Notice des simulations numériques

Pierre-Antoine Guihéneuf

4 septembre 2012

Pour confronter les résultats obtenus à la réalité des discrétisations numériques, nous avons effectué des simulations. En effet, il n'est pas du tout clair que le comportement générique puisse s'observer sur les discrétisations calculables d'un homéomorphisme donné par une formule simple. D'une part, chacun de nos résultats est valable « pour un homéomorphisme *générique* », rien n'indique que ces résultats s'appliquent sur des exemples concrets homéomorphismes définis par des formules simples. D'autre part, les résultats que nous obtenons sont du type « il existe une infinité d'entiers N tels que la discrétisation d'ordre $N\dots$ », mais on n'a aucun contrôle sur les entiers N concernés ; il se pourrait très bien que ces entiers soient tous beaucoup plus grands que les ordres de discrétisations calculables en pratique. Concrètement, nous avons testé les discrétisations d'homéomorphismes du tore $\mathbf{T}^2$ du même type que ceux testé par T. Miernowski dans sa thèse [Mie05] :

$$f(x,y) = Q \circ P(x,y) \quad \text{ou} \quad f(x,y) = P \circ Q \circ P(x,y),$$

où P et Q sont deux homéomorphismes du tore ne modifiant qu'une seule coordonnée :

$$P(x,y) = (x, y + p(x,y)) \quad \text{et} \quad Q(x,y) = (x + q(x,y), y),$$

et sur des grilles de discrétisations uniformes :

$$E_N = \left\{ \left(\frac{i_1}{N}, \dots, \frac{i_n}{N} \right) \in \mathbf{T}^n \middle| \, \forall j,\, 0 \le i_j \le N-1 \right\}.$$

En pratique, nous avons testé sept homéomorphismes (voir ci-après pour des définitions précises).

Pour des raisons pratiques, nous nous sommes limités à des grilles de tailles inférieures à $2^{15} \times 2^{15}$: les données initiales deviennent rapidement très grandes et l'algorithme créé des variables temporaires qui sont d'une taille de l'ordre de cinq fois la taille des données initiales. Par exemple, pour une grille $2^{15} \times 2^{15}$, l'algorithme occupe déjà entre 25 Go et 30 Go de mémoire vive sur la machine.

Les résultats des simulations sont contrastés : si du point de vue quantitatif on n'observe pas du tout ce qui se passe pour un homéomorphisme générique sur les discrétisations des petites perturbations conservatives de l'identité et de l'automorphisme d'Anosov standard A, le comportement des discrétisations semble énormément dépendre des ordres de discrétisation, notamment en ce qui concerne la simulation des mesures invariantes μ_N^f. Il y a aussi une différence nette entre ce qui se passe au voisinage de l'identité et celui de A, qui pourrait s'expliquer par le fait que composer un homéomorphisme proche de l'identité par A tend à beaucoup mélanger sa dynamique : par exemple les orbites périodiques des discrétisations deviennent beaucoup plus longues, et les mesures μ_N^f sont la plupart du temps plus régulières. Nous avons aussi simulé de petites perturbations de A en topologie C^1, pour voir si le fait d'être conjugué à un automorphisme d'Anosov peut se voir sur les discrétisations ; il semble que cela ne soit pas le cas, du moins pour les exemples que nous avons testé et à des ordres de discrétisation raisonnables.

Nous avons aussi effectué les simulations d'homéomorphismes dissipatifs. Les résultats des discrétisations des petites perturbations de l'identité et de l'automorphisme d'Anosov standard (en topologie C^0) pourraient sembler à première vue décevants : on ne détecte pas les puits des homéomorphismes de départ, et n'observe presque pas de différence avec le cas conservatif. Ce comportement est identique à celui mis en évidence par J.-M. Gambaudo et C. Tresser dans [GT83], où les auteurs expliquent que même avec des exemples assez simples de systèmes dynamiques dissipatifs, la taille des bassins peut être très petite, ce qui les rend indétectables en pratique. C'est pourquoi il nous a semblé judicieux de tester aussi les simulations d'un homéomorphisme C^0-proche de l'identité, mais avec des puits dont les bassins sont suffisamment grands ; dans ce cas les simulations révèlent un comportement qui ressemble fortement à celui décrit par les résultats théoriques, à savoir que la dynamique des discrétisations converge vers celle de l'homéomorphisme de départ. Nous avons là aussi simulé de petites perturbations (dissipatives cette fois) de l'automorphisme d'Anosov standard A en topologie C^1, qui sont conjuguées à A ; de nouveau il n'apparaît pas de différence qualitative notoire avec les discrétisations de la petite perturbation C^0 de A.

