FAMILLES DE REPRÉSENTATIONS DE DE RHAM ET MONODROMIE p-ADIQUE

par

Laurent Berger & Pierre Colmez

Résumé. — On donne une formalisation de la méthode de Sen pour les représentations p-adiques. Comme application de ces techniques, on montre que (1) toute représentation p-adique est surconvergente (2) si on se donne un espace $\mathscr{X} = \mathrm{Spm}(S)$ qui paramétrise des représentations p-adiques V_x, alors l'ensemble des x tels que V_x est de de Rham (ou semi-stable, ou cristalline) à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a, b]$ fixé est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$ et (3) les modules de Fontaine $\mathrm{D}_*(V)$ associés varient analytiquement.

Abstract **(Families of de Rham representations and p-adic monodromy)**
We give a formalization of Sen's method for p-adic representations. As an application of these techniques, we show that (1) every p-adic representation is overconvergent (2) given a space $\mathscr{X} = \mathrm{Spm}(S)$ which parameterizes some p-adic representations V_x, the set of x's such that V_x is de Rham (or semistable, or crystalline) with Hodge-Tate weights in a fixed interval $[a, b]$ is an S-analytic subspace of $\mathscr{X}$ and (3) the associated Fontaine modules $\mathrm{D}_*(V)$ vary analytically.

Table des matières

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 11F.

1. Introduction

L'objet de cet article est d'étudier les familles de représentations p-adiques en utilisant la méthode de Sen. Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et soit S une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach dont on note $\mathscr{X}$ le spectre maximal ; pour pouvoir appliquer la théorie de Hodge p-adique usuelle aux points de $\mathscr{X}$, on suppose que pour tout $x \in \mathscr{X}$, le corps $S/\mathfrak{m}_x$ est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$.

Une famille de représentations de $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ est un S-module libre V de rang fini muni d'une action S-linéaire et continue de G_K. La méthode de Sen consiste en une formalisation des calculs de Sen (qui portaient à l'origine sur la cohomologie galoisienne de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C}_p)$). En appliquant cette méthode aux anneaux d'éléments surconvergents, on retrouve le théorème principal de [**CC98**] : si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, alors V est surconvergente.

La même méthode appliquée à une famille de représentations fournit une famille de (φ, Γ)-modules surconvergents. De fait, on a le résultat suivant (théorème 4.2.9).

Théorème A. — *Si V est une S-représentation de G_K, alors il existe un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_K^\dagger$-module $\mathrm{D}^\dagger(V)$ localement libre de rang d et stable par φ et Γ_K tel que si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}^\dagger(V) \to \mathrm{D}^\dagger(V_x)$ est un isomorphisme pour tout $x \in \mathscr{X}$.*

Les liens entre (φ, Γ)-modules et théorie de Hodge p-adique permettent alors de montrer le théorème suivant (théorèmes 5.3.1 et 5.3.2).

Théorème B. — *Si V est une S-représentation de G_K, et si $[a, b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, alors l'ensemble $\mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$ des $x \in \mathscr{X}$ tels que V_x est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a, b]$ est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$.*

Si l'on suppose que le radical de Jacobson de S est nul et que $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$, alors :

(1) *le $S \otimes K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$ est localement libre de rang d ;*

(2) *on a $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{S\otimes K} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V$;*

(3) *si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V_x)$ est un isomorphisme.*

En chemin, on obtient d'ailleurs des résultats analogues avec « Hodge-Tate » à la place de « de Rham », cf. théorèmes 5.1.3 et 5.1.4.

Une application « en famille » du théorème de monodromie p-adique nous permet alors d'obtenir le résultat suivant (théorème 6.3.2 et corollaire 6.3.3).

Théorème C. — *Soient S une algèbre affinoïde réduite, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ et V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$. Il existe alors une extension finie L de K telle que le $S \otimes L_0$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V)$ est localement libre de rang d et vérifie $(S \otimes L) \otimes_{S \otimes L_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V)$;*

Les propriétés suivantes sont alors vérifiées :

(1) si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x)$ est un isomorphisme ;

(2) si τ est un type du groupe d'inertie $I(L/K)$, alors l'ensemble $\mathscr{X}(\tau)$ des x tels que le type de V_x est τ, est une réunion de composantes Zariski connexes de $\mathscr{X}$;

(3) si $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ ou $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ dénote l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ où V_x est cristalline ou semi-stable, alors $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ et $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ sont des sous-espaces S-analytiques ;

(4) si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V_x)$ est un isomorphisme ;

(5) si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V_x)$ est un isomorphisme.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous donnons une démonstration d'un théorème non publié de Wintenberger sur la continuité des poids de Hodge-Tate quand une représentation varie. En fait, si $P_{\mathrm{Sen},V}$ dénote le polynôme caractéristique de l'opérateur de Sen d'une représentation V de G_K, nous montrons le résultat suivant (théorème 7.1.1).

Théorème D. — *Il existe une constante $c(d,K)$ telle que si V_1 et V_2 sont deux représentations de dimension d de G_K qui sont congrues modulo p^k, alors les polynômes P_{Sen,V_1} et P_{Sen,V_2} sont congrus modulo $p^{k-c(d,K)}$.*

Notons pour terminer que des résultats en relation avec les théorèmes A, B et C ont été obtenus par Andreatta et Brinon (qui ont étendu la méthode de Sen dans [**AB06**]), Dee [**Dee01**], Kisin (qui a démontré l'algébricité de $\mathscr{X}(\tau)$ du (2) du théorème C dans [**Kis06**]) et Liu [**Liu06**].

Remerciements : Nous remercions les personnes suivantes pour des discussions utiles sur des points reliés à cet article : Gaëtan Chenevier, Brian Conrad, Philippe Gille et Kiran Kedlaya. Nous remercions par ailleurs Kiran Kedlaya, Ruochuan Liu et Fucheng Tan pour leurs remarques et leurs suggestions.

2. Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons quelques définitions et résultats qui servent dans la suite de l'article.

2.1. Algèbres de coefficients et produits tensoriels complétés

Dans tout cet article, S est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach. On note $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, c'est-à-dire l'ensemble des idéaux maximaux de S. On pense aux éléments de $\mathscr{X}$ comme à des points et on écrit $\mathfrak{m}_x$ pour désigner l'idéal maximal de S correspondant au point x. Si $f \in S$, alors on note $f(x)$ l'image de f dans $E_x = S/\mathfrak{m}_x$.

On dit qu'une partie P de $\mathscr{X}$ est un *sous-espace S-analytique* s'il existe un idéal I de S tel que $P = \{x \in \mathscr{X}$ tels que $I \subset \mathfrak{m}_x\}$ ou, ce qui revient au même, s'il existe une famille $\{f_\alpha\}_\alpha$ d'éléments de S tels que $P = \{x \in \mathscr{X}$ tels que $f_\alpha(x) = 0$ pour tout $\alpha\}$.

Plutôt que de travailler avec des normes, on préfère travailler avec des « valuations » sur S, qui pour $f, g \in S$ ne satisfont alors pas $\mathrm{val}_S(fg) = \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$ mais $\mathrm{val}_S(fg) \geqslant \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$, ce qui fait que val_S vérifie :

(1) $\mathrm{val}_S(f) = +\infty \Leftrightarrow f = 0$;

(2) $\mathrm{val}_S(fg) \geqslant \mathrm{val}_S(f) + \mathrm{val}_S(g)$;

(3) $\mathrm{val}_S(f + g) \geqslant \inf(\mathrm{val}_S(f), \mathrm{val}_S(g))$;

Dans la suite de cet article, on dit que S est une *algèbre de coefficients* si S vérifie les trois conditions ci-dessous :

(1) S contient $\mathbf{Q}_p$ et la restriction de val_S de S à $\mathbf{Q}_p$ est la valuation p-adique val_p ;

(2) pour tout $x \in \mathscr{X}$, E_x est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$;

(3) le radical de Jacobson $\mathrm{rad}(S)$ est nul (en particulier S est réduite) ;

Notons que les algèbres affinoïdes réduites sont des exemples d'algèbres de coefficients. On note $\mathcal{O}_S$ l'anneau des entiers de S pour val_S.

Si S est une algèbre de coefficients et si $\mathscr{Y}$ est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$, défini par un idéal I, alors $\mathscr{Y}$ est l'espace associé à l'algèbre de coefficients $S/\sqrt{I}$.

Lemme 2.1.1. — *Soit S une algèbre de coefficients.*

(1) *Si $f \in S$ est tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathscr{X}$, alors f est une unité de S ;*

(2) *si M est un S-module plat, et si $y \in M$ est tel que $y(x) \in M/\mathfrak{m}_x M$ est nul pour tout $x \in \mathscr{X}$, alors $y = 0$.*

Démonstration. — Le (1) résulte du fait que f n'est dans aucun idéal maximal, et que c'est donc une unité. Le (2) résulte du fait que l'application $S \to \prod S/\mathfrak{m}_x$ est injective puisque l'on a supposé que $\mathrm{rad}(S) = 0$, et qu'alors l'application $M \to \prod M/\mathfrak{m}_x M$ reste injective si M est plat. □

Si $x \in \mathscr{X}$, alors le corps E_x est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et est donc muni de la valuation p-adique val_p. Si $f \in S$, on définit alors la valuation spectrale par $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}(f) = \inf_{x \in \mathscr{X}} \mathrm{val}_p(f(x))$. Rappelons le résultat suivant (cf. [**BGR84**, §6.2.4])

Proposition 2.1.2. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite, alors les normes déduites de val_S et $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}$ sont équivalentes.*

Nous avons besoin dans le chapitre 6 du résultat suivant, qui nous assure que la frontière de Shilov du spectre (de Berkovich) de S existe et est finie. Une *semi-valuation multiplicative* est une application $\mathrm{val} : S \to \mathbf{R}$ qui vérifie $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$ et $\mathrm{val}(x+y) \geqslant \inf(\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y))$ mais pas $\mathrm{val}(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition 2.1.3. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite, alors il existe $m \geqslant 1$ et m semi-valuations multiplicatives $\mathrm{val}_1, \dots, \mathrm{val}_m$ sur S telles que pour tout $f \in S$, on ait $\mathrm{val}_{\mathrm{sp}}(f) = \min(\mathrm{val}_1(f), \dots, \mathrm{val}_m(f))$.*

Démonstration. — C'est le corollaire 2.4.5 de [**Bkv90**], la frontière de Shilov étant définie après la proposition 2.4.4. □

Corollaire 2.1.4. — *Si S est une algèbre affinoïde réduite munie de la valuation spectrale, alors il existe $m \geqslant 1$ et m corps $E_1, \dots, E_m$ complets pour des valuations discrètes tels que l'on ait un plongement isométrique $S \to \oplus_{i=1}^m E_i$.*

Enfin, si E et F sont deux espaces de Banach, on dénote par $E \widehat{\otimes} F$ leur produit tensoriel complété au-dessus de $\mathbf{Q}_p$. Si E et F sont deux $\mathbf{Z}_p$-modules topologiques complets, on dénote alors par $E \widehat{\otimes} F$ leur produit tensoriel complété au-dessus de $\mathbf{Z}_p$ (cf. [**BGR84**, §2.1.7]).

2.2. Descente étale

Soit B une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach munie d'une action continue d'un groupe fini G. On note $B^\natural$ l'anneau B sur lequel G agit trivialement. On suppose que :

(1) le B^G-module B est libre de rang fini et fidèlement plat ;

(2) on a $B^\natural \otimes_{B^G} B \simeq \oplus_{g \in G} B^\natural \cdot e_g$ (où $e_g^2 = e_g$, $e_g e_h = 0$ si $g \neq h$ et $g(e_h) = e_{gh}$).

Proposition 2.2.1. — *Si S est une algèbre de Banach (sur laquelle G agit trivialement), et si M est un $S \widehat{\otimes} B$-module localement libre de type fini muni d'une action semi-linéaire de G, alors :*

(1) *M^G est un $S \widehat{\otimes} B^G$-module localement libre de type fini ;*

(2) *l'application* $(S\widehat{\otimes}B)\otimes_{S\widehat{\otimes}B^G} M^G \to M$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soit $\pi_G = (\sharp G)^{-1}\sum_{g\in G} g \in B[G]$. Si N est un $B[G]$- module (quelconque), alors on a une décomposition $N = \pi_G N \oplus \ker \pi_G$ et $N^G = \pi_G N$. En particulier, on a $M = M^G \oplus \ker \pi_G$ ce qui fait que M^G est un $S\widehat{\otimes}B^G$-module localement libre de type fini, étant un facteur direct du $S\widehat{\otimes}B^G$-module localement libre de type fini M. Ceci montre le (1).

Montrons à présent le (2). Comme on a un isomorphisme $(S\widehat{\otimes}B)\otimes_{S\widehat{\otimes}B^G} M^G = B\otimes_{B^G} M^G$, il suffit de montrer que $B\otimes_{B^G} M^G \to M$ est un isomorphisme. Comme par ailleurs on suppose que le B^G- module $B^\natural$ est fidèlement plat, il suffit de montrer que l'application :

$$B^\natural \otimes_{B^G} (B\otimes_{B^G} M^G) \to B^\natural \otimes_{B^G} M$$

est un isomorphisme. On a $B^\natural \otimes_{B^G} (B\otimes_{B^G} M^G) \simeq B\otimes_{B^G} (B^\natural \otimes_{B^G} M)^G$ et $B^\natural \otimes_{B^G} M$ est un $B^\natural \otimes_{B^G} B$-module qui se décompose donc en $\oplus_{g\in G} N\cdot e_g$ où $N\cdot e_g = (B^\natural\cdot e_g)\cdot(B^\natural\otimes_{B^G} M)$ puisque $B^\natural \otimes_{B^G} B \simeq \oplus_{g\in G} B^\natural\cdot e_g$. L'application de $N\cdot e_1$ dans $B^\natural\otimes_{B^G} M$ qui à $n\cdot e_1$ associe $(g(n)\cdot e_g)_{g\in G}$ induit un isomorphisme de $N\cdot e_1$ dans $(B^\natural\otimes_{B^G} M)^G$. On a alors :

$$\begin{aligned} B\otimes_{B^G} N\cdot e_1 &= (B\otimes_{B^G} B^\natural)\otimes_{B^\natural} N\cdot e_1 \\ &= (\oplus_{g\in G} B^\natural\cdot e_g)\otimes_{B^\natural} N\cdot e_1 \\ &= \oplus_{g\in G} N\cdot e_g \\ &= B^\natural\otimes_{B^G} M, \end{aligned}$$

et donc l'application $B^\natural \otimes_{B^G} (B\otimes_{B^G} M^G) \to B^\natural \otimes_{B^G} M$ est bien un isomorphisme. □

Remarque 2.2.2. — La proposition 2.2.1 ci-dessus s'applique notamment si B est une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$ et si G est un sous-groupe de $\mathrm{Gal}(B/\mathbf{Q}_p)$ ce qui fait que B/B^G est galoisienne de groupe de Galois G. La condition (1) du début du paragraphe est évidente et la condition (2) est un résultat classique. Pour un deuxième exemple, voir le lemme 4.2.5.

2.3. Représentations p-adiques et anneaux de Fontaine

Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/K)$ et S une algèbre de Banach. Une *famille de représentations p-adiques* est un S-module V libre de rang fini d, muni d'une action linéaire et continue du groupe G_K. Rappelons que $\mathcal{O}_S$ désigne l'anneau des entiers de S pour la valuation val_S ; on suppose qu'il existe un $\mathcal{O}_S$-module T libre de rang d tel que $V = S\otimes_{\mathcal{O}_S} T$. Si $S = E$ est un corps, alors cette condition est automatique, comme le montre le lemme ci-dessous.

