, nous avons besoin de suites auxiliaires. Définissons $a_{l,k}$ et b_k par $a_{l,0} = b_1 = 1$ et les relations de récurrence :

$$\begin{aligned}
a_{l,k} &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(2+l+k-j) b_j a_{l,k-j} \qquad (11) \\
b_k &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j(2+j)(2+k-j) b_j b_{k-j} + \frac{1}{k} a_{1,k-1}
\end{aligned}$$

On a alors le lemme :

Lemme 1 *Posant $c_1 = d/\alpha_r$ et $c_2 = 1 + c_1$, on a les estimations suivantes, pour $l \geq 0$, $k \geq 1$:*

$$\theta_{l,k} \leq \frac{c_1}{c_2} c_2^k c^{l+k-1} a_{l,k}$$
$$\eta_k \leq c_2^{k-1} c^{k-1} b_k$$

Pour cela on va établir plusieurs résultats intermédiaires.
Pour $s \geq 1$, on a :

$$b_s = a_{1,s-1} \tag{12}$$

Cela se montre par récurrence : c'est vrai pour $s = 1$: $b_1 = a_{1,0} = 1$. Supposons que (12) soit vrai pour tout $s \in [\![1, k-1]\!]$. De par la définition de $a_{1,k-1}$ et de b_k on a, en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$a_{1,k-1} = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} j(2+j)(2+k-j) a_{1,j-1} a_{1,k-j-1}$$
$$b_k = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} j(2+j)(2+k-j) a_{1,j-1} a_{1,k-j-1} + \frac{1}{k} a_{1,k-1}$$

D'où

$$b_k = \frac{k-1}{k} a_{1,k-1} + \frac{1}{k} a_{1,k-1} = a_{1,k-1}$$

D'autre part, comme tout les termes dans les sommes de (11) sont positifs, on peut affirmer que

$$a_{1,k} \geq \frac{1}{k} \Big(3(2+k) a_{1,k-1} b_1 + 3k(2+k) a_{1,0} b_k \Big)$$

Où l'on n'a gardé que le 1er et le dernier terme de la somme. On en déduit, par (12), que :

$$a_{1,k} \geq \frac{3(k+1)(k+2)}{k} a_{1,k-1} \tag{13}$$

Montrons par récurrence que $\forall l \geq 1$, $s \geq 0$, on a :

$$\frac{a_{l,s}}{a_{l-1,s}} \leq \frac{l+s+1}{l+1} \tag{14}$$

Cela est vrai pour $s = 0$ et pour tout l. Supposons que ce soit vrai pour tout $s \in [\![0, k-1]\!]$. Alors on a, par (11) :

$$\begin{aligned} a_{l,k} &\geq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(2+l+k-j)\, b_j\, \frac{k+l-j+1}{l+1}\, a_{l-1,k-j} \\ &\geq \frac{1+l+k}{l+1} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(2+l+k-j)\, b_j\, a_{l-1,k-j} \\ &= \frac{1+l+k}{l+1}\, a_{l-1,k} \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence.
Finalement on montre par récurrence que :

$$\forall k \geq 2, \quad a_{1,k-1} \geq \sum_{j=2}^{k} j a_{j,k-j}$$

Cela est vrai pour $k = 2$, car $a_{1,1} = 3 \times 3\, b_1\, a_{1,0} = 9 \geq 2 = 2\, a_{2,0}$.
Supposons la propriété vraie pour un $k \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$. On a par hypothèse $a_{1,k-1} \geq \sum_{j=2}^{k} j\, a_{j,k-j}$ donc $2\, a_{1,k-1} \geq \sum_{j=1}^{k} j\, a_{j,k-j}$. On se sert alors de (13) et (14) pour augmenter les indices d'une unité :

$$\begin{aligned}
a_{1,k} &\geq \frac{3(k+1)(k+2)}{2k} \sum_{j=1}^{k} j a_{j,k-j} && \text{par la précédente égalité et (13)} \\
&\geq \frac{3(k+1)(k+2)}{2k} \sum_{j=1}^{k} j\, \frac{2+j}{2+k}\, a_{j+1,k-j} && \text{par (14)} \\
&= \frac{3(k+1)}{2k} \sum_{j=2}^{k+1} (j-1)(j+1)\, a_{j,k+1-j} \\
&\geq \sum_{j=2}^{k+1} j\, a_{j,k+1-j}
\end{aligned}$$