1 Homéomorphismes conservatifs

Nous exposons maintenant les résultats des simulations numériques portant sur les homéomorphismes conservatifs que nous avons menées. Nous cherchons par là à savoir s'il est possible d'observer les comportements tels que ceux obtenus dans la section **??** ou bien celui décrit par le théorème **??** sur de véritables simulations numériques : il n'est pas évident *a priori* que les ordres de discrétisation décrits par ces résultats soient atteignables en pratique, ni que des exemples simples d'homéomorphismes se comportent de la même manière que les homéomorphismes génériques.

Rappelons que nous simulons des homéomorphismes du type

$$f(x,y) = Q \circ P(x,y) \quad \text{ou} \quad f(x,y) = P \circ Q \circ P(x,y),$$

où P et Q sont deux homéomorphismes du tore ne modifiant qu'une seule coordonnée :

$$P(x,y) = (x, y + p(x,y)) \quad \text{et} \quad Q(x,y) = (x + q(x,y), y),$$

et que nous discrétisons selon les grilles uniformes sur le tore :

$$E_N = \left\{ \left(\frac{i_1}{N}, \dots, \frac{i_n}{N} \right) \in \mathbf{T}^n \,\middle|\, \forall j,\ 0 \le i_j \le N-1 \right\}.$$

Pour obtenir des homéomorphismes conservatifs, nous avons choisi $p(x,y) = p(x)$ et $q(x,y) = q(y)$. Nous avons effectué des simulations sur trois homéomorphismes conservatifs qui sont de petites perturbations de l'identité ou bien de l'automorphisme d'Anosov standard

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} :$$

– Pour commencer nous avons étudié $f_1 = P \circ Q \circ P$, avec

$$p(x) = \frac{1}{259}\cos(2\pi \times 227x) + \frac{1}{271}\sin(2\pi \times 253x),$$

$$q(y) = \frac{1}{287}\cos(2\pi \times 241y) + \frac{1}{263}\sin(2\pi \times 217y).$$

Cet homéomorphisme conservatif correspond à une petite perturbation C^0 de l'identité. L'expérience montre que même des systèmes dynamiques ayant des définitions assez simples ont un comportement dynamique assez chaotique (voir par exemple [GT83]) ; on peut espérer que l'homéomorphisme f_1 ainsi défini ait un comportement dynamique complexe, voire se comporte essentiellement comme un homéomorphisme générique, au moins pour de petits ordres de discrétisation. Remarquons que nous avons choisi des coefficients qui n'ont pratiquement pas de diviseurs communs, de manière à éviter que des phénomènes arithmétiques, tels qu'une périodicité ou bien des résonances, n'introduisent de la régularité dans la dynamique de l'homéomorphisme considéré, que nous voulons « aléatoire ».

– Ensuite nous avons simulé f_2 la composition de f_1 avec l'automorphisme d'Anosov A, soit $f_2 = P \circ Q \circ P \circ A$, ce qui en fait une perturbation C^0 petite de l'automorphisme d'Anosov standard A. Ainsi f_2 est semi-conjugué à A, mais pas conjugué : à chaque orbite périodique de A correspond de nombreuses orbites périodiques pour f_2. Comme pour f_1, nous avons défini f_2 dans l'espoir que le comportement de ses discrétisations soit assez proche de celui des discrétisations d'un homéomorphisme générique.
– Enfin nous nous sommes intéressés à l'homéomorphisme $f_3 = Q \circ P \circ A$, où

$$p(x) = \frac{1}{259}\cos(2\pi \times x) + \frac{1}{271}\cos(2\pi \times 5x),$$

$$q(y) = \frac{1}{287}\cos(2\pi \times y) + \frac{1}{263}\cos(2\pi \times 7y).$$

Dans ce cas, f_3 est une perturbation non seulement C^0 petite, mais aussi C^1 petite, de l'automorphisme d'Anosov standard. Un tel difféomorphisme est topologiquement conjugué à A ; le but de la simulation d'une perturbation C^1 de A, ce qui n'a pas vraiment de sens dans l'optique de l'étude des homéomorphismes génériques, est de vérifier si oui ou non le fait d'être topologiquement conjugué à une dynamique simple et bien connue change beaucoup le comportement des discrétisations.

Remarquons que l'homéomorphisme f_1 possède au moins un point fixe (il suffit d'annuler simultanément $p(x)$ et $q(y)$) et que les homéomorphismes f_2 et f_3 possèdent au moins un point périodique de période inférieure à 8 (pour voir cela, considérer l'image par A des cubes de la subdivision d'ordre 3, réduire modulo 1/3 et appliquer le théorème de Brouwer, et remarquer que cette construction est stable par petite perturbation). Ainsi, les résultats théoriques indiquent que, pour un homéomorphisme générique f qui a une orbite périodique de période inférieure à 8, une infinité des discrétisations possède une unique orbite périodique, de longueur inférieure à 8, et une sous-suite des mesures invariantes μ_N^f tend vers une mesure invariante par f portée par une orbite périodique de période inférieure à 8. Nous pourrons tester si cela se vérifie sur les simulations.

