AMPHI 3

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS (FIN)

INTÉGRALE DE LEBESGUE

Produit tensoriel de représentations

•V_1 de base $(e_1, \ldots, e_n)$ et V_2 de base $(f_1, \ldots, f_m)$. On définit $V_1 \otimes V_2$ de base $g_{i,j} = e_i \otimes f_j$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ et $x \otimes y \in V_1 \otimes V_2$ par

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{m} \mu_j f_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j \,(e_i \otimes f_j).$$

Lemme *Si* $u : V_1 \times V_2 \to W$ *est bilinéaire, il existe* $\tilde{u} : V_1 \otimes V_2 \to W$ *linéaire, unique, tel que* $\tilde{u}(x \otimes y) = u(x, y)$*, pour tous* $x \in V_1, y \in V_2$.

•Propriété universelle ($\Rightarrow$ Indépendance du choix des bases).

•$V^* \otimes V^*$ = {formes bilinéaires sur V} ; $(\lambda_1 \otimes \lambda_2)(x, y) = \lambda_1(x)\lambda_2(y)$.

Proposition (i) *Si* V_1 *et* V_2 *sont des représentations de* G, *alors* $\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2$ *aussi, avec* $\mathrm{g} \cdot (\mathrm{x} \otimes \mathrm{y}) = (\mathrm{g} \cdot \mathrm{x}) \otimes (\mathrm{g} \cdot \mathrm{y})$, *pour tous* $\mathrm{x} \in \mathrm{V}_1$ *et* $\mathrm{y} \in \mathrm{V}_2$.
(ii) $\chi_{\mathrm{V}_1 \otimes \mathrm{V}_2}(\mathrm{g}) = \chi_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{g}) \chi_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{g})$.

•$\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}$ se décompose : $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V} = \mathrm{Sym}^2 \mathrm{V} \oplus \wedge^2 \mathrm{V}$, avec $\mathrm{Sym}^2 \mathrm{V}$ espace engendré par les $\mathrm{xy} = \frac{1}{2}(\mathrm{x} \otimes \mathrm{y} + \mathrm{y} \otimes \mathrm{x})$ (*carré symétrique*), et $\wedge^2 \mathrm{V}$ espace engendré par les $\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} = \mathrm{x} \otimes \mathrm{y} - \mathrm{y} \otimes \mathrm{x}$ (*carré extérieur*). De plus

$$\chi_{\mathrm{Sym}^2 \mathrm{V}}(\mathrm{g}) = \frac{1}{2}(\chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{g})^2 + \chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{g}^2)) \quad \chi_{\wedge^2 \mathrm{V}}(\mathrm{g}) = \frac{1}{2}(\chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{g})^2 - \chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{g}^2)).$$

Représentations induites

•$\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ sous-groupe et V une représentation de H.

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\mathrm{V} = \{\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{V},\ \phi(\mathrm{hx}) = \mathrm{h} \cdot \phi(\mathrm{x}),\ \text{si } \mathrm{h} \in \mathrm{H} \text{ et } \mathrm{x} \in \mathrm{G}\}$$

est une représentation de G, avec $(\mathrm{g} \cdot \phi)(\mathrm{x}) = \phi(\mathrm{xg})$.

•L'*induction* est fondamentale pour l'étude des représentations de G.

Théorème *Si* $\mathrm{W} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\mathrm{V}$, *alors* $\dim \mathrm{W} = [\mathrm{G} : \mathrm{H}] \dim \mathrm{V}$ *et*

$$\chi_{\mathrm{W}}(\mathrm{g}) = \frac{1}{|\mathrm{H}|} \sum_{\mathrm{s} \in \mathrm{G},\ \mathrm{sgs}^{-1} \in \mathrm{H}} \chi_{\mathrm{V}}(\mathrm{sgs}^{-1}).$$

Théorème (réciprocité de Frobenius) *Si* $\mathrm{W}' \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$, *la multiplicité de* W' *dans* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\mathrm{V}$ *est égale à* $\langle \chi_{\mathrm{W}'}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle_{\mathrm{H}}$.