Lemme 2.3.1. — *Si V est une E-représentation de dimension d, alors il existe un $\mathcal{O}_E$-module T libre de rang d et stable par G_K tel que $V = E\otimes_{\mathcal{O}_E} T$.*

Démonstration. — Si on choisit une base de V, la représentation correspond à une application continue $\rho : G_K \to \mathrm{GL}_d(E)$. Il existe donc $s \geqslant 0$ tel que l'image de G_K est incluse dans $\mathrm{M}_d(p^{-s}\mathcal{O}_E)$. Si T_0 dénote le $\mathcal{O}_E$-module engendré par la base choisie, on voit que si $g \in G_K$, alors $g(T_0) \subset p^{-s}T_0$ et donc que si l'on pose $T = \sum_{g \in G_K} g(T_0)$, alors $T_0 \subset T \subset p^{-s}T_0$ et que T est donc libre de rang d et stable par G_K. □

Soit B un anneau de périodes p-adiques ; ces anneaux sont généralement des espaces LF ce qui permet de construire $S\widehat{\otimes}B$. Supposons que B est G_K-régulier (cf. [**Fon94b**, §1.4]), et que le corps B^{G_K} est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si V est une S-représentation de G_K, alors on pose :

$$D_B(V) = ((S\widehat{\otimes}B) \otimes_S V)^{G_K},$$

et on dit que V est B-*admissible* si :

(1) le $S \otimes B^{G_K}$-module $D_B(V)$ est projectif de type fini ;

(2) l'application $(S\widehat{\otimes}B) \otimes_{S \otimes B^{G_K}} D_B(V) \to (S\widehat{\otimes}B) \otimes_S V$ est un isomorphisme.

Si c'est le cas, alors les deux conditions ci-dessus impliquent que $D_B(V)$ est projectif de rang d. Si $S = E$ est un corps, $D_B(V)$ est alors libre de rang d et en particulier, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, alors on retrouve la définition habituelle de l'admissibilité (cf. [**Fon94b**, §1.5]).

3. La méthode de Sen

Dans ce chapitre, nous expliquons la méthode de Sen, qui permet de simplifier le calcul de certains ensembles de cohomologie galoisienne.

3.1. Les conditions de Tate-Sen

Dans tout ce chapitre, G_0 est un groupe profini muni d'un caractère continu $\chi : G_0 \to \mathbf{Z}_p^\times$ dont l'image est ouverte, et on pose $H_0 = \ker \chi$. Si $g \in G_0$, on note $n(g)$ l'entier défini par $n(g) = \mathrm{val}_p(\chi(g) - 1)$. Si G est un sous-groupe ouvert de G_0 et si $H = G \cap H_0$, alors on note G_H le normalisateur de H dans G_0. Comme $G \subset G_H$, le groupe G_H est ouvert dans G_0 et $\chi(G_H)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$. On note $\widetilde{\Gamma}_H = G_H/H$ et C_H le centre de $\widetilde{\Gamma}_H$.

Lemme 3.1.1. — *Le groupe C_H est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{\Gamma}_H$.*

Démonstration. — Le noyau de la restriction de $\chi^{2(p-1)}$ à $\widetilde{\Gamma}_H$ est un groupe fini A et le groupe $\widetilde{\Gamma}_H$ se dévisse sous la forme $1 \to A \to \widetilde{\Gamma}_H \to B \to 1$, où B est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$ sans torsion (c'est à cela que sert l'exposant $2(p-1)$) et donc isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Le groupe $\widetilde{\Gamma}_H$ est donc produit semi-direct de $\mathbf{Z}_p$ et d'un groupe fini, et un élément g

de $\mathbf{Z}_p \subset \widetilde{\Gamma}_H$ est dans le centre de $\widetilde{\Gamma}_H$ si et seulement si son image dans $\mathrm{Aut}(A)$ (g agissant par conjugaison sur A) est triviale. Comme le groupe $\mathrm{Aut}(A)$ est fini, l'intersection de C_H avec $\mathbf{Z}_p \subset \widetilde{\Gamma}_H$ est d'indice fini dans $\mathbf{Z}_p$ donc aussi dans $\widetilde{\Gamma}_H$. Ceci permet de conclure. □

On appelle $n_1(H)$ le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $\chi(C_H)$ contienne $1 + p^n\mathbf{Z}_p$. Le lemme précédent montre que $n_1(H) \neq +\infty$.

Soient S une algèbre de Banach et soit $\widetilde{\Lambda}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre munie d'une application $\mathrm{val}_\Lambda : \widetilde{\Lambda} \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ vérifiant les conditions :

(1) $\mathrm{val}_\Lambda(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $\mathrm{val}_\Lambda(xy) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(x) + \mathrm{val}_\Lambda(y)$;

(3) $\mathrm{val}_\Lambda(x + y) \geqslant \inf(\mathrm{val}_\Lambda(x), \mathrm{val}_\Lambda(y))$;

(4) $\mathrm{val}_\Lambda(p) > 0$ et $\mathrm{val}_\Lambda(px) = \mathrm{val}_\Lambda(p) + \mathrm{val}_\Lambda(x)$ si $x \in \widetilde{\Lambda}$.

Notons que la condition (4) inclut le cas où p est nul dans Λ. La condition (3) permet d'utiliser val_Λ pour munir $\widetilde{\Lambda}$ d'une topologie et la condition (1) montre que cette topologie est séparée. On suppose de plus que $\widetilde{\Lambda}$ est complet pour cette topologie.

Si d est un entier $\geqslant 1$ et si $U \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$, on note $\mathrm{val}_\Lambda(U)$ le minimum des $\mathrm{val}_\Lambda(u_{i,j})$, où $(u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ sont les coefficients de U. Le résultat suivant (immédiat) sera utilisé de manière intensive dans ce qui suit.

Lemme 3.1.2. — *Si d est un entier $\geqslant 1$ et si $U \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(U - 1) > 0$, alors $U \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ et son inverse est égal à $\sum_{n=0}^{+\infty}(1 - U)^n$.*

On suppose maintenant que $\widetilde{\Lambda}$ est muni d'une action $\mathcal{O}_S$-linéaire continue de G_0 telle que l'on ait $\mathrm{val}_\Lambda(g(x)) = \mathrm{val}_\Lambda(x)$ si $g \in G_0$ et $x \in \widetilde{\Lambda}$. Si d est un entier $\geqslant 1$, le groupe G_0 opère continûment sur $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ et on s'intéresse aux ensembles pointés de cohomologie continue $H^1(G_0, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}))$. La méthode de Sen (cf. [**Sen80**] et [**Col01**, §3.3]) permet, sous certaines *conditions de Tate-Sen*, de réduire beaucoup la complexité apparente de ces ensembles.

Définition 3.1.3. — Les *conditions de Tate-Sen* sont les trois conditions suivantes :

(TS1) Il existe $c_1 > 0$ tel que, quels que soient les sous-groupes ouverts $H_1 \subset H_2$ de H_0, il existe $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(\alpha) > -c_1$ et $\sum_{\tau \in H_2/H_1} \tau(\alpha) = 1$.

(TS2) Il existe $c_2 > 0$ et, pour tout sous-groupe ouvert H de H_0, un entier $n(H) \in \mathbf{N}$, une suite croissante $(\Lambda_{H,n})_{n\in\mathbf{N}}$ de sous-$\mathcal{O}_S$-algèbres fermées de $\widetilde{\Lambda}^H$ et, pour $n \geqslant n(H)$, une application $\mathcal{O}_S$-linéaire $R_{H,n} : \widetilde{\Lambda}^H \to \Lambda_{H,n}$ vérifiant :

(1) si $H_1 \subset H_2$, alors $\Lambda_{H_2,n} \subset \Lambda_{H_1,n}$ et la restriction de $R_{H_1,n}$ à $\widetilde{\Lambda}^{H_2}$ coïncide avec $R_{H_2,n}$;

(2) $R_{H,n}$ est $\Lambda_{H,n}$-linéaire et $R_{H,n}(x) = x$ si $x \in \Lambda_{H,n}$;

(3) $g(\Lambda_{H,n}) = \Lambda_{gHg^{-1},n}$ et $g(R_{H,n}(x)) = R_{gHg^{-1},n}(gx)$ si $g \in G_0$; en particulier, $R_{H,n}$ commute à l'action de $\widetilde{\Gamma}_H$;

(4) si $n \geqslant n(H)$ et si $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, alors $\mathrm{val}_\Lambda(R_{H,n}(x)) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(x) - c_2$;

(5) si $x \in \widetilde{\Lambda}^H$, alors $\lim_{n\to+\infty} R_{H,n}(x) = x$.

(TS3) Il existe $c_3 > 0$ et, pour tout sous-groupe ouvert G de G_0 un entier $n(G) \geqslant n_1(H)$, où $H = G \cap H_0$, tel que, si $n \geqslant n(G)$, si $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$ vérifie $n(\gamma) \leqslant n$, alors $\gamma - 1$ est inversible sur $X_{H,n} = (1 - R_{H,n})(\widetilde{\Lambda}^H)$ et on a $\mathrm{val}_\Lambda((\gamma-1)^{-1}(x)) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(x) - c_3$ si $x \in X_{H,n}$.

Remarquons que les applications $R_{H,n}$ sont des projections et nous fournissent une décomposition $\widetilde{\Lambda}^H = \Lambda_{H,n} \oplus X_{H,n}$.

Proposition 3.1.4. — *Si $\widetilde{\Lambda}$ est une $\mathbf{Z}_p$-algèbre qui vérifie les conditions de Tate-Sen, et si S est une algèbre de Banach, alors $\mathcal{O}_S\widehat{\otimes}\widetilde{\Lambda}$ vérifie les conditions de Tate-Sen* (avec les mêmes constantes c_1, c_2 et c_3).

Démonstration. — C'est immédiat, en étendant les applications $R_{H,n}$ par $\mathcal{O}_S$-linéarité. □

3.2. Dévissages en cohomologie continue

Lemme 3.2.1. — *Si H est un sous-groupe ouvert de H_0, si $a > c_1$ et $k \in \mathbf{N}$ et si $\tau \mapsto U_\tau$ est un 1-cocycle continu de H dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $U_\tau - 1 \in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(U_\tau - 1) \geqslant a$ quel que soit $\tau \in H$, alors il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $M - 1 \in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M-1) \geqslant a - c_1$ telle que le cocycle $\tau \mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(M^{-1}U_\tau\tau(M) - 1) \geqslant a + 1$.*

Démonstration. — Soit H_1 un sous-groupe ouvert de H tel que $\mathrm{val}_\Lambda(U_\tau - 1) \geqslant a+1+c_1$ si $\tau \in H_1$, et soit $\alpha \in \widetilde{\Lambda}^{H_1}$ vérifiant $\sum_{\tau\in H/H_1} \tau(\alpha) = 1$ et $\mathrm{val}_\Lambda(\alpha) \geqslant -c_1$. Si Q est un système de représentants de H/H_1, posons :

$$M_Q = \sum_{\sigma\in Q} \sigma(\alpha)U_\sigma.$$

Les hypothèses mises sur α entraînent que $M_Q - 1 \in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M_Q - 1) \geqslant a - c_1$; en particulier, $\mathrm{val}_\Lambda(M_Q - 1) > 0$ et M_Q est inversible par le lemme 3.1.2. D'autre part, si Q' est un autre système de représentants de H/H_1, la relation de cocycle et le choix de H_1 font que $\mathrm{val}_\Lambda(M_Q - M_{Q'}) \geqslant a + 1$. Finalement la relation de cocycle permet d'obtenir la relation

$$U_\tau\tau(M_Q)=\sum_{\sigma\in Q}\tau\sigma(\alpha)U_\tau\tau(U_\sigma)=\sum_{\sigma\in Q}\tau\sigma(\alpha)U_{\tau\sigma}=M_{\tau Q},$$

d'où l'on tire $M_Q^{-1}U_\tau\tau(M_Q)=1+M_Q^{-1}(M_{\tau Q}-M_Q)$ qui permet de montrer que M_Q répond à la question (quel que soit le choix de Q). □

Corollaire 3.2.2. — *Si H est un sous-groupe ouvert de H_0, si $a>c_1$ et si $\tau\to U_\tau$ est un 1-cocycle continu de H dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $U_\tau-1\in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(U_\tau-1)\geqslant a$ quel que soit $\tau\in H$, alors il existe $M\in\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $M-1\in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M-1)\geqslant a-c_1$ tel que le cocycle $\tau\mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit trivial.*

Démonstration. — Une récurrence utilisant le lemme précédent permet de construire une suite de matrices $(M_m)_{m\in\mathbf{N}}$ telle que $M_m-1\in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M_m-1)\geqslant a-c_1+m$ et que le cocycle $\tau\mapsto U_{n,\tau}=(\prod_{m=0}^n M_m)^{-1}U_\tau\tau(\prod_{m=0}^n M_m)$ vérifie $\mathrm{val}_\Lambda(U_{n,\tau}-1)\geqslant a+n+1$ quel que soit $\tau\in H$. Le produit infini $\prod_{m=0}^{+\infty}M_m$ converge alors vers une matrice M qui répond à la question. □

Lemme 3.2.3. — *Soit $\delta>0$, soient $a,b\in\mathbf{R}$ vérifiant $a\geqslant c_2+c_3+\delta$ et $b\geqslant\sup(a+c_2,2c_2+2c_3+\delta)$ et soient H un sous-groupe ouvert de H_0, $n\geqslant n(H)$, $\gamma\in\widetilde{\Gamma}_H$ vérifiant $n(\gamma)\leqslant n$ et $U=1+p^kU_1+p^kU_2$, avec :*

$$\begin{aligned}U_1&\in\mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}),\quad \mathrm{val}_\Lambda(U_1)\geqslant a-\mathrm{val}_\Lambda(p^k)\\ U_2&\in\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H),\quad \mathrm{val}_\Lambda(U_2)\geqslant b-\mathrm{val}_\Lambda(p^k).\end{aligned}$$

Alors il existe $M\in 1+p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M-1)\geqslant b-c_2-c_3$ telle que $M^{-1}U\gamma(M)=1+p^kV_1+p^kV_2$, avec :

$$\begin{aligned}V_1&\in\mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}),\quad \mathrm{val}_\Lambda(V_1)\geqslant a-\mathrm{val}_\Lambda(p^k)\\ V_2&\in\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H),\quad \mathrm{val}_\Lambda(V_2)\geqslant b-\mathrm{val}_\Lambda(p^k)+\delta.\end{aligned}$$

Démonstration. — D'après les conditions (TS2) et (TS3), on peut écrire U_2 sous la forme $U_2=R_{H,n}(U_2)+(1-\gamma)(V)$, avec $\mathrm{val}_\Lambda(R_{H,n}(p^kU_2))\geqslant b-c_2\geqslant a$ et $\mathrm{val}_\Lambda(p^kV)\geqslant b-c_2-c_3$. Un calcul brutal, utilisant les inégalités vérifiées par a et b et les identités $R_{H,n}(p^kU_2)=p^kR_{H,n}(U_2)$ et

$$(1+p^kV)^{-1}U\gamma(1+p^kV)=(1-p^kV+p^{2k}V^2-\cdots)(1+p^kU_1+p^kU_2)(1+p^k\gamma(V))$$

montre que :

$$\mathrm{val}_\Lambda\left((1+p^kV)^{-1}U\gamma(1+p^kV)-(1+p^kU_1+p^kR_{H,n}(U_2))\right)\geqslant b+\delta,$$

et donc que $M=1+p^kV$ convient. □

Corollaire 3.2.4. — *Soient $\delta > 0$ et $b \geqslant 2c_2 + 2c_3 + \delta$. Si $U \in 1 + p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ vérifie* $\mathrm{val}_\Lambda(U-1) \geqslant b$*, alors il existe $M \in 1 + p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$, avec* $\mathrm{val}_\Lambda(M-1) \geqslant b - c_2 - c_3$ *telle que :*

$$M^{-1}U\gamma(M) \in 1 + p^k\mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}).$$