1.1 Comportement ensembliste

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à quelques quantités reliées au comportement ensembliste des discrétisations des homéomorphismes. Ces quantités sont :

– le cardinal de l'ensemble invariant maximal $\Omega(f_N)$,
– le nombre d'orbites périodiques de l'application f_N,
– la taille maximale d'une orbite périodique pour f_N.

Rappelons que d'après les corollaires **??**, **??** et **??**, pour un homéomorphisme générique, le rapport $\frac{\mathrm{Card}(\Omega(f_N))}{q_N}$ doit osciller entre 0 et 1 en fonction de N, le nombre d'orbites doit osciller entre 1 et (par exemple) $\sqrt{q_N}$ et la taille maximale d'une orbite périodique doit osciller entre une constante et q_N.

Nous avons calculé ces quantités pour des discrétisations d'ordres $128k$ pour k allant de 1 à 100 et les avons représenté sous forme de graphiques. Pour information, si $N = 128 \times 100$, alors $q_N \simeq 1,6.10^8$.

En ce qui concerne le cardinal de l'ensemble invariant maximal $\Omega(f_N)$, contrairement à ce que prévoient les résultats théoriques pour un homéomorphisme générique, pour toutes les simulations, le rapport $\frac{\mathrm{Card}(\Omega(f_N))}{q_N}$ tend vers 0 lorsque N augmente. Plus précisément, le cardinal de $\Omega(f_N)$ évolue de manière beaucoup plus régulière pour f_1 que pour f_2 et f_3 : si pour une f_1 la valeur de ce cardinal semble être la somme d'une fonction régulière croissante et d'un bruit aléatoire, pour f_2 et f_3 cette valeur semble être le produit d'une fonction régulière croissante et d'un bruit aléatoire. Nous n'avons pas d'explication à la forme parabolique de la courbe pour f_1 : cela traduirait le fait que le cardinal de $\Omega((f_1)_N)$ évolue de la même manière que $\sqrt[4]{q_N}$ (alors que pour une application aléatoire d'un ensemble fini à q éléments dans lui-même il évolue de la même manière que $\sqrt{q}$). Enfin, il est intéressant de noter que pour f_2, la taille de l'ensemble invariant maximal se distribue plus ou moins autour de celle de l'ensemble invariant maximal d'une application aléatoire d'un ensemble à q_N éléments dans lui-même qui, asymptotiquement, dépend de manière linéaire de N et vaut environ 16000 pour $N = 128 \times 100$ (voir [Bol01]).

D'après les résultats des parties précédentes, pour un homéomorphisme générique f, le nombre d'orbites périodiques de l'application f_N doit osciller entre 1 et (par exemple) $\sqrt{q_N}$, ce qui n'est clairement pas le cas pour chacune des simulations. De plus, son comportement n'est pas du tout le même pour f_1 et pour f_2 et f_3 : alors que pour f_1 ce nombre d'orbites arrive rapidement à une valeur aux alentours de 2.10^4, pour n'augmenter faiblement par la suite, pour f_2 et f_3 il oscille entre les valeurs 1 et 18, sans que le comportement semble être modifié lorsque l'ordre de la discrétisation augmente . Ces graphiques sont à rapprocher de ceux représentant la taille de l'ensemble invariant maximal $\Omega((f_i)_N)$: si le nombre d'orbites périodiques et la taille de l'ensemble invariant maximal sont du même ordre de grandeur pour f_1 (à un facteur 5 près), ce qui signifie que la période moyenne d'une orbite périodique est petite (ce qui n'est pas étonnant, vu que f_1 est une petite perturbation de l'identité), ils diffèrent d'un facteur à peu près égal à 10^3 pour f_2 et f_3, ce qui signifie cette fois-ci que la période moyenne d'une orbite périodique est très grande. Cela peut en partie s'expliquer par le fait que l'automorphisme d'Anosov standard tend à mélanger ce qui se passe au voisinage de l'identité. Toujours est-il que ces simulations (comme celles de la taille de l'ensemble invariant maximal $\Omega((f_i)_N)$) laissent penser que les comportements au voisinage de l'identité et à celui de l'automorphisme d'Anosov standard sont bien différents, au moins pour des petits ordres de discrétisation.

Concernant la taille maximale d'une orbite périodique pour f_N, là aussi son comportement ne correspond pas à celui d'un homéomorphisme générique : elle devrait osciller entre 1 (ou 8 pour f_2 et f_3) et q_N, ce qui n'est pas le cas. Néanmoins, elle varie beaucoup selon N, d'autant plus que l'entier N est grand ; si les comportements qualitatifs sont pour ainsi dire identiques pour tous les types de simulations, il y a néanmoins des différences quantitatives : la valeur maximale de la longueur maximale d'une orbite périodique est plus grande pour f_3 que pour f_2, et plus grande pour f_2 que pour f_1.