car $j+1 \geq j$ et $\frac{3(k+1)}{2k}\,(j-1) \geq 1$ pour $j \geq 2$. On a alors montré l'hérédité.
Définissons alors $\overline{\theta_{l,k}}$ et $\overline{\eta_k}$ par :

$$\begin{aligned}
\overline{\theta_{l,k}} &= \frac{c_1}{c_2}\, c_2^k\, c^{l+k-1} a_{l,k} \\
\overline{\eta_k} &= c_2^{k-1}\, c^{k-1} b_k
\end{aligned}$$

Ce sont ces quantités qui vont servir à majorer $\theta_{l,k}$ et η_k. On a alors, par (11) :

$$\begin{aligned}
\overline{\theta_{l,k}} &= \frac{c_1}{c_2}\, c_2^k\, c^{l+k-1}\, \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \Bigg(j(2+j)(2+l+k-j)\, \frac{\overline{\eta_j}}{c^{j-1}\, c_2^{j-1}}\, \overline{\theta_{l,k-j}} \\
&\qquad \left(\frac{c_1}{c_2}\, c_2^{k-j}\, c^{l+k-j-1}\right)^{-1} \Bigg) \\
&= \frac{c_2\, c}{k} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(2+l+k-j)\, \overline{\eta_j}\, \overline{\theta_{l,k-j}}
\end{aligned}$$

De même on obtient

$$\overline{\eta_k} = \frac{c_2\, c}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j(2+j)(2+k-j)\, \overline{\eta_j}\, \overline{\eta_{k-j}} + \frac{1}{k}\, \frac{c_2}{c_1}\, \overline{\theta_{1,k-1}}$$

Par (5.10) on a

$$\frac{c_2}{c_1}\,\overline{\theta_{1,k-1}} \geq (c_2 c)^{k-1} \sum_{j=2}^{k} j\, a_{j,k-j}$$

Or

$$\begin{aligned}(c_2 c)^{k-1} j\, a_{j,k-j} &= j\,\overline{\theta_{j,k-j}}\,(c_2 c)^{k-1}\frac{c_2}{c_1} c_2^{j-k} c^{-j-k+j-1} \\ &= j\,\overline{\theta_{j,k-j}}\,\frac{c_2^j}{c_1}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{c_2}{c_1}\,\overline{\theta_{1,k-1}} \geq \sum_{j=2}^{k} j\,\frac{c_2}{c_1}\,c_2^{j-1}\,\overline{\theta_{j,k-j}} \geq \sum_{j=2}^{k} j\,\overline{\theta_{j,k-j}}$$

car $c_2 \geq c_1$ et $c_2 \geq 1$. Utilisant de nouveau $c_2 \geq c_1$ et l'équation précédente pour la 2^{de} équation on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{\theta_{l,k}} &\geq \frac{c_1 c}{k} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(2+l+k-j)\,\overline{\eta_j}\,\overline{\theta_{l,k-j}} \\ \overline{\eta_k} &\geq \frac{c_1 c}{k} \sum_{j=1}^{k-1} j(2+j)(2+l+k-j)\,\overline{\eta_j}\,\overline{\eta_{k-j}} + \frac{1}{k}\sum_{j=2}^{k} j\,\overline{\theta_{j,k-j}}\end{aligned}$$

Or $\frac{c_1 c}{k} = \frac{cd}{k\alpha_r}$, on peut en déduire par récurrence que $\theta_{l,k} \leq \overline{\theta_{l,k}}$ et $\eta_k \leq \overline{\eta_k}$ $\forall l, k$ puisque $\overline{\theta_{l,0}} = \theta_{l,0}$ et $\overline{\eta_1} = \eta_1$, l'hérédité étant issue des inégalités précédantes.
Nous aurons besoin d'un 2^{nd} lemme :

