FONCTIONS D'UNE VARIABLE p-ADIQUE, NOTES DU COURS DE M2

par

Pierre Colmez

Table des matières

1. Espaces de Banach p-adiques

1.1. L-banach. — On normalise la valuation p-adique v_p sur $\mathbf{C}_p$ par $v_p(p) = 1$. Si L est un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers, $\mathfrak{m}_L = \{x \in L, v_p(x) > 0\}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_L$, et $k_L = \mathscr{O}_L/\mathfrak{m}_L$ le corps résiduel de L.

Si B est un L-espace vectoriel, une *valuation* sur B est une fonction $v_B : B \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $v_B(x) = +\infty$ si et seulement si $x = 0$;

(ii) $v_B(x+y) \geqslant \inf(v_B(x), v_B(y))$ quels que soient $x, y \in B$;

(iii) $v_B(\lambda x) = v_p(\lambda) + v_B(x)$ quels que soient $\lambda \in L$ et $x \in B$.

Un *L-banach* B est un L-espace vectoriel topologique, la topologie étant définie par une valuation v_B pour laquelle il est complet.

Exemple 1.1. — (i) Si I est un ensemble, soit $\ell_\infty(I, L)$ l'ensemble des familles bornées $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de L. On munit $\ell_\infty(I, L)$ de la valuation v_{ℓ_∞} définie par $v_{\ell_\infty}((a_i)_{i\in I}) = \inf_{i\in I} v_p(a_i)$, ce qui en fait un L-banach.

(ii) Soit $\ell^0_\infty(I, L)$ le sous-espace de $\ell_\infty(I, L)$ des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de L tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. C'est un L-banach comme sous-L-espace vactoriel fermé d'un L-banach. C'est aussi l'adhérence dans $\ell_\infty(I, L)$ de l'espace des suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls.

(iii) Plus généralement, si I est un ensemble, et si B est un L-banach, l'espace $\ell_\infty(I, B)$ (resp. $\ell^0_\infty(I, B)$) des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de B, qui sont bornées (resp. qui tendent vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies), muni de la valuation v_{ℓ_∞} définie par $v_{\ell_\infty}((a_i)_{i\in I}) = \inf_{i\in I} v_B(a_i)$, est un L-banach.

Exercice 1. — Un *L-anneau de Banach* B est une L-algèbre, muni d'une valuation v_B qui en fait un L-banach, et qui vérifie en plus $v_B(xy) \geqslant v_B(x) + v_B(y)$ si $x, y \in B$. Soit B un L-anneau de Banach.

(i) Montrer que « $v_B(x-1) > 0$ » implique « x inversible dans B ».

(ii) Montrer que, si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments inversibles de B tel que $v_B(x_n-1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$, alors le produit $\prod_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge dans B et la limite est inversible dans B.

Remarque 1.2. — La condition de Lipshitz habituelle pour la continuité d'une application linéaire $f : B \to B'$ devient : il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $v_{B'}(f(x)) \geqslant v_B(x) + C$ quel que soit $x \in B - \{0\}$. Ceci permet de définir la valuation de f comme $\inf_{x\in B} \big(v_{B'}(f(x)) - v_B(x)\big)$.

La plupart des résultats classiques de la théorie des espaces de Banach réels restent valables pour les L-banach (le théorème de Hahn-Banach demande un peu de précaution). En particulier, on a les résultats suivants.

Proposition 1.3. — (i) *Si $f : B_1 \to B_2$ est une application linéaire continue bijective entre deux espaces de Banach p-adiques, alors f^{-1} est continue (théorème de l'image ouverte).*

(ii) *Une limite simple d'applications linéaires continues sur un espace de Banach est continue (Théorème de Banach-Steinaus).*

Démonstration. — Voir n'importe quel livre traitant des espaces de Banach.

1.2. Bases de Banach. — La théorie des espaces de Banach p-adiques est très loin d'être aussi riche que son homologue archimédienne ; elle se rapproche plutôt de celle des espaces de Hilbert réels. En particulier, la notion suivante remplace celle de base hilbertienne dans un espace de Hilbert.

Définition 1.4. — Soit B un L-banach. Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de B est *une base orthonormale de B* de B si l'application $(a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i e_i$, de $\ell^0_\infty(I, L)$ dans B, est une isométrie.

On dit que c'est *une base de Banach* si cette application est seulement un isomorphisme de L-banach. Autrement dit, une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthornormale de B si et seulement si

(i) tout élément x de B peut s'écrire de manière unique sous la forme d'une série convergente $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$, où les a_i sont des éléments de L tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies,

(ii) $v_B(x) = \inf_{i\in I} v_p(a_i)$.

C'est une base de Banach si elle est bornée et vérifie la condition (i), ce qui implique, d'après le théorème de l'image ouverte, la propriété suivante.

(ii') il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que l'on ait $-C + \inf_{i\in I} v_p(a_i) \leqslant v_B(x) \leqslant C + \inf_{i\in I} v_p(a_i)$.

Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de B est *orthogonale* s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de L telle que, quelle que soit la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de L, on ait $v_B(\sum_{i\in I} x_i\lambda_i e_i) = \inf_{i\in I} v_p(x_i)$. En particulier une base orthonormale est orthogonale.

Exemple 1.5. — Si I est un ensemble, et si $i \in I$, on note δ_i la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui d'indice i qui est égal à 1. Par définition, ou presque, les δ_i, pour $i \in I$, forment une base orthonormale de $\ell^0_\infty(I, \mathbf{Q}_p)$.

Exercice 2. — Soit $\varepsilon^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$, une racine primitive p^n-ième de l'unité, telle que l'on ait $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $I = \mathbf{Z}[\frac{1}{p}] \cap [0, \frac{p-1}{p}[$, et si $i = \frac{a}{p^n} \in I$, soit $\varepsilon(i) = (\varepsilon^{(n)})^a$. Montrer que, si F est une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, alors les $\varepsilon(i)$, $i \in I$, forment une base de Banach du complété $\widehat{F}_\infty$ de l'extension cyclotomique $F_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}} F(\varepsilon^{(n)})$ de F. Est-ce une base othonormée ?

Proposition 1.6. — *Si L est de valuation discrète, et π_L est une uniformisante de L, alors :*

(i) *Tout L-banach possède des bases de Banach.*

(ii) *Un L-banach possède des bases orthonormales si et seulement si $v_B(B) = v_p(L)$. De plus, sous cette hypothèse, si on note $B^0 = \{x \in B \mid v_B(x) \geqslant 0\}$, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B si et seulement si $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ est une base algébrique du k_L-espace vectoriel $\overline{B} = B^0/\pi_L B^0$.*

Démonstration. — Si B est un L-banach muni de la valuation v_B, alors $v'_B : B \to v_p(L)$, définie par $v'_B(x) = v_p(\pi_L) \cdot \left[\frac{v_B(x)}{v_p(\pi_L)}\right]$, est une valuation sur B, équivalente à v_B, ce qui permet de déduire le (i) du (ii). Supposons donc que $v_B(B) = v_p(L)$, et montrons que $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B si et seulement si $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ est une base algébrique du k_L-espace vectoriel $\overline{B}$.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de B^0 telle que la famille $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ soit une base du k_L-espace vectoriel $\overline{B}$. Soient S un système de représentants de k_L dans $\mathscr{O}_L$ contenant 0 et $s : k_L \to S$ l'inverse de la réduction modulo π_L (en particulier, $s(0) = 0$). Si $x \in B^0$, on peut écrire $\overline{x}$ comme une somme finie $\sum_{i\in I} a_i\overline{e}_i$, où les a_i sont des éléments de k_L presque tous nuls. Soit $s(x) = \sum_{i\in I} s(a_i)e_i$. Par construction, on a $x - s(x) \in \pi_L B^0$.

Si $x \in B^0$, définissons par récurrence une suite x_n d'éléments de B_0 par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \frac{1}{\pi_L}(x_n - s(x_n))$. On a alors $x = \sum_{n=0}^k \pi_L^n s(x_n) + \pi_L^{k+1} x_{k+1}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. On peut écrire $s(x_n) = \sum_{i\in I} s_{n,i}e_i$, où les $s_{n,i}$ sont des éléments de S presque tous nuls, ce qui montre que si on pose $a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_L^n s_{n,i}$, alors la suite des a_i tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. Ceci montre que l'application de $\ell^0_\infty(I, L)$ dans B qui à $(a_i)_{i\in I}$ associe $\sum_{i\in I} a_i e_i$

est surjective. Si $(a_i)_{i\in I}$ est un élément non nul de $\ell^0_\infty(I,L)$, alors quitte à multiplier a par une puissance de π_L, on peut supposer $v_{\ell_\infty}(a)=0$, et le fait que les $(\overline{e}_i)_{i\in I}$ forment une base de $\overline{B}$ implique que $\sum_{i\in I} a_ie_i\neq 0$ modulo π_L et donc que $0\leqslant v_{\ell_\infty}\big(\sum_{i\in I} a_ie_i\big)<v_p(\pi_L)$. Comme on a supposé $v_B(B)=v_p(L)$, ceci implique $v_{\ell_\infty}\big(\sum_{i\in I} a_ie_i\big)=0$, et on en tire le fait que l'application $(a_i)_{i\in I}\mapsto \sum_{i\in I} a_ie_i$ est une isométrie de $\ell^0_\infty(I,L)$ sur B.

La réciproque est immédiate.

Proposition 1.7. — *Si L est de valuation discrète, si B est un L-banach p, et si F est un sous-L-espace vectoriel fermé de B, alors F admet un supplémentaire fermé.*

Démonstration. — On peut supposer que B vérifie $v_B(B)=v_p(L)$, ce qui implique $v_B(F)=v_p(L)$. Soient $F^0=F\cap B^0$ et $\overline{F}=F^0/pF^0\subset\overline{B}$. Soient $(f_j)_{j\in J}$ une base orthonormale de F et $(g_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de B telle que la famille des $(\overline{f}_j)_{j\in J}$ et des $(\overline{g}_i)_{i\in I}$ forme une base de $\overline{B}$. On peut alors prendre pour G l'adherence dans B de l'espace vectoriel engendré par les $(g_j)_{j\in J}$.

Corollaire 1.8. — *Si L est de valuation discrète, si $f:B_1\to B_2$ est une application linéaire continue surjective entre deux L-banach p-adiques, alors f admet un scindage continu, c'est-à-dire qu'il existe $s:B_2\to B_1$ linéaire continue telle que l'on ait $f\circ s=\mathrm{id}_{B_2}$.*

Démonstration. — Il suffit de prendre un supplémentaire fermé de $\ker f$ dans B_1 et d'utiliser le théorème de l'image ouverte.

1.3. Le dual d'un L-banach. — Si B est un L-banach, on note B^* le L-espace vectoriel des formes L-linéaires continues $f:B\to L$. Muni de la *topologie forte* définie par la valuation v_{B^*} donnée par la formule

$$v_{B^*}(f)=\inf_{x\in B-\{0\}} v_p(f(x))-v_B(x),$$

cet espace est un L-banach. On peut aussi munir B^* de la *topologie faible* de la convergence simple (topologie la plus faible telle qu'une suite f_n, $n\in\mathbf{N}$, ait pour limite f, si et seulement si, quel que soit $x\in B$, $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$). D'après le théorème de Banach-Steinaus, B^* est aussi complet pour la topologie faible, mais l'espace ainsi obtenu n'est un L-banach que si B est de dimension finie.

