# FONCTIONS D'UNE VARIABLE $p$-ADIQUE ET REPRÉSENTATIONS DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

*par*

Pierre Colmez & Shanwen Wang

***Résumé.*** — Nous étendons le dictionnaire entre anneaux de Fontaine et analyse fonctionnelle $p$-adique, et nous donnons un raffinement de la correspondance de Langlands locale $p$-adique pour les représentations de la série principale de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

***Abstract.*** — We extend the dictionary between Fontaine rings and $p$-adic functionnal analysis, and we give a refinement of the $p$-adic local Langlands correspondence for principal series representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

**Table des matières**



## Introduction

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $G_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $H_{\mathbf{Q}_p} \subset G_{\mathbf{Q}_p}$ celui de $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$. Soit $\mathbf{C}_p$ le complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la valuation $p$-adique $v_p$, et soient $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\mathbf{C}_p^\flat)$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p^\flat})$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^- = \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^+$.

---

Pendant l'élaboration de cet article la recherche de S.W. a été subventionnée par the Fundamental Research Funds for the Central Universities, and the Research Funds of Renmin University of China n° 20XNLG04 et the National Natural Science Foundation of China (Grant n° 11971035) ; P.C. était membre du projet ANR Coloss.

Notons $\mathbb{G}$ le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, $\mathbb{B}$ son sous-groupe de Borel supérieur et $\mathbb{P}$ son sous-groupe mirabolique.

Soit $L$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et soit $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers. Si $\Pi$ est une $L$-représentation unitaire de $\mathbb{G}$, de longueur finie, et si $\mathbf{V}(\Pi)$ est la représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui est associée par la correspondance de Langlands locale $p$-adique, il est prouvé dans [**9**] que l'on dispose d'une injection naturelle $\Pi \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \mathbf{V}(\Pi))^{H_{\mathbf{Q}_p}}$, $\mathbb{P}$-équivariante. Ceci joue un grand rôle pour construire un modèle de Kirillov "en famille" que l'on peut comparer au modèle de Kirillov de la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires et obtenir de la sorte une nouvelle preuve de la factorisation d'Emerton.

Maintenant, $\Pi$ contient le sous-$\mathbb{P}$-module $(\widetilde{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{V}(\Pi))^{H_{\mathbf{Q}_p}}/(\widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes \mathbf{V}(\Pi))^{H_{\mathbf{Q}_p}}$ et le quotient $J(\Pi)$ est de dimension finie (c'est le module de Jacquet de $\Pi$). Ce quotient s'injecte dans $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes \mathbf{V}(\Pi))$ qui est un espace de dimension infinie, et la question se pose de décrire l'image : contient-elle de l'information sur $\Pi$ qui n'est pas encodée par $\mathbf{V}(\Pi)$ ? Le but de ce petit article est de montrer que "oui". Notons que, si $\mathbf{V}(\Pi)$ est irréductible, la question ne se pose que pour les représentations de la série principale car sinon $J(\Pi) = 0$ et on peut reconstruire $\Pi$ à partir de $\mathbf{V}(\Pi)$.

Dans le cas d'une série principale, $\mathbf{V}(\Pi)$ est de dimension 1, et on est ramené à comprendre le $\mathbb{P}$-module $(\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$. Pour que le résultat soit plus esthétique, on tord l'action naturelle de $\mathbb{P}$ par le caractère $\chi$ donné par $\chi\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big) = a|a|$. Posons

$$\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} := (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}})^{H_{\mathbf{Q}_p}}, \quad \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+ := (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{H_{\mathbf{Q}_p}}, \quad \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^- := \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}/\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+, \quad \breve{\mathscr{O}}_L = \mathscr{O}_L{\cdot}W(\overline{\mathbf{F}}_p)$$

D'après le dictionnaire d'analyse fonctionnelle $p$-adique [**5**, § IV.3], on dispose d'un isomorphisme naturel, $\mathbb{P}$-équivariant,

$$\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^- \otimes \chi \cong \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$$

où le 0 en indice signifie "tend vers 0 en $\infty$". On a alors le résultat suivant :

***Théorème 0.1***. — (i) *L'isomorphisme $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^- \otimes \chi \cong \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$ peut s'étendre, de manière unique, en une injection $\mathbb{P}$-équivariante*[1]

$$(\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \otimes \chi \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)/\{\mathrm{Ctes}\}$$

(ii) *L'injection du* (i) *s'inscrit dans un diagramme commutatif $\mathbb{P}$-équivariant*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^- \otimes \chi \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \otimes \chi \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L \otimes \chi) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \arrow[r] & \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}} \arrow[r] & \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

1. Si $W$ est un espace de fonctions sur un ensemble $X$, on note $\{\mathrm{Ctes}\}$ le sous-espace des fonctions constantes.

(iii) *L'image de* $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L \otimes \chi)$ *s'identifie au sous-espace des fonctions continues sur* $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$ (pour la topologie profinie) *modulo celui des fonctions constantes*[2].

(iv) *Si* $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ *est un caractère unitaire continu, on dispose d'une flèche naturelle* $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta)) \to L \otimes_{\mathscr{O}_L} H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L \otimes \chi)$ *et l'image de l'application composée est :*

- $L \cdot \chi^{-1}\delta$ *si* $\delta \neq 1, \chi$,
- $L \cdot v_p \oplus L \cdot \log$ *si* $\delta = \chi$,
- $0$ *si* $\delta = 1$.

***Remarque 0.2.*** — L'isomorphisme $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)/\{\mathrm{Ctes}\}$ a l'air naturel, mais la construction le rend assez mystérieux (et la preuve de son existence est non triviale). Admet-il une construction plus transparente ?

Soit $B(\delta_1, \delta_2) := \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\delta_2 \otimes \delta_1\chi^{-1})$. Alors $\mathbf{V}(B(\delta_1, \delta_2)) = L(\delta_1)$, et donc le foncteur $\mathbf{V}$ perd la trace de $\delta_2$. Mais on a un diagramme commutatif de $\mathbb{P}$-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \otimes \delta_1\chi^{-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & B(\delta_1, \delta_2) \arrow[r] \arrow[d] & J(B(\delta_1, \delta_2)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \otimes \delta_1\chi^{-1} \arrow[r] & (\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \delta_1)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \arrow[r] & H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L \otimes \delta_1) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et l'image de $J(B(\delta_1, \delta_2))$ dans $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L \otimes \delta_1)$ est le sous-espace $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta_1\delta_2^{-1}))$ si $\delta_1\delta_2^{-1} \neq 1, \chi$ (ce groupe est alors de dimension 1). Autrement dit, l'injection $B(\delta_1, \delta_2) \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{A}}^- \otimes \mathbf{V}(B(\delta_1, \delta_2)))$ encode une information galoisienne infinitésimale.

***Remarque 0.3.*** — (i) Si $\delta_1\delta_2^{-1} = \chi$, au lieu de $B(\delta_1, \delta_2)$, il faut considérer une extension de $\chi^{-1}\delta_1$ par $\mathrm{St} \otimes \chi^{-1}\delta_1$, où St est la steinberg, et alors l'information galoisienne infinitésimale encodée est plus subtile car $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est de dimension 2 (cf. prop. 4.6 et th. 5.2).

(ii) Berger et Vienney **[2]** établissent une bijection entre (mod $p$) représentations lisses de $\mathbb{P}$, irréductibles, de dimension infinie, et (mod $p$) représentations irréductibles de $G_{\mathbf{Q}_p}$ (ou, ce qui revient au même, (mod $p$) $(\varphi, \Gamma)$-modules irréductibles). Les résultats ci-dessus suggèrent que, si on sort du cadre irréductible, les représentations de dimension finie de $\mathbb{P}$ ont un rôle à jouer ; il est possible que la correspondance de **[2]** admette une version catégorifiée (un erzatz grossier de la correspondance de Langlands locale catégorique **[10]**).

(iii) Dans le cas pathologique $\delta_1 = \delta_2$, le groupe $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta_1\delta_2^{-1}))$ meurt dans $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L \otimes \delta_1)$ et il ne semble pas y avoir d'information galoisienne cachée dans $J(B(\delta_1, \delta_2))$.

2. Voir le th. 4.4 et ce qui le précède pour la signification de cet énoncé.

## 1. Anneaux de Fontaine

*Le groupe de Galois absolu de* $\mathbf{Q}_p$. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathbf{C}_p$ le complété $p$-adique de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ son anneau d'entiers.

Soient $G_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $\chi : G_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$, alors on a $H_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty) = \ker(\chi)$, ce qui permet de voir $\chi$ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$ ; on note $a \mapsto \sigma_a$ son inverse.

Soit $H'_{\mathbf{Q}_p} \subset H_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois absolu de l'extension abélienne maximale $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}$ de $\mathbf{Q}_p$. Donc $G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}/\mathbf{Q}_p)$ s'identifie au complété profini $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$ de $\mathbf{Q}_p^*$ (via cette identification $\chi$ correspond à $x \mapsto x|x|$), et $H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$.

*L'anneau* $\widetilde{\mathbf{A}}$ *et ses sous-objets.* — Soit $\widetilde{\mathbf{E}}$ le corps $\mathbf{C}_p^\flat$. Il est muni d'une valuation $v_{\mathbf{E}}$. On note $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p^\flat}$ l'anneau de ses entiers et $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ l'idéal maximal de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. On a une décomposition $\widetilde{\mathbf{E}}^+ = \overline{\mathbf{F}}_p \oplus \widetilde{\mathbf{E}}^{++}$.