Démonstration. — Le lemme précédent permet de construire par récurrence une suite de matrices M_j pour $j \geqslant 0$ telle que $M_j \in 1 + p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$, $\mathrm{val}_\Lambda(M_j - 1) \geqslant b - c_2 - c_3$ et telle que si l'on pose $U_j = (M_0 \cdots M_j)^{-1}U\gamma(M_0 \cdots M_j)$, alors $U_j = 1 + p^kU_{j,1} + p^kU_{j,2}$, avec :

$$\begin{aligned} U_{j,1} &\in \mathrm{M}_d(\Lambda_{H,n}), \quad \mathrm{val}_\Lambda(U_{j,1}) \geqslant b - \mathrm{val}_\Lambda(p^k) - c_2, \\ U_{j,2} &\in \mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H), \quad \mathrm{val}_\Lambda(U_{j,2}) \geqslant b - \mathrm{val}_\Lambda(p^k) + j\delta. \end{aligned}$$

Le produit infini $\prod_{j=0}^{+\infty} M_j$ converge donc vers une matrice qui répond à la question. □

Lemme 3.2.5. — *Soient H un sous-groupe ouvert de H_0, $n \geqslant n(H)$, $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_H$ vérifiant $n(\gamma) \leqslant n$ et $B \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$. S'il existe $V_1, V_2 \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n})$ vérifiant* $\mathrm{val}_\Lambda(V_1 - 1) > c_3$ *et* $\mathrm{val}_\Lambda(V_2 - 1) > c_3$ *tels que $\gamma(B) = V_1BV_2$, alors $B \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n})$.*

Démonstration. — Si $C = B - R_{H,n}(B)$, alors $\gamma(C) = V_1CV_2$ puisque $R_{H,n}$ est $\Lambda_{H,n}$-linéaire et commute à l'action de γ. On a :

$$\gamma(C) - C = V_1CV_2 - C = (V_1 - 1)CV_2 + V_1C(V_2 - 1) - (V_1 - 1)C(V_2 - 1),$$

et donc $\mathrm{val}_\Lambda(\gamma(C) - C) \geqslant \mathrm{val}_\Lambda(C) + \inf(\mathrm{val}_\Lambda(V_1 - 1), \mathrm{val}_\Lambda(V_2 - 1)) > \mathrm{val}_\Lambda(C) + c_3$. La condition (TS3) implique $\mathrm{val}_\Lambda(C) = +\infty$ et donc $C = 0$, ce qui permet de conclure. □

Proposition 3.2.6. — *Soit $\widetilde{\Lambda}$ vérifiant les conditions de Tate-Sen (TS1), (TS2) et (TS3) et soit $\sigma \mapsto U_\sigma$ un cocycle continu sur G_0 à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$. Si G est un sous-groupe ouvert distingué de G_0 tel que $U_\sigma - 1 \in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et* $\mathrm{val}_\Lambda(U_\sigma - 1) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$ *quel que soit $\sigma \in G$ et si $H = G \cap H_0$, alors il existe $M \in 1 + p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant* $\mathrm{val}_\Lambda(M-1) > c_2 + c_3$ *tel que le cocycle $\sigma \mapsto V_\sigma = M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$ soit trivial sur H et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)})$.*

Démonstration. — Le corollaire 3.2.2 nous fournit une matrice $M_1 \in 1+p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M_1 - 1) > 2c_2 + 2c_3$ telle que le cocycle $\tau \mapsto U'_\tau = M_1^{-1}U_\tau\tau(M_1)$ soit trivial sur H et donc provienne par inflation d'un cocycle sur $\widetilde{\Gamma}_H$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ (notons que G est distingué dans G_0 et donc que $G_H = G_0$).

Soit $\gamma \in C_H$ vérifiant $n(\gamma) = n(G)$; en particulier, γ est dans l'image de G et $U'_\gamma - 1 \in p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$, avec $\mathrm{val}_\Lambda(U'_\gamma - 1) > 2c_2+2c_3$. Le corollaire 3.2.4 nous fournit une matrice $M_2 \in 1 + p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M_2 - 1) > c_2 + c_3$ telle que $M_2^{-1}U'_\gamma\gamma(M_2) \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)})$. Soit $M = M_1M_2$. On a $M \in 1 + p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\Lambda})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(M - 1) > c_2 + c_3$, et le cocycle $\tau \mapsto$

$V_\tau = M^{-1}U_\tau\tau(M)$ est trivial sur H, à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^H)$ et vérifie $V_\gamma \in \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)})$ et $\mathrm{val}_\Lambda(V_\gamma - 1) > c_2 + c_3 > c_3$.

Si $\tau \in G_0$, on a $\tau\gamma = \gamma\tau$ dans G_0/H et la relation de cocycle nous fournit la relation :

$$V_\tau\tau(V_\gamma) = V_{\tau\gamma} = V_{\gamma\tau} = V_\gamma\gamma(V_\tau).$$

On peut alors appliquer le lemme 3.2.5 à $B = V_\tau$, $V_1 = V_\gamma^{-1}$ et $V_2 = \tau(V_\gamma)$ pour en déduire le fait que V_τ est à coefficients dans $\Lambda_{H,n(G)}$. Ceci permet de conclure. □

3.3. Application aux S-représentations

Soit S une algèbre de Banach et $\widetilde{\Lambda}$ vérifiant les conditions de Tate-Sen. Une $\mathcal{O}_S$-*représentation* de G_0 est un $\mathcal{O}_S$-module libre de rang fini muni d'une action continue $\mathcal{O}_S$-linéaire de G_0 ; la *dimension* d'une telle représentation est le rang du $\mathcal{O}_S$-module sous-jacent.

On note $\widetilde{\Lambda}^+$ (resp. $\Lambda_{H,n}^+$, si $H \subset H_0$ est ouvert et $n \in \mathbf{N}$), l'anneau des entiers de $\widetilde{\Lambda}$ (resp. $\Lambda_{H,n}$) pour la valuation val_Λ (i.e. l'ensemble des x vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(x) \geqslant 0$).

Proposition 3.3.1. — *Soient T une $\mathcal{O}_S$ représentation de dimension d de G_0, $V = S\otimes_{\mathcal{O}_S} T$ et k un entier tel que* $\mathrm{val}_\Lambda(p^k) > c_1+2c_2+2c_3$. *Soit G un sous-groupe distingué de G_0 agissant trivialement sur T/p^kT, soit $H = G \cap H_0$ et soit $n \geqslant n(G)$. Alors $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ contient un unique sous-$\Lambda_{H,n}^+$- module $D_{H,n}^+(T)$ libre de rang d vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) *$D_{H,n}^+(T)$ est fixe par H et stable par G_0 ;*

(2) *l'application naturelle $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\Lambda_{H,n}^+} D_{H,n}^+(T) \to \widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ est un isomorphisme ;*

(3) *$D_{H,n}^+(T)$ possède une base sur $\Lambda_{H,n}^+$ qui est c_3-fixe par G/H (i.e. si $\gamma \in G/H$, alors la matrice W de γ dans cette base vérifie* $\mathrm{val}_\Lambda(W-1) > c_3$*).*

Démonstration. — Soit $v_1, \dots, v_d$ une base de T sur $\mathcal{O}_S$ et soit $U_\sigma = (u_{i,j}^\sigma)$ la matrice des vecteurs $\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_d)$ dans la base $v_1, \dots, v_d$ (i.e. $\sigma(v_j) = \sum_{i=1}^d u_{i,j}^\sigma v_i$). Alors $\sigma \mapsto U_\sigma$ est un morphisme continu de groupes de G_0 dans $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_S)$ que l'on peut aussi voir comme un 1-cocycle continu sur G_0 à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_S) \subset \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+)$. Par hypothèse, on a $U_\sigma \in 1+p^k\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_S)$ si $\sigma \in G$ et la proposition 3.2.6 nous fournit une matrice $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda})$ vérifiant $\mathrm{val}_\Lambda(M-1) > c_2 + c_3$ (et donc $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+)$), telle que le cocycle $\sigma \mapsto V_\sigma = M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$ soit trivial sur H et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)}) \cap \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+) = \mathrm{GL}_d(\Lambda_{H,n(G)}^+)$. Si $M = (m_{i,j})$, et si $e_k = \sum_{j=1}^d m_{j,k}v_j$, on a

$$\sigma(e_k) = \sum_{j=1}^d \sigma(m_{j,k})\sigma(v_j) = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d u_{i,j}^\sigma \sigma(m_{j,k})\right) v_i = e_k,$$

si $\sigma \in H$, ce qui fait que $e_1, \dots, e_d$ est une base de $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ sur $\widetilde{\Lambda}^+$ fixe par H.

De plus, si $\gamma \in G/H$, la matrice W de γ dans la base $e_1, \dots, e_d$ est de la forme $M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$, où $\sigma \in G$ est un relèvement de γ, et vérifie donc $\mathrm{val}_\Lambda(W-1) > c_2+c_3 > c_3$. On en déduit le fait que le sous-$\Lambda^+_{H,n}$-module engendré par $e_1, \dots, e_d$ vérifie les propriétés voulues, d'où l'existence d'un tel module.

Pour démontrer l'unicité, fixons $\gamma \in C_H$ vérifiant $n(\gamma) = n$. Soient $e_1, \dots, e_d$ et $e'_1, \dots, e'_d$ deux bases de $\widetilde{\Lambda}^+ \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ sur $\widetilde{\Lambda}^+$, fixes par H, telles que les matrices W et W' de γ dans ces bases appartiennent à $\mathrm{GL}_d(\Lambda^+_{H,n})$, avec $n \geqslant n(G)$ et vérifient $\mathrm{val}_\Lambda(W-1) > c_3$ et $\mathrm{val}_\Lambda(W'-1) > c_3$. Soit $B \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\Lambda}^+)$ la matrice des e'_j dans la base $e_1, \dots, e_d$. Alors B est invariante par H et on a $W' = B^{-1}W\gamma(B)$. D'après la proposition 3.2.5, ceci implique B est à coefficients dans $\Lambda_{H,n}$ (et donc dans $\Lambda^+_{H,n}$), ce qui permet de montrer que les $\Lambda^+_{H,n}$-modules engendrés par $e_1, \dots, e_d$ d'une part et $e'_1, \dots, e'_d$ d'autre part, sont égaux. Ceci termine la démonstration de la proposition. □

Remarque 3.3.2. — Conservons les hypothèses de la proposition 3.3.1 ci-dessus. Si l'on pose $D_{H,n}(T) = \Lambda_{H,n} \otimes_{\Lambda^+_{H,n}} D^+_{H,n}(T)$, alors $D_{H,n}(T)$ est un $\Lambda_{H,n}$-module libre de rang d et est l'unique sous-$\Lambda_{H,n}$-module de $\widetilde{\Lambda}$ vérifiant les propriétés :

(1) $D_{H,n}(T)$ est fixe par H et stable par G_0 ;

(2) l'application naturelle $\widetilde{\Lambda} \otimes_{\Lambda_{H,n}} D_{H,n}(T) \to \widetilde{\Lambda} \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ est un isomorphisme ;

(3) $D_{H,n}(T)$ possède une base sur $\Lambda_{H,n}$ qui est c_3-fixe par G/H.

La démonstration est exactement la même que celle de la proposition 3.3.1.

4. Deux applications de la méthode de Sen

Dans ce chapitre, nous donnons deux applications de la méthode de Sen vue au chapitre précédent ; la première est la théorie de Sen habituelle, la deuxième est la construction de (φ, Γ)-modules.

4.1. Le corps $\mathbf{C}_p$ et l'opérateur de Sen

Le premier exemple non trivial d'anneau vérifiant les conditions de Tate-Sen est le corps $\mathbf{C}_p$ muni de la valuation val_p et de l'action de G_K. Cet exemple est dû à Tate (cf. [**Tat66**]). Nous donnons dans ce paragraphe l'application de la proposition 3.3.1 à la construction de l'opérateur de Sen (voir [**Sen80, Sen88, Sen93**]).

Si L est une extension finie de K, alors on note $L_n = L(\mu_{p^n})$ pour $n \geqslant 1$ ainsi que $H_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L_\infty)$ et $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$. On a alors $\mathbf{C}_p^{H_L} = \widehat{L}_\infty$, le complété de L_∞ de pour val_p. Par ailleurs, si $n \in \mathbf{N}$ et si $x \in L_\infty$, alors $[L_{n+k} : L_n]^{-1}\mathrm{Tr}_{L_{n+k}/L_n}(x)$ ne dépend pas du choix de l'entier k tel que $x \in L_{n+k}$. L'application de L_∞ dans L_n ainsi définie se prolonge par continuité uniforme en une application $R_{L,n} : \widehat{L}_\infty \to L_n$.

Proposition 4.1.1. — *L'anneau* $\widetilde{\Lambda} = \mathbf{C}_p$ *vérifie les conditions (TS1), (TS2) et (TS3), avec* $\widetilde{\Lambda}^{H_L} = \widehat{L}_\infty$, $\Lambda_{H_L,n} = L_n$, $R_{H_L,n} = R_{L,n}$ *et* $\mathrm{val}_\Lambda = \mathrm{val}_p$, *les constantes* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *et* $c_3 > 1/(p-1)$ *pouvant être choisies arbitrairement.*

Dans toute la suite de l'article, on se fixe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 1/(p-1)$ telles que l'on ait $c_1 + 2c_2 + 2c_3 < \mathrm{val}_p(12p)$, et on note $n(L) = n(G_L)$.

Proposition 4.1.2. — *Soient* S *une algèbre de Banach,* T *une* $\mathcal{O}_S$*-représentation de dimension* d *de* G_K *et* $V = S \otimes_{\mathcal{O}_S} T$. *Soit* L *une extension galoisienne finie de* K *telle que* G_L *agisse trivialement sur* $T/12pT$ *et soit* $n \geqslant n(L)$. *Alors* $(S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p)\otimes_S V$ *contient un unique sous-*$(S \otimes L_n)$*-module libre* $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ *de rang* d *vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ *est fixe par* H_L *et stable par* G_K *;*

(2) $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ *possède une base sur* $S \otimes L_n$ *qui est* c_3*-fixe par* Γ_L *;*

(3) *l'application naturelle* $(S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) \to (S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p) \otimes_S V$ *est un isomorphisme.*

On a alors $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) \simeq \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)$.

Démonstration. — Cela suit de la méthode de Sen (plus précisément de la proposition 3.3.1 et de la remarque 3.3.2 qui la suit) et du fait que $\mathbf{C}_p$ vérifie les conditions de Tate-Sen. Le dernier point résulte de la proposition appliquée à $S/\mathfrak{m}_x$ et du fait que l'image de $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ dans $(E_x \otimes \mathbf{C}_p) \otimes_{E_x} V_x$ vérifie les conditions (1), (2) et (3). □

Si $\gamma \in \Gamma_L$ vérifie $n(\gamma) \geqslant n$, alors γ agit trivialement sur L_n et linéairement sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. Si de plus M_γ désigne la matrice de γ dans une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ de telle manière que l'on ait $\mathrm{val}_p(M_\gamma - 1) > 0$, on peut définir le logarithme $\log\gamma$ de γ par la série $-\sum_{m=1}^{+\infty}(1-\gamma)^m/m$. On a $\log(\gamma^k) = k\log\gamma$, et Γ_L étant un groupe de Lie p-adique de dimension 1, l'opérateur $(\log_p\chi(\gamma))^{-1}\log\gamma$ ne dépend pas du choix de γ. On le note Θ_{Sen}. Comme on peut prendre γ dans le centre de $\widetilde{\Gamma}_L$, l'opérateur Θ_{Sen} commute à l'action de $\widetilde{\Gamma}_L$; en particulier, son polynôme caractéristique et son polynôme minimal sont à coefficients dans $S \otimes K$. L'opérateur Θ_{Sen} est l'opérateur de Sen et si $x \in \mathscr{X}$, les valeurs propres de $\Theta_{\mathrm{Sen}}(x)$ sont appelées les *poids de Hodge-Tate généralisés* de V_x. On retrouve ainsi les constructions de Sen (voir [**Sen80**] pour le cas $S = \mathbf{Q}_p$ et [**Sen88, Sen93**] pour les familles).