1.2 Comportement des mesures invariantes

Nous avons également simulé la mesure $\mu_N^{f_i}$ pour les trois exemples d'homéomorphismes conservatifs f_1, f_2 et f_3 comme définis à la page 2. Le but est de tester si oui ou non on peut observer en pratique des phénomènes tels que décrits par le théorème ??. On ne peut évidemment pas espérer voir la suite $(\mu_N^{f_i})_{N\in\mathbf{N}}$ s'accumuler sur *toutes* les mesures de probabilité invariantes par f, puisque ces mesures forment en général un convexe de dimension infinie ; mais on peut tout de même tester si celle-ci semble converger ou non. Pour un C^1-difféomorphisme proche de l'automorphisme d'Anosov standard, en l'occurrence f_3, on peut tester si le comportement des mesures $(\mu_N^{f_3})_{N\in\mathbf{N}}$ reflète le fait que f_3 est conjugué à l'automorphisme d'Anosov standard.

Nous présentons des images de tailles 128×128 pixels représentant en échelle logarithmique la densité de la mesure μ_N^f : on colorie chaque pixel en fonction de la mesure portée par l'ensemble des points de E_N qu'il recouvre, le bleu correspondant à un pixel qui est de mesure très petite et le rouge à un pixel qui est de mesure grande. Les échelles à droite de chaque image correspondent à la mesure du pixel en échelle logarithmique de base 10 : si le vert code le nombre -3, alors un pixel vert sera de mesure 10^{-3} pour μ_N^f. Pour information, lorsqu'on représente ainsi la mesure de Lebesgue, les pixels ont tous une valeur d'environ $-4{,}2$.

L'algorithme de calcul de ces mesures invariantes est de complexité linéaire en la taille de la grille de discrétisation, le voici :

Faire $i := 1$
Tant que tous les points de la grille n'ont pas été parcourus, faire :
Choisir un point x de la grille qui n'a pas encore été parcouru.
Parcourir son orbite en calculant ses images successives par f_N,
dire que chaque point de cette orbite est dans le bassin numéro i,
et indenter à chaque fois la taille du bassin numéro i.
S'arrêter si on tombe sur un point y déjà parcouru,
appeler j le numéro du bassin où est y ;
si $i \neq j$ fusionner les bassins i et j et ajouter leurs tailles ;
faire $i := i + 1$.
Calculer la longueur de chaque orbite périodique à l'aide de
l'algorithme de Floyd (autrement appelé algorithme du lièvre et de la tortue).
La valeur de μ_N est 0 en dehors des orbites périodiques,
et égale à la taille du bassin divisé par la taille de l'orbite
périodique sur tous les points d'une orbite périodique.

La valeur maximale de la mesure μ_N devrait en théorie osciller entre $1/q_N$ et 1 pour f_1 et entre $1/q_N$ et (au moins) 1/8 pour f_2 et f_3, ce n'est pas le cas pour ces exemples. Là aussi le comportement est bien différent pour f_1 et pour f_2 et f_3 : pour f_1 il semble que les valeurs de μ_N se distribuent bien entre la fonction nulle et une fonction linéaire en N, alors que pour f_2 on observe des pics : il existe quelques rares valeurs de N pour lesquelles la valeur de μ_N est bien plus élevée qu'ailleurs. Ce comportement s'observe aussi sur f_3, où les valeurs de μ_N sont notablement plus faibles. Pour f_1, la valeur maximale de la mesure μ_N semble globalement croître avec N, mais avec un comportement assez irrégulier, ce qui va plutôt dans le même sens que le théorème **??**. Enfin, on remarque que la valeur maximale de μ_N est beaucoup plus faible pour f_2 et f_3 que pour f_1.

