COLLÈGE
DE
FRANCE

CHAIRE D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Paris, le 5 Octobre 1986

Cher Fontaine,

Je vais avoir besoin de citer certains de tes résultats non publiés sur l'action de Galois dans la coh.mod p, et je voudrais vérifier que j'ai bien compris ce que tu m'as dit à ce sujet.

La situation qui m'intéresse est celle d'une variété X projective et lisse sur Q ; on regarde la cohomologie de X en une certaine dimension impaire $2m+1$, et on la suppose de dimension 2 (cela ne doit jouer aucun rôle chez toi). Son type de Hodge est de la forme $(r,s) + (s,r)$ avec $0 \leq r < s$ et $r+s=2m+1$. On se place sur Q_p, et on veut dire à quoi ressemble l'action du groupe d'inertie en p sur la cohomologie (mod p) de X. On n'a besoin que de ce qui se passe pour p assez grand. Cela permet de supposer que X a bonne réduction en p, que la coh. de X n'a pas de p-torsion, que $p > 2\dim(X)$, etc. ~~XXXX~~ On pose alors $V = H^{2m+1}_{et}(\overline{X}, Z/pZ)$, avec les notations usuelles. Cela définit une représentation ρ_p de degré 2 du groupe de Galois $Gal(\overline{Q}_p/Q_p)$, et en particulier de son groupe d'inertie I. Voici les propriétés de ρ_p que j'aimerais que tu me confirmes :

On peut écrire ρ_p sous la forme $\rho_p = \chi^r \otimes \rho'_p$, où χ est le caractère cyclotomique, et où l'action de I via ρ'_p est de l'un des types suivants :

a) donné par ψ^{s-r}, $\psi'^{(s-r)}$, où ψ et ψ' sont les deux caractères fondamentaux de ~~XXXXX~~ niveau 2 de I (dans ce cas, le groupe d'inertie sauvage I_p opère trivialement);

b) action réductible, ~~XXXX~~ du type

$$\begin{pmatrix} \chi^{s-r} & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. avec 1 en quotient, et χ^{s-r} en sous-truc. De plus, dans le cas particulier $s-r = 1$, l'action de l'inertie sauvage $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est soit triviale, soit peu ramifiée (au sens de ton papier d'Inv. par exemple).

Pour ce que je veux en faire, il est essentiel que je sache que, dans le cas b), on a bien 1 en quotient et χ^{s-r} en sous-truc et pas l'inverse; et dans le cas $s-r = 1$, il est également essentie que je sache que l'action de I_p n'est pas très ramifiée.

Bien à toi

J-P.Serre

PS - Mestre m'a dit avoir appris par " BITNET " que Rubin avait démontré la nullité du groupe de Tate-Safarevic de $y^2 = x^3 - x$. Est-ce que c'est confirmé ? Y a-t-il d'autres courbes (MC ?) auxquelles la même méthode s'applique ? Si oui, en combinant avec Greenberg, on aurait enfin des courbes pour lesquelles on pourrait montrer que le rang de Mordell-Weil est > 0 simplement en regardan leur $L(1)$: ce serait très beau.