Remarque 4.1.3. — En prenant $n = n(L)$ et $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n(L)$, et en utilisant le fait que la matrice M_γ de γ dans une base c_3-fixe de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ vérifie $\mathrm{val}_p(M_\gamma - 1) > c_3 > 1/(p-1)$, on voit que les valeurs propres de $\log M_\gamma$ sont de valuation $> c_3$ et donc que les poids de Hodge-Tate généralisés de V sont de valuation p-adique $> 1/(p-1) - n(L)$.

4.2. Les anneaux surconvergents et les (φ,Γ)-modules

Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$, la valuation $\mathrm{val}_{\mathrm{E}}$ et les anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}$ sont définis et étudiés ailleurs dans ce volume. Nous rappelons ici quelques unes de leur propriétés qui nous serviront dans ce chapitre. Rappelons que pour $r>0$, l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ est défini par :

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}=\left\{x=\sum_{k=0}^{+\infty}p^k[x_k]\in\widetilde{\mathbf{A}},\quad \lim_{k\to+\infty}\left(\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k)+\frac{k}{r}\right)=+\infty\right\}$$

et que si $x=\sum_{k=0}^{+\infty}p^k[x_k]\in\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ alors on pose $\mathrm{val}^{(0,r]}(x)=\inf_{k\geqslant 0}(\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k)+k/r)$. L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}$ est défini par $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}=$

$$\left\{x=\sum_{k=0}^{+\infty}p^k[x_k]\in\widetilde{\mathbf{A}},\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k)+\frac{psk}{p-1}\geqslant 0\ \forall k,\quad \lim_{k\to+\infty}\left(\mathrm{val}_{\mathrm{E}}(x_k)+\frac{psk}{p-1}\right)=+\infty\right\},$$

ce qui fait que si l'on pose $s(r)=(p-1)/pr$, alors l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}$ pour la valuation $\mathrm{val}^{(0,r]}$ s'identifie à $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s(r)}$ et que l'on a $\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]}=\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s(r)}[1/[\overline{\pi}]]$. On renvoie à [**Col03**] pour la définition des autres anneaux que l'on utilise dans ce paragraphe (notamment tous les anneaux sans tilde) ainsi que la construction des applications $R_{L,n}$: $\widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,r]}=(\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,r]})^{H_L}\to\varphi^{-n}(\mathbf{A}_L^{(0,p^{-n}r]})$.

Proposition 4.2.1. — *L'anneau $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\mathbf{A}}^{(0,1]}$ vérifie les conditions (TS1), (TS2) et (TS3) avec $\widetilde{\Lambda}^{H_L}=\widetilde{\mathbf{A}}_L^{(0,1]}$, $\Lambda_{H_L,n}=\varphi^{-n}(\mathbf{A}_L^{(0,p^{-n}]})$, $R_{H_L,n}=R_{L,n}$ et $\mathrm{val}_\Lambda=\mathrm{val}^{(0,1]}$, les constantes $c_1>0$, $c_2>0$ et $c_3>1/(p-1)$ pouvant être choisies arbitrairement.*

Démonstration. — Ceci est démontré dans [**Col03**] : la condition (TS1) résulte du lemme 10.1, la condition (TS2) résulte du corollaire 8.11 et la condition (TS3) résulte de la proposition 9.9. □

Lemme 4.2.2. — *Si $M\in 1+p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_K)$ est tel qu'il existe $U,V\in 1+p\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K)$ tels que l'on ait $U\gamma(M)=MV$, alors $M\in 1+p\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K)$.*

Démonstration. — Soit $R_{K,0}$ l'application de [**Col03**, §8.3] et $N=M-R_{K,0}(M)$. Il s'agit de vérifier que l'on a $N=0$. Supposons le contraire et soient $k\in\mathbf{N}$ le plus grand entier tel que $N\in p^k\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_K)$ et $\overline{N}$ l'image de $p^{-k}N$ dans $\mathrm{M}_d(\mathbf{E}_K)$. Comme $R_{K,0}$ commute à γ et est $\mathbf{A}_K$ linéaire, on a $U\gamma(N)=NV$, et donc aussi $U\gamma(p^{-k}N)=(p^{-k}N)V$, ce qui nous donne en réduisant modulo p : $\gamma(\overline{N})=\overline{N}$. D'autre part, comme $R_{K,0}(N)=0$, on a $R_{K,0}(\overline{N})=0$; on en déduit (cf. [**Col03**, §9]) la nullité de $\overline{N}$ puis celle de N, ce qui permet de conclure. □

Dans le reste de cet article, on fixe des constantes $c_1>0$, $c_2>0$ et $c_3>1/(p-1)$ telles que $c_1+2c_2+2c_3<\mathrm{val}_p(12p)$. Si T est une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K, si $s>0$, et si L est une extension galoisienne finie de K, alors on pose $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)=(\mathbf{A}^{\dagger,s}\otimes_{\mathbf{Z}_p}T)^{H_L}$; c'est un $\mathbf{A}_L^{\dagger,s}$-module muni d'une action de $\widetilde{\Gamma}_L$. Pour $n \geqslant 0$, on pose par ailleurs $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,s}(T) = \varphi^{-n}(\mathrm{D}_L^{\dagger,p^n s}(T))$, qui est alors un $\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,s} = \varphi^{-n}(\mathbf{A}_L^{\dagger,p^n s})$-module.

Proposition 4.2.3. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et T une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K. Si L est une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$ et si $n \geqslant n(L)$, alors $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T) = \varphi^{-n}((\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_L})$ est l'unique sous-$\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module libre de rang d de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) *$\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ est fixe par H_L et stable par G_K ;*

(2) *l'application naturelle de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}} \mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est un isomorphisme ;*

(3) *le $\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ a une base telle que si $\gamma \in \Gamma_L$, la matrice W_γ de γ dans cette base vérifie $\mathrm{val}^{[0,1]}(W_\gamma - 1) > c_3$.*

Démonstration. — Comme $\mathrm{val}_p(12p) > c_1 + 2c_2 + 2c_3$, l'unicité d'un module vérifiant les conditions ci-dessus suit immédiatement des propositions 4.2.1 (les anneaux surconvergents vérifient les conditions de Tate-Sen) et 3.3.1 (l'application de la méthode de Sen). Il reste à vérifier que le module fourni par la proposition 3.3.1 coïncide bien avec $(\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} T)^{H_L}$. La démonstration de la proposition 3.3.1 donne la construction de ce module : si l'on note U_τ la matrice de $\tau \in G_K$ dans une base de T, alors la proposition 3.2.6 nous fournit une matrice $M \in 1 + 12p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p})$ avec $\mathrm{val}^{[0,1]}(M-1) > c_2+c_3$ telle que le cocycle $\tau \mapsto M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit trivial sur H_L et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p})$. Le cocycle $\tau \mapsto C_\tau = \varphi^n(M^{-1}U_\tau\tau(M)) = \varphi^n(M)^{-1}U_\tau\varphi^n(\tau(M))$ est alors trivial sur H_L et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_L^{\dagger,p^{n-1}(p-1)})$.

D'autre part, la théorie des (φ,Γ)-modules de [**Fon90**] nous fournit une matrice $P \in 1 + 12p\mathrm{M}_d(\mathbf{A})$ telle que le cocycle $\tau \mapsto D_\tau = P^{-1}U_\tau\tau(P)$ soit trivial sur H_L et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_L)$.

Eliminant U_τ entre C_τ et D_τ, et posant $N = \varphi^n(M)^{-1}P$, on obtient la relation $ND_\tau = C_\tau\tau(N)$. En particulier, comme $C_\tau = D_\tau = 1$ si $\tau \in H_L$, on a $N \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_L)$. D'autre part, comme $U_\tau - 1$ est divisible par $12p$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_L$ si $\tau \in G_L$ et comme il en est de même de M et P, les matrices N et, si $\tau \in G_L$, C_τ et D_τ appartiennent à $1 + 12p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_L)$. Comme par ailleurs C_τ et D_τ sont à coefficients dans $\mathbf{A}_L$, le lemme 4.2.2 implique que N est à coefficients dans $\mathbf{A}_L$ puis que M est à coefficients dans $\varphi^{-n}(\mathbf{A})$.

On en déduit le fait que la base $e_1, \ldots, e_d$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ que l'on déduit de M comme dans la démonstration de la proposition 3.3.1 est constituée d'éléments de $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$. D'autre part, M est dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p})$ et à coefficients dans l'anneau $\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)})$, ce qui implique que $e_1, \ldots, e_d$ est une base de $\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$

sur $\varphi^{-n}(\mathbf{A}^{\dagger,p^{n-1}(p-1)})$. On en déduit le fait que $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$ est le sous-$\mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module engendré par $e_1, \dots, e_d$. Ceci permet de conclure. $\square$

Corollaire 4.2.4. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et T une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K. Si L est une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$ et si $s \geqslant (p-1)p^{n(L)-1}$, alors le $\mathbf{A}_L^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ est libre de rang d et l'application naturelle de $\mathbf{A}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{A}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ dans $\mathbf{A}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le fait que $\mathrm{D}_L^{\dagger,(p-1)p^{n(L)-1}}(T) = \varphi^{n(L)}(\mathrm{D}_{L,n(L)}^{\dagger,(p-1)/p}(T))$ et la proposition 4.2.3 montrent que si $s = (p-1)p^{n(L)-1}$, alors $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ est libre de rang d et l'application naturelle de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{A}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est un isomorphisme. Si l'on écrit une base de T selon une base de $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(T)$, on obtient donc une matrice de $\mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger,s}) \cap \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,s}) = \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger,s})$. Ceci montre le corollaire pour $s = (p-1)p^{n(L)-1}$. Si $s \geqslant (p-1)p^{n(L)-1}$, alors il suffit d'étendre les scalaires. $\square$

Nous descendons maintenant de L à K. Rappelons que $\mathbf{B}_K^{\dagger,s} = \mathbf{A}_K^{\dagger,s}[1/p]$.

Lemme 4.2.5. — *Si L est une extension galoisienne finie de K, alors :*

(1) *il existe $s(L/K)$ tel que si $s \geqslant s(L/K)$, alors il existe $\alpha \in \mathbf{B}_L^{\dagger,s}$ qui engendre une base normale de $\mathbf{B}_L^{\dagger,s}$ sur $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$ et tel que le discriminant du polynôme minimal de α est inversible dans $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$;*

(2) *si $s \geqslant s(L/K)$ et $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, alors $(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^\natural \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathbf{B}_L^{\dagger,s} \simeq \oplus_{g\in G}(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^\natural e_g$.*

Démonstration. — Si $\alpha \in \mathbf{B}_L^{\dagger}$ engendre une base normale de $\mathbf{B}_L^{\dagger}$ sur $\mathbf{B}_K^{\dagger}$ alors le discriminant du polynôme minimal de α est inversible dans $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$ pour s assez grand ce qui montre le premier point.

Soit $s \geqslant s(L/K)$ et $f(X) = \prod(X-\alpha_i) \in \mathbf{B}_K^{\dagger,s}[X]$ le polynôme minimal d'un tel α. On a $\mathbf{B}_L^{\dagger,s} = \mathbf{B}_K^{\dagger,s}[X]/f(X)$ et donc :

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^\natural \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathbf{B}_L^{\dagger,s} &\simeq (\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^\natural \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathbf{B}_K^{\dagger,s}[X]/f(X)\\ &\simeq (\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^\natural[X]/f(X)\\ &\simeq \oplus_i(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^\natural[X]/(X-\alpha_i)\\ &\simeq \oplus_{g\in G}(\mathbf{B}_L^{\dagger,s})^\natural e_g.\end{aligned}$$

En effet, l'hypothèse selon laquelle le discriminant de $f(X)$ est inversible garantit que les idéaux $(X-\alpha_i)$ sont deux-à-deux étrangers et que l'on peut appliquer [**BouAC**, chap. II, §1, n° 2, prop. 6] (le théorème des restes). $\square$

Proposition 4.2.6. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et T une $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K. Soit L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur*

$T/12pT$ et soit $n \geqslant n(L)$ et soit $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{Zp} T$. Si $s \geqslant \max((p-1)p^{n(L)-1}, s(L/K))$, alors :

(1) *le $\mathbf{A}_K^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ et le $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ sont libres de rang d ;*

(2) *l'application naturelle de $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ dans $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le fait que $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ est libre de rang d et que l'application de $\mathbf{B}_L^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ dans $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ est un isomorphisme résulte du lemme 4.2.5 ci-dessus et de la proposition 2.2.1 (la descente étale). Comme on sait par le corollaire 4.2.4 que l'application de $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{B}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ dans $\mathbf{B}^{\dagger,s} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est un isomorphisme, cela montre le (2) et le deuxième point du (1) (notons que $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ est nécessairement libre car $\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$ est un anneau principal).

Pour montrer que le $\mathbf{A}_K^{\dagger,s}$-module $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ est libre, on choisit $n \gg 0$ et on regarde $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)/Q_n$ où $Q_n = ((1+X)^{p^n} - 1)/((1+X)^{p^{n-1}} - 1)$: c'est un K_n-espace vectoriel de dimension d (cf. le lemme 4.9 de [**Ber02**]) et l'image de $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ dans $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)/Q_n$ en est un $\mathcal{O}_{K_n}$-réseau. Si l'on choisit d éléments de $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ dont les images engendrent ce réseau, alors on vérifie qu'ils engendrent $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$ en utilisant le fait que $\mathbf{A}_K^{\dagger,s}$ est complet pour la topologie Q_n-adique et que le noyau de l'application $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T) \to \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)/Q_n$ est $Q_n \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(T)$. □

Pour mémoire, notons le corollaire suivant (le théorème principal de [**CC98**]) :

Corollaire 4.2.7. — *Si $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$, alors $\mathrm{D}^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$ est un sous-$\mathbf{B}_K^\dagger$-espace vectoriel de dimension d de $\mathrm{D}(V)$ stable par Γ_K et φ. De plus, on a :*

$$\mathrm{D}(V) = \mathbf{B}_K \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V) \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} \mathrm{D}^\dagger(V) = \mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

En particulier, le foncteur $V \mapsto \mathrm{D}^\dagger(V)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-représentations de G_K vers la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_K^\dagger$.

Soient maintenant S est une algèbre de Banach, K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, V une S-représentation de G_K, T un $\mathcal{O}_S$-réseau de V stable par G_K, et L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$. On pose $s(V) = \max((p-1)p^{n(L)-1}, s(L/K))$ et on s'arrange (quitte à augmenter un peu $s(V)$) pour qu'il existe un entier $n(V)$ tel que $p^{n(V)-1}(p-1) = s(V)$.

