

Discrétisations spatiales de systèmes dynamiques génériques

Pierre-Antoine Guihéneuf

Orsay
26 juin 2015

Motivations

- Système physique autonome évoluant dans le temps, évolution donnée par une équation différentielle.
- Exemples : système solaire, pendule double, particules en interaction. . .

- Système physique autonome évoluant dans le temps, évolution donnée par une équation différentielle.
- Exemples : système solaire, pendule double, particules en interaction. . .
- Réduction pour obtenir un système à temps discret, par exemple par discrétisation du temps.

Motivations

- Système physique autonome évoluant dans le temps, évolution donnée par une équation différentielle.
- Exemples : système solaire, pendule double, particules en interaction. . .
- Réduction pour obtenir un système à temps discret, par exemple par discrétisation du temps.
- On obtient un système (X, f) , où X est l'espace des phases et $f : X \rightarrow X$ la loi d'évolution.
- Pour cet exposé, $X = \mathbf{T}^2$ le tore, et f est un homéomorphisme conservatif ($\text{Aire}(f(A)) = \text{Aire}(A)$).

Problème

On calcule l'orbite d'un point par la dynamique f :

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x) \cdots = (f^k(x))_{k \geq 0}.$$

Problème

On calcule l'orbite d'un point par la dynamique f :

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x) \cdots = (f^k(x))_{k \geq 0}.$$

Un ordinateur travail à précision numérique fixée : il fait des erreurs d'arrondi.

Ces erreurs d'arrondi peuvent s'accumuler : l'orbite calculée peut s'éloigner de la vraie orbite.

Problème

On calcule l'orbite d'un point par la dynamique f :

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x) \cdots = (f^k(x))_{k \geq 0}.$$

Un ordinateur travail à précision numérique fixée : il fait des erreurs d'arrondi.

Ces erreurs d'arrondi peuvent s'accumuler : l'orbite calculée peut s'éloigner de la vraie orbite.

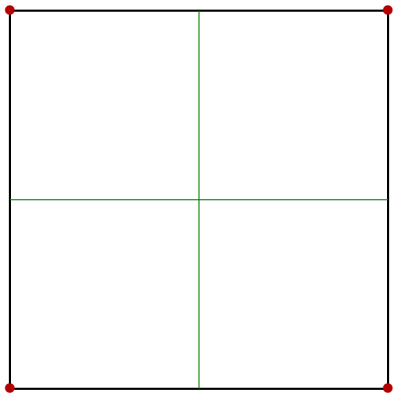
Question

Peut-on lire la dynamique d'une application sur ses simulations numériques ?

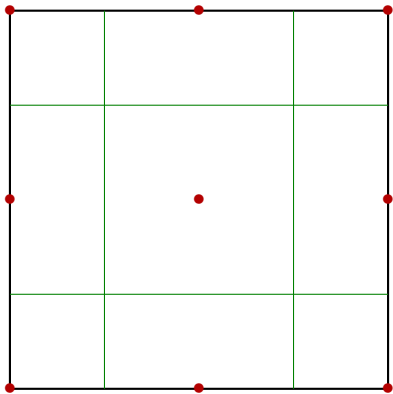
- Le tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \simeq [0, 1[{}^2$ est muni de *grilles de discrétisation* :

$$E_N = \left\{ \left(\frac{i}{2^N}, \frac{j}{2^N} \right) \mid 0 \leq i, j \leq 2^N - 1 \right\}.$$

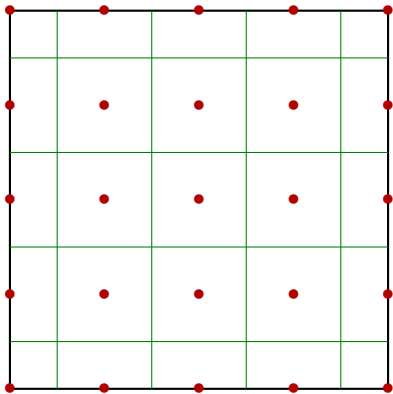
- Projection $P_N = \mathbf{T}^2 \rightarrow E_N$ sur le point de E_N le plus proche.
- La *discrétisation* de $f : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ est $f_N = P_N \circ f|_{E_N} : E_N \rightarrow E_N$.