Lemme 2

$$\forall k \geq 1, \quad b_k \leq 6^{k-1}\, k!$$

On va montrer que cette inégalité est vérifiée pour tout $k > 8$, le cas $k \leq 8$ étant réglé par le calcul direct. En effet on a, en utilisant l'expression de $a_{1,k}$ dans (5.5) et en remplaçant les $a_{1,j}$ par les b_{j+1} :

$$b_{k+1} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} j(2+j)(3+k-j)\, b_j\, b_{k-j+1}$$

Le calcul donne alors :

j	b_j	$6^{j-1}\, j!$	valeur approchée à 10^{-3} de $6^{j-1}\, j!/b_j$
1	1	1	1
2	9	12	1,333
3	162	216	1,333
4	4104	5184	1,263
5	128790	155520	1,208
6	23514624/5	5598720	1,190
7	964079172/5	235146240	1,220
8	303755194368/35	11287019520	1,301

Passons maintenant à la preuve en elle-même.
Supposons que $\forall j \leq k$, $b_j \leq 6^{j-1}\, j!$ Alors

$$b_{k+1} \leq \frac{6^{k-1}}{k} \sum_{j=1}^{k} j(2+j)(3+k-j)\, j!\, (k-j+1)!$$

Séparons les cas k pair/k impair. si k est pair posons $m = k/2$. Alors

$$\begin{aligned} b_{k+1} \leq \frac{6^{k-1}}{k} \sum_{j=1}^{m} \Big(& j(2+j)(3+k-j)\, j!\, (k-j+1)! \\ & + (k-1-j)(3+k-j)(2+j)\, (k+1-j)!\, j! \Big) \end{aligned}$$

Où on a regroupé chaque j avec $k+1-j$. Par conséquent

$$\begin{aligned} b_{k+1} &\leq \frac{6^{k-1}}{k} \sum_{j=1}^{m} (j+k-1-j)(2+j)(3+k-j)\, j!\, (k+1-j)! \\ &= \frac{6^{k-1}\,(k+1)}{k} \sum_{j=1}^{m} (2+j)(3+k-j)\, j!\, (k+1-j)! \end{aligned}$$

Pour k impair, posons $m = \frac{k-1}{2}$. On obtient de même :

$$\begin{aligned} b_{k+1} \leq\ & \frac{6^{k-1}\,(k+1)}{k} \sum_{j=1}^{m} (2+j)(3+k-j)\, j!\, (k+1-j)! \\ & + \frac{6^{k-1}}{k}\, m(2+m)(3+k-m)\, m!\, (k+1-m)! \end{aligned}$$

Or

$$m(2+m)(3+k-m)\, m!\, (k+1-m)! \leq \frac{k+1}{2}\, (m+3)^2 \big((m+1)!\big)^2$$

En effet cela équivaut à :

$$\begin{aligned}
& m(2+m)(4+m)\,m!\,(m+2)! \leq (m+1)(m+3)^2\big((m+1)!\big)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & m(2+m)^2(4+m)(m+1) \leq (m+1)^3(m+3)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & m(2+m)^2(4+m) \leq (m+1)^2(m+3)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad & m^4+8m^3+20m^2+16m \leq m^4+8m^3+22m^2+24m+9 \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 \leq 2m^2+8m+9
\end{aligned}$$

Ce qui est bien vérifié pour $m \geq 0$.
Définissons pour $j \in [\![1, m-1]\!]$ les quantités :

$$l_j = (2+j)(3+k-j)\,j!\,(k+1-j)! \quad \text{et} \quad \overline{l_j} = \frac{l_j}{l_{j+1}}$$

On a alors

$$\forall j \in [\![1, m-1]\!], \quad \overline{l_j} \geq 1$$

En effet,

$$\overline{l_j} = \frac{(2+j)(3+k-j)(k+1-j)}{(3+j)(2+k-j)(j+1)}$$

avec $k+1-j \geq k+2-m = m+3 \geq j+4 > j+3$ on obtient

$$\overline{l_j} > \frac{(2+j)(3+k-j)}{(1+j)(2+k-j)} \geq 1$$

Par conséquent la suite (l_j) est décroissante pour $j \leq m$. Or $\overline{l_2} = \frac{4(k+1)(k-1)}{15k}$, d'où

$$\frac{\overline{l_2}}{k} = \frac{4}{15}\,\frac{k^2-1}{k^2} = \frac{4}{15}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \geq \frac{1}{4}$$