Soient [(3)] $\widetilde{\mathbf{A}} := W(\widetilde{\mathbf{E}})$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ := W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{++} := W(\widetilde{\mathbf{E}}^{++})$. On a comme ci-dessus une décomposition $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\overline{\mathbf{F}}_p) \oplus \widetilde{\mathbf{A}}^{++}$.

Les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}$ sont munis d'actions de $\varphi$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ commutant entre elles, l'action de $\varphi$ étant bijective. Les sous-anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont stables sous l'action de $\varphi$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ ; il en est de même des idéaux $\widetilde{\mathbf{E}}^{++}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$. Cela munit les quotients $\widetilde{\mathbf{E}}^- := \widetilde{\mathbf{E}}/\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^- := \widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^+$ d'actions de $\varphi$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$.

*L'anneau* $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ *et ses sous-objets.* — Soient $\varepsilon = (1, \zeta_p, \dots) \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\pi := [\varepsilon] - 1 \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$. On note $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^+$ le sous-anneau $\mathbf{Z}_p[[\pi]]$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ l'adhérence de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^+[\frac{1}{\pi}]$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$. On a $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$ et $\sigma(\pi) = (1+\pi)^{\chi(\sigma)} - 1$, si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$ ; on en déduit que $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^+$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ sont stables par $\varphi$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$.

Enfin, soient $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}^+$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ les adhérences des clôtures radicielles de $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^+$ et $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ : si $\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ est le complété de la clôture radicielle de $\mathbf{F}_p((\varepsilon - 1))$, on a $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p} = W(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p})$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}^+)$. On a aussi

$$\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p} = \widetilde{\mathbf{A}}^{H_{\mathbf{Q}_p}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}^+ = (\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{H_{\mathbf{Q}_p}}.$$

Par contre, $(\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} = (\widetilde{\mathbf{A}}/\widetilde{\mathbf{A}}^+)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$ est strictement plus gros que $\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}/\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}^+$ et c'est au lien entre ces deux modules que nous allons nous intéresser dans cet article.

*Extension des scalaires.* — Soit $L$ une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si $\Lambda$ est une $\mathbf{Z}_p$-algèbre, posons $\mathscr{O}_L{\cdot}\Lambda := \mathscr{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \Lambda$. Soient

$$\mathscr{O}_{\mathscr{E}} := \mathscr{O}_L{\cdot}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}, \quad \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+ := \mathscr{O}_L{\cdot}\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}^+, \quad \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} := \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}, \quad \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^+ := \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}^+.$$

3. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est souvent noté $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$.

Alors $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+} = \mathscr{O}_L[[\pi]]$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est l'anneau des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\pi^k$, avec $a_k \in \mathscr{O}_L$ et $\lim_{k\to-\infty} a_k = 0$. On pose aussi $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{-} := \mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}$ et $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-} := \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}/\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{+}$.

On étend les actions de $\varphi$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ à ces modules par $\mathscr{O}_L$-linéarité. On a

$$\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} = (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}})^{H_{\mathbf{Q}_p}}, \quad \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{+} = (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^{+})^{H_{\mathbf{Q}_p}}, \quad \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-} \subsetneq (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^{-})^{H_{\mathbf{Q}_p}}.$$

*Action du mirabolique.* — Notons $\mathbb{G}$ le groupe $\mathbf{GL}_2$, $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ son borel supérieur, $\mathbb{P} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ son mirabolique, et $\mathbb{P}^+ \subset \mathbb{P}$ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p\setminus\{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On peut combiner les actions de $G_{\mathbf{Q}_p}$ (qui agit à travers son quotient $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p^*$) et $\varphi$ sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}$, $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{+}$ et $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-}$ en une action de $\mathbb{P}$, grâce à la formule

$$\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot f = [\varepsilon^b]\varphi^k(\sigma_a(f)), \text{ si } k \in \mathbf{Z}, a \in \mathbf{Z}_p^* \text{ et } b \in \mathbf{Q}_p,$$

La restriction de cette action à $\mathbb{P}^+$ laisse stables $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{-}$.

## 2. Analyse $p$-adique

### 2.1. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle $p$-adique [**6**, §I.1]

*2.1.1. L'analyse sur $\mathbf{Z}_p$.* — Si $\mu \in \mathrm{Mes}(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs dans $\mathscr{O}_L$, sa transformée d'Amice

$$A_\mu(\pi) = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+\pi)^x \mu$$

appartient à $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}$. Dans l'autre sens, si $f \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on définit $\phi_f : \mathbf{Z}_p \to L$ par la formule

$$\phi_f(x) = \mathrm{rés}_0((1+\pi)^{-x} f(\pi)\tfrac{d\pi}{1+\pi}).$$

On munit $\mathrm{Mes}(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ et $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L)$ de l'action naturelle de $\mathbb{P}^+$ :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\mu := \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(ax+b)\,\mu$$

$$(\left(\begin{smallmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi)(x) = \begin{cases} \phi(\frac{x-b}{p^k a}) & \text{si } x \in b + p^k\mathbf{Z}_p; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant qui fournit un dictionnaire entre l'analyse fonctionnelle sur $\mathbf{Z}_p$ et l'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ (cf. [**6**, th. 0.1] – et [**7**, prop. 1.3] pour la torsion par $\chi^{-1}$).

***Proposition 2.1***. — (i) $\mu \mapsto A_\mu$ *induit un isomorphisme* $\mathbb{P}^+$*-équivariant*

$$\mathrm{Mes}(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}.$$

(ii) $f \mapsto \phi_f$ *induit isomorphisme* $\mathbb{P}^+$*-équivariant*

$$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{-} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L) \otimes \chi^{-1}$$

*où* $\chi(x) = x|x|$, *vu comme caractère de* $\mathbb{P}^+$ *par* $\chi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) := \chi(a)$.

*2.1.2. L'analyse sur $\mathbf{Q}_p$.* — Le dictionnaire d'analyse fonctionnelle $p$-adique s'étend à $\mathbf{Q}_p$, voir [**5**, IV.3]. On note $\mathrm{Mes}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}}$ l'espace des mesures sur $\mathbf{Q}_p$ "nulles à l'infini" (c'est aussi le $\mathscr{O}_L$-dual de l'espace des fonctions uniformément continues sur $\mathbf{Q}_p$, à valeurs dans $\mathscr{O}_L$) et $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0 à l'infini. On munit ces espaces d'actions de $\mathbb{P}$ en posant

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mu := \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(ax+b)\,\mu, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \phi(x) = \phi\big(\tfrac{x-b}{a}\big)$$

On a alors le résultat suivant qui étend le dictionnaire de la prop. 2.1 à $\mathbf{Q}_p$.

***Proposition 2.2.*** — (i) *La transformée de Fourier $\mu \mapsto \int_{\mathbf{Q}_p} [\varepsilon^x]\mu$ induit un isomorphisme $\mathbb{P}$-équivariant*

$$\mathrm{Mes}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_{\mathrm{pc}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{+}$$

(ii) *La transformée $z \mapsto \phi_z$, où $\phi_z(x) := \mathrm{rés}_0([\varepsilon^{-x}]z \frac{d\pi}{1+\pi})$ et $\mathrm{rés}_0$ est l'unique extension continue de $\mathrm{rés}_0$ à $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}} \frac{d\pi}{1+\pi}$ vérifiant $\mathrm{rés}_0(\varphi(z)\frac{d\pi}{1+\pi}) = \mathrm{rés}_0(z\frac{d\pi}{1+\pi})$, induit un isomorphisme $\mathbb{P}$-équivariant :*

$$\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-} \cong \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \otimes \chi^{-1}$$

### 2.2. Extension du dictionnaire d'analyse fonctionnelle $p$-adique

La prop. 2.2 fournit une interprétation de $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-}$ en termes de fonctions continues sur $\mathbf{Q}_p$ avec un comportement spécial à l'infini ; nous allons donner une telle interprétation pour $(\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$ qui contient $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-}$. Dans ce paragraphe, on fabrique un plongement naturel dans les fonctions continues sur $\mathbf{Q}_p$, et au chapitre 4, on décrit l'image de ce plongement.

*2.2.1. Dévissage de $(\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$.* — On pose

$$\breve{\mathscr{O}}_L := \mathscr{O}_L{\cdot}W(\overline{\mathbf{F}}_p), \quad \breve{L} := \breve{\mathscr{O}}_L[\tfrac{1}{p}]$$

Ces anneaux sont munis d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires de $\varphi$ et $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui commutent.

***Lemme 2.3.*** — (i) $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L{\cdot}\tilde{\mathbf{A}}) = 0$ *et* $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L{\cdot}\tilde{\mathbf{A}}^{++}) = 0$.