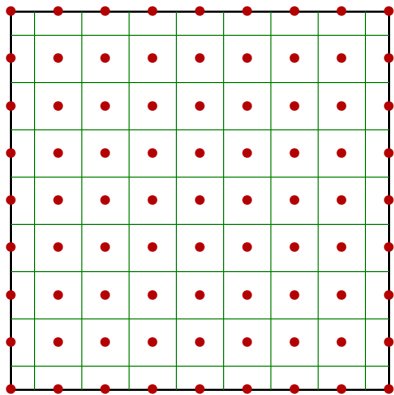
Grille E_1



Grille E_2



Grille E_3



Grille E_4

Un premier exemple

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = 610$$

Un premier exemple



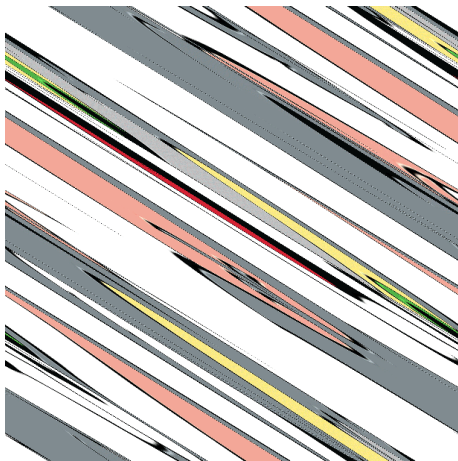
$t=0$

Un premier exemple



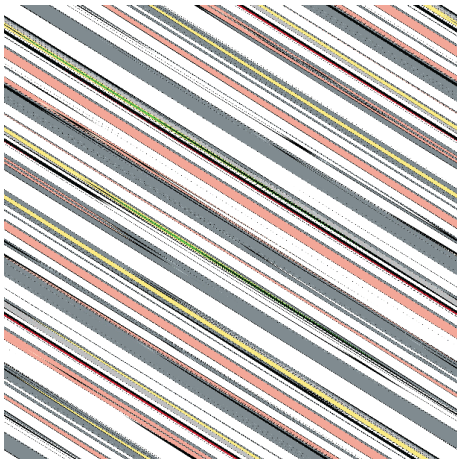
t=1

Un premier exemple



$t=2$

Un premier exemple



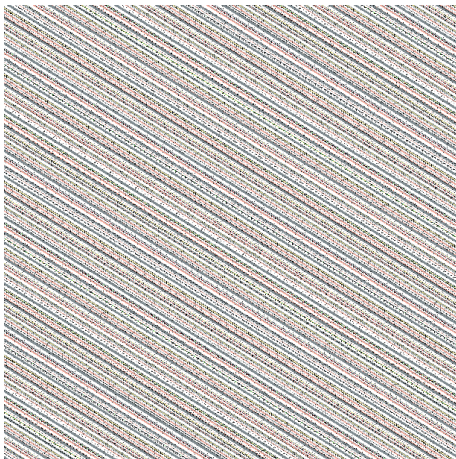
$t=3$

Un premier exemple



$t=4$

Un premier exemple



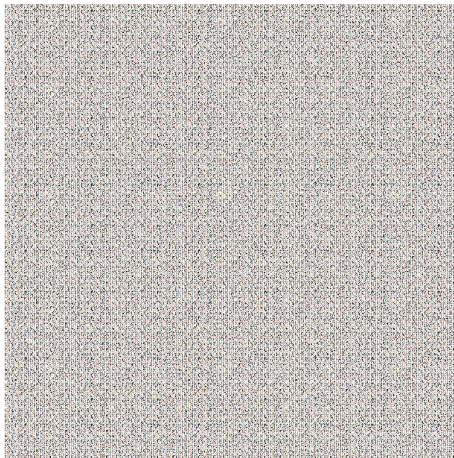
$t=5$

Un premier exemple



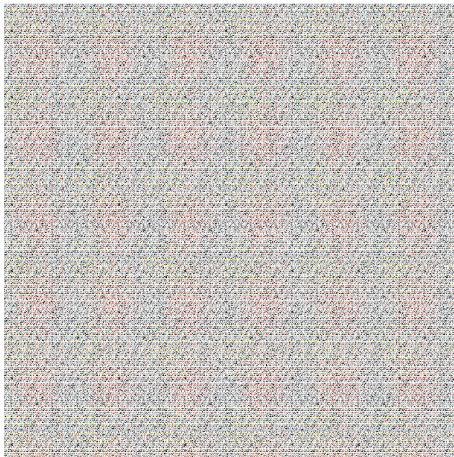
t=6

Un premier exemple



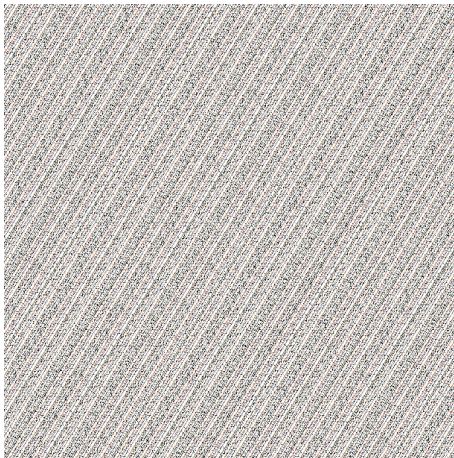
$t=7$

Un premier exemple



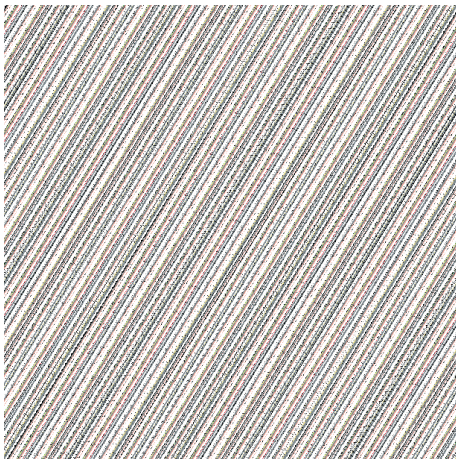
$t=8$

Un premier exemple



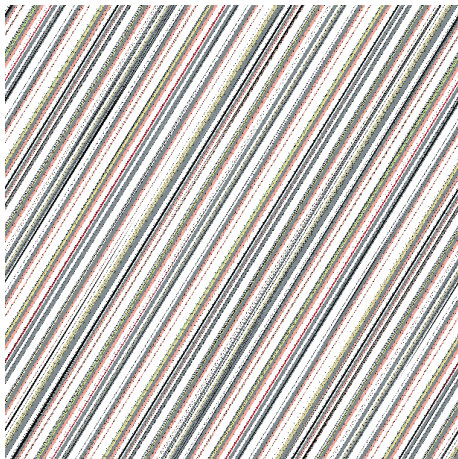
$t=9$

Un premier exemple



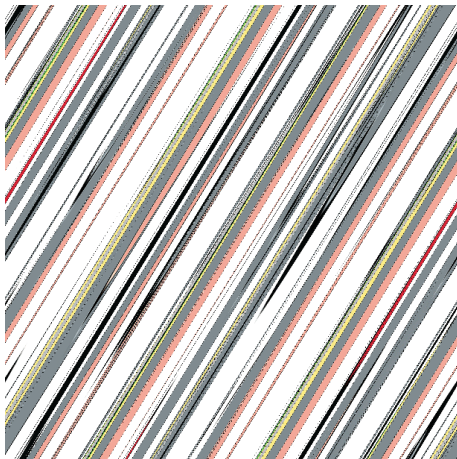
$t=10$

Un premier exemple



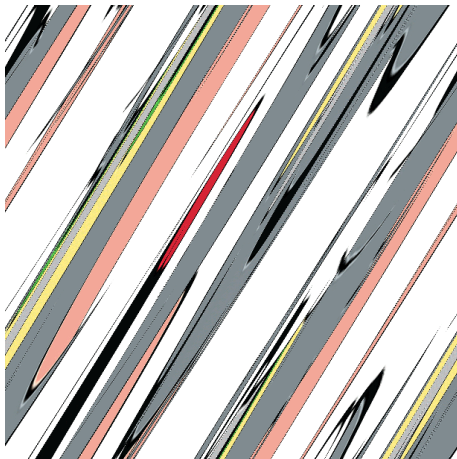
$t=11$

Un premier exemple



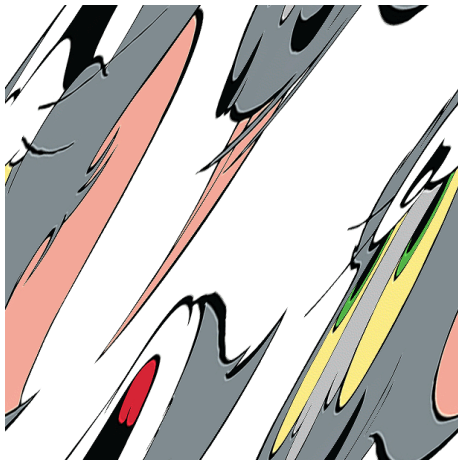
$t=12$

Un premier exemple



$t=13$

Un premier exemple



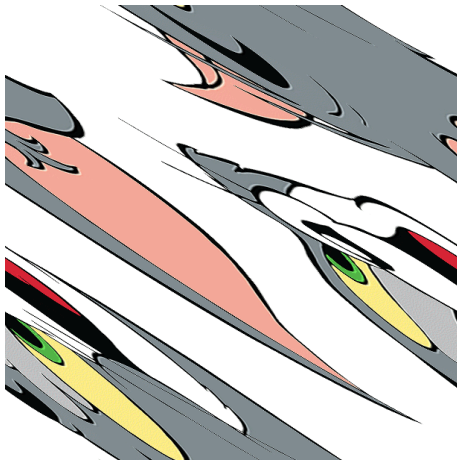
t=14

Un premier exemple



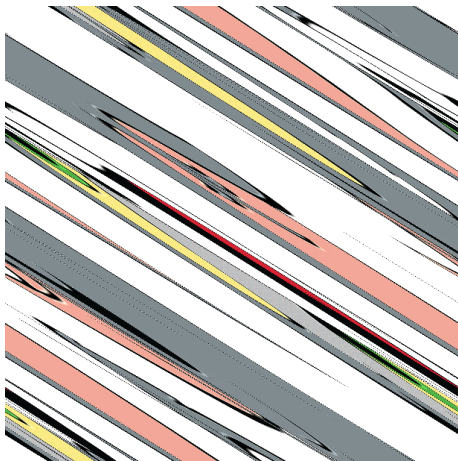
t=15

Un premier exemple



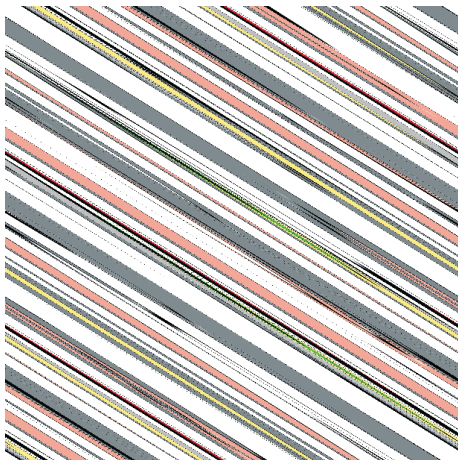
t=16

Un premier exemple



t=17