Les résultats des simulations des mesures invariantes de f_1, qui est une perturbation C^0 conservative de l'identité, sont assez positifs, du moins ils s'accordent bien avec les résultats théoriques sur les discrétisations des homéomorphismes conservatifs génériques, en particulier le théorème **??**. Lorsqu'on discrétise f_1, on observe tout d'abord une mesure plus ou moins bien distribuée dans le tore, puis, au fur et à mesure que le pas de la discrétisation se raffine, apparaissent des endroits où la mesure s'accumule ; de plus ces lieux d'accumulation de la mesure changent du tout au tout pour des ordres de discrétisation différents, et même successifs. Cela semble tout à fait en accord avec ce qui se passe dans le cas C^0-générique, où la mesure μ_N^f dépend beaucoup de l'ordre de discrétisation, plutôt que de l'homéomorphisme conservatif que l'on discrétise. On observe aussi un autre phénomène : lorsque la taille de la grille de discrétisation est assez grande (aux alentours de $10^{12} \times 10^{12}$), on voit apparaître des domaines uniformément chargés par la mesure μ_N^f, dont la taille semble inversement proportionnelle à la masse commune des pixels du domaine.Dans le cas des discrétisations de f_2, qui est une perturbation C^0 conservative de l'automorphisme d'Anosov standard, les simulations sur des grilles de tailles $2^k \times 2^k$ pourraient laisser penser que les mesures $\mu_N^{f_2}$ tendent vers la mesure de Lebesgue. En fait, en effectuant un nombre plus important de simulations, on se rend compte qu'il y a là aussi de fortes variations du comportement des mesures μ_N : la mesure est tantôt bien distribuée dans le tore, et tantôt très singulière par rapport à la mesure de Lebesgue ; par exemple, pour une simulation sur une grille de taille 20010×20010, il y a une orbite de longueur 369 qui concentre environ 84% de la mesure totale. En fait, le comportement des discrétisations semble le même qu'au voisinage de l'identité, modulo le fait que l'automorphisme d'Anosov standard A tend à diffuser les orbites périodiques attractives des discrétisations dans tout le tore : pour beaucoup de valeurs de N, le fait de composer par A diffuse le comportement de la mesure $\mu_N^{f_2}$ par rapport à celui de $\mu_N^{f_1}$, mais il arrive parfois (en fait rarement) qu'un point fixe de $(f_1)_N$ qui attire une grosse partie de E_N se situe sur un des rares points périodiques de petite période pour A, cela crée alors une orbite périodique de $(f_2)_N$ qui a une grosse mesure pour $\mu_N^{f_2}$.

Il se passe plus ou moins la même chose pour f_3, perturbation C^1 conservative de l'automorphisme d'Anosov standard, que pour f_2, à ceci près que les variations que l'on observe sont nettement moins fortes : les simulations sur des grilles de tailles $2^k \times 2^k$ portent à croire qu'il y a convergence assez rapide vers la mesure de Lebesgue, de manière bien plus flagrante que pour f_2 ; cela pourrait être dû au fait que l'homéomorphisme étudié est topologiquement conjugué à l'automorphisme d'Anosov standard, et donc hérite de certaines de ses propriétés. Pourtant, lorsqu'on réalise des séries de simulations, on se rend compte qu'il y a là aussi certaines tailles de grilles pour lesquelles les mesures ne ressemblent plus tellement à la mesure de Lebesgue. On pourrait rapprocher ce phénomène d'un autre résultat de F. Abdenur et M. Andersson (voir

[AA12]) : ils montrent que, pour une application continue du cercle dans lui-même, générique parmi les conjugués du doublement de l'angle, la suite $(\mu_N)_{N\in\mathbf{N}}$ s'accumule sur l'ensemble des mesures invariantes de f.

Contrairement aux courbes de la section 1.1, les simulations des mesures $\mu_N^{f_i}$ reflètent plutôt le comportement prédit par le théorème **??**, à savoir une grande variabilité de ces mesures en fonction de l'ordre N.

2 Homéomorphismes dissipatifs

Finissons par exposer les résultats de quelques simulations numériques portant sur les homéomorphismes dissipatifs. De nouveau, notre but a été de confronter les résultats théoriques à la réalité des simulations numériques : pour des homéomorphismes simples, et à des ordres de discrétisation raisonnables, a-t-on, comme le suggèrent les théorèmes énoncés précédemment, convergence de la dynamique des discrétisations vers celle de l'application de départ ?

Rappelons que nous simulons des homéomorphismes du type

$$f(x,y) = Q\circ P(x,y) \quad \text{ou} \quad f(x,y) = P\circ Q\circ P(x,y),$$

où P et Q sont deux homéomorphismes du tore ne modifiant qu'une seule coordonnée :

$$P(x,y) = (x, y+p(x,y)) \quad \text{et} \quad Q(x,y) = (x+q(x,y), y).$$

Contrairement au cas conservatif, nous faisons dépendre cette fois-ci p et q à la fois de x et de y. Là encore, nous avons testé plusieurs cas, combinant des discrétisations d'homéomorphismes dissipatifs qui sont des perturbations de l'identité ou bien de l'automorphisme d'Anosov standard

