UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

Laboratoire de Mathématiques Pures associé au C. N. R. S.

Jean-Marc Fontaine
INSTITUT FOURIER
MATHÉMATIQUES PURES
Boite Postale 116
38402 SAINT MARTIN D'HÈRES

[redacted]

Téléphone (76) 54.81.45

le 15 juin 1980

Cher Serre,

Il y a deux manières (au moins) d'utiliser le théorème sur la structure du module des différentielles de l'anneau des entiers d'une clôture algébrique d'un corps local pour montrer que le module de Tate d'un groupe de Barsotti-Tate est du type Hodge-Tate

- on peut, bien sûr, transposer ce qui a été fait (dans mon §3) pour les variétés abéliennes : ça marche parfaitement ; c'est même plus facile que pour les variétés abéliennes.
- mais l'autre méthode me plaît beaucoup plus, parce que l'on voit vraiment le $C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p$(p-div) se couper en deux morceaux canoniques, il n'y a pas à le refabriquer à partir d'invariants ou de covariants, il n'y a même pas besoin de savoir ce que c'est qu'une décomposition de H.-T. ; ce n'est qu'a posteriori qu'on pourra observer que la décomposition obtenue est la déc. de H.-T.

1. Soient A l'anneau des entiers d'un corps local K, $\bar{A}$ celui d'une clôture algébrique $\bar{K}$ de K, H un schéma en groupes commutatifs, fini et plat, de rang une puissance de p, sur Spec A, R l'algèbre affine du dual de H. Alors $H(\bar{A})$ s'identifie à un sous-groupe du groupe multiplicatif de $\bar{A} \otimes_A R$. L'application $x \longmapsto dx/x$ définit un homomorphisme de ce groupe mult. dans le groupe additif du module $\Omega_A(\bar{A} \otimes_A R)$ des A-différentielles de $\bar{A} \otimes_A R$. En composant l'inclusion de $H(\bar{A})$ dans $\bar{A} \otimes_A R$ avec cette application, et en étendant les scalaires, on obtient une application $\bar{A}$-linéaire

$$\varphi_H : \bar{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} H(\bar{A}) \longrightarrow \Omega_A(\bar{A} \otimes_A R) \quad .$$

2. Proposition. - Soient v la valuation de $\overline{K}$ normalisée par $v(p) = 1$, $\mathfrak{D}_{K/K_o}$ la différente de l'ext. K/K_o (où $K_o = \mathrm{Frac}(W(\text{corps res.}))$), a un élément de $\overline{A}$ vérifiant $v(a) \geqslant \frac{1}{(p-1)} + v(\mathfrak{D}_{K/K_o})$. Alors, $a.\ker\varphi_H = 0$.

Démonstration : Soit H' le dual de H et soient $J = H(\overline{A})$, $J' = H'(\overline{A})$. L'anneau $\overline{A}\otimes_A R$ s'identifie à une sous-$\overline{A}$-algèbre de l'algèbre $\overline{A}^{J'}$ des fonctions sur J' à valeurs dans $\overline{A}$; d'où une application $\overline{A}$-linéaire de $\Omega_A(\overline{A}\otimes_A R)$ dans $\Omega_A(\overline{A}^{J'}) = \Omega^{J'}$ (en posant $\Omega = \Omega_A(\overline{A})$). Si on note $\overline{\varphi}_H$ le composé de φ_H ,avec cette application, il suffit de montrer que $a.\ker\overline{\varphi}_H = 0$.

Choisissons une "base" de J' , i.e. des éléments $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ non nuls de J' tel que J' soit la somme directe des sous-groupes cycliques engendrés par les e'_j . Soit p^s l'exposant de J' et soit p^{s-t_j} , avec $0 \leq t_j < s$, l'ordre de e'_j .