Proposition 1.9. — *Soit I un ensemble.*

(i) *Si $b=(b_i)_{i\in I}\in\ell_\infty(I,L)$, et si $a=(a_i)_{i\in I}\in\ell^0_\infty(I,L)$, la série $\sum_{i\in I} b_ia_i$ converge dans L.*

(ii) *Si $f_b(a)$ désigne la somme de la série $\sum_{i\in I} b_ia_i$, l'application $b\mapsto f_b$ est une isométrie de $\ell_\infty(I,L)$ sur le dual de $\ell^0_\infty(I,L)$.*

Démonstration. — La seule chose non totalement évidente est la surjectivité de $b\mapsto f_b$. Soit donc $f\in\ell^0_\infty(I,L)^*$. Comme f est continue, si on pose $b_i=f(\delta_i)$, on a $v_p(b_i)\geqslant v_{\ell^0_\infty(I,L)^*}(f)$, ce qui prouve que $b=(b_i)_{i\in I}\in\ell_\infty(I,L)$. Mais alors $f-f_b$ est nul sur le sous-espace de $\ell^0_\infty(I,L)^*$ engendré par les δ_i ; comme celui-ci est dense et $f-f_b$ continue, cela implique $f=f_b$. Ceci permet de conclure.

Remarque 1.10. — Soit δ_i^* l'élément de $\ell^0_\infty(I,L)^*$ défini par $\delta_i^*(\delta_j)=1$, si $j=i$, et $\delta_i^*(\delta_j)=0$, si $j\neq i$. Il résulte de la démonstration ci-dessus que, si $f\in\ell^0_\infty(I,L)^*$, alors $f=\sum_{i\in I} f(\delta_i)\delta_i^*$

dans $\ell^0_\infty(I,L)^*$, muni de la topologie faible (la série ne converge pas pour la topologie forte, sauf si I est un ensemble fini).

1.4. Produit tensoriel de L-banach. — Soient B_1 et B_2 deux L-banach. Si $z\in B_1\otimes_L B_2$, on définit $v_{B_1\otimes B_2}$ comme le maximum des $\inf_{j\in J}(v_{B_1}(x_j)+v_{B_2}(y_j))$ pour toutes les écritures possibles de z sous la forme $\sum_{j\in J}x_j\otimes y_j$. Ceci munit $B_1\otimes_L B_2$ d'une semi-valuation, et on note $B_1\widehat{\otimes}_L B_2$ le séparé complété de $B_1\otimes_L B_2$ pour cette semi-valuation. C'est le *produit tensoriel complété* de B_1 et B_2.

Proposition 1.11. — *Si I est un ensemble et B est un L-banach, alors $\ell^0_\infty(I,L)\widehat{\otimes}_L B$ est isométrique à $\ell^0_\infty(I,B)$.*

Démonstration. — L'espace $\ell^0_\infty(I,L)\otimes_L B$ est le sous-espace de $\ell^0_\infty(I,B)$ des suites $(a_i)_{i\in I}$ telles que le sous-L-espace vectoriel de B engendré par les a_i, $i\in I$, soit de dimension finie. Il contient en particulier l'espace des suites $(a_i)_{i\in I}$ d'éléments de B, avec $a_i=0$ en dehors d'un sous-ensemble fini de I. Comme cet dernier espace est dense dans $\ell^0_\infty(I,B)$, il suffit de vérifier que la valuation v définie ci-dessus sur $\ell^0_\infty(I,L)\otimes_L B$ est celle induite par l'inclusion de $\ell^0_\infty(I,L)\otimes_L B$ dans $\ell^0_\infty(I,B)$.

Soit donc $z=\sum_{j\in J}x_j\otimes y_j\in\ell^0_\infty(I,L)\otimes_L B$. On peut écrire x_j, de manière unique, sous la forme $x_j=\sum_{i\in I}a_{i,j}\delta_i$, avec $a_{i,j}\in L$, tendant vers 0 quand i tend vers l'infini. On a alors

$$\inf_{j\in J}(v_{\ell_\infty}(x_j)+v_B(y_j))=\inf_{j\in J,\,i\in I}(v_p(a_{i,j})+v_B(y_j))\leqslant\inf_{i\in I}v_B\big(\sum_{j\in J}a_{i,j}y_j\big)=v_{\ell_\infty(I,B)}(z).$$

Ceci étant vrai pour toute écriture de z sous la forme $z=\sum_{j\in J}x_j\otimes y_j$, on en déduit l'inégalité $v(z)\leqslant v_{\ell_\infty(I,B)}(z)$.

Pour montrer l'inégalité inverse, partons d'une écriture de z sous la forme $z=\sum_{j\in J}x_j\otimes y_j$, et choisissons une base e_r, $r\in R$, du sous-L-espace vectoriel (de dimension finie) de B engendré par les y_j, $j\in J$. Écrivons aussi, comme ci-dessus, x_j sous la forme $x_j=\sum_{i\in I}a_{i,j}\delta_i$, avec $a_{i,j}\in L$, tendant vers 0 quand i tend vers l'infini. Soient $b_{i,r}$, $r\in R$, les coordonnées de $z_i=\sum_{j\in J}a_{i,j}y_j$ dans la base des e_r, $r\in R$. Il existe $I_0\subset I$ fini, tel que $v_B(b_{i,r}e_r)>v(z)$ si $i\notin I_0$. Soit alors $a_r=\sum_{i\in I-I_0}b_{i,r}e_r\in\ell^0_\infty(I,L)$. On peut écrire z sous la forme

$$z=\sum_{r\in R}a_r\otimes e_r+\sum_{i\in I_0}\delta_i\otimes z_i.$$

On a donc

$$v(z)\geqslant\min\big(\inf_{r\in R}v_{\ell_\infty}(a_r)+v_B(e_r),\inf_{i\in I_0}v_B(z_i)\big)\geqslant\min\big(\inf_{r\in R}v_{\ell_\infty}(a_r)+v_B(e_r),v_{\ell_\infty(I,B)}(z)\big),$$

et comme $v_{\ell_\infty}(a_r)+v_B(e_r)>v(z)$ par construction, on en déduit l'inégalité $v(z)\geqslant v_{\ell_\infty(I,B)}(z)$ que l'on cherchait à établir. Ceci permet de conclure.

Corollaire 1.12. — *Si B est un L-banach, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B, et si K est un sous-corps complet de $\mathbf{C}_p$ contenant L, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale du K-banach $K\widehat{\otimes}_L B$.*

Exercice 3. — Montrer que, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de B_1, et si $(f_j)_{j\in J}$ est une base orthonormale de B_2, alors $(e_i\otimes f_f)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base orthonormale de $B_1\widehat{\otimes}_L B_2$.

Exercice 4. — (i) Soit X un ensemble compact, et soit B un L-banach. Montrer que, si $\phi : X \to B$ est continue, alors $v_{\mathscr{C}^0}(\phi) = \inf_{x\in X} v_B(\phi(x))$ est fini.

(ii) Montrer que $v_{\mathscr{C}^0}$ est une valuation sur l'espace $\mathscr{C}^0(X, B)$ des applications continues de X dans B, et que $\mathscr{C}^0(X, B)$, muni de cette valuation, est un L-banach.

(iii) Montrer que $\mathscr{C}^0(X, B) = \mathscr{C}^0(X, L)\widehat{\otimes}_L B$.

(iv) Montrer que, si X et Y sont deux compacts, alors $\mathscr{C}^0(X \times Y, L) = \mathscr{C}^0(X, L)\widehat{\otimes}_L \mathscr{C}(Y, L)$.

2. Fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$

Soit $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans L. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ est bornée. Ceci permet de munir $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ de la valuation $v_{\mathscr{C}^0}$ définie par $v_{\mathscr{C}^0}(\phi) = \inf_{x\in\mathbf{Z}_p} v_p(\phi(x))$, ce qui en fait un L-banach.

Exercice 5. — (i) Soient ϕ_1, ϕ_2 deux fonctions continues de $\mathbf{Z}_p$ dans L. Montrer que, si $\phi_1(n) = \phi_2(n)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, alors $\phi_1 = \phi_2$.

(ii) Même question en remplaçant $\mathbf{N}$ par $\{an + b,\ n \in \mathbf{N}\}$, avec $(a, p) = 1$.

Exercice 6. — (i) Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $\Gamma : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ vérifiant $\Gamma(n) = (n-1)!$ si $n \in \mathbf{N}$.

(ii) On suppose dorénavent $p \neq 2$. Si $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, posons

$$\Gamma^*(n) = \prod_{j<n,\ \text{p.g.c.d.}(j,p)=1} j.$$

Montrer que le théorème de Wilson peut se généraliser en la formule $\frac{\Gamma^*(n+p^k)}{\Gamma^*(n)} \equiv -1\ [p^k]$.

(iii) Montrer qu'il existe une et une seule fonction continue $\Gamma_p : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ vérifiant $\Gamma_p(n) = (-1)^n\Gamma^*(n)$ si $n \in \mathbf{N} - \{0\}$.

(iv) (a) Montrer que l'on a $\frac{\Gamma_p(x+1)}{\Gamma_p(x)} = \begin{cases} -x & \text{si } x \in \mathbf{Z}_p^*, \\ -1 & \text{si } x \in p\mathbf{Z}_p, \end{cases}$ et $\Gamma_p(0) = 1$.

(b) Si $x \in \mathbf{Z}_p$, soit $\text{sign}(x) = (-1)^{x_0}$, où $x_0 \in \{1, \dots, p\}$ est défini par le fait que $x - x_0 \in p\mathbf{Z}_p$. Montrer que la fonction sign est continue sur $\mathbf{Z}_p$ et que l'on a $\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = \text{sign}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$.

2.1. Décomposition en ondelettes des fonctions continues

Si $h \in \mathbf{N}$, on note $\text{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}_p$ dans L dont la restriction à $a+p^h\mathbf{Z}_p$ est constante, quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. On note $\text{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, c'est la limite inductive (i.e. la réunion croissante) des $\text{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, pour $h \in \mathbf{N}$.

Lemme 2.1. — $\text{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ *est dense dans* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.

Démonstration. — $\mathbf{Z}_p$ étant compact, une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ est uniformément continue. Autrement dit, si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ et $C \geqslant 0$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que, si $v_p(x-y) \geqslant m$, alors $v_p(\phi(x)-\phi(y)) \geqslant C$. Soit ϕ_m la fonction localement constante définie par $\phi_m(x) = \sum_{i=0}^{p^m-1} \phi(i)\mathbf{1}_{i+p^m\mathbf{Z}_p}$. Si $x \in \mathbf{Z}_p$, il existe $i \in \{0, \dots, p^m-1\}$ tel que $x \in i+p^m\mathbf{Z}_p$ et $v_p(\phi(x)-\phi_m(x)) = v_p(\phi(x)-\phi(i)) \geqslant C$ par construction de m ; on a donc $v_{\mathscr{C}^0}(\phi - \phi_m) \geqslant C$, ce qui permet de conclure.

Si $i \in \mathbf{N}$, on note $\ell(i)$ le plus petit entier n vérifiant $p^n > i$. On a donc $\ell(0) = 0$ et $\ell(i) = \left[\frac{\log i}{\log p}\right] + 1$, si $i \geqslant 1$.

Proposition 2.2. — (i) *Les* $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, *pour* $0 \leqslant i \leqslant p^h - 1$, *forment une base de* $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

(ii) *Les* $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, *pour* $i \in \mathbf{N}$, *forment une base de* $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$.

(iii) *Les* $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, *pour* $i \in \mathbf{N}$, *forment une base orthonormale de* $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.

Démonstration. — Par définition, les $\mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}$, pour $0 \leqslant i \leqslant p^h - 1$, forment une base de $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$. Comme

$$\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p} = \sum_{j=0}^{p^{h-\ell(i)}-1} \mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}j+p^h\mathbf{Z}_p}, \quad \text{si } i \leqslant p^h - 1,$$

la matrice permettant de passer des $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$ aux $\mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}$, pour $0 \leqslant i \leqslant p^h - 1$, est triangulaire, à coefficients entiers, avec des 1 sur la diagonale. On en déduit les (i) et (ii).