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}:$$

- Pour commencer nous avons étudié $f_4 = Q\circ P$, avec
$$p(x,y) = \frac{1}{259}\cos(2\pi\times 227y) + \frac{1}{271}\sin(2\pi\times 233x),$$
$$q(x,y) = \frac{1}{287}\cos(2\pi\times 241y) + \frac{1}{263}\sin(2\pi\times 217y) + \frac{1}{263}\cos(2\pi\times 271x)$$
Cet homéomorphisme dissipatif correspond à une petite perturbation C^0 de l'identité, dont la dérivée possède de très nombreuses oscillations d'amplitude proche de 1, ce qui crée de nombreux points fixes puits, sources et selles.
- Ensuite nous avons simulé f_5 la composition de f_4 avec l'automorphime d'Anosov standard A, soit $f_5 = Q\circ P\circ A$, ce qui en fait une perturbation C^0 petite de A, semi-conjuguée à A, mais pas conjuguée : moralement, chaque orbite périodique puits de A correspond pour f_5 à de nombreuses orbites périodiques puits.
- Il nous a aussi semblé utile d'étudier un homéomorphisme proche de l'identité en topologie C^0, mais qui cette fois possède un petit nombre de puits. En effet, comme l'ont expliqué J.-M. Gambaudo et C. Tresser de manière heuristique dans [GT83], un homéomorphisme tel que f_4 peut avoir un grand nombre de puits, dont les bassins d'attraction sont tous de taille minuscule ; ainsi il s'avère que l'on ne détecte pas le comportement dissipatif de f_4 aux ordres de discrétisations qu'il nous est possible d'atteindre. On définit donc un autre homéomorphisme

proche de l'identité en topologie C^0, mais qui lui possède beaucoup moins de puits, soit $f_6 = P \circ Q \circ P$, avec

$$p(x,y) = \frac{1}{259}\,\mathrm{th}\left(50\cos(2\pi \times y)\right) + \frac{1}{271}\,\mathrm{th}\left(50\cos(2\pi \times 5x)\right),$$

$$q(x,y) = \frac{1}{287}\,\mathrm{th}\left(50\cos(2\pi\times y)\right)+\frac{1}{263}\,\mathrm{th}\left(50\cos(2\pi\times 7y)\right)+\frac{1}{263}\,\mathrm{th}\left(50\cos(2\pi\times 3x)\right).$$

– Enfin nous nous sommes intéressés à l'homéomorphisme $f_7 = Q \circ P \circ A$, où

$$p(x,y) = \frac{1}{259}\cos(2\pi \times y) + \frac{1}{271}\cos(2\pi \times 5x),$$

$$q(x,y) = \frac{1}{287}\cos(2\pi \times y) + \frac{1}{263}\cos(2\pi \times 7y) + \frac{1}{263}\cos(2\pi \times 3x).$$

Dans ce cas, f_7 est une perturbation non seulement C^0 petite, mais aussi C^1 petite, de l'automorphisme d'Anosov standard. Comme dans le cas conservatif, un tel difféomorphisme est topologiquement conjugué à A ; le but des simulations est de tester si le fait d'être topologiquement conjugué à l'automorphisme d'Anosov standard change beaucoup le comportement des discrétisations.

2.1 Comportement ensembliste

Nous avons simulé quelques quantités en rapport avec le comportement ensembliste des discrétisations des homéomorphismes, à savoir :

– le cardinal de l'ensemble invariant maximal $\Omega(f_N)$,

– la taille maximale d'une orbite périodique pour f_N.

Nous avons calculé ces quantités pour des discrétisations d'ordres $128k$ pour k allant de 1 à 100 et les avons représenté sous forme de graphiques. Pour information, si $N = 128 \times 100$, alors $q_N \simeq 1,6.10^8$.

Théoriquement, le rapport du cardinal de $\Omega(f_N)$ sur q_N doit tendre vers 0, et c'est ce que l'on voit sur les simulations. Ce n'est pas vraiment étonnant : on observait déjà cela pour les discrétisations des homéomorphismes conservatifs. Dans cette optique il est ici intéressant de comparer les comportements de $\Omega(f_N)$ dans un contexte conservatif et dans un contexte dissipatif ; le résultat est décevant : les courbes dans le cas conservatif et dans le cas dissipatif se ressemblent comme deux gouttes d'eau, alors qu'elles devraient, en théorie, être très différentes.

Tout de même, pour l'homéomorphisme f_6, il y a très peu de puits, et autour de chacun, il y a juste quelques points attractifs de la discrétisation $(f_6)_N$ (chaque puits est « pointu »), si bien que le cardinal de $\Omega((f_6)_N)$ est plus ou moins constant ; c'est le seul cas où le comportement des discrétisations semble clairement typique du cas dissipatif.

Le comportement du nombre d'orbites périodiques de f_N n'est pas prévu par l'étude théorique. Toutefois, on peut espérer qu'il reflète le fait que la dynamique des discrétisations converge vers celle de l'homéomorphisme de départ : on peut entre autres regarder s'il est du même ordre que le nombre de puits de l'homéomorphisme. En pratique, son comportement va dans le même sens que celui du cardinal de l'ensemble invariant maximal $\Omega(f_N)$: son évolution est très régulière pour f_4, beaucoup moins pour f_5 et f_7, et oscille régulièrement (à partir de $N = 15$) entre 30 et 90 pour f_6. Comme dans le cas conservatif, la comparaison avec la figure **??** indique que la longueur moyenne d'un cycle périodique est d'environ 3 pour f_4 et f_6, alors qu'elle est de l'ordre de 1000 pour f_5 et f_7 ; on peut interpréter cela de la manière suivante : si on a beaucoup de points fixes au voisinage de l'identité, le fait de composer avec l'automorphisme d'Anosov standard tend à transformer ces points fixes en des points périodiques de grande période.