Lorsque l'on identifie $\overline{A}\otimes_A R$ à un sous-anneau de $\overline{A}^{J'}$, J s'identifie au sous-groupe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J', \mu_{p^\infty})$ du groupe multiplicatif de $\overline{A}^{J'}$. Si on choisit une racine primitive p^s-ième de l'unité $\varepsilon \in \overline{A}$, J est engendré par les e_i , pour $i = 1,2,\ldots,m$, définis par

$$e_i(e'_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j , \\ \varepsilon^{p^{t_j}} & \text{si } i = j ; \end{cases}$$

si $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}$, on a $\sum x_i e_i = 0 \iff p^{s-t_i} \mid x_i$, pr tt i

Soit $\lambda = \sum b_i \otimes e_i$, avec les $b_i \in \overline{A}$, un élément de $\overline{A}\otimes J$. On a $\overline{\varphi}_H(\lambda) = (\omega_u)_{u\in J'}$, avec $\omega_u = \sum b_i.(de_i(u))/e_i(u))$; en particulier, $\omega_{e'_j} = b_j.p^{t_j}.(d\varepsilon/\varepsilon)$. Si $\lambda \in \ker\overline{\varphi}_H$, on doit donc avoir $p^{t_j}.b_j \in \mathrm{Ann}(d\varepsilon/\varepsilon)$, pour tout j ; comme, d'après le lemme 7 du § 2 de mon papier, $v(\mathrm{Ann}(d\varepsilon/\varepsilon) = s - \frac{1}{p-1} - v(\mathfrak{D}_{K/K_o})$ (on peut supposer $s \geqslant \frac{1}{p-1} + v(\mathfrak{D}_{K/K_o})$ sinon il n'y a rien à démontrer), on trouve que $v(ab_j) \geqslant s-t_j$, donc que ab_j est divisible par p^{s-t_j} , qui est l'ordre de e_j et $a\lambda = 0$.

3. La morale de la prop. précédente , c'est que, modulo un petit morceau qui est borné par quelque chose d'indépendant de H , $\overline{A}\otimes_A H(\overline{A})$ se plonge dans $\Omega_A(\overline{A}\otimes_A R)$.

Mais $\Omega_A(\overline{A}\otimes_A R)$ se coupe canoniquement en deux morceaux :

$$\Omega_A(\overline{A}\otimes_A R) = \overline{A}\otimes\Omega_A(R)\oplus\Omega_A(\overline{A})\otimes R ,$$

ce qui donne une sorte de "déc. de Hodge-Tate" de $\overline{A}\otimes H(\overline{A})/\ker\varphi_H$.

4. Si maintenant Γ est un groupe p-divisible sur A , tu as, avec des notations évidentes,

$$O_C\otimes_{\mathbb{Z}_p}T_p(\Gamma) = \varprojlim \overline{A}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_n(\overline{A}) .$$

Par passage à la limite, les déc. de H-T des $\overline{A}\otimes\Gamma_n(\overline{A})/\ker\varphi_{\Gamma_n}$ te donnent une décomposition de $O_C\otimes_{\mathbb{Z}_p}T_p(\Gamma)$ en somme directe de deux O_C-modules ; ce que l'on a obtenu, c'est la décomposition de Hodge-Tate, le premier morceau étant celui de poids 0 et le second celui de poids 1 .

5. On peut préciser les images de φ_H et retrouver les dim. de chaque morceau et les identifications habituelles (diff. inv. = ..

Il s'impose alors de comparer les flèches fabriquées avec

- la flèche construite par Tate,
- la flèche construite "comme pour les variétés abéliennes",
-- les flèches obtenues par la construction duale.

Cela devrait être facile, et même en partie tautologique et c'est ça que je voudrais mettre dans le § 4 de mon papier.

6. On voudrait bien aussi donner une description de ce type pour le module de Tate d'une variété abélienne (et même pour le H^1_{et} d'une var. proj. non sing. quelconque, sans se servir de var. abéliennes) ! Je ne vois pas bien pour le moment !

Bien à toi

Jean-Marc Fontaine

P.S. - J'envoie un double de cette lettre et des trois premiers paragraphes de mon papier à Tate.