Passons à la démonstration du (iii). Soit $a = (a_i)_{i\in\mathbf{N}} \in \ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$. Comme $v_{\mathscr{C}^0}(\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}) = 0$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$ converge dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, et la somme ϕ_a vérifie $v_{\mathscr{C}^0}(\phi_a) \geqslant v_{\ell_\infty}(a)$. Soit $h \in \mathbf{N}$ tel que $v_p(a_i) > v_{\ell_\infty}(a)$ quel que soit $i \geqslant p^h$ (un tel h existe dès que $a \neq 0$ par définition de $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$). Soit $\phi_{a,h} = \sum_{i=0}^{p^h-1} a_i\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$. Par construction, on a $v_{\mathscr{C}^0}(\phi_a - \phi_{a,h}) > v_{\ell_\infty}(a)$. Le même argument que ci-dessus montre que la matrice de passage des a_i aux $\phi_{a,h}(i)$, pour $0 \leqslant i \leqslant p^h - 1$, est triangulaire, à coefficients entiers, avec des 1 sur la diagonale. Il existe donc $i \leqslant p^h - 1$ tel que $v_p(\phi_{a,h}(i)) \leqslant \inf_{0\leqslant i\leqslant p^h-1} v_p(a_i) = v_{\ell_\infty}(a)$. Comme $v_p(\phi_a(i) - \phi_{a,h}(i)) \geqslant v_{\mathscr{C}^0}(\phi_a - \phi_{a,h}) > v_{\ell_\infty}(a)$, on en déduit les inégalités $v_{\mathscr{C}^0}(\phi_a) \leqslant v_p(\phi_a(i)) \leqslant v_{\ell_\infty}(a)$, et donc $v_{\mathscr{C}^0}(\phi_a) = v_{\ell_\infty}(a)$.

On a donc démontré que $a \mapsto \phi_a$ induit une isométrie de $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$ sur l'adhérence dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ du sous-espace engendré par les $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, pour $i \in \mathbf{N}$. Comme ce dernier espace n'est autre que $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$, le lemme 2.1 permet de conclure.

Définition 2.3. — On appelle *base d'ondelettes* la base orthonormale de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ constituées des $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, pour $i \in \mathbf{N}$. Si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, et $\phi = \sum_{i\in\mathbf{N}} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$ est la décomposition de ϕ en ondelettes, les $b_i(\phi)$, $i \in \mathbf{N}$, sont les *coefficients d'amplitude* de ϕ.

2.2. Polynômes binomiaux et fonctions puissances. — Si $n \in \mathbf{N}$, soit $\binom{x}{n}$ le polynôme défini par

$$\binom{x}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Proposition 2.4. — *Si* $n \in \mathbf{N}$, *alors* $v_{\mathscr{C}^0}\big(\binom{x}{n}\big) = 0$.

Démonstration. — On a $\binom{n}{n} = 1$ et donc $v_{\mathscr{C}^0}\big(\binom{x}{n}\big) \leqslant 0$. D'autre part, si $k \in \mathbf{N}$, $\binom{n+k}{n}$ est le nombre de manière de choisir n objets parmi $n + k$ et est donc entier. On en déduit le fait que $v_p\big(\binom{n+k}{n}\big) \geqslant 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$, et comme $n + \mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$, cela implique que $v_p\big(\binom{x}{n}\big) \geqslant 0$ quel que soit $x \in \mathbf{Z}_p$, ce qui permet de conclure.

Si $z \in L$ vérifie $v_p(z-1) > 0$, la série $\phi_z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{x}{n}(z-1)^n$ converge normalement d'après la proposition 2.4 et définit donc une fonction continue $\phi_z(x)$ de $x \in \mathbf{Z}_p$. D'autre part, si $k \in \mathbf{N}$, on a $\phi_z(k) = z^k$, ce qui nous permet de noter de manière plus parlante $x \mapsto z^x$ la fonction $x \mapsto \phi_z(x)$.

Exercice 7. — (i) Montrer que, si $z \in L$ vérifie $v_p(z-1) > 0$, alors $z^{x+y} = z^x z^y$ quels que soient $x, y \in \mathbf{Z}_p$.

(ii) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} \left(\frac{7}{9}\right)^n$ converge dans $\mathbf{R}$ vers $\frac{4}{3}$ et dans $\mathbf{Q}_7$ vers $-\frac{4}{3}$.

Un cas particulièrement utile est celui où z est une racine de l'unité d'ordre une puissance p. Si $z^{p^n} = 1$, on a $z^{x+p^n k} = z^x$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et donc $z^x = z^y$ si $y \in x + p^n \mathbf{Z}_p$, ce qui fait que la fonction z^x est localement constante.

Proposition 2.5. — (i) *Si L contient $\boldsymbol{\mu}_{p^h}$, les ζ^x, pour $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^h}$, forment une base de* $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

(ii) *Si L contient $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, les ζ^x, pour $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}$, forment une base de* $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$.

Démonstration. — On a
$$\sum_{\zeta^{p^h}=1} \zeta^x = \begin{cases} p^h & \text{si } x \in p^h \mathbf{Z}_p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
et la fonction caractéristique de $a + p^h \mathbf{Z}_p$ est donc $\frac{1}{p^h} \sum_{\zeta^{p^h}=1} \zeta^{x-a}$. Ceci montre que les ζ^x, pour $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^h}$, engendrent $\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et comme il y en a le bon nombre, cela permet de conclure.

Si $i \in \mathbf{N}$, et si $j \in \mathbf{N}$, posons
$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \zeta^{-i} (\zeta - 1)^j.$$

Lemme 2.6. — *On a*
$$\begin{cases} \alpha_{i,j} = 0 & \textit{si } j < i, \\ \alpha_{i,j} = 1 & \textit{si } i = j, \\ v_p(\alpha_{i,j}) \geqslant \left[\frac{j - p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)} - p^{\ell(i)-1}}\right] & \textit{si } j \geqslant i. \end{cases}$$

Démonstration. — Si $j < i$, on a $\zeta^{-i}(\zeta-1)^j = \sum_{k=-i}^{-(i-j)} \binom{j}{k} \zeta^k$, et comme $i < p^{\ell(i)}$, la condition $-i \leqslant k \leqslant -(i-j)$ implique que k n'est pas un multiple de $p^{\ell(i)}$. En sommant sur $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}$, on obtient 0 comme annoncé.

Si $j = i$, le même raisonnement montre que seul $k = 0$ va contribuer, et donc $\alpha_{i,j} = 1$.

Passons au cas $j > i$. Comme $\alpha_{0,j} = 0$, si $j \geqslant 1$, on peut se contenter de traiter le cas $i \geqslant 1$. Notons, comme d'habitude, ζ_{p^n} une racine primitive p^n-ième de l'unité, et F_n le corps $\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$. Ceci permet de réécrire $\alpha_{i,j}$ sous la forme
$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{n=1}^{\ell(i)} \mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p} \big(\zeta_{p^n}^{-i} (\zeta_{p^n} - 1)^j \big).$$
Comme $v_p(\mathrm{Tr}_{F_n/\mathbf{Q}_p}(x)) \geqslant n + \left[v_p(x) - \frac{1}{p-1}\right]$, et comme $v_p(\zeta_{p^n} - 1) = \frac{1}{p^n - p^{n-1}}$, on obtient
$$v_p(\alpha_{i,j}) \geqslant \inf_{1 \leqslant n \leqslant \ell(i)} \left(n - \ell(i) + \left[\frac{j}{p^n - p^{n-1}} - \frac{1}{p-1}\right] \right) = \left[\frac{j - p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)} - p^{\ell(i)-1}}\right],$$

car la condition $j > i \geqslant p^{\ell(i)-1}$ fait que le minimum ci-dessus est atteint pour $n = \ell(i)$. Ceci permet de conclure.

2.3. Coefficients de Mahler des fonctions continues. — On définit *la k-ième dérivée discrète* $\phi^{[k]}$ d'une fonction ϕ par récurrence à partir des formules

$$\phi^{[0]} = \phi \quad \text{et} \quad \phi^{[k+1]}(x) = \phi^{[k]}(x+1) - \phi^{[k]}(x),$$

et, si $n \in \mathbf{N}$, on définit le n-ième *coefficient de Mahler* $a_n(\phi)$ de ϕ, par la formule $a_n(\phi) = \phi^{[n]}(0)$. On a aussi

$$\phi^{[k]}(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \phi(x+k-i) \quad \text{et} \quad a_n(\phi) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \phi(n-i).$$

Lemme 2.7. — *Si P_n désigne le polynôme binomial $\binom{x}{n}$, alors*
(i) $P_n^{[k]} = P_{n-k}$ *si* $k \leqslant n$, *et* $P_n^{[k]} = 0$ *si* $k > n$ *;*
(ii) $a_k(P_n) = 0$ *si* $k \neq n$, *et* $a_k(P_n) = 1$ *si* $k = n$.

Démonstration. — C'est une récurrence immédiate à partir de la formule $\binom{x+1}{n+1} - \binom{x}{n+1} = \binom{x}{n}$.

Théorème 2.8 **(Mahler)**. — (i) *Si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, alors*
(a) $\lim_{n\to+\infty} a_n(\phi) = 0$,
(b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\phi)\binom{x}{n} = \phi(x)$ *quel que soit* $x \in \mathbf{Z}_p$.
(ii) *L'application $\phi \mapsto a(\phi) = (a_n(\phi))_{n\in\mathbf{N}}$ est une isométrie de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$.*

Corollaire 2.9. — *Les $\binom{x}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base orthonormale de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Le corollaire est immédiat. Passons à la démonstration du théorème.

• La formule définissant $a_n(\phi)$ montre que $v_p(a_n(\phi)) \geqslant v_{\mathscr{C}^0}(\phi)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. L'application $\phi \mapsto a(\phi)$ est donc une application continue de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\ell_\infty(\mathbf{N}, L)$, et on a $v_{\ell_\infty}(a(\phi)) \geqslant v_{\mathscr{C}^0}(\phi)$.

• Le sous-espace B de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ des ϕ tels que $a(\phi) \in \ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$ est fermé dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ puisque $\ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$ est fermé dans $\ell_\infty(\mathbf{N}, L)$.

• Si $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^0_\infty(\mathbf{N}, L)$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\binom{x}{n}$ converge normalement dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$ en vertu de la proposition 2.4, et la somme ϕ_a de cette série vérifie $v_{\mathscr{C}^0}(\phi_a) \geqslant v_{\ell_\infty}(a)$. D'autre part, le lemme 2.7 nous fournit la formule $\phi_a^{[k]}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k}\binom{x}{n}$ et donc $a(\phi_a) = a$.

• L'application $\phi \mapsto a(\phi)$ est injective car « $a(\phi) = 0$ » implique « $\phi(k) = 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ », et $\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$.

Maintenant, si $\phi \in B$, on a $\phi - \phi_{a(\phi)} = 0$ puisque $a(\phi - \phi_{a(\phi)}) = 0$ et a est injective. Donc $\phi \in B$ implique que ϕ satisfait le b) de la propriété (i) du théorème. De plus, on a

$$v_{\ell_\infty}(a(\phi)) \geqslant v_{\mathscr{C}^0}(\phi) = v_{\mathscr{C}^0}(\phi_{a(\phi)}) \geqslant v_{\ell_\infty}(a(\phi)),$$

ce qui montre que ϕ satisfait aussi la propriété (ii) du théorème. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver le a) du (i) ou, autrement dit, $B = \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.