Puisque la dynamique des discrétisations est censée converger vers celle de l'homéomorphisme de départ, on peut espérer que la longueur de la plus longue orbite périodique des discrétisations $(f_i)_N$ soit presque toujours un multiple de celle d'une orbite périodique attractive de f_i. Comme dans le cas conservatif, la longueur de la plus longue orbite a plus ou moins le même comportement qualitatif pour tous les homéomorphismes testés (f_4, f_5, f_6 et f_7) ; par contre les valeurs de ces longueurs des plus longues orbites changent beaucoup selon les cas. Elles sont inférieures à 25 pour f_6, ce qui est normal puisqu'on est censés détecter les puits de l'homéomorphisme ; les variations de la longueur de la plus longue orbite sont certainement dues aux erreurs commises lors de la discrétisation aux voisinages des puits réels de f_6. De plus, on remarque qu'il certaines valeurs de taille de la plus longue orbite qui sont beaucoup atteintes : par exemple pour 30 entiers N distincts, la plus longue orbite périodique est de longueur 4, pour 19 entiers N distincts elle est de longueur 8 et pour 10 entiers N distincts elle est de longueur 10. Cela est certainement dû au pistage des orbites périodiques de f_6 par celles des discrétisations. La plus longue orbite périodique des discrétisations de f_4 est toujours de longueur inférieure à 3000, alors qu'elle atteint quasiment 20000 pour f_5 et 100000 pour f_7. Comme on l'a déjà dit, les différences observées entre les perturbations de l'identité et celles de l'automorphisme d'Anosov standard seraient dues au fait que l'automorphisme A a tendance à mélanger les orbites périodiques existantes, et à les répartir uniformément dans le tore.

2.2 Comportement des mesures invariantes

Comme dans le cas conservatif, nous avons calculé les mesures invariantes $\mu_N^{f_i}$ des homéomorphismes dissipatifs f_4, f_5, f_6 et f_7 comme définis à la page 7. Le but est de tester si la proposition **??** s'applique en pratique ou bien s'il y a des contraintes techniques qui font que l'on n'observe pas de tels comportements sur nos exemples.

Nous présentons des images de tailles 128×128 pixels représentant en échelle logarithmique la densité de la mesure μ_N : on colorie chaque pixel en fonction de la mesure portée par l'ensemble des points de E_N qu'il recouvre, le bleu correspondant à un pixel qui est de mesure très petite et le rouge à un pixel qui est de mesure grande. Les échelles à droite de chaque image correspondent à la mesure du pixel en échelle logarithmique de base 10 : si le vert code le nombre -3, alors un pixel vert sera de mesure 10^{-3}. Pour information, lorsqu'on représente ainsi la mesure de Lebesgue, les pixels ont tous une valeur d'environ $-4{,}2$.

L'algorithme de calcul de ces mesures invariantes est de complexité linéaire en la taille de la grille de discrétisation, (voir page 5).

Si on n'a pas de résultat théorique clair quant au comportement de la valeur maximal de la mesure μ_N^f, on peut au moins observer qu'une convergence de cette quantité serait un bon indicateur du fait que l'homéomorphisme considéré est dissipatif. Comme dans le cas conservatif, le comportement de μ_N^f est bien différent selon les cas : alors que $\mu_N^{f_4}$ varie toujours très fortement selon la valeur de N, on observe des pics pour f_5 : il existe quelques rares valeurs de N pour lesquelles la valeur maximale de μ_N^f est bien plus élevée qu'ailleurs. Ce qui se passe pour f_7 est semblable à ce qui se passe pour f_5, à ceci près que les valeurs de $\mu_N^{f_7}$ sont bien plus faibles. Par contre, le comportement de la valeur maximale de $\mu_N^{f_6}$ est bien différent : sa valeur est très élevée (beaucoup plus que pour f_4) et oscille entre $0,02$ et $0,3$, avec beaucoup de valeurs autour de $0,06$ et $0,12$, ainsi que quelques valeurs autour de $0,25$. Les rapports arithmétiques évidents de ces valeurs peuvent s'expliquer par le fait que certains puits des discrétisations fusionnent pour certaines valeurs de N seulement. Ainsi, il existe des orbites qui attirent beaucoup de points ; cela semble refléter le comportement typique des homéomorphismes génériques.