(ii) *On a une suite exacte naturelle*

$$0 \to \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-} \to (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \to H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \to 0.$$

*Démonstration.* — Le (i) est classique (descente presque étale). Le (ii) s'en déduit en utilisant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}} \to \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^- \to 0,$$

le (i) et la decomposition $\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^+ = \breve{\mathscr{O}}_L \oplus \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$. □

*2.2.2. Une injection dans les fonctions continues*

***Lemme 2.4***. — *$H^0(\mathbb{U}, \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)) = \mathscr{O}_L$ et $H^1(\mathbb{U}, \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)) = 0$.*

*Démonstration*. — L'espace $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$, vu comme représentation de $\mathbb{U} \cong \mathbf{Q}_p$, est l'induite de 1 à $\mathbb{U}$ de la représentation triviale ; le résultat s'en déduit via le lemme de Shapiro. □

***Proposition 2.5***. — *Il existe un unique plongement $\mathbb{P}$-équivariant*

$$\iota : (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \hookrightarrow (\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)/\{\mathrm{Ctes}\}) \otimes \chi^{-1}$$

*rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^- & \longrightarrow & (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \otimes \chi^{-1} & \longrightarrow & (\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)/\{\mathrm{Ctes}\}) \otimes \chi^{-1} \end{array} .$$

*Démonstration*. — On part de la suite exacte

$$0 \to \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^- \to (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \to H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^+) \to 0.$$

Par ailleurs, $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^{++}) = 0$, et donc $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^+)$ est tué par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$ pour tout $b \in \mathbf{Q}_p$. Il s'ensuit que, si $v \in (\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$, alors $v_b := \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot v \in \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^-$. Posant $\phi_b = \phi_{v_b}$, on obtient de la sorte un 1-cocycle sur $\mathbb{U}$ à valeurs dans $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \otimes \chi^{-1}$. On déduit du lemme précédent que ce 1-cocycle se trivialise dans $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L) \otimes \chi^{-1}$, de manière unique modulo les constantes. Autrement dit, il existe un unique $\phi \in (\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)/\{\mathrm{Ctes}\}) \otimes \chi^{-1}$ tel que $\phi_b = (\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1) \cdot \phi$ pour tout $b$, et le plongement $(\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}} \hookrightarrow (\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)/\{\mathrm{Ctes}\}) \otimes \chi^{-1}$ est donné par $v \mapsto \phi$.

Il résulte de ce qui précède que $\iota$ a un unique prolongement $\mathbb{U}$-équivariant à $(\mathscr{O}_L{\cdot}\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$. Cette unicité implique que ce prolongement est $\mathbb{P}$-équivariant : si $g \in \mathbb{P}$ et si $u \in \mathbb{U}$, alors $u^{-1}g^{-1}\iota g u = g^{-1}(gug^{-1})^{-1}\iota(gug^{-1})g = g^{-1}\iota g$ puisque $gug^{-1} \in \mathbb{U}$ ; il s'ensuit que $g\iota g^{-1}$ est $\mathbb{U}$-équivariant, et comme il coïncide avec $\iota$ sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^-$ (puisque $\iota$ est $\mathbb{P}$ équivariant sur $\widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^-$), on a $g\iota g^{-1} = \iota$, ce qui permet de conclure. □

*2.2.3. Un diagramme commutatif*. — Soit $\mathbf{P}^1 = \mathbf{Q}_p \cup \{\infty\}$. On a une décomposition $\mathbb{P}$-équivariante

$$\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L) = \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \oplus \mathscr{O}_L \mathbf{1}_{\mathbf{P}^1}, \quad \phi \mapsto (\phi - \phi(\infty)) + \phi(\infty)\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1}$$

où $\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1}$ est la fonction constante sur $\mathbf{P}^1$, de valeur 1. On en déduit une suite exacte $\mathbb{P}$-équivariante

$$0 \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \longrightarrow \tfrac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}} \longrightarrow \tfrac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L)_0} \longrightarrow 0 .$$

D'où un diagramme $\mathbb{P}$-équivariant

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\mathscr{O}_L\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{-})^{H_{\mathbf{Q}_p}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \otimes \chi^{-1} \arrow[r] & \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}} \otimes \chi^{-1} \arrow[r] & \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1,\mathscr{O}_L)} \otimes \chi^{-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Nous allons déterminer l'image de $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \to \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p,\mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1,\mathscr{O}_L)} \otimes \chi^{-1}$, ce qui fournira une description de celle de $(\mathscr{O}_L\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{-})^{H_{\mathbf{Q}_p}}$.

## 3. Le $\mathbb{P}$-module $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)$

### 3.1. Relation avec $H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L)$

On a

$$G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p} = (G_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p}) \times (H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}), \quad G_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p} \cong \mathbf{Z}_p^*, \quad H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p} = \sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}}$$

Le groupe $\sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}} \times \mathbf{Z}_p^* \times \varphi^{\mathbf{Z}}$ agit sur :

• $\breve{\mathscr{O}}_L$ à travers $\sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}} \times \varphi^{\mathbf{Z}}$ (et les actions de $\sigma_p$ et $\varphi$ coïncident ; en particulier, l'action de $\varphi^{\mathbf{Z}}$ s'étend par continuité en une action de $\varphi^{\widehat{\mathbf{Z}}}$).

• $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)$ à travers $\mathbf{Z}_p^* \times \varphi^{\mathbf{Z}}$, où $\varphi$ agit sur $\breve{\mathscr{O}}_L$ et $\mathbf{Z}_p^*$ agit comme $G_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p}$ ($\breve{\mathscr{O}}_L$ est muni d'une action de $G_{\mathbf{Q}_p}$).

• $H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L)$ à travers $\sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}} \times \mathbf{Z}_p^* = G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}$.

On identifie le sous-groupe $\{1\} \times \mathbf{Z}_p^* \times \varphi^{\mathbf{Z}}$ à $\mathbf{Q}_p^*$ en envoyant $\varphi$ sur $p$, et le sous-groupe $\sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}} \times \mathbf{Z}_p^* \times \{1\}$ à $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$ en envoyant $\sigma_p$ sur $p^{-1}$ (on obtient ainsi l'identification $G_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} = \widehat{\mathbf{Q}_p^*}$ de la théorie locale du corps de classe).

***Lemme 3.1***. — (i) *La surjection* $(\mathscr{O}_L\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{-})^{H_{\mathbf{Q}_p}} \to H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)$ *est* $\mathbf{Q}_p^*$*-équivariante.*

(ii) *On a un isomorphisme naturel de* $\sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}} \times \mathbf{Z}_p^* \times \varphi^{\mathbf{Z}}$*-modules*

$$H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_L}\breve{\mathscr{O}}_L \cong H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_L}\breve{\mathscr{O}}_L.$$

*En particulier,*

$$H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L) \cong (H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_L}\breve{\mathscr{O}}_L)^{\varphi=1}$$
$$H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \cong (H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L)\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_L}\breve{\mathscr{O}}_L)^{\sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}}}$$

*Démonstration.* — (i) La flèche $(\mathscr{O}_L\cdot\widetilde{\mathbf{A}}^{-})^{H_{\mathbf{Q}_p}} \to H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)$ commute à $\varphi$, puisque $\varphi$ commute à $G_{\mathbf{Q}_p}$. Par ailleurs, elle est $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante par définition de l'application de connexion, et donc $\mathbf{Z}_p^*$-équivariante puisque $G_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers $G_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Z}_p^*$.

(ii) Par descente étale, on a $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) = 0$. La suite d'inflation-restriction et la nullité de $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L)$ donnent un isomorphisme

$$H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \cong (H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Z}_p)\widehat{\otimes}\breve{\mathscr{O}}_L)^{H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}},$$

où $H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p} \cong \sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}}$ agit diagonalement. Le résultat s'en déduit via Hilbert 90 dont on déduit par dévissage que, si $V$ est une $\mathscr{O}_L$-représentation de $H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}$, l'application naturelle

$$\breve{\mathscr{O}}_L\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_L}(\breve{\mathscr{O}}_L\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_L}V)^{H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}} \to \breve{\mathscr{O}}_L\widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_L}V$$

est un isomorphisme. □

### 3.2. Sous-espaces propres pour l'action de $\mathbf{Q}_p^*$

Rappelons que, si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ est un caractère unitaire, alors $\delta(\varphi) = \delta(p)$ mais $\delta(\sigma_p) = \delta(p)^{-1}$. Notons $e_\delta$ la base $1 \otimes \delta$ du $(\varphi, \Gamma)$-module $\mathscr{O}_L \otimes \delta$. On a alors $\breve{\mathscr{O}}_L \otimes \delta = \breve{\mathscr{O}}_L \cdot e_\delta$ en tant que $(\varphi, \Gamma)$-module (ou $\mathbf{Q}_p^*$-module) sur $\breve{\mathscr{O}}_L$.

Notons $\mathbf{V}(\delta)$ la $\mathscr{O}_L$-représentation $(\mathscr{O}_L \cdot \widetilde{\mathbf{A}} \otimes \delta)^{\varphi=1} = (\breve{\mathscr{O}}_L \cdot e_\delta)^{\varphi=1}$ de $G_{\mathbf{Q}_p}$ ; le choix d'une base (i.e. de $\alpha_\delta \in \breve{\mathscr{O}}_L^*$ vérifiant $\varphi(\alpha_\delta) = \delta(p)^{-1}\alpha_\delta$) fournit un isomorphisme $\mathscr{O}_L(\delta) \cong \mathbf{V}(\delta)$.