On déduit de l'identité

$$\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x) = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \zeta^{x-i} = \frac{1}{p^{\ell(i)}} \sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}} \sum_{j=0}^{+\infty} \zeta^{-i}(\zeta-1)^j \binom{x}{j},$$

la formule $a_n(\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}) = \alpha_{i,n}$. Comme $v_p(\alpha_{i,n})$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (lemme 2.6), cela prouve que B contient les $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, et donc aussi $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$. Comme B est fermé et $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ est dense dans $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, cela permet de conclure.

Exercice 8. — (i) Montrer que, si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $v_{\mathscr{C}^0}(\phi^{[p^k]}) \geqslant v_{\mathscr{C}^0}(\phi)+1$.
(ii) En déduire une autre démonstration de l'égalité $B = \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$.

Exercice 9. — Montrer que les $\binom{x}{n} \cdot \binom{y}{m}$, pour $n, m \in \mathbf{N}$, forment une base orthonormale de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p, L)$. (On pourra utiliser les résultats de l'exercice 4.)

3. Fonctions localement analytiques

3.1. Fonctions analytiques sur un disque fermé. — Si $a \in L$, et $r \in \mathbf{R}$, soit $D(a,r)$ le disque fermé $\{x \in \mathbf{C}_p,\ v_p(x-a) \geqslant r\}$. Une fonction $\phi : D(a,r) \to \mathbf{C}_p$ est *L-analytique* s'il existe une suite $a_k(\phi, a)$, $k \in \mathbf{N}$, d'éléments de L, telle que $v_p(a_k(\phi,a)) + kr$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, et $\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\phi,a)(x-a)^k$ quel que soit $x \in D(a,r)$. On note $\mathrm{A}(D(a,r),L)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $D(a,r)$, et on munit $\mathrm{A}(D(a,r),L)$ de la valuation $v_{D(a,r)}$ définie par
$$v_{D(a,r)}(\phi) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi,a)) + kr,$$
qui en fait un L-banach.

Remarque 3.1. — Les $\mathbf{1}_{D(a,r)} \frac{(x-a)^k}{p^{[kr]}}$, pour $k \in \mathbf{N}$, forment une base de Banach de $\mathrm{A}(D(a,r),L)$, et même une base orthonormale si $r \in \mathbf{Z}$. On en déduit le fait que, si K est un sous-corps complet de L contenant a, alors
$$\mathrm{A}(D(a,r),L) = L\widehat{\otimes}_K \mathrm{A}(D(a,r),K).$$

Proposition 3.2. — *Si $\phi_1 \in \mathrm{A}(D(a,r),L)$, et si $\phi_2 \in \mathrm{A}(D(a,r),L)$, alors $\phi_1\phi_2 \in \mathrm{A}(D(a,r),L)$ et $v_{D(a,r)}(\phi_1\phi_2) = v_{D(a,r)}(\phi_1) + v_{D(a,r)}(\phi_2)$.*

Démonstration. — Soit $a_k = a_k(\phi_1, a)$ et $b_k = a_k(\phi_2, a)$. Si $k \in \mathbf{N}$, soit $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$. On a
$$\begin{aligned} v_p(c_k) + kr &\geqslant \inf_{0\leqslant i\leqslant k} \big((v_p(a_i) + ir) + (v_p(b_{k-i}) + (k-i)r)\big) \\ &\geqslant \inf(v_{D(a,r)}(\phi_1) + \inf_{j\geqslant k/2}(v_p(b_j) + jr), v_{D(a,r)}(\phi_2) + \inf_{i\geqslant k/2}(v_p(a_i) + ir), \end{aligned}$$
ce qui prouve que $v_p(c_k) + kr$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, que $\phi_1\phi_2 \in \mathrm{A}(D(a,r),L)$, et que $v_{D(a,r)}(\phi_1\phi_2) \geqslant v_{D(a,r)}(\phi_1) + v_{D(a,r)}(\phi_2)$.

Maintenant, soit i_0 (resp. j_0) le plus petit entier i (resp. j) tel que $v_p(a_i) + ir = v_{D(a,r)}(\phi_1)$ (resp. $v_p(b_j)+jr = v_{D(a,r)}(\phi_2)$). Si $k_0 = i_0+j_0$, alors $v_p(a_ib_{k_0-i})+k_0r > v_{D(a,r)}(\phi_1)+v_{D(a,r)}(\phi_2)$ si $i \neq i_0$, et donc $v_p(c_{k_0})+k_0r = v_p(a_{i_0}b_{j_0})+k_0r = v_{D(a,r)}(\phi_1)+v_{D(a,r)}(\phi_2)$. On en déduit l'inégalité $v_{D(a,r)}(\phi_1\phi_2) \leqslant v_{D(a,r)}(\phi_1) + v_{D(a,r)}(\phi_2)$, ce qui permet de conclure.

Proposition 3.3. — *Si $\phi \in \mathrm{A}(D(a,r),L)$, alors*
$$v_{D(a,r)}(\phi) = \inf_{x\in D(a,r)} v_p(\phi(x)).$$

Démonstration. — Commençons par supposer $a = 0$ et $r = 0$. On a alors $\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, avec $v_p(a_k) \to +\infty$ quand $k \to +\infty$. L'inégalité $\inf_{x\in D(a,r)} v_p(\phi(x)) \geqslant \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) = v_{D(0,0)}(\phi)$ est immédiate.

Pour démontrer l'inégalité $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) \geqslant \inf_{x\in D(a,r)} v_p(\phi(x))$, commençons par remarquer que $v_p(a_k)$ atteint son minimum pour un certain $k_0 \in \mathbf{N}$. En divisant tout par a_{k_0}, on se ramène au cas où $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) = 0$. Soit alors $\overline{\phi}$ la réduction de ϕ modulo $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$. Ceci fait de $\overline{\phi}$ un élément non nul de $\overline{\mathbf{F}}_p[x]$, et, si $a \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ ne se réduit pas en un zéro de $\overline{\phi}$ modulo $\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$, on a $\overline{\phi(x)} \neq 0$, ou encore $v_p(\phi(x)) = 0$. On en déduit l'égalité $\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) = \inf_{x\in D(a,r)} v_p(\phi(x))$.

Maintenant, s'il existe $c \in \mathbf{C}_p$ tel que $v_p(c) = r$, on peut appliquer ce qui précède à $g \in \mathrm{A}(D(0,0), L)$ définie par $g(x) = \phi(cx + a)$, et dans le cas général, on écrit $D(a,r)$ comme la réunion croissante de $D(a, r_n)$, avec $r_n \in v_p(\mathbf{C}_p)$ tendant vers r en décroissant, pour conclure.

3.2. Fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$. — Si $h \in \mathbf{N}$, soit $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ dont la restriction à $a + p^h\mathbf{Z}_p$ est la restriction d'une fonction L-analytique $\phi_{a,h}$ sur $D(a,h)$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. On munit $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$ de la valuation v_{LA_h} définie par

$$v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{a\in\mathbf{Z}_p} v_{D(a,h)}(\phi_{a,h}),$$

qui en fait un L-banach. D'après la proposition 3.3, si S contient un système de représentants de $\mathbf{Z}_p/p^h\mathbf{Z}_p$, on a aussi $v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{a\in S} v_{D(a,h)}(\phi_{a,h})$.

Soit $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, c'est la limite inductive des $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, $h \in \mathbf{N}$, et on le munit de la topologie de la limite inductive.

Remarque 3.4. — En revenant à la définition de $v_{D(a,h)}$, on peut aussi donner la description suivante de v_{LA_h} : si $a \in \mathbf{Z}_p$, il existe une suite $a_k(\phi, a)$, $k \in \mathbf{N}$, d'éléments de L, telle que l'on ait $\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\phi,a)\big(\frac{x-a}{p^h}\big)^k$, quel que soit $x \in a + p^h\mathbf{Z}_p$. On a alors $v_{D(a,h)}(\phi_{a,h}) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi,a))$, et donc

$$v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{a\in S}\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi,a)),$$

si $S \subset \mathbf{Z}_p$ contient un système de représentants de $\mathbf{Z}_p/p^h\mathbf{Z}_p$.

On peut écrire tout entier n de manière unique sous la forme $n = mp^h - i$ avec $1 \leqslant i \leqslant p^h$. Soit alors $e_{h,n}(x)$ la fonction $\mathbf{1}_{-i+p^h\mathbf{Z}_p}(x)(\frac{x+i}{p^h})^{m-1}$

Lemme 3.5. — *Les $e_{h,n}$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base orthonormale de* $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la description de la valuation v_{LA_h} donnée dans la rem. 3.4, et d'utiliser le fait que $\{-i,\ 1 \leqslant i \leqslant p^h\}$ est un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo $p^h\mathbf{Z}_p$.

Corollaire 3.6. — *On a* $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L) = L\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, \mathbf{Q}_p)$ *quel que soit le sous-corps fermé L de $\mathbf{C}_p$.*

3.3. Coefficients de Mahler des fonctions localement analytiques. — Le résultat suivant, dû à Amice, permet de décrire les fonctions localement analytiques en termes de leurs coefficients de Mahler.

Théorème 3.7. — *Les* $[\frac{n}{p^h}]!\binom{x}{n}$ *pour* $n\in\mathbf{N}$ *forment une base orthonormale de* $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)$.

Démonstration. — Posons $g_n(x)=[\frac{n}{p^h}]!\binom{x}{n}$. Si $j\in\{1,\dots,p^h\}$, soit $g_{n,j}(x)=g_n(-j+p^hx)$. Par définition, on a

$$g_{n,j}(x)=[\frac{n}{p^h}]!\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(-j-k+p^hx).$$

Si $v_p(j+k)<h$, alors $v_p(-j-k+p^hx)=v_p(j+k)$ quel que soit $x\in\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ et si $v_p(j+k)\geqslant h$, alors $v_p(-j-k+p^hx)\geqslant h$ quel que soit $x\in\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ avec égalité si l'image de x dans $\overline{\mathbf{F}}_p$ n'appartient pas à $\mathbf{F}_p$. On en déduit la formule

$$v_{\mathrm{LA}_0}(g_{n,j})=v_p([\frac{n}{p^h}]!)-v_p(n!)+\sum_{k=0}^{n-1}\inf(v_p(j+k),h).$$

En utilisant l'identité $v_p(n!)-v_p([\frac{n}{p^h}]!)=\sum_{\ell=1}^h\big[\frac{n}{p^\ell}\big]$, et

$$\sum_{k=0}^{n-1}\inf(v_p(j+k),h)=\sum_{\ell=1}^h\big|\{0\leqslant k\leqslant n-1,\ v_p(j+k)\geqslant\ell\}\big|=\sum_{\ell=1}^h\Big([\frac{n+j-1}{p^\ell}]-[\frac{j-1}{p^\ell}]\Big),$$

on en déduit la formule

$$v_{\mathrm{LA}_0}(g_{n,j})=\sum_{\ell=1}^h\Big([\frac{n+j-1}{p^\ell}]-[\frac{j-1}{p^\ell}]-[\frac{n}{p^\ell}]\Big).$$

Comme $[x+y]\geqslant[x]+[y]$, chacun des termes de la somme est $\geqslant 0$, et donc $v_{\mathrm{LA}_0}(g_{n,j})\geqslant 0$, ce qui implique que $v_{\mathrm{LA}_h}(g_n)\geqslant 0$, puisque $v_{\mathrm{LA}_h}(g_n)=\inf_{1\leqslant j\leqslant p^h}v_{\mathrm{LA}_0}(g_{n,j})$. Pour terminer la démonstration, nous aurons besoin du lemme 3.8 ci-dessous, qui montre que la matrice exprimant les réductions $\overline{g}_n$ modulo p des g_n, $n\in\mathbf{N}$, dans la base des $\overline{e}_{h,n}$, $n\in\mathbf{N}$, est triangulaire, à coefficients diagonaux inversibles. Ceci permet d'utiliser la prop. 1.6 pour conclure, si $L=\mathbf{Q}_p$. Le cas général s'en déduit en utilisant le cor. 3.6.