Le comportement des mesures invariantes par f_4, qui est rappelons-le une perturbation C^0 dissipative de l'identité, est relativement semblable à celui des mesures invariantes par f_1, *i.e.* au cas conservatif correspondant : lorsque l'ordre de discrétisation est assez grand, il y a une forte variation de la mesure $\mu_N^{f_4}$ selon l'ordre N ; de plus cette mesure possède une composante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue non négligeable. Il y a néanmoins des différences avec le cas conservatif : la valeur maximale de $\mu_N^{f_4}$ est très importante, beaucoup plus que pour f_1. On observe qu'il y a des orbites qui attirent beaucoup de points ; cela semble refléter le comportement d'un homéomorphisme dissipatif générique. D'autre part, il y a un phénomène que l'on espère purement anecdotique : ces orbites sont situées sur des bandes verticales ; cela est sans doute lié à des phénomènes arithmétiques particuliers dus à la forme spécifique de l'homéomorphisme f_4.

Il est normal de ne pas pouvoir observer tous les puits de f_4 dans ces simulations : comme l'ont fait remarquer J.-M. Gambaudo et C. Tresser dans [GT83], la taille de ces puits peut être très petite par rapport aux nombres intervenant dans la définition de f_4 ; ainsi, même à des ordres de discrétisation comme 2^{15}, le fait de discrétiser ne permet pas de détecter le caractère dissipatif de l'homéomorphisme, et c'est pour cette raison que l'on a l'impression que les discrétisations de f_4 ressemblent beaucoup à celles de f_1.

Comme pour le cas conservatif correspondant, en l'occurrence f_2, les simulations des mesures invariantes de f_5 sur des grilles de tailles $2^k \times 2^k$ pourraient laisser penser qu'il y a une convergence lente des mesures $\mu_N^{f_5}$ vers la mesure de Lebesgue ; mais cela s'avère faux lorsqu'on fait des séries de simulations sur beaucoup d'ordres N : il y a quelques valeurs de N pour lesquelles la mesure $\mu_N^{f_7}$ possède un forte composante étrangère à la mesure de Lebesgue, le plus souvent portée par une seule orbite périodique de $(f_5)_N$. On pouvait s'y attendre : vu que ce qui se passe en discrétisant f_4 est similaire à ce qui se passe en discrétisant f_1, on peut s'attendre à ce que les comportements de $\mu_N^{f_2}$ et $\mu_N^{f_5}$ soient très proches. Si ce qui se passe pour f_4 est assez proche de ce qui se passe pour f_1, les simulations des mesures invariantes de f_6 sur des grilles de tailles $2^k \times 2^k$ mettent quant à elles en avant ce que l'on espère d'un homéomorphisme dissipatif générique : les mesures $\mu_N^{f_6}$ tendent assez vite vers une unique mesure (ce que l'on observe aussi sur des séries de simulations), qui est portée par l'ensemble des puits de f_6. Le fait de ne créer que quelques puits pour f_6 permet cette fois-ci, et contrairement à ce que l'on avait vu sur f_4, de retrouver les puits réels de l'homéomorphisme de départ à partir de simulations sur des grilles d'ordres raisonnables (typiquement de taille $2^{11} \times 2^{11}$).

De la même manière que dans le cas conservatif, ce qui se passe pour f_7, perturbation C^1 dissipative de l'automorphisme d'Anosov standard, est à peu près la même chose que pour f_5, même si les variations observées sont beaucoup moins grandes : comme dans le cas conservatif, on est porté à croire, en observant les simulations sur des grilles de tailles $2^k \times 2^k$, qu'il y a convergence des mesures $\mu_N^{f_7}$ vers la mesure de Lebesgue, et cela de manière bien plus évidente que pour f_5. Pourtant, en faisant des séries de simulations, on se rend vite compte qu'il y a, là encore, certaines valeurs de N pour lesquelles les mesures ont une forte composante qui semble étrangère à la mesure de Lebesgue. On pourrait rapprocher ce phénomène du second théorème de l'article de F. Abdenur et M. Andersson (voir [AA12]) qui explique qu'étant donnée une application continue f du cercle dans lui-même, générique parmi les conjugués du doublement de l'angle, la suite $(\mu_N)_{N\in\mathbf{N}}$ s'accumule sur l'ensemble des mesures invariantes de f. De nouveau, les similitudes avec ce qui se passe pour f_3 laissent penser que l'on ne peut pas détecter le caractère conservatif d'un homéomorphisme f en observant les mesures μ_N^f.

Références

[AA12] F. Abdenur and M. Andersson. Ergodic theory of generic continuous maps. Prépublication, 2012.

[Bol01] B. Bollobás. *Random graphs.* Cambridge University Press, second edition, 2001.

[GT83] J.-M. Gambaudo and C. Tresser. Some difficulties generated by small sinks in the numerical study of dynamical systems : two examples. *Phys. Lett. A*, 94(9) :412–414, 1983.

[Mie05] T. Miernowski. *Dynamique discrétisée et stochastique, géométrie conforme.* PhD thesis, ENS Lyon, 2005.