***Lemme 3.2.*** — *On a un isomorphisme :*

$$H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta))^{G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} (H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \otimes e_\delta)^{\mathbf{Q}_p^*}.$$

*Plus généralement, si $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ sont des caractères continus,*

$$H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta_1\delta_2))^{G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}} \xrightarrow{\sim} (H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L \otimes \delta_1) \otimes e_{\delta_2})^{\mathbf{Q}_p^*}.$$

*Démonstration.* — Cela résulte du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \otimes e_\delta)^{\mathbf{Q}_p^*} & = & (H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \otimes e_\delta)^{\mathbf{Z}_p^* \times \varphi^{\mathbf{Z}}} \\ & & \downarrow \wr \\ H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta))^{G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}} & = & (H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L)\widehat{\otimes}(\breve{\mathscr{O}}_L \otimes e_\delta))^{\mathbf{Z}_p^* \times \sigma_p^{\widehat{\mathbf{Z}}} \times \varphi^{\mathbf{Z}}} \end{array}$$

Dans ce diagramme :
- L'égalité de la première ligne est juste l'identification $\mathbf{Q}_p^* = \mathbf{Z}_p^* \times \varphi^{\mathbf{Z}}$.
- L'isomorphisme vertical découle du lemme 3.1.
- On a $H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta)) = H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{O}_L) \otimes \mathbf{V}(\delta)$ car $H'_{\mathbf{Q}_p}$ agit trivialement sur $\mathbf{V}(\delta)$, et l'isomorphisme $\mathbf{V}(\delta) \cong (\breve{\mathscr{O}}_L \otimes e_\delta)^{\varphi=1}$ est la définition de $\mathbf{V}(\delta)$ (cf. ci-dessus). □

***Lemme 3.3.*** — (i) *On a :*
- $H^0(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta)) \otimes_{\mathscr{O}_L} L = 0$ *sauf si* $\delta = 1$ *où il est de dimension* 1.
- $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta)) \otimes_{\mathscr{O}_L} L$ *est de dimension* 1 *sauf si* $\delta = 1, \chi$ *où il est de dimension* 2.
- $H^2(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta)) \otimes_{\mathscr{O}_L} L = 0$ *sauf si* $\delta = \chi$ *où il est de dimension* 1.

(ii) *La flèche*

$$H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta))\otimes_{\mathscr{O}_L} L \to H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta)\otimes_{\mathscr{O}_L} L)^{G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}} \to (H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{\mathscr{O}}_L)\otimes_{\mathscr{O}_L} Le_\delta))^{\mathbf{Q}_p^*}$$

*déduite du lemme 3.2 est un isomorphisme sauf si $\delta = 1$ où elle est identiquement nulle.*

*Démonstration.* — Le (i) est standard (la preuve utilise la formule d'Euler-Poincaré de Tate et la dualité de Tate pour calculer la dimension des $H^2$ en fonction de celle des $H^0$, ou bien on peut utiliser la théorie des $(\varphi, \Gamma)$-modules [**3**, chap. 2] ou [**7**, th. 1.38]).

Passons au (ii). La suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'extension de groupes

$$1 \to H'_{\mathbf{Q}_p} \to G_{\mathbf{Q}_p} \to \widehat{\mathbf{Q}_p^*} \to 1$$

nous donne une suite exacte (on note $\delta$ la $L$-représentation $L(\delta)$ de $G_{\mathbf{Q}_p}$)

$$(3.4)\quad 0 \to H^1(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \delta) \to H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \delta) \to H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \delta)^{\widehat{\mathbf{Q}_p^*}} \to H^2(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \delta) \to H^2(G_{\mathbf{Q}_p}, \delta),$$

Maintenant $\widehat{\mathbf{Q}_p^*} \cong \mathbf{Z}_p^2 \times U$, où $U$ est profini d'ordre premier à $p$ (à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ près si $p = 2$). Il s'ensuit que :

- $H^i(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \delta) = 0$, pour tout $i$, si $\delta \neq 1$, ce qui prouve le (ii) dans ce cas-là.
- Si $\delta = 1$, on a $\dim_L H^1(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \delta) = 2$ et $\dim_L H^2(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \delta) = 1$. On conclut grâce à ces calculs de dimension et de ceux du (i) que la flèche est effectivement nulle dans le cas $\delta = 1$. □

***Remarque 3.5***. — Dans le cas pathologique $\delta = 1$, la suite exacte (3.4) montre que $(H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L})\otimes e_\delta)^{\mathbf{Q}_p^*} \to H^2(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \delta)$ est un isomorphisme, et donc $(H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L})\otimes e_\delta)^{\mathbf{Q}_p^*}$ est de dimension 1 mais ne semble avoir aucun lien avec la cohomologie de $G_{\mathbf{Q}_p}$.

## 4. Description de l'image

### 4.1. Vecteurs $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$-continus

*4.1.1. Fonctions presque périodiques à l'infini.* — On dit que $\phi \in \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L/p^n)$ est *périodique à l'infini* si il existe $k \geq 1$ tel que $\phi(x) = \phi(p^{-k}x)$ pour tout $x$ assez grand (i.e., tout $x$ vérifiant $v_p(x) \leq -N$ pour $N \in \mathbf{N}$ assez grand). On dit que $\phi \in \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ est *presque périodique à l'infini* si son image dans $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L/p^n)$ est périodique à l'infini, pour tout $n$.

On note $\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ l'espace des fonctions continues, presque périodiques à l'infini et $\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L/p^n)$ celui des fonctions continues (et donc localement constantes), périodiques à l'infini. On a $\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L) = \varprojlim_n \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L/p^n)$. Notons que, si $\phi \in \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)$, alors $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}_p \smallsetminus \mathbf{Z}_p}\phi \in \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ par définition de la complétion profinie.

***Lemme 4.1***. — (i) *Tout $\phi \in \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\phi_0 + \mathbf{1}_{\mathbf{Q}_p \smallsetminus \mathbf{Z}_p}\phi_\infty$, avec $\phi_0 \in \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$ et $\phi_\infty \in \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)$.*

(ii) *$\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)$ est stable par $\mathbb{P}$ et $\phi \mapsto \phi_\infty$ induit une suite exacte*

$$0 \to \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \to \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L) \to \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L) \to 0$$

*$\mathbb{P}$-équivariante, l'action de $\mathbb{U}$ sur $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)$ étant triviale.*

*Démonstration.* — Il suffit de prouver l'énoncé équivalent pour $\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L/p^n)$ et de passer à la limite. Soit donc $\phi \in \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L/p^n)$. Par définition, il existe $\phi_\infty : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L/p^n$, périodique (i.e. il existe $k \geq 1$ tel que $\phi_\infty(p^{-k}x) = \phi_\infty(x)$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^*$) coïncidant avec $\phi$ pour $x$ assez grand ; $\phi_\infty$ est uniquement déterminée et $\phi - \mathbf{1}_{\mathbf{Q}_p \setminus \mathbf{Z}_p}\phi_\infty$ est à support compact.

Ceci prouve le (i) ; le (ii) résulte de ce que, si $\phi \in \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L/p^n)$, et si $b \in \mathbf{Q}_p$, alors $\phi(x-b) - \phi(x)$ est identiquement nul pour $x$ assez grand (si $\phi(p^{-k}x) = \phi(x)$ pour $x$ assez grand, et si $v_p(x) = -kq + r$, avec $0 \leq r \leq q-1$, on a $\phi(x-b) - \phi(x) = \phi(p^{kq}x - p^{kq}b) - \phi(p^{kq}x)$, et les $p^{kq}x$ varient dans un compact tandis que $p^{kq}b \to 0$). □

***Corollaire 4.2.*** — *On a des flèches $\mathbf{Q}_p^*$-équivariantes*

$$\frac{\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}} \xleftarrow{\sim} \frac{\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L)} \hookrightarrow \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L)}.$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence du lemme 4.1 et de la décomposition $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L) = \mathscr{O}_L \mathbf{1}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0$. □

*4.1.2. Presque périodicité et $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$-continuité.* — Si $V$ est un $\mathscr{O}_L$-module séparé et complet pour la topologie $p$-adique, muni d'une action continue de $\mathbf{Q}_p^*$, on dit que $v \in V$ est *$\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$-continu* si la fonction $\gamma \mapsto \gamma \star v$, de $\mathbf{Q}_p^*$ dans $V$, s'étend en une fonction continue sur $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$. De manière équivalente, $v$ est $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$-continu si, pour tout $n \geq 1$, $k \mapsto p^k \star v$ est périodique vue comme fonction de $\mathbf{Z}$ dans $V/p^nV$.