Un premier exemple



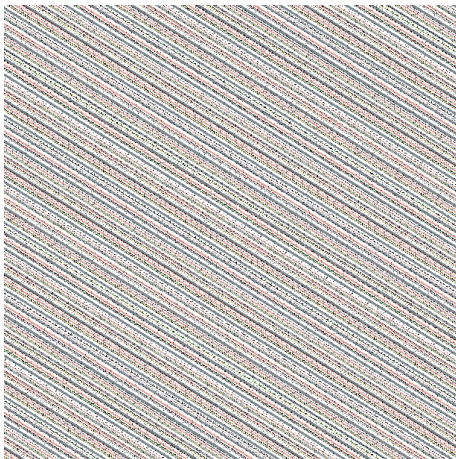
t=18

Un premier exemple



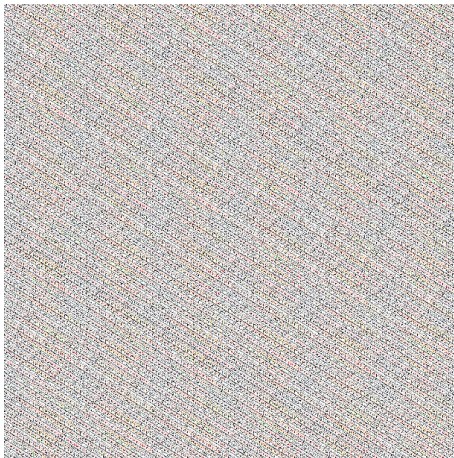
t=19

Un premier exemple



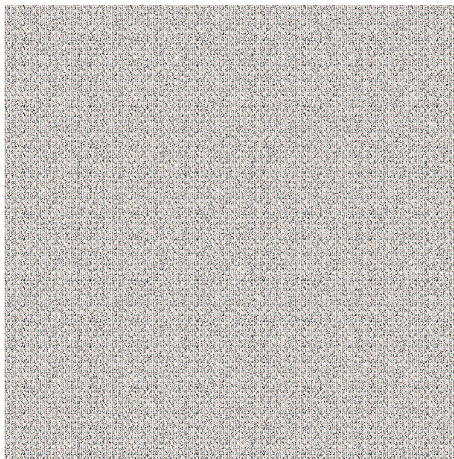
$t=20$

Un premier exemple



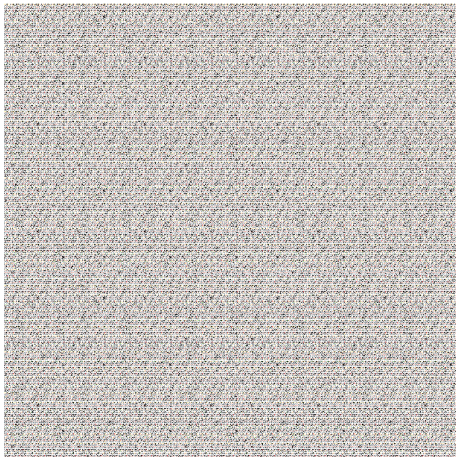
$t=21$

Un premier exemple



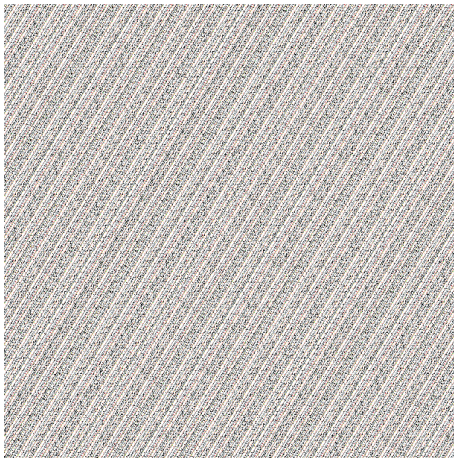
$t=22$

Un premier exemple



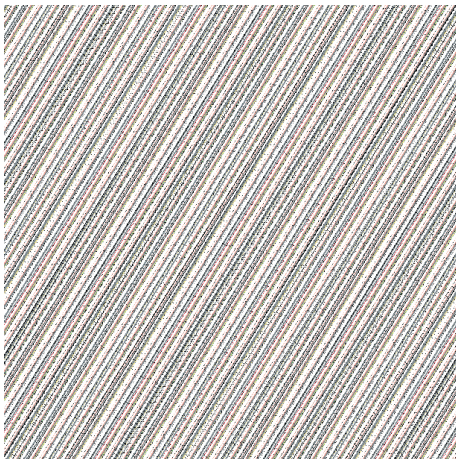
$t=23$

Un premier exemple



t=24

Un premier exemple



$t=25$

Un premier exemple



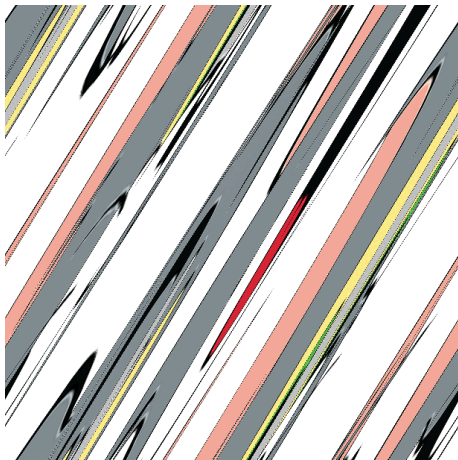
$t=26$

Un premier exemple



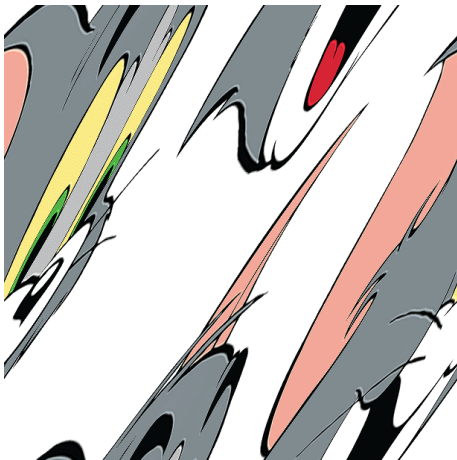
$t=27$

Un premier exemple



t=28

Un premier exemple



t=29

Un premier exemple



t=30

Un premier exemple

Deux miracles :

- A_{610} est une bijection.

Un premier exemple

Deux miracles :

- A_{610} est une bijection.
- Récurrence rapide.

- Dans l'exemple, on a des phénomènes de résonance entre la grille et l'application (Ghys, Dyson/Falk).
- Pour éviter ces cas particuliers on étudie des systèmes dynamiques *génériques*.

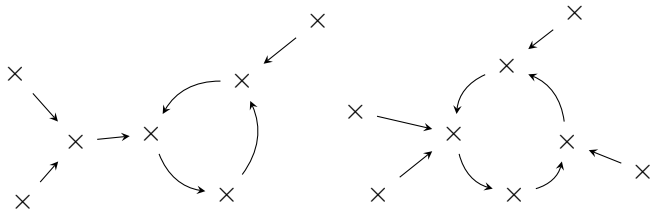
- Dans l'exemple, on a des phénomènes de résonance entre la grille et l'application (Ghys, Dyson/Falk).
- Pour éviter ces cas particuliers on étudie des systèmes dynamiques *génériques*.

