Petite propriété d'algèbre linéaire.

Le but est de montrer la proposition suivante :

Proposition 1. *Soient* $\mathbf{K}$ *un corps,* E *un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel,* u *un endomorphisme de* E*,* $Q \in \mathbf{K}[X]$ *et* $F = \ker Q(u)$*. Alors* F *est (trivialement)* u*-stable et* $\pi_{u_F} = pgcd(Q, \pi_u)$*.*

Commençons par un (petit) lemme :

Lemme 1 (petit)**.** *Soit* $u \in L(E)$ *et* $P \in K[X]$*.* $P(u)$ *est inversible si et seulement si* $pgcd(P, \pi_u) = 1$*.*

Preuve du petit lemme. $\boxed{\Leftarrow}$ Si $pgcd(P, \pi_u) = 1$, alors par théorème de Bézout il existe $A, B \in K[X]$ tels que $AP + B\pi_u = 1$. En spécialisant cette égalité en u on obtient $A(u) \circ P(u) = Id$; on en déduit que $P(u)$ est inversible.

$\boxed{\Rightarrow}$ Par contraposée, si $pgcd(P, \pi_u) \neq 1$, alors il existe $A, B \in K[X] \setminus \{0\}$ tels que $AP + B\pi_u = 0$ avec $d°(A) < d°(\pi_u)$ et $d°(B) < d°(P)$ [1]. Spécialisant de nouveau en u on obtient $P(u) \circ A(u) = 0$. Or $d°(A) < d°(\pi_u)$, donc, par minimalité de π_u, $A(u) \neq 0$, si bien que $\ker P(u) \neq 0$. $P(u)$ n'est donc pas inversible. □

Preuve de la proposition. Posons $D = pgcd(Q, \pi_u)$. On a $Q(u_F) = \pi_u(u_F) = 0$, par conséquent π_{u_F} divise Q et π_u, donc π_{u_F} divise D.

Réciproquement, soit $P \in K[X]$ irréductible divisant à la fois Q et π_u. On veut montrer que $pgcd(P, \pi_{u_F}) \neq 1$, i.e. par le (petit) lemme que $P(u_F)$ est non injectif. Or $\ker P(u) \subset \ker Q(u) = F$ et $\ker P(u) \neq \{0\}$ (car sinon, posant $\pi_u = PA$, on aurait $0 = P(u) \circ A(u)$ avec $P(u)$ injectif, donc $A(u) = 0$ avec $d°A < d°\pi_u$). Donc $P(u_F)$ est non injectif. □

1. En effet, soit Q un diviseur commun non trivial de P et π_u. Alors il existe $A, B \in K[X]$ tels que $P = QB$ et $\pi_u = QA$, si bien que $AP - B\pi_u = ABQ - ABQ = 0$, et on a bien les hypothèses sur les degrés.