Lemme 3.8. — *Soit* $n=mp^h-i$ *avec* $1\leqslant i\leqslant p^h$ *et, si* $j\in\{1,\dots,p^h\}$, *soit* $\overline{g}_{n,j}$ *la réduction de* $g_{n,j}$ *modulo* p. *Alors*

(i) $\overline{g}_{n,j}=0$ *si* $j>i$

(ii) $\deg(\overline{g}_{n,i})=m-1$

(iii) $\deg(\overline{g}_{n,j})\leqslant m-1$ *si* $j<i$.

Démonstration. — Pour démontrer le (i), constatons que, si $j>i$, alors $[\frac{n+j-1}{p^h}]-[\frac{j-1}{p^h}]-[\frac{n}{p^h}]=1$, et donc $v_{\mathrm{LA}_0}(g_{n,j})>0$, ce qui équivaut à la nullité de $\overline{g}_{n,j}$.

Pour démontrer les (ii) et (iii), développons $g_{n,j}$ sous la forme $\sum_{k=0}^n a_kx^k$. D'après la discussion précédente, on a $a_k\in\mathbf{Z}_p$. D'autre part, les zéros de $g_{n,j}$ sont les $\frac{j+k}{p^h}$ pour $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$. Le nombre de zéros de $g_{n,j}$ dans $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ est donc égal au nombre d'éléments de $\{0,1,\dots,n-1\}$ tels que $v_p(j+k)\geqslant h$; on en déduit le fait que $g_{n,j}$ a $[\frac{n+j-1}{p^h}]-[\frac{j-1}{p^h}]=m-1$ zéros dans $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$. Soient

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les zéros de $g_{n,j}$ ordonnés de telle sorte que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1} \in \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$, et $\alpha_m, \ldots, \alpha_n \notin \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$. Il existe alors $c \in \mathbf{C}_p$ tel que

$$g_{n,j} = c \prod_{\ell=1}^{m-1} (x - \alpha_\ell) \prod_{\ell=m}^{n} (1 - \alpha_\ell^{-1} x).$$

Par ailleurs, comme $v_p(\alpha_\ell^{-1}) > 0$ si $\ell \geqslant m$, on a $v_p(c) = v_p(a_{m-1}) \geqslant 0$, et $\overline{g}_{n,j} = \overline{c} \prod_{\ell=1}^{m-1}(x - \overline{\alpha}_\ell)$. On en tire le (iii), et le fait que le (ii) est équivalent à $\overline{g}_{n,i} \neq 0$, ou encore à $v_{\mathrm{LA}_0}(g_{n,i}) = 0$. Pour démontrer cette dernière identité, on utilise la formule $-[\frac{-a}{b}] = [\frac{a-1}{b}] + 1$, valable quels que soient $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N} - \{0\}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{LA}_0}(g_{n,i}) &= \sum_{\ell=1}^{h} \Big([\frac{mp^h + -1}{p^\ell}] - [\frac{i-1}{p^\ell}] - [\frac{mp^h - i}{p^\ell}] \Big) \\ &= \sum_{\ell=1}^{h} \Big((mp^{h-\ell} - 1) + (1 + [\frac{-i}{p^\ell}]) - (mp^{h-\ell} + [\frac{-i}{p^\ell}]) \Big) = 0. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Corollaire 3.9. — *Si $\phi \in \mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, L)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$;
- $\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) > 0$.

Démonstration. — Il existe h tel que $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et alors $\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) \geqslant \frac{1}{(p-1)p^h}$ d'après le théorème 3.7. Réciproquement, si $\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) > 0$, il existe $h \in \mathbf{N}$ tel que $\liminf \frac{1}{n} v_p(a_n(\phi)) > \frac{1}{(p-1)p^h}$. Alors $([\frac{n}{p^h}]!)^{-1} a_n(\phi)$ tend vers 0 et $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$.

4. Fonctions de classe $\mathscr{C}^r$

4.1. Fonctions dérivables et fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Une fonction $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ est *dérivable en* $x_0 \in \mathbf{Z}_p$, si la quantité $\frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0. La limite est alors notée $\phi'(x_0)$. Une fonction est *dérivable à l'ordre* 1 si elle est dérivable en tout $x_0 \in \mathbf{Z}_p$; une fonction dérivable à l'ordre 1 est en particulier continue. Plus généralement, on définit par récurrence sur k la notion de fonction dérivable à l'ordre k : ϕ est *dérivable à l'ordre k* si elle est dérivable à l'ordre $k-1$, et si sa dérivée $(k-1)$-ième est dérivable à l'ordre 1.

Si $r \geqslant 0$, on dit que $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ *est de classe $\mathscr{C}^r$*, s'il existe des fonctions $\phi^{(j)} : \mathbf{Z}_p \to L$, pour $0 \leqslant j \leqslant [r]$, telles que, si l'on définit $\varepsilon_{\phi,r} : \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p \to L$ et $C_{\phi,r} : \mathbf{N} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, par

$$\varepsilon_{\phi,r}(x,y) = \phi(x+y) - \sum_{j=0}^{[r]} \phi^{(j)}(x) \frac{y^j}{j!} \quad \text{et} \quad C_{\phi,r}(h) = \inf_{x \in \mathbf{Z}_p,\, y \in p^h \mathbf{Z}_p} v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y)) - rh,$$

alors $C_{\phi,r}(h)$ tend vers $+\infty$ quand h tend vers $+\infty$.

Remarque 4.1. — En prenant $y = 0$, on voit que, si $r \geqslant 0$, et si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$, alors $\phi^{(0)} = \phi$ et ϕ est continue. Dans le cas $r = 0$, on retombe donc sur la définition de fonction uniformément continue et, $\mathbf{Z}_p$ étant compact, une fonction est de classe $\mathscr{C}^0$ si et seulement si elle est continue.

On note $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des fonctions $\phi : \mathbf{Z}_p \to L$ qui sont de classe $\mathscr{C}^r$. On munit $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ de la valuation $v'_{\mathscr{C}^r}$ définie par

$$v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) = \inf\big(\inf_{0\leqslant j\leqslant[r],\ x\in\mathbf{Z}_p} v_p(\frac{\phi^{(j)}(x)}{j!}),\ \inf_{x,y\in\mathbf{Z}_p} v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y)) - rv_p(y)\big),$$

ce qui en fait un L-banach.

Exercice 10. — (i) Montrer que tout élément x de $\mathbf{Z}_p$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n a_n(x)$, avec $a_n(x) \in \{0, \dots, p-1\}$.

(ii) Soit $\phi : \mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ définie par $\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^{2n} a_n(x)$. Montrer que ϕ est dérivable, de dérivée nulle, en tout point. En déduire que ϕ est dérivable à l'ordre k pour tout k.

(iii) Montrer que ϕ n'est pas de classe $\mathscr{C}^2$.

4.2. Propriétés locales des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Le but de ce n$^{\text{o}}$ est de montrer que, si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$, alors les $\phi^{(j)}$ sont les dérivées successives de ϕ et donc que l'on retombe sur le développement limité naturel de ϕ.

Lemme 4.2. — *Soit $C(N) = \sum_{n=1}^{N} v_p(n!)$, et soit a_k, pour $0 \leqslant k \leqslant N$, une famille d'éléments de L. Alors, quel que soit $h \in \mathbf{Z}$,*

$$\inf_{0\leqslant k\leqslant N} \big(v_p(a_k) + kh\big) \geqslant \inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p} v_p\Big(\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{x^k}{k!}\Big) - C(N).$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur N, le résultat étant trivial si $N = 0$. Si $N \geqslant 1$, soient $P, Q \in L[x]$ définis par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Alors, quels que soient $x \in \mathbf{Q}_p$ et $h \in \mathbf{Z}$, on a

$$a_N = p^{-Nh} \sum_{j=0}^{N} (-1)^{N-j} \binom{N}{j} P(x + jp^h).$$

En particulier, en prenant $x \in p^h\mathbf{Z}_p$, on obtient la minoration $v_p(a_N) + Nh \geqslant \inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p} v_p(P(x))$. On en tire la minoration $v_p(Q(x)) \geqslant \inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p} v_p(P(x)) - v_p(N!)$, et l'hypothèse de récurrence implique que

$$\inf_{0\leqslant k\leqslant N-1} \big(v_p(a_k) + kh\big) \geqslant \inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p} v_p(Q(x)) - C(N-1) \geqslant \inf_{x\in p^h\mathbf{Z}_p} v_p(P(x)) - C(N),$$

ce qui permet de conclure.

Proposition 4.3. — *Si $r \geqslant 1$, et si $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, alors ϕ est dérivable en tout point. De plus,*

(a) $\phi' \in \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$ et il existe $C_0(r) \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $v'_{\mathscr{C}^{r-1}}(\phi') \geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_0(r)$ quel que soit $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.

(b) $(\phi')^{(j)} = \phi^{(j+1)}$ si $j \leqslant r - 1$.

Démonstration. — Il est clair sur la définition que $\lim_{y\to 0}\frac{\phi(x+y)-\phi(x)}{y} = \phi^{(1)}(x)$, si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$, et donc que ϕ est dérivable en tout point, de dérivée $\phi'(x)=\phi^{(1)}(x)$. Par ailleurs, en développant

$$\varepsilon_{\phi,r}(x,y+z)-\varepsilon_{\phi,r}(x+y,z) = \Big(\phi(x+y+z)-\sum_{j=0}^{[r]}\phi^{(j)}(x)\frac{(y+z)^j}{j!}\Big)-\Big(\phi(x+y+z)-\sum_{j=0}^{[r]}\phi^{(j)}(x+y)\frac{z^j}{j!}\Big),$$

on obtient, si $v_p(z)\geqslant h$ et $v_p(y)\geqslant h$, la minoration

$$v_p\Big(\sum_{j=0}^{[r]}\frac{z^j}{j!}\Big(\phi^{(j)}(x+y)-\sum_{k=0}^{[r]-j}\phi^{(j+k)}(x)\frac{y^k}{k!}\Big)\Big)\geqslant rh+C_{\phi,r}(h).$$

D'après le lemme 4.2, cela implique que, si $v_p(y)\geqslant h$, alors

$$v_p\Big(\phi^{(j)}(x+y)-\sum_{k=0}^{[r]-j}\phi^{(j+k)}(x)\frac{y^k}{k!}\Big)\geqslant (r-j)h+C_{\phi,r}(h)-C([r]).$$

On en déduit, si $0\leqslant j\leqslant [r]$, l'appartenance de $\phi^{(j)}$ à $\mathscr{C}^{r-j}(\mathbf{Z}_p,L)$, la minoration $v'_{\mathscr{C}^{r-j}}(\phi^{(j)})\geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C([r])$, et l'identité $(\phi^{(j)})^{(k)}=\phi^{(j+k)}$ si $j+k\leqslant [r]$. Ceci permet de conclure.

Remarque 4.4. — (i) Une récurrence immédiate montre, ô surprise, que $\phi^{(j)}$ est la dérivée j-ième de ϕ. De plus la minoration $v'_{\mathscr{C}^{r-j}}(\phi^{(j)})\geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C([r])-j$, obtenue au cours de la démonstration de la proposition 4.3 est meilleure que celle que l'on obtiendrait par récurrence en utilisant la prop. 4.3.