Pour tout $k \geq 4$.
Ainsi $\forall j \geq 3$, $l_j \leq l_3 \leq l_2\,\frac{4}{k}$. Donc, pour k pair on a la majoration :

$$\begin{aligned}
\frac{b_{k+1}}{6^{k-1}} &\leq \frac{k+1}{k}\big(l_1 + \cdots + l_m\big) \\
&\leq \frac{k+1}{k}\left(3(k+2)\,k! \;+\; 8(k+1)(k-1)!\Big(1 + \frac{4}{k}\big(\frac{k}{2} - 2\big)\Big)\right) \\
&= 3(k+1)!\,\frac{k+2}{k}\left(1 + \frac{8}{3k}\Big(1 + \frac{4}{k}\big(\frac{k}{2} - 2\big)\Big)\right)
\end{aligned}$$

Car $\frac{k+1}{k}\,8(k+1)(k-1)! \leq 3(k+1)!\frac{k+2}{k}\,\frac{8}{3k}$ i.e. $(k+1)^2 \leq (k+1)(k+2)$.
Pour k impair on remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}l_m &= \frac{1}{2}(2+m)(3+k-m)\,m!\,(k+1-m)! \\
&= \frac{1}{2}(2+m)(4+m)\,m!\,(m+2)! \\
&\geq \frac{1}{2}(m+3)^2\big((m+1)!\big)^2
\end{aligned}$$

En effet, la dernière inégalité est équivalente à :

$$\begin{array}{rrcl} & (2+m)^2(4+m)(m+1) & \geq & (m+3)^2(m+1)^2 \\ \Longleftrightarrow & (1+m')^2(3+m') & \geq & (2+m')^2 m'^2 \\ \Longleftrightarrow & m'^3+5m'^2+7m'+3 & \geq & m'^3+4m'^2+4m' \end{array}$$

Où on a posé $m' = m+1$. La dernière inégalité est vraie pour tout $m' \geq 0$.
Alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{b^{k+1}}{6^{k-1}} &\leq \frac{k+1}{k}\big(l_1+\cdots+l_m+\frac{1}{2}l_m\big) \\ &\leq 3(k+1)!\,\frac{k+2}{k}\Bigg(1+\frac{8}{3k}\Big(1+\frac{4}{k}\big(m-2+\frac{1}{2}\big)\Big)\Bigg) \end{aligned}$$

ce qui est la même majoration que pour le cas pair. Or pour $k \geq 9$ on a

$$\frac{k+2}{k}\Bigg(1+\frac{8}{3k}\Big(1+\frac{4}{k}\big(m-2+\frac{1}{2}\big)\Big)\Bigg) \leq 2$$

En effet on a :

$$\frac{k+2}{k}\Bigg(1+\frac{8}{3k}\Big(1+\frac{4}{k}\big(m-2+\frac{1}{2}\big)\Big)\Bigg) = \frac{k+2}{k}\Bigg(1+\frac{8}{3k^2}\Big(3k-8\Big)\Bigg)$$

La fonction $k \mapsto \frac{k+2}{k}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $k \mapsto \frac{3k-8}{k^2}$ est décroissante sur $[16/3, +\infty[$. Par positivité de tous les termes, il suffit pour avoir la majoration d'évaluer l'expression en $k = 9$; on obtient $1,987$ à 10^{-3} près. Le lemme est démontré.
La finalisation de la preuve est alors aisée. On a

$$\begin{aligned} \|\chi_k\| &\leq \frac{1}{\alpha_r}\|F_k\| \\ &\leq \frac{cd}{\alpha_r}\eta_{k-2} \\ &\leq \frac{cd}{\alpha_r}\,(c_2c)^{k-3}b_{k-2} \\ &\leq \frac{cd}{\alpha_r}\,(c_2c)^{k-3}6^{k-3}(k-2)! \end{aligned}$$

Ce qui est la formule donnée par le théorème.
C.Q.F.D.