Ensembles de mesure nulle

• $\overline{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. (Toute série dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ a une somme.)

• Dans $\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$, dalle élémentaire $\mathrm{D}_{\mathrm{r},\mathbf{k}} = \prod_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} [2^{-\mathrm{r}}\mathrm{k}_{\mathrm{i}}, 2^{-\mathrm{r}}(\mathrm{k}_{\mathrm{i}} + 1)[$.

• Mesure (de Lebesgue) $\lambda(\mathrm{D}_{\mathrm{r},\mathbf{k}}) = 2^{-\mathrm{rm}}$.

• Mesure extérieure $\lambda^+(\mathrm{A})$ de $\mathrm{A} \subset \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$ (notion purement théorique).

• $\lambda^+(\cup_{\mathrm{i}}\mathrm{A}_{\mathrm{i}}) \leq \sum_{\mathrm{i}} \lambda^+(\mathrm{A}_{\mathrm{i}})$, si $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ dénombrable.

• A est *de mesure nulle* si $\lambda^+(\mathrm{A}) = 0$.

•Un ensemble dénombrable est de mesure nulle.

•L'ensemble de Cantor est non dénombrable et de mesure nulle.

•Ensemble de Besicovich (hérisson fractal) et problème de Kakeya.

•Une propriété p est *vraie p.p.* si $\{\mathrm{x},\ \overline{\mathrm{p}}(\mathrm{x})\}$ est de mesure nulle.

Théorème (Borel-Cantelli) *Si* $\lambda^+(\mathrm{A_n}) \leq \mathrm{a_n}$ *et* $\sum \mathrm{a_n} < +\infty$*, alors presque tout* x *n'appartient qu'à un nombre fini de* $\mathrm{A_n}$.

Fonctions mesurables

•Soit $\mathrm{e}_{\mathrm{r},\mathbf{k}} = \mathbf{1}_{\mathrm{D}_{\mathrm{r},\mathbf{k}}}$. Une *fonction en escalier* est une combinaison linéaire (finie) des $\mathrm{e}_{\mathrm{r},\mathbf{k}}$, pour $\mathrm{r} \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^{\mathrm{m}}$.

•$\mathrm{f} : \mathbf{R}^{\mathrm{m}} \to \mathbf{C}$ est *mesurable* si elle est limite simple p.p. de fonctions en escalier.

•$\lambda\mathrm{f}$, $\mathrm{f} + \mathrm{g}$ et fg sont mesurables si f et g le sont et $\lambda \in \mathbf{C}$.

•Une fonction continue est mesurable.

•Une limite simple p.p. de fonctions mesurables est mesurable.

•Toute fonction (raisonnable) est mesurable (Solovay 1966).

Intégration des fonctions positives

Théorème *Il existe* $f \mapsto \int f$ *de* $\mathrm{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$ *dans* $\overline{\mathbf{R}}_+$ *vérifiant :*

(i) *Si* $f = \sum a_{r,\mathbf{k}} e_{r,\mathbf{k}}$ *est en escalier, alors* $\int f = \sum 2^{-rm} a_{r,\mathbf{k}}$.

(ii) $\int af + bg = a \int f + b \int g$, *si* $a, b > 0$ (linéarité).

(iii) $\int f = 0$ *ssi* $f = 0$ *p.p.*

(iv) $f \le g \Rightarrow \int f \le \int g$.

(v) Le théorème de convergence monotone :

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *croissante,* $f_n \in \mathrm{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$, *alors* $\int \lim f_n = \lim \int f_n$.

•$\int \sum \mathrm{u_n} = \sum \int \mathrm{u_n}$, si $\mathrm{u_n} \in \mathrm{Mes}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}}, \overline{\mathbf{R}}_+)$.

•La linéarité et le théorème de CV monotone sont fondamentaux.