Proposition 4.2.8. — *Si V est une S-représentation de G_K de dimension d et si $n \geqslant n(L)$, alors $(\mathcal{O}_S \widehat{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p}) \otimes_{\mathcal{O}_S} T$ possède un unique sous-$\mathcal{O}_S \widehat{\otimes} \mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}$-module $\mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T)$, libre de rang d, fixe par H_L, stable par G_K, possédant une base presque invariante par Γ_L et tel que :*

$$(\mathcal{O}_S \widehat{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p}) \otimes_{\mathcal{O}_S \widehat{\otimes} \mathbf{A}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}} \mathrm{D}_{L,n}^{\dagger,(p-1)/p}(T) \simeq (\mathcal{O}_S \widehat{\otimes} \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger,(p-1)/p}) \otimes_{\mathcal{O}_S} T.$$

Démonstration. — C'est encore une application immédiate de la proposition 3.3.1, en utilisant les propositions 4.2.1 et 3.1.4. □

Si V est une S-représentation de G_K de dimension d et si $s \geqslant s(V)$, alors on pose :

$$\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s} \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s(V)}} \varphi^{n(V)}(\mathrm{D}_{L,n(V)}^{\dagger,(p-1)/p}(V)))^{H_K},$$

où $n(V)$ est l'entier défini plus haut.

Théorème 4.2.9. — *Si V est une S-représentation de G_K de dimension d et si $s \geqslant s(V)$, alors :*

(1) $\mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V)$ *est un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_K^{\dagger,s}$-module localement libre de rang d ;*

(2) *l'application* $(S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_K^{\dagger,s}} \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V) \to (S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_S V$ *est un isomorphisme ;*

(3) *si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application* $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V) \to \mathrm{D}_K^{\dagger,s}(V_x)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — La proposition 4.2.8 ci-dessus implique que $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ est un $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}$-module libre de rang d et que l'application $(S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V) \to (S\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,s}) \otimes_S V$ est un isomorphisme. Les points (1) et (2) résultent alors de la proposition 2.2.1.

Enfin le (3) pour $K = L$ et $s = p^{n(V)-1}(p-1)$ résulte de l'unicité dans la proposition 4.2.8 et le cas général en résulte en étendant les scalaires et en prenant ensuite les invariants par H_K. □

Remarque 4.2.10. — Le foncteur $V \mapsto \mathrm{D}^\dagger(V)$ n'est plus une équivalence de catégories de la catégorie des représentations p-adiques vers la catégorie des (φ,Γ)-modules étales en général (contrairement au cas où S est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$). Si par exemple S contient un élément y transcendant et de valuation nulle, alors le (φ,Γ)-module étale D de dimension 1 ayant une base e telle que $\varphi(e) = ye$ et $\gamma(e) = e$ pour $\gamma \in \Gamma$ ne provient pas d'une famille de représentations p-adiques (exemple dû à Gaëtan Chenevier).

4.3. Le module $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}(V)$

Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ le corps de périodes p-adiques construit par Fontaine (voir par exemple [**Fon94a**]). Rappelons que l'on a une application injective de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)/p}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui à $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k[x_k]$ associe la somme de la série dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Si $n \geqslant 0$, on compose cette injection avec $\varphi^{-n} : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)p^{n-1}} \to \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)/p}$ pour obtenir une application toujours injective $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,(p-1)p^{n-1}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et si $n \geqslant n(L)$, alors l'image de $\mathbf{B}_L^{\dagger,(p-1)p^{n-1}}$ par ι_n est incluse dans $L_n[\![t]\!]$.

On définit $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ comme la limite projective des $S\widehat{\otimes}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^k)$ et $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ comme la limite inductive des $S\widehat{\otimes}t^{-i}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On définit $S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]$ comme la limite projective des

$S\widehat{\otimes}(L_n[\![t]\!]/t^k)$. Si V est une S-représentation de G_K et si $s \geqslant s(V)$ et $n \geqslant \max(n(L), n(s))$, ceci nous permet de poser :

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) = (S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]) \otimes^{\iota_n}_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V) = (S\widehat{\otimes}L_n(\!(t)\!)) \otimes^{\iota_n}_{S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_L^{\dagger,s}} \mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V).$$

Le $S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ est alors libre de rang d. Si $S = \mathbf{Q}_p$, alors c'est un $L_n[\![t]\!]$-réseau du $L_n(\!(t)\!)$-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ qui est de dimension d.

Le lemme suivant est une conséquence directe du (2) du théorème 4.2.9.

Lemme 4.3.1. — *On a* $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]} \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_S V$.

Pour terminer, mentionnons que l'on retrouve $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ à partir de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ (l'énoncé et la démonstration du (2) de cette proposition, que nous n'utilisons pas par la suite, dépendent du paragraphe 5.1 ci-dessous).

Proposition 4.3.2. — *Si V est une S-représentation de G_K et $s \geqslant s(V)$ et $n \geqslant n(s)$, alors l'image de $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ par $\theta \circ \varphi^{-n}$ dans $(S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p) \otimes_S V$ coïncide avec $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. En particulier :*

(1) *on a* $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t = \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$;

(2) *(si $S = \mathbf{Q}_p$) la représentation V est de Hodge-Tate à poids dans $[a,b]$ si et seulement si* $\left(\prod_{i\in[a,b]}(\gamma - \chi(\gamma)^i)\right) \cdot \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset t \cdot \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$.

On peut d'ailleurs construire $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ en appliquant la méthode de Sen à $\widetilde{\Lambda} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, c'est ce qui est fait dans [**Fon04**].

5. Représentations de de Rham

Dans ce chapitre, nous appliquons les constructions des chapitres précédents aux familles de représentations de de Rham ; en particulier, nous montrons le théorème B de l'introduction.

5.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ et les représentations de Hodge-Tate

On note $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ l'anneau $\mathbf{C}_p[t, t^{-1}]$ muni de l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ prolongeant celle sur $\mathbf{C}_p$ par la formule $g(t) = \chi(g)t$, ce qui fait de t un analogue (naïf) p-adique de $2i\pi$.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une $\mathbf{Q}_p$-représentation V de G_K de dimension d est dite *de Hodge-Tate* (cf. [**Fon94b**, §3]) s'il existe $a_1, \dots, a_d \in \mathbf{Z}$ et une base $f_1, \dots, f_d$ de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur $\mathbf{C}_p$ sur laquelle G_K agit par $g(f_i) = \chi(g)^{a_i} f_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. Si tel est le cas, les entiers $a_1, \dots, a_d$ sont appelés les *poids de Hodge-Tate* de V.

De manière équivalente, V est de Hodge-Tate si et seulement si le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^K(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension d. La graduation de $\mathbf{B}_{\mathrm{HT}}$ étant stable par

G_K, elle induit une graduation de $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^K(V)$, et les poids de Hodge-Tate de V sont les opposés des degrés apparaissant dans la graduation de $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^K(V)$.

Si L est une extension finie de K, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^L(V) = L \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^K(V)$ et donc V est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate $a_1, \dots, a_d$ en tant que représentation de G_K si et seulement si c'est le cas en tant que représentation de G_L.

Plus généralement, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une E-représentation V de dimension d est dite de Hodge-Tate si elle est de Hodge-Tate en tant que $\mathbf{Q}_p$-représentation (de dimension $d[E : \mathbf{Q}_p]$), les poids de Hodge-Tate de V étant définis comme étant ceux de V vue comme $\mathbf{Q}_p$-représentation (il y en a donc $d[E : \mathbf{Q}_p]$). De manière équivalente, V est de Hodge-Tate si le $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^K(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} = ((E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_E V)^{G_K}$ est libre de rang d. Notons que les gradués ne sont pas nécessairement de rang constant.

Proposition 5.1.1. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K. Soit L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, soit $n \geqslant n(L)$ et soit $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$. Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *la représentation V est de Hodge-Tate et ses poids de Hodge-Tate sont $a_1, \dots, a_d$;*

(2) *l'élément γ agit de manière semi-simple sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ et ses valeurs propres sont $\chi(\gamma)^{a_1}, \dots, \chi(\gamma)^{a_d}$.*

Démonstration. — Si V est de Hodge-Tate de poids de Hodge-Tate $a_1, \dots, a_d$, alors $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ possède une base $f_1, \dots, f_d$ sur $\mathbf{C}_p$ telle que l'on ait $g(f_i) = \chi(g)^{a_i} f_i$ si $g \in G_K$ et $1 \leqslant i \leqslant d$. Le L_n-espace vectoriel engendré par $f_1, \dots, f_d$ est alors fixe par H_L (et même par H_K), stable par G_K et possède une base presque invariante par Γ_L, à savoir la base $f_1, \dots, f_d$. Par la proposition 4.1.2, on a donc $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) = L_n f_1 \oplus \cdots \oplus L_n f_d$ et comme $\gamma(f_i) = \chi(\gamma)^{a_i} f_i$, cela implique que γ est semi-simple et que ses valeurs propres sont $\chi(\gamma)^{a_1}, \dots, \chi(\gamma)^{a_d}$, ce qui démontre que (1) implique (2).

Réciproquement, si γ est semi-simple et ses valeurs propres sont $\chi(\gamma)^{a_1}, \dots, \chi(\gamma)^{a_d}$, et si $f_1, \dots, f_d$ est une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ sur L_n constituée de vecteurs propres (f_i étant vecteur propre pour la valeur propre $\chi(\gamma)^{a_i}$), alors $f_1, \dots, f_d$ est une base de $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sur laquelle G_{L_n} agit par $g(f_i) = \chi(g)^{a_i} f_i$. La restriction de V à G_{L_n} est donc une représentation de Hodge-Tate de poids de Hodge-Tate $a_1, \dots, a_d$ et comme on l'a rappelé au début de ce paragraphe, cela implique (1). □

Corollaire 5.1.2. — *La représentation $V = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ est de Hodge-Tate si et seulement si Θ_{Sen} est diagonalisable à valeurs propres entières ; de plus, ces valeurs propres comptées avec leurs multiplicités sont les poids de Hodge-Tate de V.*

Démonstration. — Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(T)$ sur L_n qui est c_3-fixe par Γ_L. La matrice de U_γ dans cette base vérifie $\mathrm{val}_p(U_\gamma - 1) > 1/(p-1)$ (cf. la remarque 4.1.3), ce qui implique qu'une valeur propre α de U_γ vérifie $\mathrm{val}_p(\alpha - 1) > 1/(p-1)$. En particulier, si α est de la forme $y\chi(\gamma)^a$, avec $a \in \mathbf{Z}$ et y racine de l'unité, alors $y = 1$. Comme les poids de Hodge-Tate généralisés sont les $(\log_p \chi(\gamma))^{-1} \log_p \alpha$, où α décrit les valeurs propres de U_γ, cela permet de conclure. $\square$

Théorème 5.1.3. — *Soient S une algèbre de Banach, $\mathscr{X}$ son spectre maximal, et V une S-représentation de dimension d de G_K. Si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, alors l'ensemble $\mathscr{X}_{\mathrm{HT}}^{[a,b]}$ des $x \in \mathscr{X}$ tels que V_x soit de Hodge-Tate, à poids de Hodge-Tate appartenant à $[a,b]$, est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$.*

Démonstration. — Soient T un sous-$\mathcal{O}_S$-réseau de V stable par G_K, L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, $n \geqslant n(L)$ et $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$. Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ sur $S \otimes L_n$, soit U la matrice de γ dans cette base et soit I l'idéal de $S \otimes L_n$ engendré par les coordonnées de $\prod_{i=a}^{b}(U - \chi(\gamma)^i)$. Alors $\mathscr{X}_{\mathrm{HT}}^{[a,b]}$ est le sous-espace de $\mathscr{X}$ défini par l'idéal I d'après les propositions 4.1.2 et 5.1.1. $\square$

Théorème 5.1.4. — *Si S est une algèbre de coefficients, si V est une S-representation de G_K et $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ tel que pour tout $x \in \mathscr{X}$, la représentation V_x est de Hodge-Tate, à poids de Hodge-Tate appartenant à $[a,b]$, alors :*

(1) *le $S \otimes K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) = ((S \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_S V)^{G_K}$ est localement libre de rang d ;*

(2) *l'application $(S \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_{S \otimes K} \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) \to (S \widehat{\otimes} \mathbf{B}_{\mathrm{HT}}) \otimes_S V$ est un isomorphisme ;*

(3) *l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soient T un sous-$\mathcal{O}_S$-réseau de V stable par G_K, L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, $n \geqslant n(L)$ et $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$. La proposition 4.1.2 montre que $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ est un $S \otimes L_n$-module localement libre de rang d. Si $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$, posons :

$$y_j = \left(\prod_{\substack{i=a \\ i \neq j}}^{b} \frac{\gamma - \chi(\gamma)^i}{\chi(\gamma)^j - \chi(\gamma)^i} \right) y.$$

L'hypothèse selon laquelle pour tout $x \in \mathscr{X}$, V_x est à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ implique que pour tout $x \in \mathscr{X}$, l'application $y \mapsto y_j$ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)$ est la projection sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)^{\Gamma_n = \chi^j}$ parallèlement à la somme directe des autres espaces propres. On a donc $y_j(x) \in \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)^{\Gamma_n = \chi^j}$ et $y(x) = \sum_{j=a}^{b} y_j(x)$, et le lemme 2.1.1 montre qu'on a alors $y_j \in \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j}$ et $y = \sum_{j=a}^{b} y_j$ ce qui fait que $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) = \oplus_{j=a}^{b} \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n = \chi^j}$. Ceci montre que $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n=\chi^j}$ est un $S\otimes L_n$-module localement libre de type fini. Comme $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)=\oplus_j \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n=\chi^j}t^{-j}$, on en déduit que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)$ est localement libre de type fini. La décomposition $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)=\oplus_j \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n=\chi^j}t^{-j}$ et le (3) de la proposition 4.1.2 impliquent que l'application $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{HT}})\otimes_{S\otimes L_n}\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)\to(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{HT}})\otimes_S V$ est un isomorphisme, et en particulier que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)$ est localement libre de rang d ce qui montre le (1) et le (2) pour L_n. On redescend à K en utilisant la proposition 2.2.1. Le (3) suit du fait que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}^{L_n}(V)=\oplus_j \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)^{\Gamma_n=\chi^j}t^{-j}$ et du fait que par la proposition 4.1.2, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)_x=\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V_x)$. □

5.2. Le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ et les représentations de de Rham

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une $\mathbf{Q}_p$-représentation V de dimension d est dite *de de Rham* (cf. [**Fon82**]) si le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)=(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{G_K}$ est de dimension d. Si L est une extension finie de K, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V)=L\otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)$ et donc V est de de Rham en tant que représentation de G_K si et seulement si c'est le cas en tant que représentation de G_L.

Plus généralement, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, une E-représentation V de dimension d est dite de de Rham si elle est de de Rham en tant que $\mathbf{Q}_p$-représentation (de dimension $d[E:\mathbf{Q}_p]$). De manière équivalente, V est de de Rham si le $K\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^K(V)=(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{G_K}=((E\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})\otimes_E V)^{G_K}$ est libre de rang d.

Il est utile de savoir caractériser les représentations de de Rham en terme du (φ,Γ)-module qui leur est associé.

Proposition 5.2.1. — *Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, V une $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension d de G_K, T un réseau de V stable par G_K, L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agisse trivialement sur $T/12pT$, n un entier $\geqslant n(L)$ et $\gamma\in\Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma)=n$.*

Si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ tel que V est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) *la représentation V est de de Rham ;*

(2) *la restriction de V à G_{L_n} est de de Rham ;*

(3) *le $L_n(\!(t)\!)$-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ contient un sous-$L_n[\![t]\!]$-réseau N vérifiant $(\gamma-1)\mathrm{N}\subset t\mathrm{N}$ et $t^{-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)\subset\mathrm{N}\subset t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$;*

(4) *on a $\prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)\subset t^{b-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$.*

Démonstration. — L'équivalence entre (1) et (2) a été rappelée au début de ce paragraphe. Remarquons par ailleurs que le lemme 4.3.1 montre que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)=\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)^{\gamma=1}$ et donc que si V est de de Rham, alors (3) est vrai avec $\mathrm{N} = L_n[\![t]\!] \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$. Si (3) est vrai, alors :

$$\begin{aligned}\prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) &\subset \prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot t^a\mathrm{N}\\ &\subset t^{2b-a+1}\mathrm{N}\\ &\subset t^{b-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V),\end{aligned}$$

ce qui montre (4). Le reste de la démonstration est consacré à remonter les implications.