(ii) On a obtenu, au cours de la démonstration, la minoration suivante, si $j\leqslant [r]$,

$$C_{\phi^{(j)},r-j}(h)\geqslant C_{\phi,r}(h)-C([r]).$$

(iii) Nous montrerons plus loin (prop. 4.14) que $\frac{d}{dx}$ induit une surjection de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$ sur $\mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p,L)$, si $r\geqslant 1$.

Exercice 11. — Si $\phi_1:\mathbf{Z}_p\to\mathbf{Z}_p$ est de classe $\mathscr{C}^r$, et si $\phi_2:\mathbf{Z}_p\to L$ est de classe $\mathscr{C}^r$, alors $\phi_2\circ\phi_1:\mathbf{Z}_p\to L$ est de classe $\mathscr{C}^r$.

4.3. Fonctions localement analytiques et fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Il semble naturel de penser qu'une fonction localement analytique est de classe $\mathscr{C}^r$, pour tout $r>0$. La proposition suivante montre que c'est bien le cas.

Proposition 4.5. — *Si $h\in\mathbf{N}$, et si $r\geqslant 0$, alors $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)\subset\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$. De plus, si $\phi\in\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)$, alors*

$$v'_{\mathscr{C}^r}(\phi)\geqslant v_{\mathrm{LA}_h}(\phi)-rh.$$

Démonstration. — Soit $\phi\in\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p,L)$. On a $v_p(\frac{1}{j!}\phi^{(j)}(x))\geqslant v_{\mathrm{LA}_h}(\phi)-hj$ quels que soient $x\in\mathbf{Z}_p$ et $j\in\mathbf{N}$. Par ailleurs, on a

$$\varepsilon_{\phi,r}(x,y)=\begin{cases}\sum_{j>r}\frac{\phi^{(j)}(x)}{j!}y^j & \text{si } v_p(y)\geqslant h,\\ \phi(x+y)-\sum_{j=0}^{[r]}\frac{\phi^{(j)}(x)}{j!}y^j & \text{si } v_p(y)<h.\end{cases}$$

On en déduit la minoration $v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y))\geqslant v_{\mathrm{LA}_h}(\phi)+([r]+1)(v_p(y)-h)$ si $v_p(y)\geqslant h$, et comme $([r]+1)v_p(y)-rv_p(y)$ tend vers $+\infty$ quand $v_p(y)$ tend vers $+\infty$, cela montre que $\phi\in\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$.

De plus, la minoration $v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) \geqslant v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - rh$ se déduit facilement, en revenant à la définition, de la formule ci-dessus pour $\varepsilon_{\phi,r}(x,y)$ et de la minoration $v_p(\frac{1}{j!}\phi^{(j)}(x)) \geqslant v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - hj$. Ceci permet de conclure.

4.4. Coefficients d'amplitude des fonctions localement polynomiale. — Soit I une partie de $\mathbf{N}$. Si $h \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{LP}_h^I(\mathbf{Z}_p, L)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{Z}_p$ dans L dont la restriction à $a + p^h\mathbf{Z}_p$ est un polynôme de la forme $\sum_{i\in I} a_i x^i$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. On note $\mathrm{LP}^I(\mathbf{Z}_p, L)$ l'espace des fonctions localement polynomiales sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L et à degrés dans I. C'est la limite inductive des $\mathrm{LP}_h^I(\mathbf{Z}_p, L)$, pour $h \in \mathbf{N}$.

Si I est une partie de $\mathbf{R}$, on note $\mathrm{LP}_h^I(\mathbf{Z}_p, L)$ et $\mathrm{LP}^I(\mathbf{Z}_p, L)$ respectivement, les espaces $\mathrm{LP}_h^{I\cap N}(\mathbf{Z}_p, L)$ et $\mathrm{LP}^{I\cap\mathbf{N}}(\mathbf{Z}_p, L)$.

Proposition 4.6. — *Soit $r \geqslant 0$.*

(i) *Les $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p} \cdot \big(\frac{x-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k$, pour $0 \leqslant i \leqslant p^h-1$ et $0 \leqslant k \leqslant [r]$, forment une base de $\mathrm{LP}_h^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$.*

(ii) *Les $\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p} \cdot \big(\frac{x-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k$, pour $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant [r]$, forment une base de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Il suffit d'adapter les arguments de la démonstration des (i) et (ii) de la prop. 2.2.

Si $i \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$, on note $e_{i,k,r}$ l'élément de $\mathrm{LP}^{[0,r]}$ défini par

$$e_{i,k,r}(x) = p^{[\ell(i)r]}\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x) \cdot \big(\frac{x-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k.$$

Lemme 4.7. — (i) *Les $e_{i,k,r}$, pour $0 \leqslant i \leqslant p^h - 1$ et $0 \leqslant k \leqslant r$, forment une base de $\mathrm{LP}_h^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$.*

(ii) *Les $e_{i,k,r}$, pour $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant r$, forment une base de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Immédiat.

Lemme 4.8. — *Si $r \geqslant 0$ et si $k \leqslant r$, alors*

$$v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r}) = 0 \quad \text{et} \quad v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r}) \geqslant [\ell(i)r] - r\ell(i) + r - k \geqslant -1, \ \textit{si } i \geqslant 1.$$

Démonstration. — Le cas $i = 0$ est immédiat. Supposons donc $i \geqslant 1$ (et donc $\ell(i) \geqslant 1$), et notons ϕ la fonction $e_{i,k,r}$.

- Si $j \leqslant r$, et si $x \in \mathbf{Z}_p$, alors $v_p\big(\frac{\phi^{(j)}(x)}{j!}\big) \geqslant [\ell(i)r] - j\ell(i) \geqslant [\ell(i)r] - k\ell(i) \geqslant [\ell(i)r] - r\ell(i) + r - k$.
- On a $\varepsilon_{\phi,r}(x,y) = p^{[\ell(i)r]}\big(\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x+y) - \mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x)\big)\big(\frac{x+y-i}{p^{\ell(i)}}\big)^k$. En particulier, $\varepsilon_{\phi,r}(x,y) = 0$, si $v_p(y) \geqslant \ell(i)$ ou si ni x, ni $x + y$ n'appartiennent à $i + p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p$.

– Dans le cas $v_p(y) \leqslant \ell(i) - 1$ et $x + y \in i + p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p$, on a

$$v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y)) - rv_p(y) \geqslant [\ell(i)r] - r(\ell(i) - 1) \geqslant [\ell(i)r] - r\ell(i) + r - k.$$

– Dans le cas $v_p(y) \leqslant \ell(i) - 1$ et $x \in i + p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p$, on a

$$v_p(\varepsilon_{\phi,r}(x,y)) - rv_p(y) = [\ell(i)r] + k(v_p(y) - \ell(i)) - rv_p(y) \geqslant [\ell(i)r] - r\ell(i) + r - k.$$

Ceci permet, en revenant à la définition de $v'_{\mathscr{C}^r}$, de conclure.

Lemme 4.9. — *Si $r \geqslant 0$, si $h \in \mathbf{N}$, et si $b_i \in L$, pour $i \leqslant p^h - 1$, alors*

$$v'_{\mathscr{C}^r}\Big(\sum_{i \leqslant p^h-1} b_i e_{i,0,r}\Big) - r \leqslant \inf_{i \leqslant p^h-1} v_p(b_i).$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur h, le cas $h = 0$ étant trivial. Soit $\phi = \sum_{i \leqslant p^h-1} b_i e_{i,0,r}$. Comme les $e_{i,0,r}$ sont localement constantes et donc de dérivées nulles, on a $\varepsilon_{\phi,r}(x, y) = \phi(x + y) - \phi(x)$. En particulier, en tenant compte du fait que $e_{i,0,r}$ est constante modulo $p^{h-1}\mathbf{Z}_p$, si $i < p^{h-1}$, on obtient

$$\varepsilon_{\phi,r}(i, p^{h-1}) = \begin{cases} p^{[hr]} b_{i+p^{h-1}} & \text{si } 0 \leqslant i \leqslant p^{h-1} - 1, \\ p^{[hr]}(b_{i+p^{h-1}} - b_i) & \text{si } p^{h-1} \leqslant i \leqslant p^h - 1. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\inf_{p^{h-1} \leqslant i \leqslant p^h-1} v_p(b_i) = -[hr] + \inf_{0 \leqslant i \leqslant p^h - p^{h-1}-1} v_p(\varepsilon_{\phi,r}(i, p^{h-1})) \geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) + (h-1)r - [hr].$$

En particulier, $\inf_{p^{h-1} \leqslant i \leqslant p^h-1} v_p(b_i) \geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - r$. De plus, comme $v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,0,r}) \geqslant [hr] - hr + r$, et comme $\sum_{i \leqslant p^{h-1}-1} b_i e_{i,0,r} = \phi - \sum_{p^{h-1} \leqslant i \leqslant p^{h-1}-1} b_i e_{i,0,r}$, on a

$$v'_{\mathscr{C}^r}\Big(\sum_{i \leqslant p^{h-1}-1} b_i e_{i,0,r}\Big) \geqslant \inf\big(v'_{\mathscr{C}^r}(\phi), \inf_{p^{h-1} \leqslant i \leqslant p^h-1} v_p(b_i) + v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,0,r})\big) = v'_{\mathscr{C}^r}(\phi),$$

ce qui permet de conclure, en utilisant l'hypothèse de récurrence pour $h - 1$.

Si $\phi \in \mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$, on note $b_{i,k}(\phi)$, pour $i \in \mathbf{N}$ et $0 \leqslant k \leqslant r$, les *coefficients d'amplitude* de ϕ, i.e. les coefficients de ϕ dans la base des $e_{i,k,r}$.

Proposition 4.10. — *Si $r \geqslant 0$, il existe $C'_0(r)$ tel que, quel que soit $\phi \in \mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$, on ait*

$$\inf_{i \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant k \leqslant r} v_p(b_{i,k}(\phi)) \geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C'_0(r).$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur $[r]$. En dérivant, cela permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour minorer $\inf_{i \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant k \leqslant r} v_p(b_{i,k}(\phi))$ sous la forme souhaitée (en utilisant le (i) de la prop. 4.3 pour minorer $v'_{\mathscr{C}^{r-1}}(\phi')$ en fonction de $v'_{\mathscr{C}^r}(\phi)$). On minore les valuations des coefficients restants en considérant $\phi_1 = \phi - \sum_{i \in \mathbf{N},\, k \geqslant 1} b_{i,k}(\phi) e_{i,k,r}$, et en utilisant le lemme 4.9 et la minoration $v'_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r}) \geqslant -1$ pour minorer $v'_{\mathscr{C}^r}(\phi_1)$.

4.5. Décomposition en vaguelettes des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Le but de ce n° est d'exhiber une base de Banach agréable de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et ce, dans le but de démontrer (prop. 4.14) la surjectivité de $\frac{d}{dx} : \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$ annoncée dans la rem. 4.4.

Proposition 4.11. — *Soit $r \geqslant 0$. Si $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et $h \in \mathbf{N}$, soit ϕ_h l'élément de $\mathrm{LP}_h^{[0,r]}$ défini par*

$$\phi_h(x) = \sum_{i=0}^{p^h-1} \mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p}(x)\Big(\sum_{k=0}^{[r]} \frac{\phi^{(k)}(i)}{k!}(x-i)^k\Big).$$

Alors

(i) $v_{\mathrm{LA}_{h+1}}(\phi_{h+1} - \phi_h) \geqslant rh + C_{\phi,r}(h) - C([r])$.