Définition

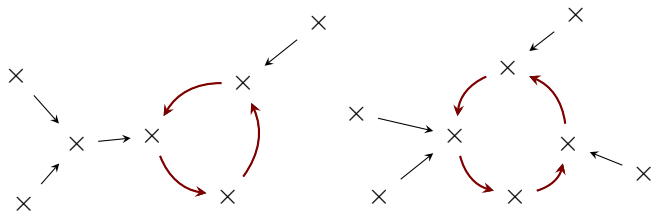
Une propriété sur un espace topologique est dite *générique* (au sens de Baire) si elle est vérifiée sur une intersection dénombrable d'ouverts denses (G_δ dense).

- On regarde des homéomorphismes et des C^1 -difféomorphismes génériques (espaces munis de la topologie usuelle).

Dynamique finie



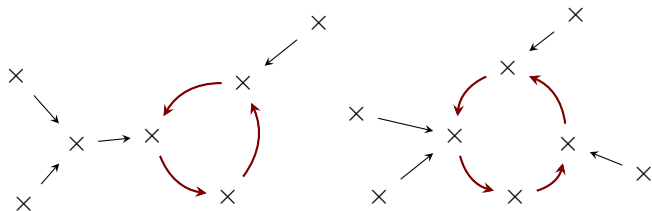
Dynamique finie



L'application $f_N : E_N \rightarrow E_N$ est finie. Sa dynamique est donc pré-périodique.

On s'intéresse donc à des quantités comme le nombre d'orbites périodiques de f_N , leurs longueurs...

Dynamique finie



L'application $f_N : E_N \rightarrow E_N$ est finie. Sa dynamique est donc pré-périodique.

On s'intéresse donc à des quantités comme le nombre d'orbites périodiques de f_N , leurs longueurs...

Définition

Le *degré de récurrence* de f_N , noté $D(f_N)$ est le rapport du cardinal de l'union des orbites périodiques de f_N sur le cardinal de E_N .

Le problème (2)

Question (Ghys, 94')

Soit f un homéomorphisme *conservatif* (i.e. préservant Lebesgue) générique de \mathbf{T}^2 , quel est le comportement de la suite des degrés de récurrence $D(f_N)$?

Homéomorphismes conservatifs génériques

Théorème

Pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, la suite $(D(f_N))_N$ s'accumule sur tout le segment $[0, 1]$.

Homéomorphismes conservatifs génériques

Théorème

Pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, la suite $(D(f_N))_N$ s'accumule sur tout le segment $[0, 1]$.

1 est point d'accumulation : dû à T. Miernowski.

Homéomorphismes conservatifs génériques

Théorème

Pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, la suite $(D(f_N))_N$ s'accumule sur tout le segment $[0, 1]$.

Théorème (Lax, Alpern)

Tout homéomorphisme conservatif est approché par des permutations cycliques des grilles E_N .

- Théorème un peu décevant : la dynamique des discrétisations dépend beaucoup de l'ordre de discrétisation et pas de la dynamique de départ.
- Meilleur comportement en régularité plus grande ? On étudie les C^1 -difféomorphismes conservatifs génériques.
- Avant de s'attaquer au cas C^1 , il faut comprendre le cas linéaire.

Question

Comment faire tourner une image numérique ?

Discrétisation des applications linéaires



Image initiale



Image tournée 5 fois

Discrétisation des applications linéaires



Image initiale



Image tournée 10 fois

Discrétisation des applications linéaires



Image initiale



Image tournée 15 fois

Discrétisation des applications linéaires



Image initiale



Image tournée 20 fois

Discrétisation des applications linéaires



Image initiale



Image tournée 25 fois

Discrétisation des applications linéaires

- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.

Discrétisation des applications linéaires

- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .

Discrétisation des applications linéaires

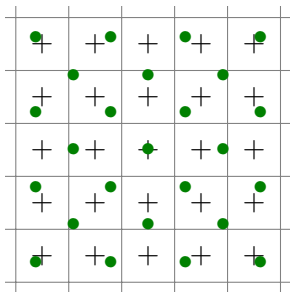
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.

+ + + + +
+ + + + +
+ + + + +
+ + + + +
+ + + + +

$$A = R_{\pi/4}.$$

Discrétisation des applications linéaires

- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



$$A = R_{\pi/4}.$$

Discrétisation des applications linéaires

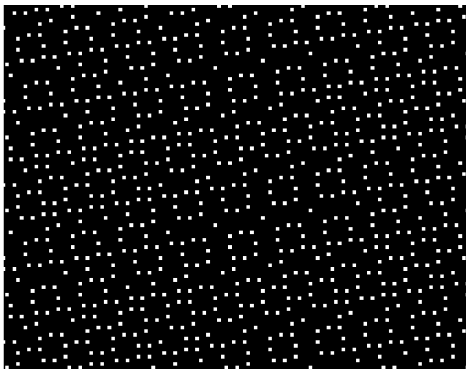
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.

+ + + +
+ + + + +
+ + +
+ + + + +
+ + + +

$$A = R_{\pi/4}.$$

Discrétisation des applications linéaires

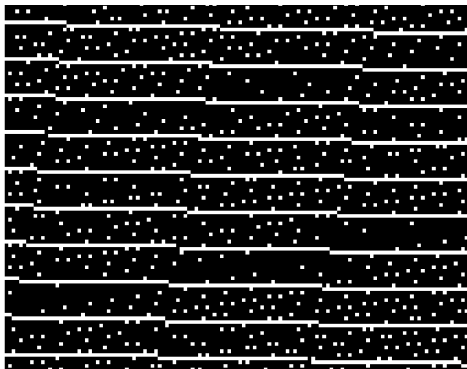
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=1

Discrétisation des applications linéaires

- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=2

Discrétisation des applications linéaires

- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=3

Discrétisation des applications linéaires

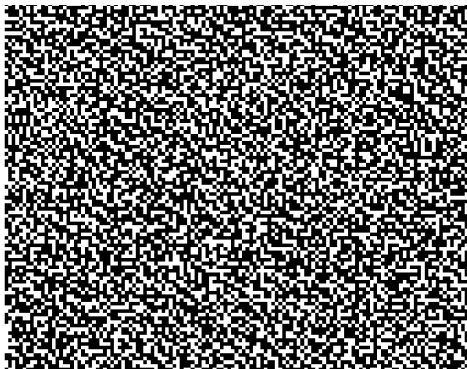
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=4

Discrétisation des applications linéaires

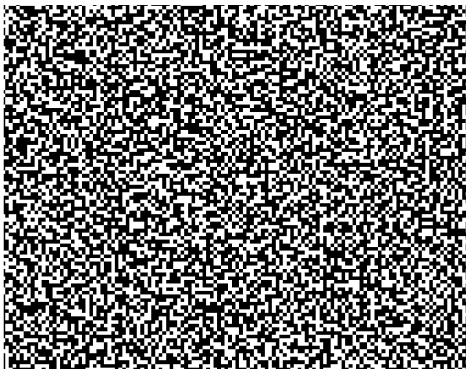
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=5

Discrétisation des applications linéaires

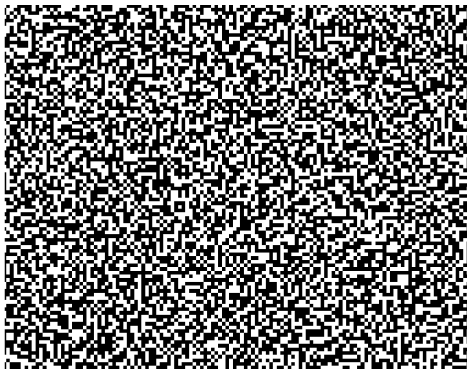
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=6