Montrons tout d'abord que (3) implique (2) ; pour cela, considérons les opérateurs :

$$\alpha_k = \prod_{i=1}^{k}\frac{\gamma-\chi(\gamma)^i}{1-\chi(\gamma)^i}.$$

Si $k \geqslant 1$, alors α_k induit l'identité sur $\mathrm{N}/t\mathrm{N}$. Par ailleurs, $\alpha_k - \alpha_{k+1} = \frac{1-\gamma}{1-\chi(\gamma)^{k+1}}\alpha_k$ et une récurrence immédiate montre que $(1-\gamma)\alpha_k(x) \in t^{k+1}\mathrm{N}$ et $\alpha_k(x) - \alpha_{k+1}(x) \in t^{k+1}\mathrm{N}$ si $x \in \mathrm{N}$. La suite de terme général $\alpha_k(x)$ converge donc dans $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ et la limite est invariante par γ, ce qui nous fournit une application L_n-linéaire $\iota_{\mathrm{dR}} : \mathrm{N}/t\mathrm{N} \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ qui est injective car α_k induit l'identité sur $\mathrm{N}/t\mathrm{N}$ quel que soit $k \geqslant 1$, et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ est donc de dimension $\geqslant d$ sur L_n. On en déduit le fait que V est de de Rham en tant que représentation de G_{L_n}, que ι_{dR} est un isomorphisme et que N est le sous-$L_n[\![t]\!]$-module de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ engendré par $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$, ce qui termine la démonstration du fait que (3) implique (2).

Pour montrer que (4) implique (3), considérons le sous-$L_n[\![t]\!]$-module N de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ engendré par les $t^{-k}\prod_{i\in[a,2b-a]-\{k\}}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot x$, avec $k \in [a,b]$ et $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$. Par construction, on a $\mathrm{N} \subset t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$. Comme les polynômes $\prod_{i\in[a,b]-\{k\}}(X-\chi(\gamma)^i)$, pour $k \in [a,b]$, sont premiers entre eux dans leur ensemble, le L_n-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ (cf. proposition 4.3.2) est engendré (comme L_n-espace vectoriel) par les images des $\prod_{i\in[a,b]-\{k\}}(\gamma-\chi(\gamma)^i)$ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. Comme par ailleurs on a supposé que V est de Hodge-Tate à poids dans $[a,b]$, $\prod_{i\in[b+1,2b-a]}(\gamma-\chi(\gamma)^i)$ est un isomorphisme de $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ et donc $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$ est engendré par les images des $\prod_{i\in[a,2b-a]-\{k\}}(\gamma-\chi(\gamma)^i)$ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}^{L_n}(V)$. Ceci implique que $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ est engendré (comme $L_n[\![t]\!]$-module) par les images des $\prod_{i\in[a,2b-a]-\{k\}}(\gamma-\chi(\gamma)^i)$ agissant sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ et donc que N contient $t^{-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$. Finalement, si $x \in \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ et $k \in [a,b]$, on a :

$$\begin{aligned}(\gamma-1)(t^{-k}\cdot\prod_{\substack{i=a\\ i\neq k}}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot x) &= \chi(\gamma)^{-k}t^{-k}\prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma-\chi(\gamma)^i)\cdot x\\ &\in t^{b-a-k+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V),\end{aligned}$$

et $t^{b-a-k+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset t^{-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset t\mathrm{N}$. □

La démonstration ci-dessus montre en particulier que si V est de de Rham, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) = L_n[\![t]\!] \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ et donc $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V) = L_n(\!(t)\!) \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$.

5.3. Les périodes d'une famille de représentations de de Rham

Si V est une S-représentation de G_K et si M est une extension finie de K, on pose $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{M}(V) = ((S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V)^{G_M}$.

Théorème 5.3.1. — *Soient S une algèbre de Banach, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, et V une S-représentation de dimension d de G_K. Si $[a,b]$ est un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, alors l'ensemble $\mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$ des $x \in \mathscr{X}$ tels que V_x soit de de Rham, à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$, est un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$.*

Démonstration. — Comme une représentation de de Rham est a fortiori de Hodge-Tate, on peut, quitte à remplacer $\mathscr{X}$ par $\mathscr{X}_{\mathrm{HT}}^{[a,b]}$, supposer que V_x est de Hodge-Tate à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$ (ceci grâce au théorème 5.1.3).

Soit T un $\mathcal{O}_S$-réseau de V stable par G_K et soient L une extension galoisienne finie de K telle que G_L agit trivialement sur $T/12pT$, $s \geqslant s(V)$, $n \geqslant \max(n(L), n(s))$, et $e_1, \ldots, e_d$ une base de $\mathrm{D}_L^{\dagger,s}(V)$ sur $S\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}$. Alors $e_1, \ldots, e_d$ est aussi une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ sur $S\widehat{\otimes}L_n[\![t]\!]$ et, si $x \in \mathscr{X}$, alors $e_1(x), \ldots, e_d(x)$ est une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x)$ sur $E_x \otimes L_n[\![t]\!]$. Ceci permet d'écrire un élément y de $\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ sous la forme $\sum_{i=1}^{d}(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(y)t^j)e_i$, où les $a_{i,j}$ sont des éléments de $S \otimes L_n$. Soit $\gamma \in \Gamma_L$ vérifiant $n(\gamma) = n$ et soit $\lambda : \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ l'opérateur $\lambda = \prod_{i=a}^{2b-a}(\gamma - \chi(\gamma)^i)$. D'après le (4) de la proposition 5.2.1, si $x \in \mathscr{X}$, alors V_x est de de Rham si et seulement si $\lambda(t^k e_\ell(x)) \in t^{b-a+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x)$ quels que soient $1 \leqslant \ell \leqslant d$ et $0 \leqslant k \leqslant b-a$. Il résulte de ce qui précède que V_x est de de Rham si et seulement si $a_{i,j}(\lambda(t^k e_\ell))(x) = 0$ quel que soient $1 \leqslant i, \ell \leqslant d$ et $0 \leqslant j, k \leqslant b-a+1$ et donc que $\mathscr{X}_{\mathrm{dR}}^{[a,b]}$ est le sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$ défini par l'idéal de S engendré par les coordonnées (selon une base de L_n sur $\mathbf{Q}_p$) des $a_{i,j}(\lambda(t^k e_\ell))$, pour $1 \leqslant i, \ell \leqslant d$ et $0 \leqslant j, k \leqslant b-a+1$. □

Théorème 5.3.2. — *Soient S une algèbre de coefficients, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ et V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$. Alors :*

(1) *le $S \otimes K$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V)$ est localement libre de rang d ;*

(2) *on a $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{S\otimes K} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V$;*

(3) *si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{K}(V_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Pour $k \geqslant 0$, considérons l'opérateur :

$$\beta_k = \prod_{\substack{i=a-b \\ i\neq 0}}^{b-a+k} \frac{\gamma - \chi(\gamma)^i}{1-\chi(\gamma)^i} : t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \to t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V).$$

On voit que $(1-\gamma)\beta_k$ envoie $t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ dans $t^{1-a+k}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ et donc que $\beta_{k+1}-\beta_k$ envoie aussi $t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ dans $t^{1-a+k}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ ce qui fait que si $y \in t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$, alors quand $k \to \infty$, la suite des $\beta_k(y)$ converge. On en déduit une application $\beta : t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \to t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ qui vérifie $(1-\gamma)\beta = 0$ et qui est l'identité sur $(t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V))^{\gamma=1}$. Les calculs de la proposition 5.2.1 montrent que si $x \in \mathscr{X}$, alors β n'est autre que la projection $t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x)$. Soit M l'image de β. Remarquons que l'on a une injection $M \to t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t^{1-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ qui fait que l'on peut écrire le $S \otimes L_n$-module libre de rang fini $W = t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t^{1-a}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ sous la forme $W = M \oplus \ker\beta$. Ceci montre que M est projectif de type fini. Le lemme 4.3.1 montre par ailleurs que l'on a $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$. Si $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$, il existe donc $b(y) \geqslant b$ tel que $y \in t^{-b(y)}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$, mais l'image $\overline{y}$ de y dans le $S \otimes L_n$-module libre $t^{-b(y)}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)/t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$ vérifie $\overline{y}(x) = 0$ pour tout x par la proposition 5.2.1 et donc $\overline{y} = 0$ par le lemme 2.1.1. On en déduit que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) = (t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V))^{\gamma=1}$ et donc finalement que $M = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$. On en déduit en particulier que l'application $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x)$ est surjective.

On a alors une application $(S\widehat{\otimes} L_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n}(V)$ et nous allons montrer qu'elle est surjective. Si $y \in t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V)$, soit $z_0 = y - \sum_{j=0}^b t^{-j}\beta(t^j y)$ et pour $i \geqslant 0$, soit $z_{i+1} = (z_i - \beta(z_i))/t$. Posons $w = \sum_{j=0}^b t^{-j}\beta(t^j y) + \sum_{i\geqslant 1} t^i \beta(z_i)$. Un petit calcul montre que $w(x)$ est l'écriture de $y(x)$ selon la décomposition :

$$t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V_x) \subset L_n(\!(t)\!) \otimes_{L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x),$$

et donc que $y(x) = w(x)$ pour tout x ce qui fait que par le lemme 2.1.1, on a $y = w$ et donc :

$$t^{-b}\mathrm{D}_{\mathrm{dif}}^{L_n,+}(V) \subset (S\widehat{\otimes} L_n(\!(t)\!)) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V),$$

ce qui fait que l'application que l'on voulait est bien surjective. Le lemme 4.3.1 montre alors que l'on a un isomorphisme $(S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{S\otimes L_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) = (S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V$. En particulier, $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V)$ est de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L_n}(V_x)$ est un isomorphisme. Ceci montre les points (1), (2) et (3) avec L_n à la place de K. Pour passer de L_n à K, il suffit d'utiliser la proposition 2.2.1. □

On dit qu'une représentation qui vérifie les hypothèses du théorème 5.3.2 est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a, b]$.

Remarque 5.3.3. — L'hypothèse que $\mathrm{rad}(S) = 0$ n'est pas superflue dans les théorèmes 5.1.4 et 5.3.2. Si $S = \mathbf{Q}_p[Y]/Y^2$ et V est le caractère $g \mapsto 1 + \log_p \chi(g)Y$, alors V_x est de de Rham en tout point de $\mathscr{X}$ (le seul point étant donné par $Y = 0$, où V est triviale) mais $\Theta_{\mathrm{Sen}} = Y$ sur $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ ce qui fait que $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) = Y \cdot V$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = Y \cdot V$.

6. Représentations semi-stables et monodromie p-adique

Dans ce chapitre, nous démontrons une version en famille du théorème de monodromie p-adique et comme application, nous démontrons le théorème C de l'introduction. La démonstration est fortement inspirée de celle qui est donnée dans [**Ber02**].

6.1. Construction de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$

Dans tout ce chapitre, on suppose que S est une algèbre de coefficients. On se donne un corps E (contenant $\mathbf{Q}_p$) complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k_E parfait (ce qui fait que E est une extension finie de $W(k_E)[1/p]$), et une application continue $S \to E$. Si V est une S-représentation de G_K, alors cette application permet de considérer la E-représentation $V_E = E \otimes_S V$. On suppose dans tout ce chapitre que V est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire qu'elle vérifie les hypothèses du théorème 5.3.2.

Soit $\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$ l'anneau construit dans [**Ber02**, §2.6], c'est le complété de $\mathbf{B}^{\dagger,s}_K$ pour sa topologie de Fréchet. Si F est une extension finie de E, soit $\mathscr{R}^{\dagger,s}_F$ l'anneau des fonctions $f(X)$ à coefficients dans F et vérifiant la condition de convergence habituelle (celle de [**Ber02**, proposition 2.31]). Il existe alors un nombre fini d'extensions finies E_i de E telles que l'on a une décomposition d'anneaux $E \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K} \simeq \oplus_i \mathscr{R}^{\dagger,s}_{E_i}$. Rappelons (cf. [**Ked04**, §2] par exemple) que $\mathscr{R}^{\dagger,s}_F$ est un anneau de Bezout : en particulier les modules localement libres de type fini sont libres et un $E \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$-module est donc localement libre de type fini si et seulement si chacun des facteurs est libre de rang fini. Rappelons par ailleurs que $\mathscr{R}^{\dagger,s}_F$ est aussi une algèbre de Fréchet-Stein (cf. [**ST03**, §3]), ce qui fait qu'un sous-module fermé d'un module libre de rang fini est lui-même libre de rang fini. On en déduit la même propriété pour $E \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$.

Si V est une S-représentation de G_K, alors on pose :

$$\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V) = (S \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}) \otimes_{S \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_K} \mathrm{D}^{\dagger,s}_K(V),$$

ce qui fait (par le théorème 4.2.9) que $\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V)$ est un $S \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$-module localement libre de rang d. On pose par ailleurs :

$$\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E) = (E \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}) \otimes_{S \widehat{\otimes} \mathbf{B}^{\dagger,s}_K} \mathrm{D}^{\dagger,s}_K(V).$$

Enfin, si $\gamma \in \Gamma \setminus \{1\}$ est proche de 1, alors $\log \gamma / \log_p \chi(\gamma)$ est bien défini et ne dépend pas de γ et on le note ∇.

Proposition 6.1.1. — *Soit V une S-représentation de G_K qui est de de Rham à poids de Hodge-Tate dans un intervalle $[a,b]$. Si $N_s(V_E)=\{y\in t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ tels que $\iota_n(y)\in (E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$ pour tout $n\geqslant n(s)\}$, alors :*

(1) *le $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}$-module $N_s(V_E)$ est libre de rang d et stable par G_K ;*

(2) *pour tout $n\geqslant n(s)$, on a :*

$$(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes^{\iota_n}_{E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}} N_s(V_E)=(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V).$$

Si l'on pose $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)=(E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K})\otimes_{E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}} N_s(V_E)$, alors :

(3) *le $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est libre de rang d, stable par G_K et ne dépend pas du choix de s ;*

(4) *on a $\varphi^*(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))=\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ et $\nabla(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))\subset t\cdot\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$.*

Afin de montrer cette proposition, nous avons besoin du lemme ci-dessous.

Lemme 6.1.2. — *Si V est comme ci-dessus, alors :*

$$t^{-a}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)\subset(S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)\subset t^{-b}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V).$$

Démonstration. — On a $(S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!))\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)=(S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!))\otimes_{S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$ et on peut donc écrire un élément de $\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$ dans $(S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!))\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$ ou bien un élément de $\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $(S\widehat{\otimes}K_n(\!(t)\!))\otimes_{S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$. L'analogue du lemme pour des $\mathbf{Q}_p$-représentations étant vrai, on en déduit le lemme en évaluant les coefficients des écritures des éléments de $\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$ et de $\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$. □

Démonstration de la proposition 6.1.1. — Les applications $\iota_n : E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig},K}\to E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]$ sont continues ce qui fait que $N_s(V_E)$ est un sous-module fermé de $t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$, et il est donc (au vu des rappels que l'on a faits plus hauts) localement libre de type fini. Le lemme 6.1.2 montre que $t^{-a}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)\subset N_s(V_E)\subset t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ ce qui fait que $N_s(V_E)$ est libre de rang d. Le fait qu'il est stable sous l'action de G_K suit du fait que les ι_n commutent à cette action. Ceci montre le (1).