***Lemme 4.3.*** — *L'injection du cor. 4.2 identifie $\frac{\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}}$ au sous-espace des vecteurs $\widehat{\mathbf{Q}_p^*}$-continus de $\frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L)}$.*

*Démonstration.* — Il s'agit de comprendre quels sont les vecteurs invariants de $V_n := \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1 \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n)}$ sous l'action du semi-groupe $p^{k\mathbf{N}}$, où $p \star \phi(x) = \phi(x/p)$ si $x \notin \mathbf{Z}_p$ et $p \star \phi(x) = 0$ si $x \in \mathbf{Z}_p$. Pour cela, on utilise la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte

$$0 \to \mathscr{C}(\mathbf{P}^1 \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n) \to \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n) \to V_n \to 0.$$

On a $H^0(p^{k\mathbf{N}}, \mathscr{C}(\mathbf{P}^1 \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n)) = (\mathscr{O}_L/p^n)\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1 \setminus \mathbf{Z}_p}$, et $H^0(p^{k\mathbf{N}}, \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n))$ s'identifie au sous-espace de $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p^*, \mathscr{O}_L/p^n)$ des fonctions vérifiant $\phi(p^kx) = \phi(x)$ pour tout $x$ ; on a donc

$$\varinjlim_k H^0(p^{k\mathbf{N}}, \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n)) \cong \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L/p^n)$$

Passons au calcul de $H^1(p^{k\mathbf{N}}, \mathscr{C}(\mathbf{P}^1 \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n))$. On a une décomposition $p^{k\mathbf{N}}$-équivariante $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1 \setminus \mathbf{Z}_p, \mathscr{O}_L/p^n) = (\mathscr{O}_L/p^n)\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1\setminus\mathbf{Z}_p} \oplus X_n$, où $X_n$ est le sous-espace des $\phi$ avec $\phi(\infty) = 0$. On a $H^1(p^{k\mathbf{N}}, X_n) = 0$ car, si $\phi \in X_n$, l'équation $p^k \star \phi' - \phi' = \phi$ admet comme solution $\phi'$, avec $-\phi'(x) = \phi(x) + \phi(p^{-k}x) + \phi(p^{-2k}x) + \cdots$ (la série est en fait une somme finie). Par contre $H^1(p^{k\mathbf{N}}, (\mathscr{O}_L/p^n)\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1\setminus\mathbf{Z}_p})$ est de rang 1 sur $\mathscr{O}_L/p^n$, engendré par le bord de $\phi_k := 1_{\mathbf{Q}_p\setminus\mathbf{Z}_p} v_p(x/p^k)$ (qui ne vérifie pas $p^k \star \phi_k = \phi_k$ mais vérifie $p^{p^n k} \star \phi_k = \phi_k$, et donc sa classe de cohomologie meurt en restriction à $p^{p^n k\mathbf{N}}$). Il s'ensuit que

$$\varinjlim_k H^0(p^{k\mathbf{N}}, V_n) \cong \frac{\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L/p^n)}{\{\mathrm{Ctes}\}}$$

Le résultat s'en déduit en passant à la limite sur $n$. □

*4.1.3. Le résultat principal*

***Théorème 4.4***. — *L'application $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \to \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L)} \otimes \chi^{-1}$ du diag. (2.6) se factorise à travers $\frac{\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}}$ et induit un diagramme $\mathbf{Q}_p^*$-équivariant dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{O}}_{\mathscr{E}}^{-} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & (\mathscr{O}_L \cdot \widetilde{\mathbf{A}}^{-})^{H_{\mathbf{Q}_p}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)_0 \otimes \chi^{-1} \arrow[r] & \frac{\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}} \otimes \chi^{-1} \arrow[r] & \frac{\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)}{\{\mathrm{Ctes}\}} \otimes \chi^{-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*Démonstration*. — Compte-tenu du lemme 4.1, il suffit de prouver le premier énoncé et la bijectivité de la flèche de droite.

Comme l'application $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L(1)) \to \frac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, \mathscr{O}_L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, \mathscr{O}_L)}$ est $\mathbf{Q}_p^*$-équivariante, le premier énoncé résulte de ce que l'action de $\mathbf{Q}_p^*$ sur $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \breve{\mathscr{O}}_L) \subset \breve{\mathscr{O}}_L \widehat{\otimes} H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Z}_p)$ est la restriction d'une action continue de $\widehat{\mathbf{Q}_p^*} = G_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}$ et du lemme 4.3.

L'injectivité de la flèche qui s'en déduit résulte de celle de la flèche initiale. Il ne reste que la surjectivité à prouver. Si $K$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, abélienne, notons $\Gamma'_K = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}/K)$. Si $K$ contient $\boldsymbol{\mu}_{2p}$, alors $\Gamma'_K$ est d'indice fini dans $(1+2p\mathbf{Z}_p) \times \varphi^{\widehat{\mathbf{Z}}}$, et donc est isomorphe à $\mathbf{Z}_p \times \widehat{\mathbf{Z}}$.

Pour prouver la surjectivité, il suffit de la prouver modulo $p$ et, pour cela, il suffit de vérifier que les invariants par $\Gamma'_K$ ont la même dimension pour $K$ assez grand. Maintenant, on a $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \overline{\mathbf{F}}_p(1)) = (\overline{\mathbf{F}}_p \otimes H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{F}_p(1)))^{H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}}$ car les $H^i(H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p}, \overline{\mathbf{F}}_p(1))$, pour $i = 1, 2$, sont nuls vu que $H_{\mathbf{Q}_p}/H'_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$ et $\overline{\mathbf{F}}_p(1) = \overline{\mathbf{F}}_p$ en tant que $H_{\mathbf{Q}_p}$-module. Or

$$\dim_{\mathbf{F}_p} (\overline{\mathbf{F}}_p \otimes V)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)} = \dim_{\mathbf{F}_p} V,$$

si $V$ est une $\mathbf{F}_p$-représentation lisse de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$. On est donc ramené à calculer $\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{F}_p(1))^{\Gamma'_K}$ pour $K$ assez grand (et $\mathbf{F}_p(1) = \mathbf{F}_p$ comme $G_K$-module).

On a une suite exacte

$$0 \to H^1(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p(1)) \to H^1(G_K, \mathbf{F}_p(1)) \to H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{F}_p(1))^{\Gamma'_K} \to H^2(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p(1)).$$

Comme $\Gamma'_K = \mathbf{Z}_p^2 \times \Gamma''_K$, où $\Gamma''_K$ est un groupe profini de cardinal premier à $p$, et comme $\mathbf{F}_p(1) = \mathbf{F}_p$, on a

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p(1)) = 2 \text{ et } \dim_{\mathbf{F}_p} H^2(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p(1)) = 1.$$

Par ailleurs, notons que les $H^0$ et $H^2$ de $G_K$ sur $\mathbf{F}_p(1)$ sont de dimension 1, et donc la formule d'Euler-Poincaré plus la dualité locale, donnent

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(G_K, \mathbf{F}_p(1)) = [K : \mathbf{Q}_p] + 2.$$

On en déduit que

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{F}_p(1))^{\Gamma'_K} \leq [K : \mathbf{Q}_p] + 1.$$

Par ailleurs, on a

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{F}_p(1))^{\Gamma'_K} \geq \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))^{\Gamma'_K}$$

et $H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))^{\Gamma'_K}$ vit dans une suite identique à la suite ci-dessus dans laquelle on remplace $\mathbf{F}_p(1)$ par $\mathbf{Q}_p(1)$. La différence est que l'on a $H^i(\Gamma'_K, \mathbf{Q}_p(1)) = 0$, si $i = 1, 2$ (car $H^i(\Gamma_K, \mathbf{Q}_p(1)) = 0$ si $i = 0, 1$, où $\Gamma_K = \Gamma'_K \cap \mathbf{Z}_p^*$). La formule d'Euler-Poincaré (ou la théorie de Kummer) donne $\dim_{\mathbf{Q}_p} H^1(G_K, \mathbf{Q}_p(1)) = [K : \mathbf{Q}_p] + 1$ et donc $\dim_{\mathbf{Q}_p} H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))^{\Gamma'_K} = [K : \mathbf{Q}_p] + 1$ et, enfin,

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{F}_p(1))^{\Gamma'_K} = [K : \mathbf{Q}_p] + 1.$$

Pour calculer $(\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathbf{F}_p)/\mathbf{F}_p)^{\Gamma'_K}$, on utilise la suite exacte

$$0 \to \mathbf{F}_p \to \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathbf{F}_p)^{\Gamma'_K} \to (\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathbf{F}_p)/\mathbf{F}_p)^{\Gamma'_K} \to H^1(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p) \to H^1(\Gamma'_K, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathbf{F}_p)).$$

Or $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathbf{F}_p) \cong \mathscr{C}(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p)^{[\widehat{\mathbf{Q}_p^*} : \Gamma'_K]}$ en tant que $\Gamma'_K$-module et le lemme de Shapiro nous donne $\mathscr{C}(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p)^{\Gamma'_K} = \mathbf{F}_p$ et $H^1(\Gamma'_K, \mathscr{C}(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p)) = 0$. Comme $\dim_{\mathbf{F}_p} H^1(\Gamma'_K, \mathbf{F}_p) = 2$, on obtient

$$\dim_{\mathbf{F}_p} (\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathbf{F}_p)/\mathbf{F}_p)^{\Gamma'_K} = [\widehat{\mathbf{Q}_p^*} : \Gamma'_K] + 2 - 1 = [K : \mathbf{Q}_p] + 1. \qquad \square$$

### 4.2. Espaces propres pour l'action de $\mathbf{Q}_p^*$

***Lemme 4.5***. — *Soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ un caractère continu. Alors*

$$H^0\Big(\mathbf{Q}_p^*, \frac{\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, \mathscr{O}_L)}{\{\text{Ctes}\}} \otimes e_\delta\Big) = \begin{cases} \mathscr{O}_L\, \delta \otimes e_\delta & \text{si } \delta \neq 1, \\ \operatorname{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, \mathscr{O}_L) \otimes e_\delta & \text{si } \delta = 1. \end{cases}$$

*Démonstration*. — Le résultat est immédiat si $\delta \neq 1$. Si $\delta = 1$, on cherche les fonctions $\phi$ telles que $x \mapsto \phi(ax) - \phi(x)$ est une constante pour tout $a$ (modulo les $\phi$ constantes). Quitte à retirer une fonction constante, on peut supposer que $\phi(1) = 0$, et on a alors $\phi(ax) = \phi(x) + \phi(a)$ pour tous $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et $x \in \widehat{\mathbf{Q}_p^*}$. Le résultat s'en déduit. $\square$