Discrétisation des applications linéaires

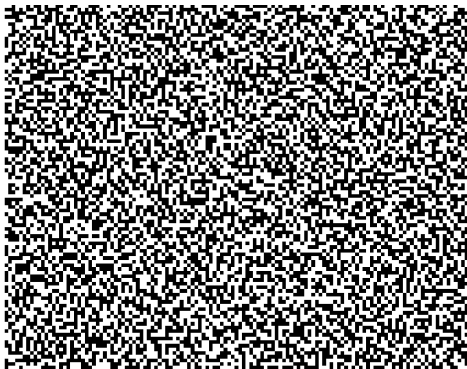
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=7

Discrétisation des applications linéaires

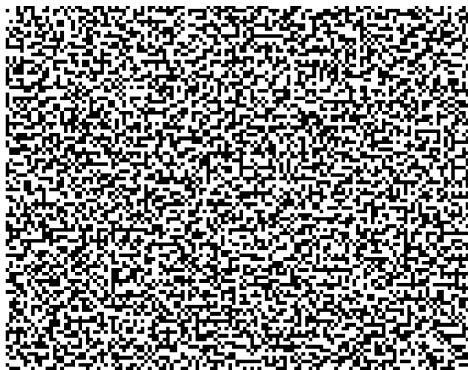
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=8

Discrétisation des applications linéaires

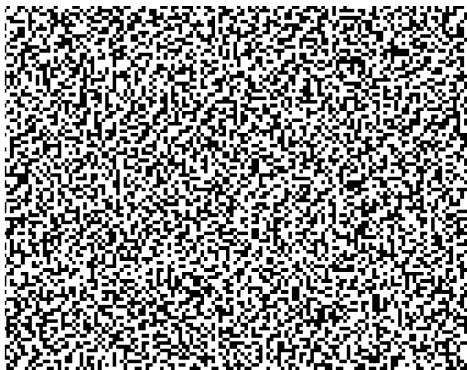
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=9

Discrétisation des applications linéaires

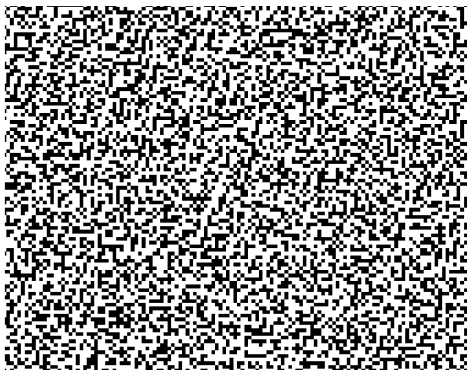
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=10

Discrétisation des applications linéaires

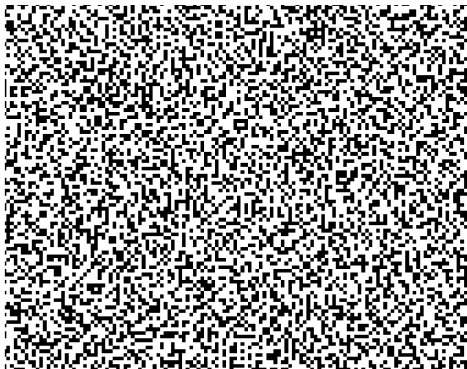
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=11

Discrétisation des applications linéaires

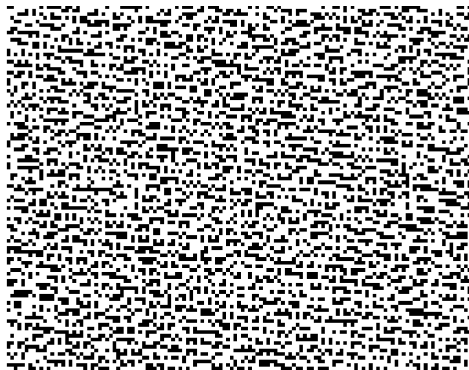
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=12

Discrétisation des applications linéaires

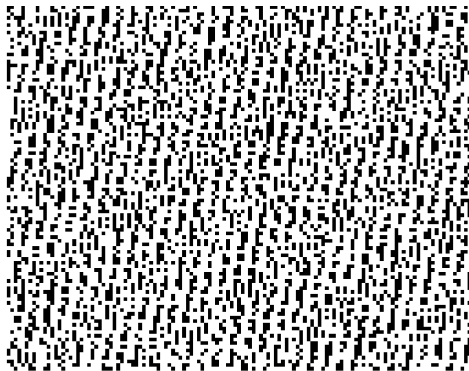
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=13

Discrétisation des applications linéaires

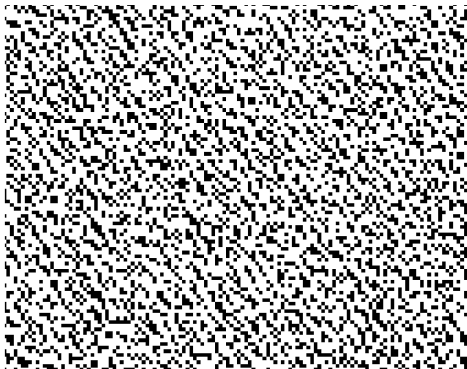
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=14

Discrétisation des applications linéaires

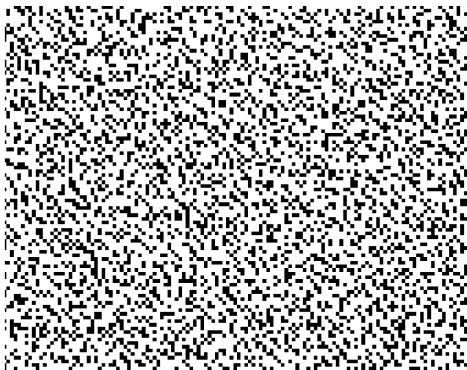
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=15

Discrétisation des applications linéaires

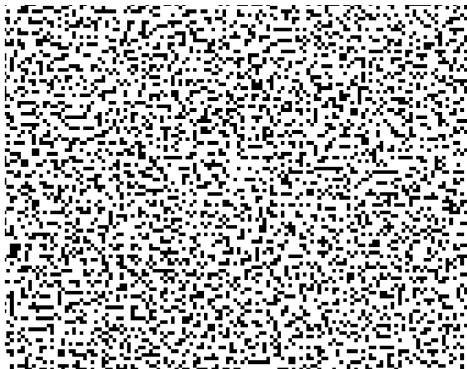
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=16

Discrétisation des applications linéaires

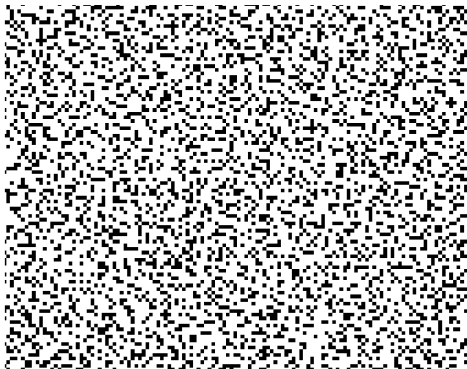
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=17

Discrétisation des applications linéaires

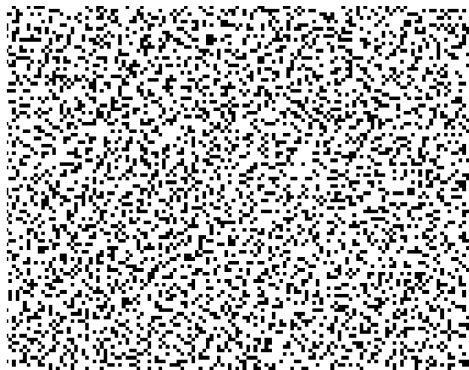
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=18

