

Contrôle continu

Durée : 1h

Exercice 1

Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable. Montrer que

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x, y) &\longmapsto \varphi(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Solution

On calcule les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x\varphi'(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

donc

$$y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy\varphi'(x^2 + y^2) - 2xy\varphi'(x^2 + y^2) = 0.$$

Exercice 2

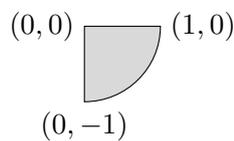
On considère l'intégrale

$$I_2 = \int_D (x + 3y) dx dy,$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Dessiner le domaine D .
2. À l'aide d'un changement de variables, calculer l'intégrale I_2

Solution



1. C'est un quart de cercle :
2. Par le théorème de Fubini et un changement de variables en polaires, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=-\pi/2}^0 (r \cos \theta + 3r \sin \theta) r d\theta dr \\ &= \left(\int_{r=0}^1 r^2 dr \right) \left(\int_{\theta=-\pi/2}^0 (\cos \theta + 3 \sin \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{3}(-2) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3

On considère l'intégrale

$$I_3 = \int_T (x^2 + y^2) dx dy,$$

où $T \subset \mathbf{R}^2$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$.

1. Donner une paramétrisation du triangle T .
2. Calculer l'intégrale I_3 .

Solution

1. La paramétrisation est donnée par

$$T = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}.$$

2. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{x=0}^1 \int_{y=x}^1 (x^2 + y^2) dy dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_x^1 dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} x^3 \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{1}{3} x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 4

On considère la fonction $f(x, y) = \ln(4x^2 + y^2 + 2y)$. Déterminer son ensemble de définition et le dessiner.

Solution

Le logarithme est défini pour tout nombre strictement positif, donc

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 + 2y > 0\}.$$

Or $4x^2 + y^2 + 2y = 4x^2 + (y + 1)^2 - 1$; cela correspond à l'extérieur d'une ellipse de centre $(0, -1)$ et de demi-axes $1/2$ et 1 :