Nous allons décrire la composée $\iota_\delta$ de la suite d'applications (cf. (ii) du lemme 3.3 et diag. (2.6))

$$H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta)) \to H^1(H'_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{V}(\delta))^{\widehat{\mathbf{Q}_p^*}} \to \big(H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L}) \otimes e_\delta\big)^{\mathbf{Q}_p^*} \to \big(\tfrac{\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, L)}{\mathscr{C}(\mathbf{P}^1, L)} \otimes e_{\chi^{-1}\delta}\big)^{\mathbf{Q}_p^*}$$

Pour énoncer le résultat, rappelons que, si $K$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on dispose d'une application de Kummer

$$\mathrm{Kum}_K : K^* \to H^1(G_K, \mathbf{Q}_p(1))$$

dont l'image est un $\mathbf{Z}_p$-réseau de $H^1(G_K, \mathbf{Q}_p(1))$. Par ailleurs $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ est de dimension 2, et possède une base naturelle $(v_p, \tau)$, où

$$\tau = p^{-c(p)} \log, \quad \text{avec } c(p) = 1 \text{ (resp. 2) si } p \neq 2 \text{ (resp. } p = 2)$$

et log est le logarithme d'Iwasawa (défini par $\log p = 0$), de telle sorte que $(v_p, \tau)$ est une base de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, \mathscr{O}_L)$ sur $\mathscr{O}_L$.

***Proposition 4.6.*** — (i) *Si $\delta \neq 1, \chi$, l'image de $\iota_\delta$ est $L \cdot \chi^{-1}\delta \otimes e_{\chi^{-1}\delta}$.*

(ii) *Si $\delta = \chi$, l'image de $\iota_\delta$ est $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L) \otimes e_1$. Plus précisément, si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$,*

$$\iota_\chi(\mathrm{Kum}_{\mathbf{Q}_p}(\alpha)) = [F : \mathbf{Q}_p](v_p(\alpha) \cdot \tau - \tau(\alpha) \cdot v_p) \otimes e_1$$

(iii) *Si $\delta = 1$, alors $\iota_\delta$ est identiquement nulle.*

*Démonstration.* — Si $\delta \neq \chi$, cela résulte des lemmes 4.5 et 3.3(ii).

Si $\delta = \chi$, on utilise la théorie des $(\varphi, \Gamma)$-modules pour décrire $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$, et le résultat est une conséquence de la prop. 4.11 et du lemme 4.13. □

*4.2.1. $(\varphi, \Gamma)$-modules et application de Kummer.* — Soient $F = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^{c(p)}})$ et $a$ le générateur topologique de $1 + p^{c(p)}\mathbf{Z}_p$ :

$$a = \exp(p^{c(p)})$$

Alors $\Gamma = \sigma_a^{\mathbf{Z}_p} \times \Delta$, avec $\Delta \cong \mathrm{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$.

Si $K = \mathbf{Q}_p, F$, la théorie locale du corps de classes fournit des isomorphismes

$$\mathrm{cl}_K : \mathrm{Hom}(K^*, \mathbf{Q}_p) \cong H^1(G_K, \mathbf{Q}_p), \quad \mathrm{Tr}_K : H^2(G_K, \mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$$

et, si $\ell \in \mathrm{Hom}(K^*, \mathbf{Q}_p)$ et $\alpha \in K^*$, on a :

$$\mathrm{Tr}_K(\mathrm{cl}_K(\ell) \cup \mathrm{Kum}_K(\alpha)) = \ell(\alpha) \tag{4.7}$$

Par ailleurs, si $x \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p)$ et $y \in H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$,

$$\mathrm{Tr}_F(\mathrm{res}^F_{\mathbf{Q}_p} x \cup \mathrm{res}^F_{\mathbf{Q}_p} y) = [F : \mathbf{Q}_p]\, \mathrm{Tr}_{\mathbf{Q}_p}(x \cup y) \tag{4.8}$$

Si $V$ est une $L$-représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$, on a $H^i(G_{\mathbf{Q}_p}, V) = H^i(G_F, V)^\Delta$, et si $D = \mathbf{D}(V)$, les [4] $H^i(G_F, V)$ sont naturellement isomorphes aux groupes de cohomogie du

4. Passer par $F$ permet de traiter sur le même plan les cas $p \neq 2$ où $\Gamma$ est procyclique et $p = 2$ où il ne l'est pas.

complexe

$$C^\bullet(D) := \big[\ D \xrightarrow{x\mapsto((\varphi-1)x,(\sigma_a-1)\cdot x)} D\oplus D \xrightarrow{(u,v)\mapsto(1-\sigma_a)u+(\varphi-1)v} D\ \big]$$

On note $H^i(D)$ (resp. $Z^i(D)$), pour $i=0,1,2$, les groupes de cohomologie (resp. de cocycles) du complexe $C^\bullet(D)$. On note $h^i_V : H^i(D) \xrightarrow{\sim} H^i(G_F,V)$ l'isomorphisme ci-dessus et aussi $h^i_V : Z^i(D)\to H^i(G_F,V)$ l'application qui s'en déduit.

Si $(u,v)\in Z^1(D)$, et si $\tilde c\in \widetilde{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D$ vérifie $(\varphi-1)\tilde c = u$, le cocycle associé à $(u,v)$ est

$$\sigma\mapsto c^{u,v}_\sigma := \tfrac{\sigma-1}{\sigma_a-1}v-(\sigma-1)\tilde c\in(\widetilde{\mathbf{A}}\otimes_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}} D)^{\varphi=1}=V. \tag{4.9}$$

Si $h^i_V(z)\in H^i(G_F,V)^\Delta = H^i(G_{\mathbf{Q}_p},V)$, on note $h^{i,\Delta}_V(z)$ l'image dans $H^i(G_{\mathbf{Q}_p},V)$ (i.e. $\mathrm{res}^F_{\mathbf{Q}_p} h^{i,\Delta}_V(z) = h^i_V(z)$).

***Exemple 4.10***. — Soit $\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}=\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}[\frac1p]$.

(i) Si $D=\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $H^1(D)^\Delta$ admet $(1,0)$ et $(0,1)$ comme base.

(ii) Si $D=\mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}\otimes\chi$, alors $H^1(D)^\Delta$ admet une base naturelle $(u_1,v_1)$, $(u_2,v_2)$ où $u_1=\frac1\pi+\frac12$, $v_2=\frac1\pi$, $v_1\in\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ et $\psi(u_2)=0$.

(Tout ceci est parfaitement classique : pour construire $(u_1,v_1)$, un petit calcul montre que $(u\sigma_u-1)\big(\frac1\pi+\frac12\big)\in\pi\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ pour tout $u\in\mathbf{Z}_p^*$, et on utilise la bijectivité de $\varphi-1$ sur $\pi\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ ; pour $(u_2,v_2)$, on utilise la bijectivité de $a\sigma_a-1$ sur $\mathbf{A}^{\psi=0}_{\mathbf{Q}_p}$ et le fait que $\psi(\frac1\pi)=\frac1\pi$ et donc $(\varphi-1)\frac1\pi\in\mathbf{A}^{\psi=0}_{\mathbf{Q}_p}$.)

***Proposition 4.11***. — (i) *On a* $h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p}(1,0)=v_p$ *et* $h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p}(0,1)=\tau$.

(ii) *On a* $h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p(1)}(v_1,u_1)=\frac{-1}{[F:\mathbf{Q}_p]}\mathrm{Kum}_{\mathbf{Q}_p}(a)$ *et* $h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p(1)}(v_2,u_2)=\frac{1}{[F:\mathbf{Q}_p]}\mathrm{Kum}_{\mathbf{Q}_p}(p)$.

*Démonstration*. — Le (i) se déduit facilement de la formule (4.9) (cf. [**8**, n° 3.2.3]). Pour démontrer le (ii), le plus simple est d'utiliser la dualité : notons $\check D=\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}}(D,\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p})\otimes\chi$ le dual de Tate de $D$ (la représentation associée est $\mathrm{Hom}(V,\mathbf{Q}_p(1))$). Si $(\check u,\check v)\in Z^1(\check D)$ et $(u,v)\in Z^1(D)$, alors (cf. [**1**] ou [**8**, n° 3.2.4]) :

$$h^1_{\check V}(\check u,\check v)\cup h^1_V(u,v)=h^2_{\mathbf{Q}_p(1)}(\langle\check u,\sigma_a(v)\rangle-\langle\check v,\varphi(u)\rangle)$$

Par ailleurs, si $z\in\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}\otimes\chi$, alors $h^2_{\mathbf{Q}_p(1)}(z)\in H^2(G_F,\mathbf{Q}_p(1))$ et $\mathrm{Tr}_F(h^2_{\mathbf{Q}_p(1)}(z)) = \mathrm{rés}_0\big(z\frac{d\pi}{1+\pi}\big)$ où $\mathrm{rés}_0\big(\sum a_k\pi^k\,d\pi\big)=a_{-1}$.