Montrons à présent le (2). On note $\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V_E)=(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes_{S\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!]}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V)$. Par le lemme 6.1.2, on a une inclusion :

$$(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)\subset t^{-b}\mathrm{D}^{+,K_n}_{\mathrm{dif}}(V_E).$$

Soit $w\geqslant\max(0,-a)$; si $y\in(E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)$, alors il existe $y_0\in t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger,s}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ tel que :

$$\iota_n(y_0)-y\in t^w((E\widehat{\otimes}K_n[\![t]\!])\otimes_{S\otimes K_n}\mathrm{D}^{K_n}_{\mathrm{dR}}(V)).$$

Si $t_{n,w}$ désigne la fonction construite dans [**Ber04**, lemme I.2.1], alors :

$$\iota_m(y_0t_{n,w})\in t^w((E\widehat{\otimes}K_m[\![t]\!])\otimes_{S\otimes K_m}\mathrm{D}^{K_m}_{\mathrm{dR}}(V))$$

pour tout $m \neq n$ et :

$$\iota_n(y_0 t_{n,w}) - y \in t^w((E\widehat{\otimes} K_n[\![t]\!]) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V)),$$

ce qui fait que $y_0 t_{n,w} \in N_s(V_E)$. On en déduit que pour tout $w \gg 0$, l'application de $N_s(V_E)$ dans $(E\widehat{\otimes} K_n[\![t]\!]/t^w) \otimes_{S\otimes K_n} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{K_n}(V)$ est surjective. Ceci montre le (2).

On déduit du (1) et du (2) que $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est un $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module libre de rang d et stable par G_K. Par ailleurs, si $y \in N_s(V_E)$, alors $\iota_n \circ \nabla(y) \in t \cdot \iota_n(N_s(V_E))$ pour tout n d'où $\nabla(N_s(V_E)) \subset t \cdot N_s(V_E)$ et donc $\nabla(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \subset t \cdot \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$. Enfin si M et N sont deux $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-modules libres de rang d inclus dans $t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ tels que $\nabla(M) \subset tM$ et $\nabla(N) \subset tN$, alors $M = N$ (appliquer le corollaire 5.17 de [**Ber02**] à chacune des composantes de M et N selon la décomposition de $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ en produit d'anneaux de Robba). On en déduit le (3).

Pour terminer la démonstration du (4), remarquons que $\varphi(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ car $\varphi(N_s(V_E)) \subset N_{ps}(V_E)$ et que $\nabla(\varphi^*\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \subset t \cdot \varphi^*\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ ce qui permet de conclure par unicité que $\varphi^*\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) = \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$. □

On pose $\partial = t^{-1}\nabla$ ce qui fait que $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est stable par l'opérateur différentiel ∂.

Remarque 6.1.3. — La construction de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ implique que l'on a $t^{-a}\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E) \subset \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) \subset t^{-b}\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E)$ et donc en particulier que $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)[1/t] = \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V_E)[1/t]$.

6.2. Monodromie p-adique

Soit K_0' l'extension maximale non ramifiée de K_0 contenue dans K_∞ ce qui fait que $\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$ s'identifie à un anneau de séries formelles à coefficients dans K_0'. Quitte à remplacer E par une extension finie, on peut supposer que $K_0' \subset E$. Dans ce cas, $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K} \simeq \mathscr{R}_E^f$ où $f = [K_0' : \mathbf{Q}_p]$ et l'application φ^f stabilise chaque facteur. On en déduit pour le $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}^{\dagger}_{\mathrm{rig},K}$-module $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ construit au paragraphe précédent une décomposition correspondante $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) \simeq \oplus_{i=0}^{f-1}\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ où chaque facteur est stable par G_K (et donc par ∂) et où $\varphi^*(\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \simeq \mathrm{N}^{(i+1)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ en prenant les indices modulo f, ce qui fait que $(\varphi^f)^*(\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)) \simeq \mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$. Chaque $\mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est donc une équation différentielle p-adique munie d'une structure de Frobenius.

Proposition 6.2.1. — *Il existe une extension finie $\mathscr{R}_F/\mathscr{R}_E$ correspondant à une extension finie de $k_E(\!(X)\!)$ via le corps de normes telle que $\mathscr{R}_F \otimes_{\mathscr{R}_E} \mathrm{N}^{(i)}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est unipotente pour tout i.*

Démonstration. — C'est le théorème de monodromie p-adique (voir le théorème 0.1.1 de [**And02**] ou bien le corollaire de 5.0-23 de [**Meb01**]). Remarquons qu'on ne peut pas appliquer le théorème 1.1 de [**Ked04**] car celui-ci impose au Frobenius d'être absolu, ni appliquer la variante du théorème de filtration démontrée dans [**Ked06**] car celle-ci n'implique pas de manière évidente le théorème de monodromie p-adique. □

La plupart des extensions $\mathscr{R}_F/\mathscr{R}_E$ ne sont pas une composante d'une extension de la forme $F\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L$ où F est une extension finie de E et L est une extension finie de K, mais dans la proposition 6.2.1 ci-dessus, c'est en fait le cas.

Proposition 6.2.2. — *Il existe une extension finie F de E et une extension finie L de K telles que $(F\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L)\otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$ est unipotente.*

Démonstration. — Soit $\mathscr{R}_F$ l'extension finie de $\mathscr{R}_E$ fournie par la proposition 6.2.1 ; quitte à étendre les scalaires et à élargir F, on peut supposer d'une part que $\mathscr{R}_F^{\partial=0}=F$ et d'autre part que si l'on pose $\mathrm{Sol}_F(V_E)=(\mathscr{R}_F[\log(X)]\otimes_{\mathscr{R}_E}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{\partial=0}$, alors :

$$\mathrm{Sol}_F(V_E)=(\mathscr{R}_F[\log(X)]\otimes_{\mathscr{R}_E}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{G_F}.$$

Le F-espace vectoriel $\mathrm{Sol}_F(V_E)$ est muni d'une action E-linéaire de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et un résultat classique (un cas particulier de la proposition 2.2.1) nous dit que $\mathrm{Sol}_F(V_E)=F\otimes_E\mathrm{Sol}_F(V_E)^{\mathrm{Gal}(F/E)}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sol}_F(V_E)^{\mathrm{Gal}(F/E)}&=(\mathscr{R}_F[\log(X)]\otimes_{\mathscr{R}_E}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{G_E}\\&\subset(\mathscr{R}_F[\log(X)]\otimes_{\mathscr{R}_E}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}}\\&=\mathscr{R}_F^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}}[\log(X)]\otimes_{\mathscr{R}_E}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E),\end{aligned}$$

puisque $G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}$ agit trivialement sur $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E)$.

L'anneau $\mathscr{R}_F^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}}$ correspond, via le corps de normes, à la plus grande extension de $k_E(\!(X)\!)$ incluse d'une part dans $k_E(\!(X)\!)\cdot\overline{\mathbf{F}}_p(\!(X)\!)^{\mathrm{sep}}$ et d'autre part dans l'extension finie de $k_E(\!(X)\!)$ fournie par la proposition 6.2.1, et il existe donc une extension finie L de K telle que $\mathscr{R}_F^{G_{E\cdot\overline{\mathbf{Q}}_p}}\subset F\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L$. □

Le groupe de Galois G_F agit sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $\overline{\mathbf{Q}}_p^{G_F}$ est un corps de valuation discrète ce qui fait que l'image de l'application $G_F\to G_{\mathbf{Q}_p}$ contient le sous-groupe d'inertie d'une extension finie de K et quitte à élargir le corps L fourni par la proposition précédente, on peut donc supposer que l'image de G_F contient I_L.

Corollaire 6.2.3. — *Il existe une extension finie L de K telle que :*

$$(E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)]\otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{I_L}$$

est un $E\otimes L_0'$-module libre de rang d et on a alors :

$$\begin{aligned}E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)]\otimes_{E\otimes L_0'}(E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)]\otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E))^{I_L}&\\=E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)]\otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K}\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E).&\end{aligned}$$

On fixe cette extension L dans la suite de ce paragraphe.

Soit $[\widetilde{p}]$ l'élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ dont on utilise un logarithme pour plonger $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. Rappelons (cf. [**Ber02**, §2.4] par exemple) que $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t, \log(X)] = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t, \log[\widetilde{p}]]$.

Proposition 6.2.4. — *Le $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module $((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}$ est libre de rang d et l'inclusion :*

$$((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L} \subset ((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La démonstration suit de près celle de la proposition 3.4 de [**Ber02**], à laquelle nous renvoyons pour plus de détails. Posons :

$$D(V) = ((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}$$
$$D_r(V) = ((E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E)^{I_L}.$$

On a $(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}[1/t, \log[\widetilde{p}]])^{I_L} = \widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$ et :

$$E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_L[\log(X)] \otimes_{E\widehat{\otimes}\mathscr{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_E) \subset (E\widehat{\otimes}\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}})[1/t, \log[\widetilde{p}]] \otimes_E V_E$$

ce qui fait que $D(V)$ est un $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module localement libre de rangs locaux $\geqslant d$. Si $n \geqslant n(r)$, alors l'application $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,r}_{\mathrm{rig}}[1/t, \log[\widetilde{p}]] \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est injective par la proposition 2.25 de [**Ber02**] et envoie $D_r(V)$ dans $((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_E V_E)^{I_L}$ qui est un $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module libre de rang d, ce qui fait que $D_r(V)$ est localement libre de rangs locaux $\leqslant d$. Comme $D(V) = \cup_{r>0} D_r(V)$, on en déduit que $D(V)$ est libre de rang d.

Passons maintenant à la deuxième assertion. Le frobenius E-linéaire φ commute à Galois et définit un isomorphisme de $D(V)$ dans lui-même. Le résultat suit alors, après qu'on a choisi une base de V et une base de $D(V)$, de l'analogue E-linéaire de la proposition 3.2 de régularisation par le frobenius de [**Ber02**] (qui se démontre exactement de la même manière qu'en $\mathbf{Q}_p$-linéaire). Le dernier isomorphisme est alors évident. □

Corollaire 6.2.5. — *Le $E\widehat{\otimes}\widehat{\mathbf{Q}}_p^{\mathrm{nr}}$-module $((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{st}}) \otimes_E V_E)^{I_L}$ est libre de rang d et l'application :*

$$L \otimes_{L_0} ((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{st}}) \otimes_E V_E)^{I_L} \to ((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_E V_E)^{I_L}$$

est un isomorphisme.

6.3. Application aux familles de représentations de de Rham

Soit $\mathbf{B}^{+,h}_{\mathrm{st}} = \oplus_{i=0}^h \mathbf{B}^+_{\max} \log([\widetilde{p}])^i$ ce qui fait que $\mathbf{B}^{+,h}_{\mathrm{st}}$ est le noyau de N^{h+1} sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ (ici N est l'opérateur de monodromie sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$).

Lemme 6.3.1. — *Soit S une algèbre de coefficients et $x : S \to E$ un plongement isométrique dans une algèbre de Banach. Si $a \in S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est tel que $x(a) \in E\widehat{\otimes}(L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{+,h})$, alors $a \in S\widehat{\otimes}(L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{+,h})$.*

Démonstration. — Rappelons que par [**Col02**, §8.4], il existe un homéomorphisme d'espaces de Fréchet $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} = \mathbf{C}_p[\![X]\!]$ tel que $L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\max}^{+}$ s'identifie à $\mathbf{C}_p\{X\}$ et $L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{+,h}$ à $\oplus_{i=0}^{h}\mathbf{C}_p\{X\}\log(1+X)^i$. On se ramène donc à montrer que si $a \in S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p[\![X]\!]$ est tel que $x(a) \in E\widehat{\otimes}(\oplus_{i=0}^{h}\mathbf{C}_p\{X\}\log(1+X)^i)$, alors $a \in S\widehat{\otimes}(\oplus_{i=0}^{h}\mathbf{C}_p\{X\}\log(1+X)^i)$.

Etant donné que l'application $S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p \to E\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p$ est un plongement isométrique et que $S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p[\![X]\!] = (S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p)[\![X]\!]$ et $S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p\{X\} = (S\widehat{\otimes}\mathbf{C}_p)\{X\}$, on se ramène à montrer que si A est un espace de Banach et B un sous-espace fermé de A, et si $g(X) \in \oplus_{i=0}^{h}A\{X\}\log(1+X)^i$ vérifie $g(X) \in B[\![X]\!]$, alors $g(X) \in \oplus_{i=0}^{h}B\{X\}\log(1+X)^i$.

Pour cela, considérons l'application $A\{X\} \to \prod_{n\geqslant 0} A \otimes \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$ qui à $f(X)$ associe $(f(\zeta_{p^n}-1))_{n\geqslant 0}$. Le théorème de préparation de Weierstrass montre que cette application est une isométrie sur son image, et donc qu'il existe des formules universelles permettant de reconstruire les coefficients f_j de $f(X) = \sum_{j\geqslant 0} f_j X^j$ à partir de $(f(\zeta_{p^n}-1))_{n\geqslant 0}$. En particulier, si $f(\zeta_{p^n}-1) \in B \otimes \mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$ pour tout $n \geqslant 0$, alors $f(X) \in B\{X\}$. Si $g(X) = f^{(0)}(X) + f^{(1)}(X)\log(1+X) + \cdots + f^{(h)}(X)\log(1+X)^h \in B[\![X]\!]$, alors $g(X) \in A[\![X]\!]_{\mathrm{hol}}$ (les séries qui convergent sur le disque unité ouvert), et $g(\zeta_{p^n}-1) = f^{(0)}(\zeta_{p^n}-1)$ pour tout $n \geqslant 0$ ce qui fait que si $g(X) \in B[\![X]\!]$, alors $f^{(0)}(X) \in B[\![X]\!]$ aussi et donc à $B\{X\}$. En considérant $(g(X) - f^{(0)}(X))/\log(1+X)$, on montre par récurrence que chaque $f^{(i)}(X) \in B\{X\}$. □

Théorème 6.3.2. — *Soient S une algèbre affinoïde réduite, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$ et V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$. Il existe alors une extension finie L de K telle que le $S\otimes L_0$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^{L}(V)$ est localement libre de rang d et vérifie $(S\otimes L)\otimes_{S\otimes L_0}\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^{L}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{L}(V)$.*

Si $x \in \mathscr{X}$, alors l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^{L}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^{L}(V_x)$ est un isomorphisme.

Démonstration. — Par la proposition 2.1.2, on peut supposer que S est muni de la valuation spectrale. Par le corollaire 2.1.4, il existe $m \geqslant 1$ et m corps $E_1,\ldots,E_m$ complets pour des valuations discrètes tels que l'on ait un plongement isométrique $S \to \oplus_{i=1}^{m}E_i$. Quitte à agrandir chacun des E_i, on peut supposer qu'ils sont à corps résiduels parfaits.

Par le corollaire 6.2.5, il existe alors une extension finie L de K telle que pour chaque i on a un isomorphisme :

$$L\otimes_{L_0}((E_i\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{st}})\otimes_{E_i}V_{E_i})^{I_L} \to ((E_i\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})\otimes_{E_i}V_{E_i})^{I_L}.$$

Comme une algèbre affinoïde est de Jacobson, alors son radical de Jacobson est nul si elle est réduite et on peut appliquer le théorème 5.3.2 qui nous dit que $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V)$ est un $S \otimes L$-module localement libre de rang d. On a une application injective $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V) \to ((E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_S V)^{I_L}$ avec $E = \oplus_{i=1}^m E_i$ et si $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V)$, on peut écrire $y = \sum_{j=1}^d y_j \otimes v_j$ avec $y_j \in S\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. L'isomorphisme ci-dessus implique que l'image de y_j dans $E\widehat{\otimes}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est en fait dans $E\widehat{\otimes}(L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}})$. Le lemme 6.3.1 nous dit alors que $y_j \in S\widehat{\otimes}(L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}})$ et donc que :

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V) = (S\widehat{\otimes}(L \otimes_{L_0} \mathbf{B}_{\mathrm{st}}) \otimes_S V)^{G_L} = L \otimes_{L_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V).$$

On en déduit que $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V)$ est localement libre de rang d.