(ii) *ϕ_h tend vers ϕ dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ quand h tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Il résulte du (i), de la prop. 4.5, et de ce que $C_{\phi,r}(h)$ tend vers $+\infty$, que ϕ_h a une limite dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. Comme par ailleurs, $\phi_h(i) = \phi(i)$ si $i \in \mathbf{N}$ et $p^h - 1 \geqslant i$, cette limite coïncide avec ϕ sur $\mathbf{N}$, et donc partout par continuité. Il suffit donc de prouver le (i). On a

$$\phi_{h+1}(x) - \phi_h(x) = \sum_{i=0}^{p^h-1} \sum_{a=0}^{p-1} \mathbf{1}_{i+ap^h+p^{h+1}\mathbf{Z}_p} \sum_{k=0}^{[r]} \Big(\phi^{(k)}(i+ap^h)\frac{(x-i-ap^h)^k}{k!} - \phi^{(k)}(i)\frac{(x-i)^k}{k!}\Big).$$

Or un petit calcul montre que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[r]} \Big(\phi^{(k)}(i+ap^h)&\frac{(x-i-ap^h)^k}{k!} - \phi^{(k)}(i)\frac{(x-i)^k}{k!}\Big)\\ &= \sum_{j=0}^{[r]} \frac{p^{j(h+1)}}{j!}\Big(\phi^{(j)}(i+ap^h) - \sum_{\ell=0}^{[r]-j} \phi^{(j+\ell)}(i)\frac{(ap^h)^\ell}{\ell!}\Big)\big(\frac{x-i-ap^h}{p^{h+1}}\big)^j,\end{aligned}$$

et la prop. 4.3 (ou plutôt le (ii) de la remarque 4.4) nous fournit la minoration

$$v_p\Big(\phi^{(j)}(i+ap^h) - \sum_{\ell=0}^{[r]-j} \phi^{(j+\ell)}(i)\frac{(ap^h)^\ell}{\ell!}\Big) \geqslant C_{\phi,r}(h) - C([r]) + (r-j)h.$$

On en déduit que

$$v_{\mathrm{LA}_{h+1}}(\phi_{h+1} - \phi_h) \geqslant \inf_{j\leqslant [r]} \big(v_p(\frac{p^j(h+1)}{j!}) + C_{\phi,r}(h) - C([r]) + (r-j)h\big) = rh + C_{\phi,r}(h) - C([r]),$$

ce qui permet de conclure.

Théorème 4.12. — *La famille des $e_{i,k,r}$, pour $i \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k \leqslant r$, est une base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Le lemme 4.8 montre que $(b_{i,k}) \mapsto \sum_{i\in\mathbf{N},\, 0\leqslant k\leqslant r} b_{i,k}e_{i,k,r}$ est une application continue de $\ell^0_\infty(\mathbf{N}\times\{0,\dots,[r]\})$ dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. La proposition 4.10 implique que cette application est un isomorphisme de L-banach de $\ell^0_\infty(\mathbf{N}\times\{0,\dots,[r]\})$ sur l'adhérence de $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$ dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et comme cette adhérence n'est autre que $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, d'après la prop. 4.11, cela permet de conclure.

Définition 4.13. — On appelle *base de vaguelettes* la base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ constituée des $e_{i,k,r}$, pour $i \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant k \leqslant r$. Si $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et si $\sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{0\leqslant k\leqslant r} b_{i,k}(\phi)e_{i,k,r}$ est la décomposition de ϕ en vaguelettes, les $b_{i,k}(\phi)$ sont les *coefficients d'amplitude* de f.

Proposition 4.14. — (i) *Si $r \geqslant 1$, la dérivation $\frac{d}{dx}$ induit une surjection de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p, L)$; son noyau est l'adhérence de* $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$ *dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.*

(ii) *Plus généralement, si j est un entier $\geqslant 1$, et si $r \geqslant j$, l'opérateur $\big(\frac{d}{dx}\big)^j$ induit une surjection de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ sur $\mathscr{C}^{r-j}(\mathbf{Z}_p, L)$; son noyau est l'adhérence de* $\mathrm{LP}^{[0,j-1]}(\mathbf{Z}_p, L)$ *dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Il suffit de remarquer que

$$\big(\frac{d}{dx}\big)^j e_{i,k,r} = k(k-1)\cdots(k-j+1)e_{i,k-j,r-j},$$

pour déduire, d'une part la surjectivité de $\left(\frac{d}{dx}\right)^j : \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L) \to \mathscr{C}^{r-j}(\mathbf{Z}_p, L)$ du théorème précédent, et, d'autre part, le fait que le noyau de $\left(\frac{d}{dx}\right)^j$ est l'adhérence de l'espace engendré par les $e_{i,k,r}$, avec $k \leqslant j-1$; comme cet espace est précisément $\mathrm{LP}^{[0,j-1]}(\mathbf{Z}_p, L)$, cela permet de conclure.

4.6. Coefficients de Mahler des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$. — Le but de ce n° est de caractériser les fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ en termes de leur développement de Mahler.

Théorème 4.15. — *Si $r \geqslant 0$, si $\phi \in \mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, et si $\phi = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\phi)\binom{x}{n}$ est la décomposition de Mahler de ϕ, alors $v_p(a_n(\phi)) - r\ell(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. De plus, la valuation $v_{\mathscr{C}^r}$, définie sur $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ par la formule*

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi) = \inf_{n\in\mathbf{N}} \big(v_p(a_n(\phi)) - r\ell(n)\big)$$

est équivalente à la valuation $v'_{\mathscr{C}^r}$.

Corollaire 4.16. — *Les $p^{[r\ell(n)]}\binom{x}{n}$, pour $n \in \mathbf{N}$, forment une base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$.*

Démonstration. — Le corollaire est une conséquence immédiate du théorème ; la démonstration du théorème est un peu acrobatique. On commence par démontrer (cor. 4.18) qu'il existe une constante $C_3(r)$ telle que l'on ait $v_{\mathscr{C}^r}(\phi) \geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_3(r)$ si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$. Cela montre que l'application $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n\binom{x}{n}$ est une application continue de l'ensemble des suites vérifiant $v_p(a_n) - r\ell(n) \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$ (muni de la valuation $v_{\mathscr{C}^r}$) dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$. Par ailleurs, l'image contient $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ qui est dense dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$; il suffit donc de prouver que l'image est fermée. Pour cela, il suffit de vérifier qu'il existe une constante $C'_3(r)$ telle que l'on ait $v'_{\mathscr{C}^r}(\phi) \geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C'_3(r)$ si ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$, et comme $\mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$ est dense dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$, il suffit de vérifier une inégalité de ce style pour $\phi \in \mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$. C'est ce que l'on fait au lemme 4.23 (en utilisant la décomposition en vaguelettes) ; la démonstration se fait par récurrence sur $[r]$, en dérivant pour passer de r à $r-1$, et on doit traiter à part les fonctions localement constantes (cor. 4.22, pour lequel on a besoin des estimations des prop. 4.19 et 4.20).

Proposition 4.17. — *Si $r \geqslant 0$, il existe $C_1(r)$ tel que, quel que soit $h \in \mathbf{N}$ et $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, on ait*

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi) \geqslant v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - rh - C_1(r).$$

Démonstration. — En utilisant le th. 3.7, et l'inégalité $\ell(k) \leqslant \frac{\log(k+1)}{\log p} + 1$, on obtient la minoration

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) \geqslant \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p([\frac{k}{p^h}]!) - r\frac{\log(1+k)}{\log p} - r.$$

Comme $v_p(a!) = \frac{a - S_p(a)}{p-1}$, si $S_p(a)$ est la somme des chiffres du développement de a en base p, on en déduit la minoration $v_p(a!) \geqslant \frac{a}{p-1} - \frac{\log(a+1)}{\log p}$, et écrivant k sous la forme $k = p^h a + b$, avec $0 \leqslant b \leqslant p^h - 1$, la minoration

$$\begin{aligned} v_p([\frac{k}{p^h}]!) - r\frac{\log(1+k)}{\log p} &= v_p(a!) - r\frac{\log(p^h a + b + 1)}{\log p} \\ &\geqslant \frac{a}{p-1} - \frac{\log(a+1)}{\log p} - rh - r\frac{\log(a+1)}{\log p}, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'on peut prendre pour $C_1(r)$ le minimum de $\frac{a}{p-1}-(1+r)\frac{\log(a+1)}{\log p}-r$ pour $a\geqslant 0$.

Corollaire 4.18. — *Il existe $C_3(r)\in\mathbf{R}$ telle que l'on ait $v_{\mathscr{C}^r}(\phi)\geqslant v'_{\mathscr{C}^r}(\phi)-C_3(r)$ quel que soit $\phi\in\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$.*

Démonstration. — Il résulte de la proposition précédente et de ce que $v_{\mathrm{LA}_{\ell(i)}}(e_{i,k,r})=[r\ell(i)]$, que l'on a $v_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r})\geqslant -1-C_1(r)$ quels que soient $i\in\mathbf{N}$ et $0\leqslant k\leqslant r$. Comme les $e_{i,k,r}$, pour $i\in\mathbf{N}$ et $0\leqslant k\leqslant r$ forment une base de Banach de $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p,L)$, cela permet de conclure.

Soit $\phi\in\mathrm{LC}_h(\mathbf{Z}_p,L)$, et soient

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{p^h-1}b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x)=\sum_{j=0}^{+\infty}a_j(\phi)\binom{x}{j}$$

les décompositions de Mahler et en ondelettes de ϕ.

Proposition 4.19. — *Si $j\leqslant p^h-1$, alors $v_p(b_j(\phi))\geqslant\inf_{i\leqslant j}\big(v_p(a_i(\phi))+\ell(j)-\ell(i)\big)$.*

Démonstration. — En utilisant la formule

$$\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}(x)=\frac{1}{p^{\ell(i)}}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}}\zeta^{x-i}=\frac{1}{p^{\ell(i)}}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{\ell(i)}}}\sum_{j=0}^{+\infty}\zeta^{-i}(\zeta-1)^j\binom{x}{j},$$

on obtient $a_j(\phi)=\sum_{i=0}^{p^h-1}\alpha_{i,j}b_i(\phi)$. En utilisant le lemme 2.6, on en déduit la formule $b_j(\phi)=a_j(\phi)-\sum_{i<j}\alpha_{i,j}b_i(\phi)$, et la minoration

$$v_p(b_j(\phi))\geqslant\inf\Big(v_p(a_j(\phi)),\inf_{i<j}\Big(v_p(b_i(\phi))+\Big[\frac{j-p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)}-p^{\ell(i)-1}}\Big]\Big)\Big).$$

Comme

$$\Big[\frac{j-p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)}-p^{\ell(i)-1}}\Big]=\geqslant\Big[\frac{p^{\ell(j)-1}-p^{\ell(i)-1}}{p^{\ell(i)}-p^{\ell(i)-1}}\Big]\geqslant\Big[\frac{p^{\ell(j)-\ell(i)}-1}{p-1}\Big]\geqslant\ell(j)-\ell(i),$$

une récurrence sur j permet de conclure.

Proposition 4.20. — *Si $\ell(i)=h$, alors $v_p(b_i(\phi))\geqslant\big(\inf_{\ell(j)\geqslant h}v_p(a_j(\phi))\big)-1$.*

Démonstration. — Soient c_j, $j\in\mathbf{N}$, les coefficients de Mahler de la fonction continue $x\mapsto\phi(x+p^{h-1})-\phi(x)$. Si on note $P_{k,h}$ le polynome défini par $P_{k,h}(x)=\binom{x+p^{h-1}}{k}-\binom{x}{k}$, on a $c_j=\sum_{k>j}a_k(\phi)\,a_j(P_{k,h})$. Comme les coefficients de Mahler de $P_{k,h}$ sont à valeurs dans $\mathbf{Z}$ puisque $P_{k,h}(\mathbf{Z})\subset\mathbf{Z}$, on en déduit l'inégalité $\inf_{\ell(j)=h}v_p(c_j)\geqslant\inf_{\ell(j)\geqslant h}v_p(a_j(\phi))$, ce qui prouve que démontrer l'inégalité $v_p(b_i(\phi))\geqslant\inf_{\ell(j)=h}v_p(c_j)-1$ suffit pour démontrer la proposition.

