Contrôle continu
Durée : 1h

Exercice 1
Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,y) &\longmapsto \varphi(x^2+y^2) \end{aligned}$$

est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Solution
On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\varphi'(x^2+y^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\varphi'(x^2+y^2),$$

donc

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy\varphi'(x^2+y^2) - 2xy\varphi'(x^2+y^2) = 0.$$

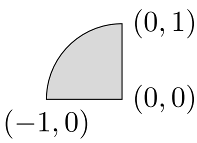
Exercice 2
On considère l'intégrale

$$I_2 = \int_D (x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$.

1. Dessiner le domaine D.
2. À l'aide d'un changement de variables, calculer l'intégrale I_2

Solution



1. C'est un quart de cercle :
2. Par le théorème de Fubini et un changement de variables en polaires, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} (r\cos\theta + 2r\sin\theta) r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r \\ &= \left(\int_{r=0}^{1} r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} (\cos\theta + 2\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3
On considère l'intégrale

$$I_3 = \int_T (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où $T \subset \mathbf{R}^2$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(-1, 0)$.

1. Donner une paramétrisation du triangle T.
2. Calculer l'intégrale I_3

Solution

1. La paramétrisation est donnée par

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1 + x\}.$$

2. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{x=-1}^{0} \int_{y=0}^{1+x} (x^2 + y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-1}^{0} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1+x} \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-1}^{0} \left(x^2(1+x) + \frac{(1+x)^3}{3}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{(1+x)^4}{12}\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Exercice 4
On considère la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 4y^2}$. Déterminer son ensemble de définition et le dessiner.

Solution
la racine carrée est définie pour tout nombre positif, donc

$$D_f = \{(x, y \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - 2x + 4y^2 \geq 0\}.$$

Or $x^2 - 2x + 4y^2 = (x - 1)^2 + 4y^2 - 1$; cela correspond à l'extérieur d'une ellipse de centre $(1, 0)$ et de demi-axes 1 et 1/2 :