Discrétisation des applications linéaires

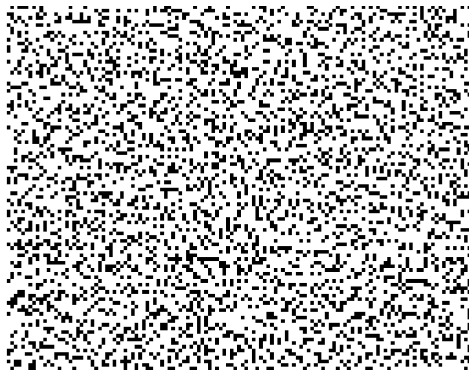
- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=19

Discrétisation des applications linéaires

- On note $P : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ une projection sur le point entier le plus proche.
- Pour $A \in Sl_2(\mathbf{R})$, on note $\hat{A} = P \circ A|_{\mathbf{Z}^2} : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ la *discrétisation* de la matrice A .
- On se donne une suite $(A_k)_k$ et regarde les ensembles images $(\hat{A}_k \circ \cdots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2)$.



Temps=20

Théorème

Pour toute suite $(A_i)_i \in Sl_2(\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et tout $k \in \mathbf{N}^*$, la limite suivante est bien définie et appelée taux d'injectivité :

$$\tau^k(A_1, \dots, A_k) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card} \left((\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R)) \right)}{\text{Card}(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R))}.$$

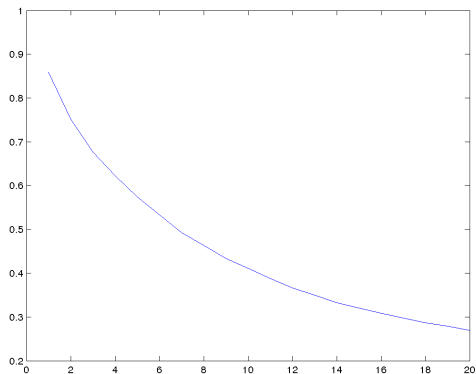
Théorème

Pour toute suite $(A_i)_i \in Sl_2(\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et tout $k \in \mathbf{N}^*$, la limite suivante est bien définie et appelée *taux d'injectivité* :

$$\tau^k(A_1, \dots, A_k) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card} \left((\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R)) \right)}{\text{Card}(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R))}.$$

- τ^k mesure la perte d'information en temps k .
- Preuve : propriété de presque-périodicité des ensembles images : Γ presque-périodique $\implies \hat{A}(\Gamma)$ presque-périodique.

Discrétisation des applications linéaires



Moyenne du taux d'injectivité sur 50 tirages en fonction du temps.

$$\text{Rappel : } \tau^k(A_1, \dots, A_k) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}((\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R)))}{\text{Card}(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R))}.$$

Théorème

Pour une suite générique $(A_i)_i \in \ell^\infty(Sl_2(\mathbf{R}))$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau^k(A_1, \dots, A_k) = 0.$$

Rappel : $\tau^k(A_1, \dots, A_k) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}((\hat{A}_k \circ \dots \circ \hat{A}_1)(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R)))}{\text{Card}(\mathbf{Z}^2 \cap B(0, R))}$.

Théorème

Pour une suite générique $(A_i)_i \in \ell^\infty(Sl_2(\mathbf{R}))$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau^k(A_1, \dots, A_k) = 0.$$

Marche aussi pour des suites génériques de rotations.

- τ^1 n'est pas continu : considérer $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

- τ^1 n'est pas continu : considérer $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
- Sur des ouverts de suites de matrices, $(\tau^k)_k$ n'est pas strictement décroissant :

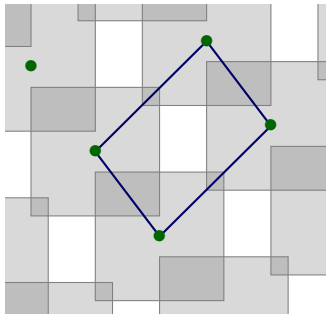
$$A_1 = \text{diag}(100, 1/100) \quad \text{et} \quad A_2 = \text{diag}(1/10, 10)$$

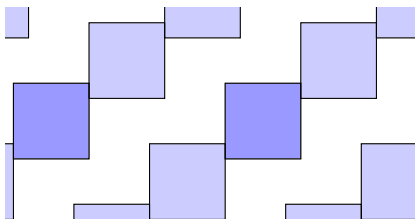
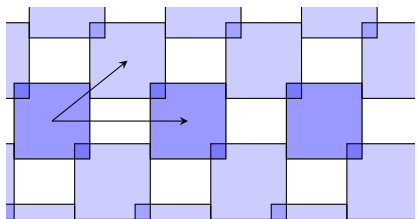
$$\hat{A}_2(\hat{A}_1(\mathbf{Z}^2)) = (10\mathbf{Z}) \times (10\mathbf{Z})$$

Discrétisation des applications linéaires

Idée

Moyenner les comportements locaux, et remplacer l'itération par un passage en grande dimension.





Difféomorphismes conservatifs génériques

Rappel : $D(f_N) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\text{Card}(f_N^t(E_N))}{\text{Card}(E_N)} \in [0, 1]$.

Théorème

Pour un C^1 -difféomorphisme conservatif générique f de \mathbf{T}^2 ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} D(f_N) = 0.$$

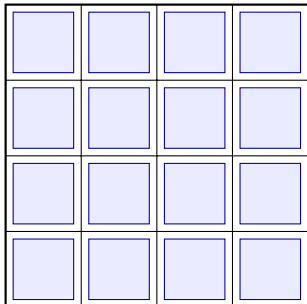
Perte totale d'information, perte du caractère conservatif.

$$\tau_N^k(f) = \frac{\text{Card}(f_N^k(E_N))}{\text{Card}(E_N)}.$$

Théorème (Formule local-global)

Pour un C^r -difféomorphisme conservatif générique ($r \geq 1$), pour tout $k \in \mathbf{N}^$,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tau_N^k(f) = \int_{\mathbf{T}^2} \tau^k(df_x, \dots, df_{f^{k-1}(x)}) dx.$$



Linéarisation locale

Question

Peut-on retrouver certaines mesures de proba invariantes de f à partir des mesures invariantes de f_N ?

$$S(f, M, x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \delta_{f^m(x)}$$

$$B(\mu) = \{x \mid S(f, M, x) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \mu\}$$

Une mesure μ est *physique* pour f si

$$\text{Leb}(B(\mu)) > 0.$$

$$S(f, M, x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \delta_{f^m(x)}$$

$$B(\mu) = \left\{ x \mid S(f, M, x) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \mu \right\}$$

Une mesure μ est *physique* pour f si

$$\text{Leb}(B(\mu)) > 0.$$

Oxtoby-Ulam \implies un homéo conservatif générique n'a qu'une seule mesure physique : Leb .

Conjecture : c'est aussi vrai pour les C^1 -difféomorphismes conservatifs génériques.

Énoncés

On définit $\mu_x^{f_N} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (f_N^m)^* \delta_x = \lim_{M \rightarrow +\infty} S(f_N, M, x)$.

Théorème

Pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, pour toute mesure μ invariante par f , il existe une sous suite $(f_{N_k})_k$ telle que f_{N_k} possède une unique mesure invariante μ_k , avec $\mu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu$. En particulier, pour tout $x \in \mathbf{T}^2$,

$$\mu_x^{f_{N_k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu.$$

Énoncés

On définit $\mu_x^{f_N} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (f_N^m)^* \delta_x = \lim_{M \rightarrow +\infty} S(f_N, M, x)$.