A.3 Estimation de la variation des variables d'action

Soit φ une solution du système hamiltonien issu de $H^{(r)}$, et $I^{(r)}$ sa composante selon les variables d'action. Alors on a :

$$\dot{I}_j^{(r)} = \frac{\partial}{\partial\theta_l}H^{(r)}(I,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_l}R^{(r)}(I,\theta)$$

Car $Z^{(r)}$ ne dépend pas de θ. Par changement de coordonnées on obtient :

$$\dot{I}_j^{(r)} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial X_l^{(r)}}{\partial \theta_l} \frac{\partial R^{(r)}}{\partial X_l^{(r)}}(I,\theta) + \frac{\partial Y_l^{(r)}}{\partial \theta_l} \frac{\partial R^{(r)}}{\partial Y_l^{(r)}}(I,\theta) \right)$$

Et puisque $X_l^{(r)} = \sqrt{I_j^{(r)}} e^{-i\theta_l}$ et $Y_l^{(r)} = \sqrt{I_j^{(r)}} e^{i\theta_l}$, il vient :

$$\dot{I}_j^{(r)} = iY_j^{(r)} \frac{\partial R^{(r)}}{\partial Y_j^{(r)}} - iX_j^{(r)} \frac{\partial R^{(r)}}{\partial X_j^{(r)}}$$

On cherche alors à majorer les dérivées du reste. Pour cela considérons un terme quelconque du reste $h_{l,m} {X^{(r)}}^l {Y^{(r)}}^m$, sa contribution à $\dot{I}_j^{(r)}$ est $i(m_j - l_j) h_{l,m} {X^{(r)}}^l {Y^{(r)}}^m$. On se sert ensuite de la dernière inégalité de la preuve de la proposition 3.3 de [4] appliquée à la majoration $\|H_k \leq c^{k-1} d/c\|$ qui fournit une estimation du reste :

$$\left| R_k^{(r)}(x,y) \right| \leq \left(\frac{R}{R_r^*} \right)^k R_r^* \frac{d}{c}$$

On en déduit que $\|\dot{I}^{(r)}\| \leq (d/c) R_r^* \sum_{j \geq r} j (R/R_r^*)^j$. La sommation conduit à l'inégalité demandée ; en effet posant $x = R/R_r^*$, on doit obtenir

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j\geq r} jx^j &= x^{r+1}(r+1-rx)(1-x)^{-2} \\ \iff \textstyle\sum_{j\geq r} jx^{j-1} &= x^r(r+1-rx)(1-x)^{-2} \end{aligned}$$

On reconnaît à gauche une dérivée, on peut alors identifier les termes par comparaison des primitives.

A.4 Preuve du théorème de quasi-stabilité

Définissons tout d'abord la constante M.
M est un majorant de $c\big(d(9/r+32/5)+\alpha_r(1/r+32/5)\big)$, si bien que $R_r^* \geq \frac{\alpha_r}{rM}$.
Pour cela, puisque $r \geq 3$ et $\alpha_r < 1$, on peut prendre

$$M = \frac{47d + 34}{5} c$$

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on se place dans le système de coordonnées défini par les variables $X^{(r)}$ et $Y^{(r)}$, et dans une boule centrée en l'origine de rayon $R < R_r^*$. L'idée de base de la preuve est d'utiliser l'inégalité des accroissements finis appliquée à $I^{(r)}$ pour majorer le rayon au temps final T. Pour cela, on va optimiser la majoration de $|\dot{I}^{(r)}|$ obtenue dans la proposition 6.1. Tout d'abord on se place dans un disque D_R de rayon assez petit, on demande par exemple que $R/R_r^* \leq 1/2$. Puisqu'en plus

$$R_r^* \geq \frac{C_2}{r^m M}$$

les termes

$$R, \qquad r+1-r\frac{R}{R_r^*} \qquad \text{et} \qquad \left(1-\frac{R}{R_r^*}\right)^{-2}$$

sont linéaires en r ; on se ramène à optimiser le terme non-linéaire à savoir

$$\left(\frac{R}{R_r^*}\right)^r \leq \left(\frac{Rr^mM}{C_2}\right)^r = r^{rm}\left(\frac{R}{\tilde{R}}\right)^r$$

où on a posé $\tilde{R} = C_2/M$. On considère alors la fonction d́finie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f : r \mapsto r^{rm}\beta^r = \exp\big(rm\ln r + r\ln\beta\big)$$

pour un $\beta > 0$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$f'(r) = \big(m\ln r + m + \ln\beta\big)r^{rm}\beta^r$$

