THE INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY
PRINCETON, NEW JERSEY 08540
Telephone-609-924-4400

Jean-Marc Fontaine
SCHOOL OF MATHEMATICS

Le 24 septembre 1979

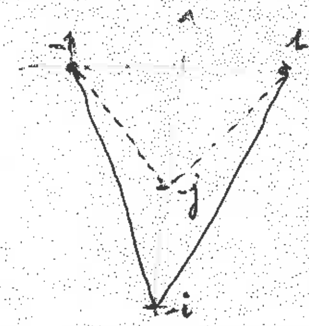
Cher Serre,

Soit $K = \mathrm{Frac}(W(k))$, avec k corps algébriquement clos de car. Soit V un module galoisien admissible au sens de mon fourbi de Ren Soit G l'image de Galois dans $GL(V)(\mathbb{Q}_p)$. Il n'est pas vrai que $\mathrm{Hom}(G_{alg},G_m)(\mathbb{Q}_p) = 0$ implique que les pentes du module de Dieudonné asocié sont nulles. C'est beaucoup plus subtil que cela et c'est tr mystérieux.

Ce qui se passe pour la représentation naturelle de $\mathbb{SL}_2$ n'est pa suff. général pour comprendre ce qui se passe, en général ! mais l'est assez pour comprendre qu'il se passe quelque chose : si tu me dis que $G_{alg} = \mathbb{S}$ avec la repr. naturelle et si tu me donnes les poids de H.T. , je ne peux pas te dire quelles sont les pentes de Dieud. (mais je peux te l'action de l'inertie modérée) ; mais si tu me donnes en plus l'<u>imag Galois</u> (et pas seulement son enveloppe algébrique), je peux te dire quelles sont les pentes de Dieud. !

Pour être plus précis, je vais ~~donc~~ étudier les admissibles de dimension 2 , avec image Galois contenue dans $\mathbb{SL}_2$, où, ce qui revient au même, les admissibl V qui ont les poids de H.T. $-i$ et i , chacun avec la multiplicité i étant un entier fixé $\geqslant 1$ (j'oublie $i = 0$, qui ne me donne que la présentation triviale de dim. 2). Le module de Dieudonné associé ser donc un K-espace vect. de dim. 2 , avec $D_K^m \neq D_K^{m+1} \iff m = -i, i$. Pour pouvoir utiliser le fait que faiblement adm. = admissible, je vais supposer la différence entre les poids extrêmes $\leq p-1$, c'est-à- $i \leqslant (p-1)/2$.

<u>Proposition</u> 1. - <u>Il existe un entier</u> j <u>vérifiant</u> $0 \leqslant j \leqslant i$ <u>tel</u>
<u>les pentes du module de Dieud. sont</u> $-j$ <u>et</u> $+j$, <u>chacune avec la m</u>
<u>tiplicité</u> 1 (si $j = 0$, cela veut dire qu'il n'y a qu'une seule pent
qui est 0, avec multiplicité 2).



<u>Démonstration</u> : Le polygone de Newton doit avoir les mêmes extrémités que celui de Hodge, être au-dessus et avoir ses sommets à coordonnées entières.

Une conséquence de cela est que le groupe algébrique, du côté Dieudo est défini sur $\mathbb{Q}_p$, i.e. si je note D le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de D_K, somme directe des $D_m = \{d \in D_K \mid Fd = p^m d\}$, j'ai $D_K = K \otimes_{\mathbb{Q}_p} D$
Dans la suite, je noterai H_D le sous-groupe alg. de $GL(D)$ défini me dans Rennes.

<u>Notations</u> : Je note Γ_i l'ensemble des couples (j,γ), où j est entier vérifiant $0 \leqslant j \leqslant i$ et où γ est un élément de K vérifian

$$\gamma \neq 0 \text{ si } 0 < j < i ,$$
$$\gamma \notin \mathbb{Q}_p \text{ si } j = 0 .$$

Pour tout $(j,\gamma) \in \Gamma_i$, je note $D_{i,j,\gamma}$ le module filtré de dim. suivant :

$D_{i,j,\gamma} = D_K = Kd \oplus Kd'$, avec $Fd = p^{-j}d$, $Fd' = p^j d'$ (j'ai donc $D = \mathbb{Q}_p d \oplus \mathbb{Q}_p d'$) et

$$D_K^m = \begin{cases} D_K & \text{si } m \leqslant -i , \\ K(d'+\gamma d) , & \text{si } -i < m \leqslant i , \\ 0 & \text{si } m > i . \end{cases}$$

La proposition suivante est un exercice trivial sur la cond. d'admiss bilité faible :

Ce qui est convexe !

Proposition 2. – i) Pour tout $(j,\gamma) \in \Gamma_i$, le module filtré $D_{i,j,\gamma}$
est admissible.

ii) Si (j,γ) et $(j',\gamma') \in \Gamma_i$, on a $D_{i,j,\gamma} \simeq D_{i,j',\gamma'}$ si et s
lement si $j = j'$ et

– lorsque $j = 0$, les éléments γ et γ' engendrent le même sous-$\mathbb{Q}_p$-esp. ve
toriel de K,

– lorsque $j \neq 0$, les éléments $1, \gamma, \gamma'$ et ' sont linéairement dépendants
sur $\mathbb{Q}_p$.

iii) Etant donné V comme ci-dessus (i.e. admissible et de type H.
(-i,i), il existe $(j,\gamma) \in \Gamma_i$ tel que le module de Dieudonné D_K
V est isomorphe à $D_{i,j,\gamma}$.