Comme $\zeta^{x+p^{h-1}-i}-\zeta^{x-i}=0$ si $\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{h-1}}$, on obtient $c_j=\sum_{i=0}^{p^h-1}\beta_{i,j}b_i(\phi)$, avec $\beta_{i,j}=0$ si $\ell(i)\leqslant h-1$, et

$$\beta_{i,j}=\frac{1}{p^h}\sum_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_{p^h}-\boldsymbol{\mu}_{p^{h-1}}}\zeta^{-i}(\zeta^{p^{h-1}}-1)(\zeta-1)^j=\frac{1}{p^h}\mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}\big(\zeta_{p^h}^{-i}(\zeta_p-1)(\zeta_{p^h}-1)^j\big).$$

Pour démontrer l'inégalité voulue, notons I l'intervalle $[p^{h-1},p^h-1]$ de $\mathbf{N}$, notons B la matrice $\{1\}\times I$ des $b_i(\phi)$, pour $i\in I$, C celle des c_j, pour $j\in I$, et M celle des $\beta_{i,j}$, avec $(i,j)\in I\times I$. On a alors $C=BM$.

Par ailleurs, si $i \in I$, posons $u_i = (\zeta_{p^h} - 1)^i$. Les u_i, $i \in I$ forment une base de $(\zeta_p - 1)\mathscr{O}_{F_h}$ sur $\mathbf{Z}_p$. On note u_i^*, $i \in I$, la base de F_h sur $\mathbf{Q}_p$ duale de la base u_i, $i \in I$. Les u_i^*, $i \in I$ forment donc une base de $p^{-h}\mathscr{O}_F$ sur $\mathbf{Z}_p$. De même, si $j \in I$, posons $v_j = (\zeta_p - 1)\zeta_{p^h}^{-j}$. Les v_j, $j \in I$ forment une base de $(\zeta_p - 1)\mathscr{O}_{F_h}$ sur $\mathbf{Z}_p$. On note v_j^*, $j \in I$, la base de F_h sur $\mathbf{Q}_p$ duale de la base v_j, $\in I$. Les v_j^*, $j \in I$ forment donc aussi une base de $p^{-h}\mathscr{O}_F$ sur $\mathbf{Z}_p$.

Maintenant, comme M est la matrice des $p^{-h}\mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}(u_i v_j)$, pour $(i,j) \in I \times I$, la matrice inverse de M est celle des $p^h\mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}(u_j^* v_i^*)$, pour $(i,j) \in I \times I$. Elle est donc à coefficients dans $p^h\mathrm{Tr}_{F_h/\mathbf{Q}_p}(p^{-2h}\mathscr{O}_{F_h}) = p^{-1}\mathbf{Z}_p$. Ceci permet de conclure.

Proposition 4.21. — *Soit $r \geqslant 0$. Si $v_p(a_j(\phi)) \geqslant r\inf(h, \ell(j))$ quel que soit $j \in \mathbf{N}$, alors*

(i) *$v_p(b_i(\phi)) \geqslant r\ell(i)$ quel que soit $i \leqslant p^h - 1$, si $r < 1$;*

(ii) *$v_p(b_i(\phi)) \geqslant r\ell(i) - 1$ quel que soit $i \leqslant p^h - 1$, si $r \geqslant 1$.*

Démonstration. — Si $r < 1$, on utilise la minoration de la prop. 4.19. Celle-ci nous donne

$$v_p(b_i(\phi)) \geqslant \inf_{j\leqslant i}(v_p(a_j(\phi)) + \ell(i) - \ell(j)) \geqslant \inf_{j\leqslant i}(r\ell(j) + \ell(i) - \ell(j)) \geqslant r\ell(i) + (1-r)\inf_{j\leqslant i}(\ell(i) - \ell(j)) \geqslant r\ell(i).$$

Si $r \geqslant 1$, on fait une récurrence sur h en utilisant la minoration de la prop. 4.20 qui montre que la minoration que l'on cherche à démontrer est vérifiée si $\ell(i) = h$, et si $v_p(b_i) \geqslant rh$ quel que soit $i \geqslant p^{h-1}$. Considérons alors

$$\phi' = \phi - \sum_{\ell(i)=h} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^h\mathbf{Z}_p} = \sum_{i\leqslant p^{h-1}-1} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p},$$

et, si $j \in \mathbf{N}$, soit $a'_j = a_j(\phi')$. On a $a'_j = a_j(\phi)$ si $j \leqslant p^{h-1} - 1$ et, si $j \geqslant p^{h-1}$,

$$v_p(a'_j) \geqslant \inf(v_p(a_j(\phi)), \inf_{\ell(i)=h} v_p(b_i(\phi))) \geqslant rh - 1 \geqslant r(h-1).$$

L'hypothèse de récurrence pour $h - 1$ permet donc de montrer que l'on a $v_p(b_i(\phi)) \geqslant r\ell(i) - 1$ si $\ell(i) \leqslant h - 1$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 4.22. — *Soit $r \geqslant 0$, soit $\phi \in \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, L)$, et soit $\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i(\phi)\mathbf{1}_{i+p^{\ell(i)}\mathbf{Z}_p}$, la décomposition de ϕ en ondelettes. Alors*

(i) *si $r < 1$, $v_p(b_i(\phi)) \geqslant r\ell(i) + v_{\mathscr{C}^r}(\phi)$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$;*

(ii) *si $r \geqslant 1$, $v_p(b_i(\phi)) \geqslant r\ell(i) + v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - 1$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$.*

Lemme 4.23. — *Il existe $C_2(r) \in \mathbf{R}$ tel que, si $\phi = \sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{0\leqslant k\leqslant r} b_{i,k}e_{i,k,r} \in \mathrm{LP}^{[0,r]}(\mathbf{Z}_p, L)$, où les $b_{i,k}$ sont des éléments de $\mathbf{C}_p$ presque tous nuls, alors*

$$v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_2(r) \leqslant \inf_{i\in\mathbf{N},\, 0\leqslant k\leqslant r} v_p(b_{i,k}).$$

Démonstration. — Celle-ci se fait par récurrence sur $[r]$.

• Si $[r] = 0$ (i.e. si $r < 1$), la condition $0 \leqslant k \leqslant r$ implique $k = 0$. Comme les $b_{i,k}$ sont presque tous nuls, il existe h tel que $b_{i,k} = 0$ si $\ell(i) > h$. On déduit alors du (i) du cor. 4.22 que l'on a $v_p(p^{[\ell(i)r]}b_{i,0}) \geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi) + \ell(i)r$ quel que soit $i \leqslant p^h - 1$. On en déduit l'inégalité $\inf_{i\in\mathbf{N},\, 0\leqslant k\leqslant r} v_p(b_{i,k}) \geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi)$, ce qui permet de conclure.

• Si $[r] \geqslant 1$, soit ϕ' la dérivée de ϕ. On peut écrire ϕ' sous la forme

$$\phi' = \sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{0\leqslant k\leqslant r-1}(k+1)b_{i,k+1}e_{i,k,r-1}.$$

Comme $v_{\mathscr{C}^{r-1}}(\phi') \geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_0(r)$, d'après la prop. 4.3, on déduit de l'hypothèse de récurrence (i.e. de l'équivalence des valuations $v_{\mathscr{C}^{r-1}}$ et $v'_{\mathscr{C}^{r-1}}$), l'existence de $C'_0(r) \in \mathbf{R}$ tel que que

$$\inf_{i \in \mathbf{N},\, 1 \leqslant k \leqslant r} v_p(kb_{i,k}) \geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_2(r-1) - C'_0(r),$$

et donc que

$$\inf_{i \in \mathbf{N},\, 1 \leqslant k \leqslant r} v_p(b_{i,k}) \geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_2(r-1) - C'_0(r) - \sup_{1 \leqslant k \leqslant r} v_p(k).$$

Soit $\phi_0 = \sum_{i \in \mathbf{N}} b_{i,0} e_{i,0,r} = \phi - \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} b_{i,k} e_{i,k,r}$. On a alors

$$\begin{aligned} v_{\mathscr{C}^r}(\phi_0) &\geqslant \inf \big(v_{\mathscr{C}^r}(\phi), \inf_{i \in \mathbf{N},\, 1 \leqslant k \leqslant r} v_p(b_{i,k}) + v_{\mathscr{C}^r}(e_{i,k,r}) \big) \\ &\geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_2(r-1) - \sup_{1 \leqslant k \leqslant r} v_p(k) - C_1(r), \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.8 et la minoration obtenue ci-dessus. Ceci permet, en utilisant le (ii) du cor. 4.22, d'en déduire la minoration

$$\inf_{i \in \mathbf{N}} v_p(b_{i,0}) \geqslant v_{\mathscr{C}^r}(\phi) - C_2(r-1) - \sup_{1 \leqslant k \leqslant r} v_p(k) - C_1(r) - 1.$$

Ceci permet de conclure.

Exercice 12. — (i) Soit $\delta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^*$ un caractère continu.

(a) Montrer que la quantité $\frac{\log \delta(u)}{\log u}$ ne dépend pas du choix de $u \in \mathbf{Z}_p^*$ non racine de l'unité.

(b) On note cette quantité $w(\delta)$. Montrer qu'il existe $n(\delta) \geqslant 1$ tel que l'on ait

$$\delta(x) = x^{w(\delta)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{w(\delta)}{n} (x-1)^n \quad \text{si } x \in 1 + p^{n(\delta)} \mathbf{Z}_p.$$

En déduire que δ est analytique sur $a + p^{n(\delta)} \mathbf{Z}_p$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

(c) Montrer que log est analytique sur $a + 2p\mathbf{Z}_p$, quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

(ii) Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$, si $n \in \mathbf{N}$, on note $\phi \circ p^{-n} : \mathbf{Z}_p \to L$ la fonction de support $p^n \mathbf{Z}_p$, dont la restriction à $p^n \mathbf{Z}_p$ est donnée par la formule $\phi \circ p^{-n}(x) = \phi(p^{-n} x)$.

(a) Montrer que, si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p, L)$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors $\phi \circ p^{-n} \in \mathrm{LA}_{h+n}(\mathbf{Z}_p, L)$, et $v_{\mathrm{LA}_{h+n}}(\phi \circ p^{-n}) = v_{\mathrm{LA}_h}(\phi)$.

(b) Montrer que, si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*, L)$, si $\alpha \in L^*$, et si $k \in \mathbf{N}$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n n^k \phi \circ p^{-n}$ converge dans $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p, L)$ si $0 \leqslant r < v_p(\alpha)$.

(iii) Soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L$ un caractère continu vérifiant $v_p(\delta(p)) > 0$.

(a) Montrer que δ tend vers 0 en 0.

(b) Montrer que la fonction obtenue en prolongeant par continuité est de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathbf{Z}_p$ pour tout r vérifiant $0 \leqslant r < v_p(\delta(p))$.

(c) Plus généralement, montrer que, si $\mathscr{L} \in L$, alors $\delta \cdot \log_{\mathscr{L}}^k$ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathbf{Z}_p$ pour tout r vérifiant $0 \leqslant r < v_p(\delta(p))$.

Pierre Colmez