Théorème

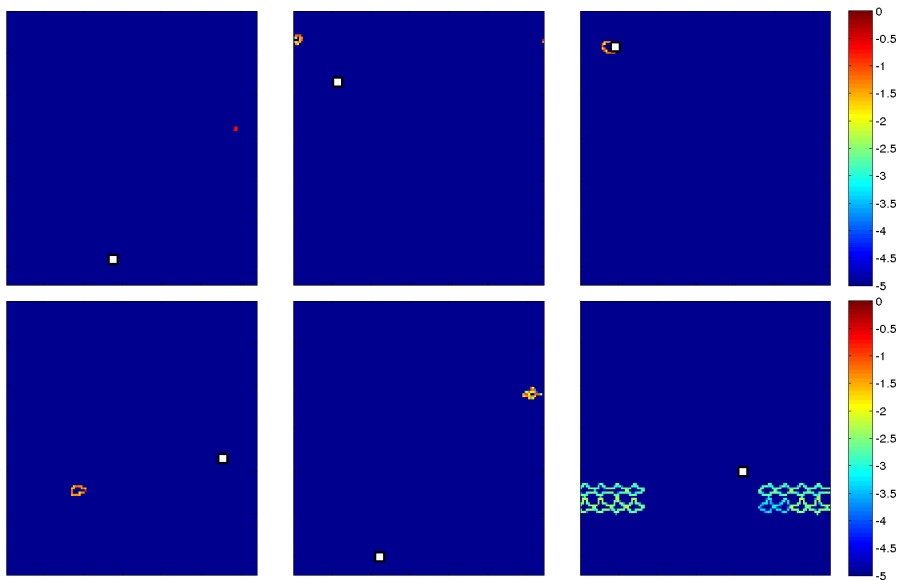
Pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, pour toute mesure μ invariante par f , il existe une sous suite $(f_{N_k})_k$ telle que f_{N_k} possède une unique mesure invariante μ_k , avec $\mu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu$. En particulier, pour tout $x \in \mathbf{T}^2$,

$$\mu_x^{f_{N_k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu.$$

Théorème

Pour tout sous-ensemble fini $D \subset \mathbf{T}^2$, pour $f \in \text{Diff}^1(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, pour toute mesure μ invariante par f , il existe une sous suite $(f_{N_k})_k$ telle que pour tout $x \in D$,

$$\mu_x^{f_{N_k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu.$$



Simulations de $\mu_x^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 2^{23}$.
 f difféo C^1 -proche de l'identité.

Énoncés (rappel)

On définit $\mu_x^{f_N} = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (f_N^m)^* \delta_x = \lim_{M \rightarrow +\infty} S(f_N, M, x)$.

Théorème

Pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, pour toute mesure μ invariante par f , il existe une sous suite $(f_{N_k})_k$ telle que f_{N_k} possède une unique mesure invariante μ_k , avec $\mu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu$. En particulier, pour tout $x \in \mathbf{T}^2$,

$$\mu_x^{f_{N_k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu.$$

Théorème

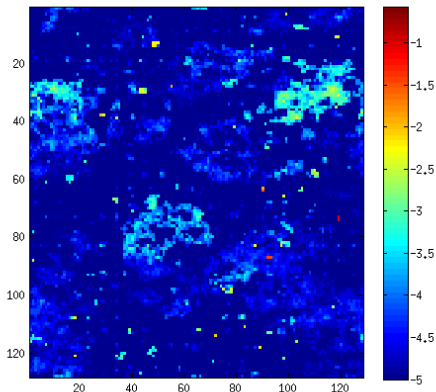
Pour tout sous-ensemble fini $D \subset \mathbf{T}^2$, pour $f \in \text{Diff}^1(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, pour toute mesure μ invariante par f , il existe une sous suite $(f_{N_k})_k$ telle que pour tout $x \in D$,

$$\mu_x^{f_{N_k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu.$$

On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

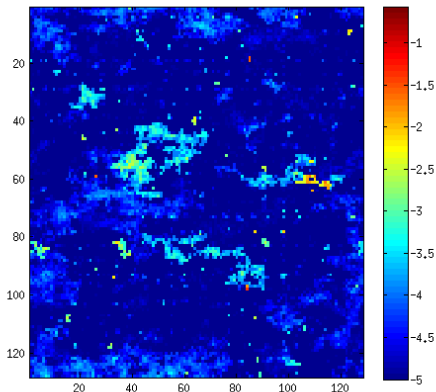
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20000$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

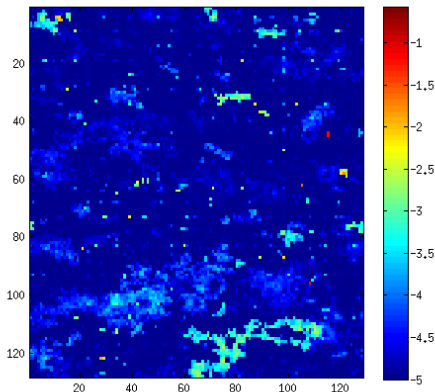
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20001$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

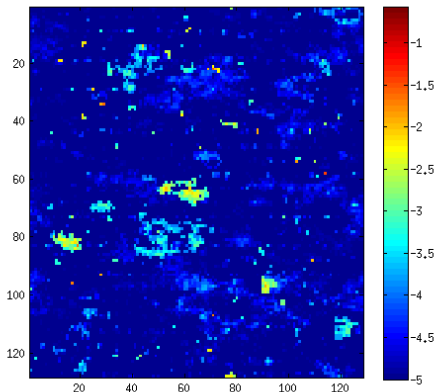
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20002$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

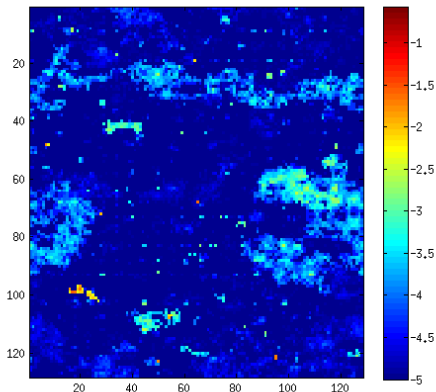
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20003$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

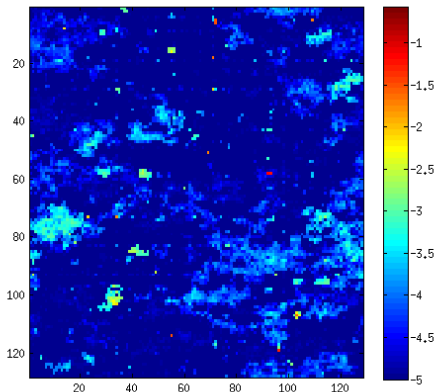
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20004$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

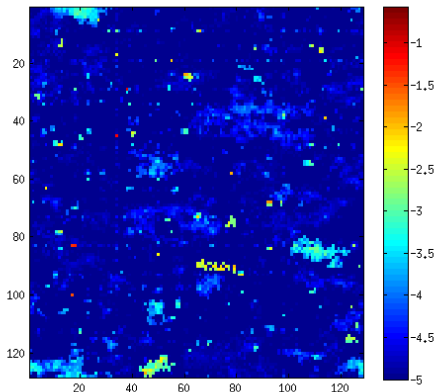
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20005$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