Je me permettrai, dans la suite, de noter $V_{i,j,\gamma}$ le module galo
en correspondant à $D_{i,j,\gamma}$.

La proposition suivante est encore un exercice facile :

Proposition 3. – Soit $(j,\gamma) \in \Gamma_i$. Alors H_D est (comme sous-groupe (SL(D))

– un Cartan (i.e. un sous-tore non trivial) déployé de SL(D) si
$j = i$ et $\gamma = 0$;

– un Borel si $j = i$ et $\gamma \neq 0$;

– un Cartan non déployé si $j = 0$ et γ est quadratique sur $\mathbb{Q}_p$;

– SL(D) dans tous les autres cas.

Remarques. 1 – Dans le premier cas, V est unique à iso. près. Dans
premier cas (resp. le second), l'action de Galois est de la forme

$$\begin{pmatrix} \chi^i & 0 \\ 0 & \chi^{-i} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } \begin{pmatrix} \chi^i & * \\ 0 & \chi^{-i} \end{pmatrix} \quad).$$

2. – Dans le troisième cas, V est aussi unique à iso. près (et s'ob
tient comme on pense à partir du Lubin-Tate de l'ext. quadr. non rami
fiée de $\mathbb{Q}_p$. Dans la suite, je noterai V_o cet unique V et je not
rai R_o un réseau de V_o stable par Galois (R_o est aussi unique

iso près).

3. - Parmi les gens qui donnent SL_2, il y en a un qui est plus bea
que les autres (pour chaque entier i) : c'est celui oú on prend j
et γ cubique sur $\mathbb{Q}_p$ (la classe d'iso. ne dépend pas du choix d'un
γ). On attrappe ainsi une repr. de dim. 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p^3})$. D'où so
elle ?

En appliquant mécaniquement "Fontaine-Laffaille", on trouve auss

Proposition 4. Sous les hypothèses de la proposition 3 et avec $V =$
$V_{i,j,\gamma}$, l'action de l'inertie modérée sur V est
- l'action évidente dans les deux premiers cas ;
- donnée par les caractères $\chi_2^{i(p-1)}$ et $\chi_2^{ip(p-1)} = \chi_2^{-i(p-1)}$, dan
les troisièmes et quatrièmes cas (où χ_2 est "le" car. fond. de niv
2).

En particulier, l'inertie modérée ne donne que très peu de renseig
ments sur les pentes : elle dit si j est ou non égal à i.

Remarques aussi que dans les cas où V est irréductible (c'est-à-
re dans les deux derniers cas), l'action de l'inertie modérée aussi
est irréductible (par ce que $i \leq (p-1)/2 \Rightarrow (p+1) \nmid (p-1)i$). Pour
(j,γ) fixé, le réseau $R = R_{i,j,\gamma}$ de $V = V_{i,j,\gamma}$ stable par Galois es
alors unique à iso. près. En regardant (de plus près) ce que donne "Laffaille-Fontai
on constate le phénomène suivant :

Proposition 5. - Soit $(j,\gamma) \in \Gamma_i$, avec $j \neq i$ et soit r le plus g
entier tel que $R/p^rR \simeq R_o/p^rR_o$. On a

$$r = \begin{cases} i-j & \text{si } j \neq 0 \\ i + v_p((\gamma^{\sigma^2}-\gamma)/(\gamma^{\sigma}-\gamma)) & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

(où σ est le Frobenius absolu et v_p la valuation p-adique).

Remarques que l'entier r peut se caractériser ainsi : soit G_n l'
tersection de l'image de Galois dans $GL(R)(\mathbb{Z}_p)$ avec les matrices
congrues à 1 mod. p^n. Alors

- si $1 \leq n < r$, G_n/G_{n+1} est cyclique d'ordre p ;
- si $n \geqslant r$, G_n/G_{n+1} est abélien de type (p,p) ou (p,p,p).

Si tu examines la structure de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$, tu constates facilement q
si $p+1$ ne divise pas $i(p-1)^2$ (ce que $i \leqslant (p-1)/2$ implique lorsq
$p \equiv 1 \pmod 4$), alors G_n/G_{n+1} est de type (p,p,p), pour $n \geqslant r$,
donc que l'image de Galois est $G = T_o.S_r$, où

- T_o est l'intersection avec $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ d'un Cartan non déployé de $SL_2(\mathbb{Q}_p)$,
- S_r est l'intersection de $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ avec les matrices $\equiv 1$ mod p^r

<u>Commentaire final</u> (<u>et vasouillard</u>) : Je ne pense pas que la connaiss
ce de l'image de Galois et de la classe de conjugaison du tore de H.
suffisent à déterminer les pentes. J'ai l'impression qu'on devrait pou
voir comprendre ce que c'est que le tore des pentes en travaillant av
des réseaux et pas seulement des $\mathbb{Q}_p$-vectoriels ... à condition tou-
tefois de savoir faire fonctionner la machine des $\otimes$-catégories dans
cadre, ce que la limitation " diff. des pentes extrêmes $\leq p-1$ " nous
interdit de faire pour le moment !

Bien à toi

[illegible]

P.S. 1. Forget the previous << commentaire >> which seems almost meaningless.
2. J'espère que cette lettre arrivera avant moi à ~~[illegible]~~ Cambridge