Montrons maintenant le deuxième point. Comme l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^L(V_x)$ est un isomorphisme, l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x)$ est injective et c'est un isomorphisme pour des raisons de dimension : le terme de gauche est de rang d sur $S/\mathfrak{m}_x$ alors que le terme de droite est de rang $\leqslant d$. □

Corollaire 6.3.3. — *Soient S une algèbre affinoïde réduite, $\mathscr{X}$ l'espace associé à S, $[a,b]$ un intervalle fini de $\mathbf{Z}$, V une S-représentation de dimension d de G_K telle que V_x soit de de Rham à poids de Hodge-Tate dans $[a,b]$ quel que soit $x \in \mathscr{X}$ et soit L l'extension finie de K fournie par le théorème 6.3.2. On a alors :*

(1) *si τ est un type du groupe d'inertie $I(L/K)$, alors l'ensemble $\mathscr{X}(\tau)$ des x tels que le type de V_x est τ, est une réunion de composantes Zariski connexes de $\mathscr{X}$;*

(2) *si $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ ou $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ dénote l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ où V_x est cristalline ou semi-stable, alors $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ et $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ sont des sous-espaces S-analytiques de $\mathscr{X}$;*

(3) *si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V_x)$ est un isomorphisme ;*

(4) *si $\mathscr{X} = \mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d et l'application $S/\mathfrak{m}_x \otimes_S \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^K(V_x)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Pour montrer le (1), constatons que V_x est de type τ si et seulement si $\mathrm{Tr}(g \mid \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x)) = \mathrm{Tr}(\tau(g))$ pour tout $g \in I(L/K)$ ce qui définit un sous-espace S-analytique de $\mathscr{X}$. Comme on a $\mathscr{X} = \coprod_\tau \mathscr{X}(\tau)$ et qu'il n'y a qu'un nombre fini de τ possibles, $\mathscr{X}(\tau)$ est aussi ouvert. Ceci montre le (1).

En appliquant le (1) au type trivial, on trouve que $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ est un sous-espace S-analytique et $\mathscr{X}_{\mathrm{cris}}^{[a,b]}$ est le sous-espace de $\mathscr{X}_{\mathrm{st}}^{[a,b]}$ défini par l'équation $N \mid_{\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_x)} = 0$ et est donc lui aussi un sous-espace S-analytique. Ceci montre le (2).

Montrons à présent le (3). Pour tout $x \in \mathscr{X}$, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x) = L_0 \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V_x)$; en particulier, si $y \in \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V_x)$ et $g \in I(L/K)$, alors pour tout $x \in \mathscr{X}$ on a $(gy - y)(x) = 0$ ce qui fait que $gy = y$ par le lemme 2.1.1. On en déduit que $I(L/K)$ agit trivialement sur $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V)$ et on peut alors appliquer la proposition 2.2.1 qui nous donne que $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^L(V) = (S \otimes L_0) \otimes_{S \otimes K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$, et que $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}^K(V)$ est un $S \otimes K_0$-module localement libre de rang d.

Enfin le (4) résulte directement du (3) puisque $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)^{N=0}$. □

Remarque 6.3.4. — Le théorème 6.3.2 et son corollaire 6.3.3 sont toujours valables si l'on suppose seulement que S est une algèbre de coefficients dont le radical de Jacobson est nul et telle que la frontière de Shilov du spectre de Berkovich de S est finie.

7. Un théorème de Wintenberger

Dans ce dernier chapitre, nous utilisons les résultats du paragraphe 4.1 pour montrer le théorème D de l'introduction.

7.1. Continuité des périodes de Sen

Dans tout ce chapitre, on suppose toujours que K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, soit $\Theta_V = \Theta_{\mathrm{Sen},V}$ l'endomorphisme de Sen associé à V (cf. §4.1) et $P_{\mathrm{Sen},V}(X) \in K[X]$ le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de Sen. On dit que deux représentations V_1 et V_2 sont congrues modulo p^k si elles admettent deux $\mathbf{Z}_p$-réseaux T_1 et T_2 tels que $T_1/p^k \simeq T_2/p^k$. L'objet de ce chapitre est de montrer le résultat suivant :

Théorème 7.1.1. — *Il existe une constante $c(d,K)$ telle que si V_1 et V_2 sont deux représentations de dimension d de G_K qui sont congrues modulo p^k, alors les polynômes P_{Sen,V_1} et P_{Sen,V_2} sont congrus modulo $p^{k-c(d,K)}$.*

Un corollaire immédiat (en utilisant la théorie des polygones de Newton) de ce théorème est le résultat suivant, dû à Wintenberger (cf. [**Win00**]) :

Corollaire 7.1.2. — *Il existe une constante $c(d,K)$ telle que si V_1 et V_2 sont deux représentations de Hodge-Tate de dimension d de G_K, qui sont congrues modulo p^k, alors leurs poids de Hodge-Tate sont congrus modulo $p^{\lfloor k/d \rfloor - c(d,K)}$.*

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration du théorème 7.1.1 ci-dessus. Comme $K/\mathbf{Q}_p$ est finie, il existe une extension finie L de K telle que si T est n'importe quelle $\mathbf{Z}_p$-représentation de G_K de dimension d, alors la restriction de T à G_L est triviale modulo $12p$ (ceci suit du fait que K n'a qu'un nombre fini d'extensions d'un degré donné). Quitte à remplacer L par une extension finie convenable, on peut de plus supposer que $L = L_{n(L)}$.

On peut en particulier appliquer la proposition 4.1.2 pour montrer qu'il existe une base $e_1, \ldots, e_d$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p} \otimes_{\mathbf{Z}_p} T$ telle que le $\mathcal{O}_L$-module $\mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(T)$ engendré par les e_i est fixe par H_L, stable par G_K, et tel que si $\gamma \in \Gamma_L$, alors $\mathrm{val}_p(\mathrm{Mat}(\gamma) - \mathrm{Id}) > c_3$.

Rappelons que pour tout $\gamma \in \Gamma_L \setminus \{1\}$, l'opérateur $\Theta_V : \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{Sen}}(V)$ défini par $\Theta_V = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$ ne dépend pas du choix de γ et que son polynôme caractéristique appartient à $K[X]$.

Plaçons-nous dans la situation du théorème 7.1.1 ci-dessus et choisissons t_i^1 et t_i^2 deux bases de T_1 et T_2 dans lesquelles les matrices $G_1(g)$ et $G_2(g)$ de l'action de tout $g \in G_K$ sont congruentes modulo p^k. Soient M_1 et M_2 les matrices selon les bases t_i^1 et t_i^2 des bases e_i^1 et e_i^2 dont on a rappelé la construction ci-dessus. On a en particulier : $h(M_i)G_i(h) = M_i$ pour tout $h \in H_L$ et il existe $N_i(g) \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L)$ telles que $g(M_i)G_i(g) = N_i(g)M_i$ si $g \in G_K$ avec $\mathrm{val}_p(N_i(g) - \mathrm{Id}) > c_3$ si $\overline{g} \in \Gamma_L$.

Lemme 7.1.3. — *Il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L)$ telle que $MM_1 = M_2 \mod p^{k-2}$.*

En d'autres termes les matrices M_1 et M_2 sont congrues quitte à faire un changement de base.

Démonstration. — Posons $B = M_1 M_2^{-1} \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$. Le fait que si $h \in H_L$, alors $G_1(h) = G_2(h) \mod p^k$ et que $G_i(h) = h(M_i^{-1})M_i$ implique que $h(B) = B \mod p^k$. On sait que l'application $\mathcal{O}_{L_\infty}/p^k \to (\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/p^k)^{H_L}$ est presque surjective, en ce sens que son conoyau est tué par toute puissance de p. Il existe donc une matrice $B_0 \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{L_\infty})$ telle que $B = B_0 + p^{k-1}B_1$. On a d'autre part :

$$\begin{aligned} g(B) &= g(M_1 M_2^{-1}) \\ &= N_1(g)M_1G_1(g^{-1})G_2(g)M_2^{-1}N_2(g^{-1}) \\ &= N_1(g)BN_2(g^{-1}) \mod p^k \end{aligned}$$

ce qui fait que $g(B_0) = N_1(g)B_0N_2(g^{-1}) + p^{k-1}B_2$ avec $B_2 \in \mathrm{M}_d(\mathcal{O}_{L_\infty})$. Comme on a supposé que $L = L_{n(L)}$, on dispose d'une application $R_L : L_\infty \to L$ qui satisfait (TS2) et en particulier $R_L(\mathcal{O}_{L_\infty}) \subset p^{-c_2}\mathcal{O}_L$, ce qui fait que si $C = B_0 - R_L(B_0)$, alors $g(C) = N_1(g)CN_2(g^{-1}) + p^{k-1-c_2}R_L(B_2)$.

Supposons maintenant que $\overline{g} \in \Gamma_L$. On a alors $v_p(g(C)-C) \geqslant \inf(v_p(C)+c_3, k-1-c_2)$ ce qui fait que si $v(C) < k-1-c_2-c_3$, on a $v_p(g(C)-C) > v_p(C)+c_3$ en contradiction avec (TS3). Ceci montre que $v(C) \geqslant k-1-c_2-c_3$ et donc que si l'on pose $M = B_0 - C$ alors $M \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_L)$ et $M - B \in p^{k-2}\mathrm{M}_d(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ ce qui montre le lemme. □

On suppose à présent qu'on a fait le changement de base nécessaire et que $M_1 = M_2 \mod p^{k-2}$. En particulier, si $\overline{g} \in \Gamma_L^p$ et comme $c_3 \geqslant 1/(p-1) > 1/p$, on a $N_1(g) = N_2(g) = \mathrm{Id} \mod p$ et $N_1(g) = N_2(g) \mod p^{k-2}$.

Lemme 7.1.4. — *Si N_1 et N_2 sont deux matrices telles que $N_1 = N_2 = \mathrm{Id} \mod p$ et $N_1 = N_2 \mod p^{k-2}$ et si $m \geqslant 0$, alors $N_1^{p^m} = N_2^{p^m} \mod p^{k+m-2}$.*

Démonstration. — Une récurrence facile montre qu'il suffit de démontrer le lemme pour $m = 1$, c'est-à-dire que $N_1^p = N_2^p \mod p^{k-1}$. Si l'on écrit $N_2 = N_1 + p^{k-2}R$, on voit que

$$N_2^p - N_1^p = p^{k-2} \sum_{i=0}^{p-1} N_1^i R N_1^{p-1-i} \mod p^{2(k-2)}$$

et si $N_1 = \mathrm{Id} \mod p$, alors on voit que $\sum_{i=0}^{p-1} N_1^i R N_1^{p-1-i}$ est divisible par p ce qui implique que $N_1^p = N_2^p \mod p^{k-1}$. □

Démonstration du théorème 7.1.1. — Si $\overline{g} \in \Gamma_L^p$ alors d'une part g agit linéairement sur le $\mathcal{O}_L$-module engendré par les e_i et d'autre part sa matrice relève du lemme ci-dessus. La formule $\Theta_V = \log(\gamma)/\log_p(\chi(\gamma))$ montre que Θ_V est la limite quand $m \to \infty$ de $(g^{p^m} - 1)/p^m \log_p(\chi(g))$. Le lemme précédent implique alors que d'une part les matrices de Θ_{V_1} et de Θ_{V_2} sont à coefficients dans $p^{-2-v_p(\log_p(\chi(g)))}\mathcal{O}_L$ et d'autre part que $\Theta_{V_1} - \Theta_{V_2}$ est à coefficients dans $p^{k-2-v_p(\log_p(\chi(g)))}\mathcal{O}_L$. Comme la valuation p-adique de $\log_p(\chi(g))$ pour un générateur g de Γ_L^p ne dépend que de L qui ne dépend que de d et K, il existe donc une constante $c(d, K)$ qui ne dépend que de d et de K telle que les coefficients des polynômes caractéristiques de Θ_{V_1} et de Θ_{V_2} sont égaux modulo $p^{k-c(d,K)}$. □

Références

[And02] Y. André – *Filtrations de Hasse-Arf et monodromie p-adique.* Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 285–317.

[AB06] F. Andreatta, O. Brinon – *Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif.* Prépublication 2006.

[Ber02] L. Berger – *Représentations p-adiques et équations différentielles.* Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219–284.

[Ber04] L. Berger – *Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés.* Prépublication 2004.

[Bkv90] V. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields.* Mathematical Surveys and Monographs, 33. AMS, Providence, RI, 1990. x+169 pp.

[BGR84] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert – *Non-Archimedean analysis.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 261. Springer-Verlag, Berlin, 1984. xii+436 pp.

[BouAC] N. Bourbaki – *Algèbre commutative.* Actualités Scientifiques et Industrielles, Herman, Paris 1961.

[CC98] F. Cherbonnier, P. Colmez – *Représentations p-adiques surconvergentes.* Invent. Math. 133 (1998), no. 3, 581–611.

[Col01] P. Colmez – *Les conjectures de monodromie p-adiques.* Séminaire Bourbaki. Vol. 2001/2002. Astérisque No. 290 (2003), Exp. No. 897, vii, 53–101.

[Col02] P. Colmez – *Espaces de Banach de dimension finie.* Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2002) 1(3), 331-439.

[Col03] P. Colmez – *Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham.* Prépublication 2003.

[Dee01] J. Dee – Φ-Γ *modules for families of Galois representations.* J. Algebra 235 (2001), no. 2, 636–664.

[Fon82] J.-M. Fontaine – *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate.* Ann. of Math. (2) 115 (1982), no. 3, 529–577.

[Fon90] J.-M. Fontaine – *Représentations p-adiques des corps locaux I.* The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 249–309, Progr. Math. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.

[Fon94a] J.-M. Fontaine – *Le corps des périodes p-adiques.* Astérisque No. 223 (1994), 59–111.

[Fon94b] J.-M. Fontaine – *Représentations p-adiques semi-stables.* Astérisque No. 223 (1994), 113–184.

[Fon04] J.-M. Fontaine – *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques.* Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III. Astérisque No. 295 (2004), xi, 1–115.

[Ked04] K. Kedlaya – *A p-adic local monodromy theorem.* Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 1, 93–184.

[Ked06] K. Kedlaya – *Slope filtrations for relative Frobenius.* Astérisque, à paraître.

[Kis03] M. Kisin – *Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture.* Invent. Math. 153 (2003), no. 2, 373–454.

[Kis06] M. Kisin – *Potentially semi-stable deformation rings.* JAMS, à paraître.

[Liu06] T. Liu – *Torsion p-adic Galois representations and a conjecture of Fontaine.* Annales de l'ENS, à paraître.

[Meb01] Z. Mebkhout – *Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique.* Invent. math. 148 (2002), 319–351.

[ST03] P. Schneider, J. Teitelbaum – *Algebras of p-adic distributions and admissible representations.* Inv. Math. 153, 2003, 145–196.

[Sen80] S. Sen – *Continuous cohomology and p-adic Galois representations.* Inv. Math. 62 (1980/81) 89–116.

[Sen88] S. Sen – *The analytic variation of p-adic Hodge structure.* Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 3, 647–661.

[Sen93] S. Sen – *An infinite-dimensional Hodge-Tate theory.* Bull. Soc. Math. France 121 (1993), no. 1, 13–34.

[Tat66] J. Tate – *p-divisible groups.* Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) 158–183 Springer, Berlin.

[Win00] J.-P. Wintenberger – *Lettre à Kevin Buzzard.* 26 avril 2000.

Février 2007, révision septembre 2007

Laurent Berger, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France
E-mail : `laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr` • *Url :* `www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/`

Pierre Colmez, CMLS, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail : `pierre.colmez@math.polytechnique.fr` • *Url :* `www.math.jussieu.fr/~colmez/`