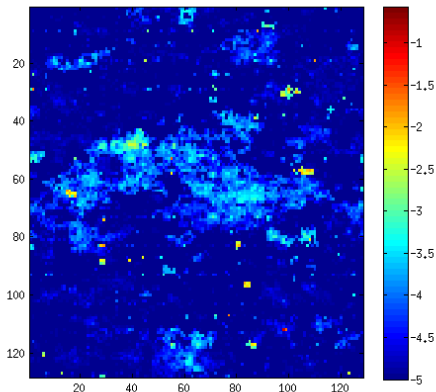
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20006$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

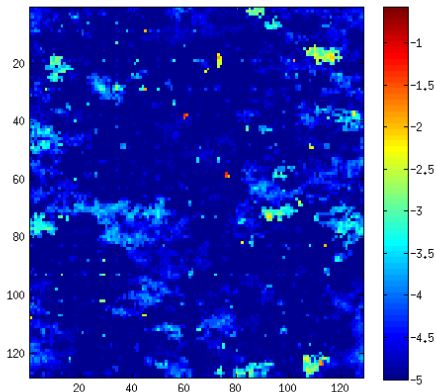
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20007$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

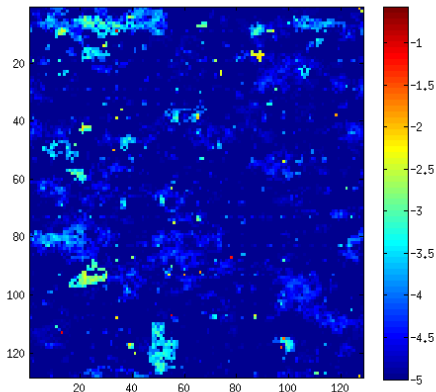
On définit $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20008$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

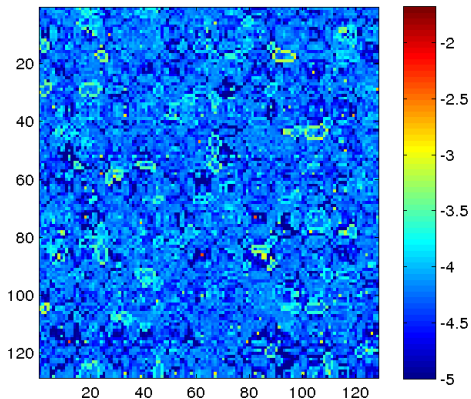
On définit $\mu_{\mathbb{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbb{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 20009$.

f homéo C^0 -proche de l'identité.

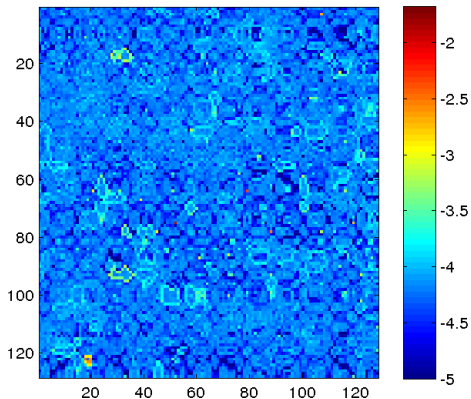
Rappel : $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 2^{10}$.

f difféo C^1 -proche de l'identité.

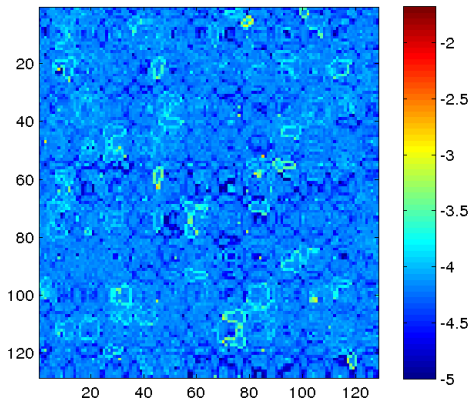
Rappel : $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 2^{11}$.

f difféo C^1 -proche de l'identité.

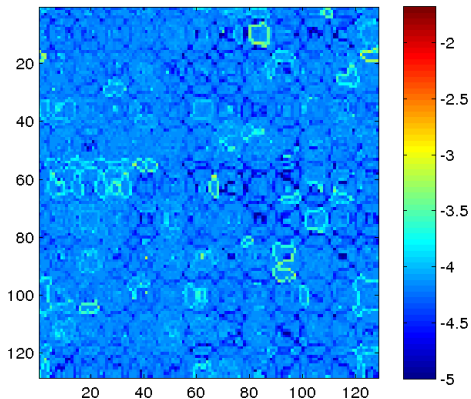
Rappel : $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 2^{12}$.

f difféo C^1 -proche de l'identité.

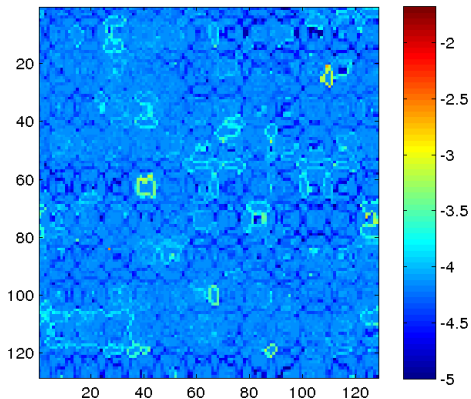
Rappel : $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 2^{13}$.

f difféo C^1 -proche de l'identité.

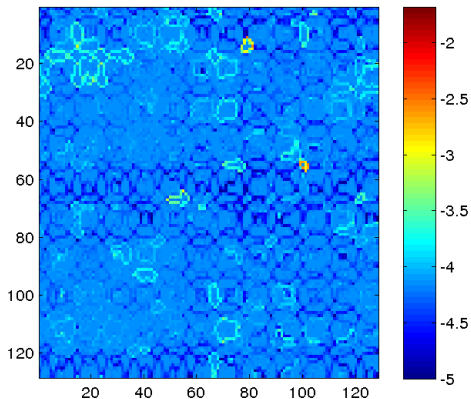
Rappel : $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 2^{14}$.

f difféo C^1 -proche de l'identité.

Rappel : $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N} = \frac{1}{\text{Card}(E_N)} \sum_{x \in E_N} \mu_x^{f_N}$.



Simulations de $\mu_{\mathbf{T}^2}^{f_N}$ sur E_N , avec $N = 2^{15}$.

f difféo C^1 -proche de l'identité.

Difféomorphismes conservatifs génériques

Théorème

Pour $f \in \text{Homeo}(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, pour toute mesure μ invariante par f , il existe une sous suite $(f_{N_k})_k$ telle que f_{N_k} possède une unique mesure invariante μ_k , avec $\mu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu$.

Difféomorphismes conservatifs génériques

Théorème

Pour tout sous-ensemble fini $D \subset \mathbf{T}^2$, pour $f \in \text{Diff}^1(\mathbf{T}^2, \text{Leb})$ générique, pour toute mesure de proba μ invariante par f , il existe une sous suite $(f_{N_k})_k$ telle que pour tout $x \in D$,

$$\mu_x^{f_{N_k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mu.$$

Approximation numérique de l'ensemble de rotation

Ensemble de rotation : invariant dynamique, sous-ensemble convexe de \mathbf{R}^2 .

Théorème

Pour un homéomorphisme/ C^1 -difféomorphisme conservatif générique f du tore, l'ensemble de rotation est d'intérieur non vide, et

- *l'ensemble de rotation calculé avec un nombre fini d'orbites mais sans erreur d'arrondi est réduit à un point (conjecture pour les difféomorphismes) ;*
- *la limite sup des ensembles de rotation des discrétisations est l'ensemble de rotation de f .*