On a $\mathrm{rés}_0\big(v_1\frac{d\pi}{1+\pi}\big)=0$ car $v_1\in\mathbf{A}^+_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathrm{rés}_0\big(u_2\frac{d\pi}{1+\pi}\big)=0$ car $\psi(u_2)=0$. On en déduit les formules

$$\mathrm{Tr}_F(h^1_{\mathbf{Q}_p(1)}(u_1,v_1)\cup h^1_{\mathbf{Q}_p}(1,0))=0,\quad \mathrm{Tr}_F(h^1_{\mathbf{Q}_p(1)}(u_1,v_1)\cup h^1_{\mathbf{Q}_p}(0,1))=1$$
$$\mathrm{Tr}_F(h^1_{\mathbf{Q}_p(1)}(u_2,v_2)\cup h^1_{\mathbf{Q}_p}(1,0))=-1,\quad \mathrm{Tr}_F(h^1_{\mathbf{Q}_p(1)}(u_2,v_2)\cup h^1_{\mathbf{Q}_p}(0,1))=0$$

On en déduit le résultat en utilisant le (i) et la formule (4.7). (Le $\frac{1}{[F:\mathbf{Q}_p]}$ provient de la relation (4.8).) □

*4.2.2. $(\varphi,\Gamma)$-modules et détermination de $\iota_\chi$.* — Soient $D=\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}\otimes\chi$ et $(u,v)\in Z^1(D)$ d'image dans $H^1(D)$ invariante par $\Delta$. La restriction à $H_{\mathbf{Q}_p}$ de $\sigma\mapsto c_\sigma^{u,v}$ (cf. formule (4.9)) est $\sigma\mapsto-(\sigma-1)\tilde c$, et $\tilde c\in(\widetilde{\mathbf{A}}^-)^{H_{\mathbf{Q}_p}}$ (puisque $c_\sigma^{u,v}\in\mathbf{Z}_p$). Pour calculer $\iota_\chi(h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p(1)}(u,v))$, il s'agit de calculer la fonction $\phi_{\tilde c}$ associée à $\tilde c$ par la prop. 2.5 (plus précisément, il résulte du lemme 4.5 qu'il existe $\ell\in\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*,\mathscr{O}_L)$ et $C\in\mathscr{O}_L$ tels que $\phi_{\tilde c}-\ell=C$ sur $p^{-N}\mathbf{Z}_p$ si $N$ est assez grand, et alors $\iota_\chi(h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p(1)}(u,v))=\ell$). Pour ce faire, il faut revenir à la preuve de la prop. 2.5 dont nous reprenons certaines des notations ci-dessous.

Si $b\in\mathbf{Q}_p$, il existe $\tilde c(b)\in\widetilde{\mathbf{A}}^{++}$ tel que $(\sigma-1)\tilde c(b)=([\varepsilon^b]-1)c_\sigma^{u,v}$, pour tout $\sigma\in H_{\mathbf{Q}_p}$, et donc $v_b:=([\varepsilon^b]-1)\tilde c+\tilde c(b)\in\widetilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$, et $v_b$ modulo $\widetilde{\mathbf{A}}^{++}_{\mathbf{Q}_p}$ ne dépend pas du choix de $\tilde c(b)$. Notons que l'on peut prendre $\tilde c(pb)=\varphi(\tilde c(b))$ car $\varphi(c_\sigma^{u,v})=c_\sigma^{u,v}$ et $\varphi([\varepsilon^b]-1)=[\varepsilon^{pb}]-1$. Comme $\varphi(\tilde c)=\tilde c+u$, on a aussi

$$\varphi(v_b)=v_{pb}+([\varepsilon^{pb}]-1)u$$

Soient $\phi_b$ et $\phi_{pb}\in\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p,L)_0$ les fonctions associées aux images de $v_b,v_{pb}$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^-_{\mathbf{Q}_p}$ et soit $\phi_u\in\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p,\mathbf{Z}_p)$ la fonction associée à l'image de $u$ dans $\mathbf{A}^-_{\mathbf{Q}_p}$. Alors la relation ci-dessus se traduit par

$$\phi_b(p^{-1}x)=\phi_{pb}(x)+\phi_u(x-pb)-\phi_u(x),\qquad\text{pour tout } x\in\mathbf{Q}_p.\tag{4.12}$$

Par construction, $\phi_{\tilde c}\in\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p,\mathbf{Z}_p)$ satisfait la relation $\phi_b(x)=\phi_{\tilde c}(x-b)-\phi_{\tilde c}(x)$ pour tous $b,x\in\mathbf{Q}_p$. Si on reporte cette relation dans l'identité (4.12), on obtient que $x\mapsto\phi_{\tilde c}(p^{-1}x)-\phi_{\tilde c}(x)-\phi_u(x)$ est invariant par $x\mapsto x-pb$, pour tout $b$, et donc est une constante, ce qui fournit un moyen de calculer $\phi_{\tilde c}$ si on connait $\phi_u$.

***Lemme 4.13.*** — *On a les relations*

$$\iota_\chi\big(h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p(1)}(u_1,v_1)\big)=v_p\quad\text{et}\quad\iota_\chi\big(h^{1,\Delta}_{\mathbf{Q}_p(1)}(u_2,v_2)\big)=\tau$$

*Démonstration.* — • Comme $u_1=\frac{1}{\pi}+\frac12$, on a $\phi_{u_1}=\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$, et il existe $C$ tel que $\phi_{\tilde c}(p^{-1}x)-\phi_{\tilde c}(x)=C+\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(x)$ pour tout $x\in\mathbf{Q}_p^*$. Comme $\phi_{\tilde c}$ se prolonge par continuité en 0, on en déduit $C=-1$, et $\phi_{\tilde c}=v_p+C'$ sur $\mathbf{Q}_p\smallsetminus\mathbf{Z}_p$. On en tire la première relation.

• Comme $v_2=\frac1\pi$, on a $\phi_{v_2}=\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}$. Donc $\phi_{(\varphi-1)u_2}=-\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}$. La relation $(a\sigma_a-1)u_2=(\varphi-1)v_2$ se traduit par [5] $\phi_{u_2}(a^{-1}x)-\phi_{u_2}(x)=\phi_{(\varphi-1)v_2}=-\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}$.

Par ailleurs, comme $\psi(u_2)=0$, la fonction $\phi_{u_2}(x)$ est à support dans $\mathbf{Z}_p^*$. Donc, $\phi_{u_2}=\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}\cdot(\tau+C)$, avec $C\in\mathbf{Z}_p$. Les solutions de $\phi_{\tilde c}(p^{-1}x)-\phi_{\tilde c}(x)=\phi_{u_2}(x)$ admettant un prolongement continu en 0 sont de la forme $\mathbf{1}_{\mathbf{Q}_p\smallsetminus p\mathbf{Z}_p}\tau+C\,\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}+C'$. On en tire la seconde relation. $\square$

5. Le $a$ disparait grâce au twist $\chi^{-1}$ du dictionnaire d'analyse $p$-adique.

## 5. Application aux représentations de $\mathbb{G}$

### 5.1. Les séries principales de $\mathbb{G}$

*5.1.1. L'espace des paramètres.* — Soit $\widehat{\mathscr{T}}^0$ l'espace des caractères unitaires de $\mathbf{Q}_p^*$ : c'est le produit de l'espace des caractères de $\mathbf{Z}_p^*$ (une réunion de $p-1$ boules ouvertes – 2 si $p=2$) par celui des caractères unitaires de $p^{\mathbf{Z}}$ (un cercle).

Soit $\mathscr{S}^0$ l'éclatée de $\widehat{\mathscr{T}}^0 \times \widehat{\mathscr{T}}^0$ en la sous-variété des $(\delta_1, \delta_2)$ avec $\delta_1 = \chi\delta_2$. On a donc un morphisme surjectif $\pi : \mathscr{S}^0 \to \widehat{\mathscr{T}}^0 \times \widehat{\mathscr{T}}^0$ dont la fibre en $(\delta_1, \delta_2)$ est un point sauf si $\delta_1 = \chi\delta_2$ où cette fibre est isomorphe à $\mathbf{P}^1$. On identifie ce $\mathbf{P}^1$ au projectivisé de l'espace des logarithmes de $\mathbf{Q}_p^*$ ; et si $\mathscr{L}$ est une droite de l'espace des logarithmes, on note $(\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ le point de $\mathscr{S}^0$ correspondant.

*5.1.2. La représentation $V_z$ de $G_{\mathbf{Q}_p}$.* — On associe à $z \in \mathscr{S}^0(L)$ une représentation $V_z$ de $G_{\mathbf{Q}_p}$ :

- Si $\delta_1 \neq \delta_2, \chi\delta_2$, on prend pour $V_z$ l'unique extension non triviale de $\delta_2$ par $\delta_1$.
- Si $\delta_1 = \chi\delta_2$, on prend pour $V_z$ l'extension de $\delta_2$ par $\chi\delta_2$ dont la classe dans $\mathrm{Ext}^1(\delta_2, \chi\delta_2) \equiv H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L(\chi))$ est l'orthogonal de $\mathscr{L}$ pour l'accouplement $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L(\chi)) \times H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L) \to H^2(G_{\mathbf{Q}_p}, L(\chi)) = L$ (combinée avec l'identification $H^1(G_{\mathbf{Q}_p}, L) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$ de la théorie locale du corps de classe).
- Si $\delta_1 = \delta_2$, on pose $V_z = \delta_1 \oplus \delta_1$.