•Le (i) équivaut à l'invariance par translation.

•$\mathrm{X} \subset \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$ est *mesurable* si $\mathbf{1}_{\mathrm{X}}$ est mesurable : tout ensemble (raisonnable) est mesurable. Si X est mesurable, on définit sa *mesure de Lebesgue* $\lambda(\mathrm{X}) = \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathbf{1}_{\mathrm{X}}$, et on montre que $\lambda(\mathrm{X}) = \lambda^+(\mathrm{X})$.

•Intégration *vs* théorie de la mesure.

Intégrale de Lebesgue

•$\mathrm{f} : \mathbf{R}^{\mathrm{m}} \to \mathbf{C}$, mesurable, est *sommable* si $\int |\mathrm{f}| < +\infty$.

•Soit $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ l'espace vectoriel des fonctions sommables et $\|\mathrm{f}\|_1 = \int |\mathrm{f}|$.

•Si f est sommable, on pose (avec $\mathrm{Re}^+(\mathrm{z}) = \sup(\mathrm{Re}(\mathrm{z}), 0)$)

$$\int \mathrm{f} = \int \mathrm{Re}^+(\mathrm{f}) - \int \mathrm{Re}^+(-\mathrm{f}) + \mathrm{i}\int \mathrm{Re}^+(-\mathrm{if}) - \mathrm{i}\int \mathrm{Re}^+(\mathrm{if}),$$

(on a $\mathrm{z} = \mathrm{Re}^+(\mathrm{z}) - \mathrm{Re}^+(-\mathrm{z}) + \mathrm{i}\mathrm{Re}^+(-\mathrm{iz}) - \mathrm{i}\mathrm{Re}^+(\mathrm{iz})$).

•$\mathrm{f} \mapsto \int \mathrm{f}$ est linéaire sur $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ et $|\int \mathrm{f}| \leq \int |\mathrm{f}| = \|\mathrm{f}\|_1$.

Le théorème de convergence dominée

•$X \subset \mathbf{R}^m$ mesurable. $\mathscr{L}^1(X) = \{f : X \to \mathbf{C},\ f \text{ sommable}\}$.

Théorème *Soient* $X \subset \mathbf{R}^m$ *mesurable,* $f_n \in \mathrm{Mes}(X)$, *pour* $n \in \mathbf{N}$, *avec :*

il existe $g \in \mathscr{L}^1(X)$ *telle que* $|f_n| \leq g$ *p.p.,* $\forall n$ (domination) *;*

$f_n \to f$ *p.p.*

Alors f *est sommable,* $\lim \int |f - f_n| = 0$ *et* $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

•Si $f : [a, b] \to \mathbf{C}$ est continue et $F' = f$, alors $\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$ (permet de calculer des intégrales !)

•Théorème de convergence dominée pour les séries.

Théorème (Fubini sur $\mathbf{N} \times X$) *Soit* $u_n \in \mathscr{L}^1(X)$, *pour* $n \in \mathbf{N}$, *avec* $\sum_n \|u_n\|_1 < +\infty$.

(i) *La série* $\sum u_n(t)$ *converge absolument p.p. et la somme* g *est sommable.*

(ii) *On a* $g = \sum u_n$ *dans* $\mathscr{L}^1(X)$ *et, en particulier,* $\int_X g = \sum \int_X u_n$.

$*h(t) = \sum_n |u_n(t)|$.

$*\int h(t) = \sum_n \int |u_n| < +\infty \Longrightarrow A = \{t,\ h(t) = +\infty\}$ de mesure nulle.

$*S(t) = \sum_n u_n(t)$ si $t \notin A$, 0 sinon.

$*$Théorème de CV dominée : $\int |S - \sum_{i \leq n} u_i| \to 0$.

Corollaire *Si* $f_n \to f$ *dans* $\mathscr{L}^1(X)$, *il existe* φ *telle que* $f_{\varphi(n)} \to f$ *p.p.*