Alors

$$f'(r) > 0 \iff m(1+\ln r) + \ln\alpha > 0 \iff r > \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/m}\frac{1}{e}$$

f atteint donc son minimum en $r = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{1/m}\frac{1}{e}$. On pose alors

$$r_{opt} = \left[\frac{1}{e}\left(\frac{\tilde{R}}{R}\right)^{1/m}\right]$$

La condition $r_{opt} \geq 3$ utilisée pour calculer M implique que $R \leq \tilde{R}/(3e)^m$. De plus, $R_r^* \geq \frac{\alpha_r}{rM} = \tilde{R}r^{-m}$, par conséquent $R/R^* \leq e^{-m}$ (on retrouve bien la condition $R/R^* \leq 1/2$ réclamée au début), et $1 + 1/r_{opt} - R/R_r^* < 4/3$. On peut alors calculer un majorant de $|\dot{I}^{(r_{opt})}|$ à savoir

$$|\dot{I}^{(r_{opt})}| \leq C_3 R r_{opt} e^{-mr_{opt}}$$

Où on a posé

$$C_3 = \frac{4d}{3c}(1-e^{-m})^{-2}$$

On charche alors un $\alpha > 1$ tel que si $(X^{(r_{opt})}, Y^{(r_{opt})})(0) \in D_{R/\alpha}$, alors $(X^{(r_{opt})}, Y^{(r_{opt})})(t) \in D_R$ pour tout $|t| \leq T$ pour un T bien choisi. Ainsi, en utilisant les inégalités de (6.3) ainsi que l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\begin{array}{rrcl} & R(T) & \leq & R \\ \Longleftarrow & I(T) & \leq & R^2/2 \\ \Longleftarrow & \Phi(T) & \leq & R^2/2 \\ \Longleftarrow & \Phi(T)-\Phi(0) & \leq & R^2/2 - \frac{R^2}{2\alpha^2} \\ \Longleftarrow & \|\dot{\Phi}\|_{[0,T]}^{\infty}\, T & \leq & R^2/2\Big(1-\frac{1}{\alpha^2}\Big) \end{array}$$

Utilisant la majoration de $|\dot{I}^{(r_{opt})}|$ obtenue supra, on pose

$$T \leq \frac{R}{C_3 r_{opt}} \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha^2} e^{m r_{opt}}$$

Et cela implique que la trajectoire reste confinée dans la boule D_R pour $t < T$. Pour finaliser la preuve, il suffit de prendre en compte le déformation induite par $\chi^{(r_{opt})}$. Une majoration de cette déformation est fournie par la proposition 3.4 de [4], appliquée à

$$a = \frac{12 r_{opt} c}{5}\Big(1 + \frac{d}{\alpha_{r_{opt}}}\Big), \quad b = \frac{3cd}{\alpha_{r_{opt}}} \quad \text{et} \quad \rho = e^m$$

Ce qui donne :

$$(1-\delta)|(X,Y)| \leq |(x,y)| \leq (1+\delta)|(X,Y)|$$

Avec

$$\delta = \left(1 + \frac{8a}{9b}\right)^{-1} \frac{\sqrt{2}}{\rho - 1}$$

Or

$$\frac{8a}{9b} = \frac{8}{9}\frac{12rc}{5}\left(1 + \frac{d}{\alpha_{r_{opt}}}\right)\frac{\alpha_{r_{opt}}}{3cd} \geq \frac{32}{45} r_{opt} \geq 2 r_{opt}$$

Donc, puisque $r_{opt} \geq 3$,

$$\delta \leq \frac{\sqrt{2}}{3(e^m - 1)} \doteq \overline{\delta}$$

D'autre part on pose

$$\alpha = \frac{\sigma}{\sigma_0} > 1$$

Selon les hypothèses du théorème, les conditions initiales doivent se trouver dans la boule D_{R_0} en les variables initiales, et on a établi un résultat pour des conditions initiales dans la boule $D_{R/\alpha}$ en les variables $(X^{(r_{opt})}, Y^{r_{(opt)}})$. Ainsi on obtient la condition sur R_0 :

$$R_0 \leq (1 - \overline{\delta})\frac{R}{\alpha} \leq \frac{(1-\overline{\delta})}{\alpha}\frac{\tilde{R}}{(3e)^m} = \frac{\hat{R}}{\sigma(\text{"`}e)^m}$$