***Remarque 5.1.*** — Ce qui se passe au voisinage de $\{\delta_1 = \delta_2\}$ est peu clair. Si $\ell \in \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, \mathscr{O}_L)$, considérons la famille de représentations de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de matrice $\left(\begin{smallmatrix} \exp(u\ell) & \frac{\exp(u\ell)-1}{u} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ : elle est scindée pour $u \neq 0$ et, pour $u = 0$, on obtient une extension non triviale de 1 par 1 dont la classe est donnée par $\ell$. Il serait peut-être plus naturel de retirer le lieu $\{\delta_1 = \delta_2\}$ de $\mathscr{S}^0$.

*5.1.3. La représentation $\Pi_z$ de $\mathbb{G}$.* — On associe à $z \in \mathscr{S}^0(L)$ une représentation $\Pi_z$ de $\mathbb{G}$ dont la restriction à $\mathbb{P}$ vit dans une suite exacte $\mathbb{P}$-équivariante, non scindée,

$$0 \to \Pi_{z,0} \to \Pi_z \to J_z \to 0$$

où $J_z$ est le module de Jacquet de $\Pi_z$ et, si $\pi(z) = (\delta_1, \delta_2)$, alors

$$\Pi_{z,0} \cong \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, L)_0 \otimes \chi^{-1}\delta_1 \quad \text{et} \quad J_z \cong \delta_2$$

La recette est la suivante :

- Si $\delta_1 \neq \chi\delta_2$, on pose $\Pi_z := \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\delta_2 \otimes \delta_1\chi^{-1})$.
- Si $\delta_1 = \chi\delta_2$, alors $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\delta_2 \otimes \delta_1\chi^{-1})$ contient une sous-représentation de dimension 1, isomorphe à $\delta_2$ (identifié au caractère $\delta_2 \circ \det$ de $\mathbb{G}$) et le quotient est $\mathrm{St} \otimes \delta_2$, où St est la steinberg continue. Si $z = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L}$ est une droite de $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_p^*, L)$, on construit $\Pi_z$ comme une extension non triviale de $\delta_2$ par $\mathrm{St} \otimes \delta_2$ : on a $\Pi_{(\chi\delta_2, \delta_2, \mathscr{L})} = \Pi_{(\chi, 1, \mathscr{L})} \otimes \delta_2$ et pour contruire $\Pi_{(\chi,1,\mathscr{L})}$, on choisit une base $\ell$ de $\mathscr{L}$ et on définit $\Pi_{(\chi,1,\mathscr{L})}$ comme un sous-quotient de l'induite de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{G}$ de la représentation

$W_\ell$ de dimension 2, où $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ agit par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \ell(a/d) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On a une suite exacte $\mathbb{G}$-équivariante

$$0 \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(1\otimes 1) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}} W_\ell \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(1\otimes 1) \to 0$$

et on définit $\Pi_{(\chi,1,\mathscr{L})}$ comme le quotient par $\mathbf{1} \subset \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(1\otimes 1)$ (de gauche) de l'image inverse de $\mathbf{1} \subset \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(1\otimes 1)$ (de droite). On obtient donc une extension de $\mathbf{1}$ par $\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(1\otimes 1)\big)/\mathbf{1} = \mathrm{St}$, comme annoncé.

Par définition, $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(\delta_2\otimes\delta_1\chi^{-1})$ est un espace de fonctions sur $\mathbb{G}$. En évaluant ces fonctions en $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right)$, on obtient un plongement de $\Pi_z$ dans $\mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, L)$, et même dans $\mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, L)$ (si $\delta_1 = \chi\delta_1$, cela ne fournit qu'un plongement de $\mathrm{St}\otimes\delta_2$ ; pour obtenir un plongement de $\Pi_z$, on utilise les techniques de la preuve de la prop. 2.5). On obtient alors un diagramme commutatif, $\mathbb{P}$-équivariant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Pi_{z,0} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \Pi_z \arrow[r] \arrow[d, hook] & J_z \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, L)_0 \otimes \chi^{-1}\delta_1 \arrow[r] & \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, L)\otimes\chi^{-1}\delta_1 \arrow[r] & \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, L)\otimes\chi^{-1}\delta_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et l'image de $J_z$ est $(L\cdot\chi\delta_2\delta_1^{-1})\otimes\chi^{-1}\delta_1$ si $\delta_1\neq\chi\delta_2$, et est $\mathscr{L}\otimes\delta_2$ si $\delta_1 = \chi\delta_2$.

On a $\mathbf{V}(\Pi_z) = \mathbf{V}(\delta_1)$, ce qui fournit un morceau de la représentation $V_z$ (et donc aussi une partie de la description de $z$) mais il semble difficile de récupérer le reste en utilisant le foncteur $\mathbf{V}$. Mais la construction de $\mathbf{V}$ n'utilise que $\Pi_{z,0}$ et le th. 5.2 ci-dessous montre que $J_z$ contient le reste de l'information.

On a un diagramme commutatif (on passe de la première à la seconde ligne en inversant le diagramme du th. 4.4 ; les deux flèches verticales de droite sont surjectives mais pas injectives – leurs noyaux sont les fonctions constantes) :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{C}(\mathbf{Q}_p, L)_0 \otimes \chi^{-1}\delta_1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathscr{C}^{\mathrm{pp}}(\mathbf{Q}_p, L)\otimes\chi^{-1}\delta_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, L)\otimes\chi^{-1}\delta_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathscr{E}}^{-}\otimes\delta_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\widetilde{\mathbf{B}}^{-})^{H_{\mathbf{Q}_p}}\otimes\delta_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L})\otimes\delta_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{D}(\mathbf{V}(\delta_1)) \arrow[r] & (\widetilde{\mathbf{B}}^{-}\otimes\mathbf{V}(\delta_1))^{H_{\mathbf{Q}_p}} \arrow[r] & H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L}(\delta_1)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

En combinant ce diagramme avec le diagramme précédent, on obtient une injection $\mathbb{P}$-équivariante $\Pi_z \hookrightarrow (\widetilde{\mathbf{B}}^{-}\otimes\mathbf{V}(\Pi_z))^{H_{\mathbf{Q}_p}}$ qui était le point de départ de cet article. On obtient aussi une injection $J_z \hookrightarrow H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L}(\delta_1))$. Rappelons que le groupe de droite contient $\mathrm{Ext}(\mathbf{V}(\delta), \mathbf{V}(\delta_1))$ pour tout $\delta$.

***Théorème 5.2***. — *Si $\delta_1\neq\delta_2$, l'image de $J_z$ dans $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L}(\delta_1))$ est une droite de* $\mathrm{Ext}(\mathbf{V}(\delta_2), \mathbf{V}(\delta_1))$ *et l'extension de $\mathbf{V}(\delta_2)$ par $\mathbf{V}(\delta_1)$ correspondante est isomorphe à $V_z$.*

*Démonstration*. — Que l'image soit une droite est la traduction du fait que $J_z$ est de dimension 1 et n'est pas contenue dans le noyau. Qu'elle soit incluse dans

$\mathrm{Ext}(\mathbf{V}(\delta_2), \mathbf{V}(\delta_1))$ résulte de la $\mathbb{P}$-équivariance et de la détermination des sous-espaces propres pour l'action de $\mathbf{Q}_p^*$ (cf. (ii) du lemme 3.3). Si $\delta_1 \neq \chi\delta_2$, il y a une seule extension possible, ce qui démontre le résultat dans ce cas. Si $\delta_1 = \chi\delta_2$, que l'extension obtenue soit $V_z$ est une traduction du (ii) de la prop. 4.6. □

***Remarque 5.3***. — Si $\delta_1 = \delta_2$, l'image de $J_z$ dans $H^1(H_{\mathbf{Q}_p}, \check{L}(\delta_1))$ fournit une classe de $H^2(\widehat{\mathbf{Q}_p^*}, L)$ (cf. rem. 3.5), ce qui semble difficile à interpréter. Ce n'est probablement pas sans lien avec la rem. 5.1.

## Références


[1] D. Benois, On Iwasawa theory of crystalline representations, Duke Math. J. **104** (2000), 211–267.

[2] L. Berger, M. Vienney, Irreducible modular representations of the Borel subgroup of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Automorphic Forms and Galois Representations. Vol I*, 32–51, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **414**, Cambridge Univ. Press, 2014.

[3] G. Chenevier, Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$, Math. Ann. **335** (2013), 1469–1525.

[4] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations $p$-adiques d'un corps local, J. AMS **12** (1999), 241–268.

[5] P. Colmez, $(\varphi, \Gamma)$-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 61–153.

[6] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $(\varphi, \Gamma)$-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[7] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ : vecteurs localement analytiques, *Automorphic Forms and Galois Representations Vol.1*, London Math. Soc. Lect. Note Series **415** (2014), 286–358.

[8] P. Colmez, S. Gilles, W. Nizioł, Arithmetic duality for the pro-étale cohomology of $p$-adic analytic curves, `arXiv:2308.07712[math.NT]`, preprint 2023.

[9] P. Colmez, S. Wang, Une factorisation du système de Beilinson-Kato, `arXiv:2104.09200[math.NT]`, preprint 2021.

[10] M. Emerton, T. Gee, E. Hellmann, An introduction to the categorical $p$-adic Langlands program, `arXiv:2210.01404[math.NT]`, preprint 2022.



Pierre Colmez, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
*E-mail :* `pierre.colmez@imj-prg.fr`

Shanwen Wang, School of mathematics, Renmin University of China, 59 ZhongGuanCun Street, 100872 Beijing, P.R. China • *E-mail :* `s_wang@ruc.edu.cn`