Finalement le "temps de confinement" T est donné en remplaçant α par σ/σ_0, R par $\sigma/(1+\delta)\, R_0$ et r_{opt} par son expression obtenue supra :

$$T = T_0 \exp\left(m \left\lfloor \frac{1}{e}\left(\frac{\hat{R}}{\sigma R_0}\right)^{1/m} \right\rfloor\right)$$

Avec

$$T_0 = R_0\, e\, \frac{\sigma^2 - \sigma_0^2}{2\sigma\sigma_0}\left(C_3(1-\overline{\delta})\left(\frac{\hat{R}}{\sigma R_0}\right)\right)^{-1}$$

A.5 Preuve que $f \in G^2(\mathbb{R})$

On se place dans le cas x positif. On montre par récurrence que la dérivée n-ième de f est de la forme

$$f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-1/x}$$

avec P_n un polynôme en la fraction rationnelle $\frac{1}{x}$ de degré $2n$. En effet, si on suppose que c'est vrai au rang n, on a :

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{1}{x^2}P_n(x) + P_n'(x)\right)e^{-1/x}$$

Soit alors la fonction auxilliaire

$$g_n : x \mapsto \frac{1}{x^n}e^{-1/x}$$

Elle est dérivable de dérivée égale à

$$g_n'(x) = \left(\frac{1}{x^{n+2}} - \frac{n}{x^{n+1}}\right)e^{-1/x^2}$$

Ainsi

$$g_n'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$$

et donc g_n atteint son maximum en $x = \frac{1}{n}$.
Montrons par récurrence que

$$\forall x,\ |f^{(n)}(x)| \leq (Q_n f)(x)$$

avec la suite de polynômes en $\frac{1}{x}$ Q_n définie par :

$$Q_0 = 1, \quad Q_{n+1} = \frac{1}{x^2}Q_n - Q_n'$$

Pour cela on peut montrer que tous les coefficients de P_n sont inférieurs en norme à ceux de Q_n. On voit facilement que cela est vrai pour $n = 0$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. Alors on a tous les coefficients de P_n inférieurs à ceux de Q_n. Or

$$P_{n+1} = \frac{1}{x^2}P_n(x) + P_n'(x) \quad \text{et} \quad Q_{n+1} = \frac{1}{x^2}Q_n - Q_n'$$

avec tous les coefficients de Q_n' positifs. La propriété est donc vérifiée au rang $n+1$.
Montrons par récurrence que $Q_n f \in G^2([-1,1])$. On a $f(x) \leq 1\,\forall x$, donc

$$|(Q_0 f)(x)| \leq C^{0+1}(0!)^2 \quad \forall C \leq 1$$

Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|Q_n f(x)| \leq C^{n+1}(i!)^2$$

Alors

$$(Q_{n+1}f)(x) = \left(\frac{1}{x^2}Q_n(x) - Q'_n(x)\right)e^{-1/x}$$

le polynôme en $\frac{1}{x}$ devant l'exponentielle étant de degré $2n+2$. De par le résultat obtenu sur les g_n, et le fait que tous les termes soient positifs, on en déduit que cette fonction atteint son maximum en un $x \geq 2n+2$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\|Q_n f\|_\infty^{[0,1]} &= \|Q_n f\|_\infty^{[1/(2n+2),1]} \\
&\leq \sup_x \left[\big((2n+2)^2 Q_n(x) + 2n(2n+2)Q_n(x)\big)\, e^{-1/x}\right] \\
&\leq 8(n+1)^2 \|Q_n f\|_\infty \leq C^{n+2}\big((n+1)!\big)^2
\end{aligned}$$

Pour tout $C \geq 8$. De par la majoration $\|f^{(n)}\|_\infty \leq \|Q_n f\|_\infty$, on obtient le résultat demandé.