Invent. math. 95, 161–205 (1989)

Inventiones mathematicae

Algébricité de valeurs spéciales de fonctions L

P. Colmez
Max-Planck Institut für Mathematik, Gottfried-Claren Straße 26, D-5300 Bonn 3, Federal Republic of Germany

Introduction

Le but de cet article est de donner une preuve nouvelle des conjectures standards [D] à propos de l'algébricité des valeurs spéciales des fonctions L attachées à certains caractères de Hecke de type A_0 d'une extension finie F d'un corps quadratique imaginaire K. Ces conjectures ont été démontrées par Harder [H-S] dans un cadre plus général et par des méthodes nettement plus sophistiquées. En fait, les premiers résultats dans cette direction remontent à Eisenstein [W], et Damerel [Da] qui, dans le cas où $F=K$, ont exprimé ces valeurs comme une somme finie de séries d'Eisenstein prises en des points d'ordre fini de courbes elliptiques à multiplication complexe par K. Notre approche pour le cas général a été motivée par une conjecture remarquable et impubliée de R. Sczech[1], experimant ces valeurs comme polynôme en des séries d'Eisenstein encore une fois évaluées en des points d'ordre fini sur des courbes elliptiques à multiplication complexe par K. En fait, notre résultat principal (Théorèmes 5 et 6) est une preuve de cette conjecture dans un cas assez général. Des résultats dans le cas $[F:K]=2$ ont été obtenus par Ito [I] et Weselmann [We] (voir aussi [H])[1].

Notre démonstration repose sur deux idées. La première est d'utiliser une version plus fine et plus canonique de la méthode de Shintani [Sh] que celui-ci a introduit pour étudier les valeurs spéciales des fonctions zêta partielles des corps totalement réels. L'exposé de cette méthode est l'objet de la partie I. La seconde idée est d'appliquer la théorie des distributions pour étudier la convergence de certains analogues pour F des fonctions elliptiques classiques attachées aux réseaux de K. Ceci fait l'objet de la partie II. Comme le lecteur pourra le constater, la situation est nettement moins agréable que dans le cas classique, en ce sens que nous n'avons pas réussi à prouver l'existence d'un prolongement analytique à tout le plan complexe. La partie III est consacrée à l'étude des valeurs spéciales de fonctions L proprement dites: elle utilise les résultats des deux parties précédentes et l'absence de prolongement analytique à tout le plan complexe fait que nous avons dû restreindre l'ensemble de valeurs spéciales considérées. De plus, pour vérifier que nous sommes bien dans les conditions d'application des résultats de la partie II, nous avons besoin d'un

[1] voir [Scz]

théorème de Schmidt [Sch] sur l'approximation des nombres algébriques. Les hypothèses de ce théorème sont relativement malaisées à vérifier, et nous avons été amené à imposer quelques conditions sur F. Nous terminons l'article par une conjecture donnant une formule explicite pour les valeurs spéciales considérées, conjecture que nous démontrons dans un cas relativement général.

Sommaire

Chapitre I. Méthode de Shintani

Soit n un entier $\geqq 1$ et regardons les éléments de $\mathbb{C}^n$ comme des vecteurs (matrices colonnes). Si $z \in \mathbb{C}^n$, on note $\mathrm{Tr}(z)$ la somme de ses coordonnées. Si k est un entier $\geqq 1$, on note I_k l'ensemble des n-uples $\underline{k}=(k_1, \ldots, k_n)$ avec $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i > 0$ et $\sum_{i=1}^{n} k_i = nk$. Si $\mathscr{B}=(b_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on définit $\alpha_{\underline{k}}(\mathscr{B})$ par la formule

$$\sum_{\underline{k} \in I_k} \alpha_{\underline{k}}(\mathscr{B})\, x_1^{k_1-1} \ldots x_n^{k_n-1} = (u_1 \ldots u_n)^{k-1}$$

où $u_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} x_i$. On regarde $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ comme un groupe pour la multiplication composante par composante et on définit l'application $\mathrm{Log}\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{R}^n$ qui envoie z sur le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la i-ième coordonnée est $\log |z_i|^2$. Soit $D \subset (\mathbb{C}^*)^n$ l'ensemble des vecteurs dont le produit des coordonnées est égal à 1, et $H = \mathrm{Log}(D)$; c'est-à-dire que H est l'hyperplan de $\mathbb{R}^n$ d'équation $\{y \in H \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(y) = 0\}$.

Soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ $n-1$ éléments de D. On note V le sous-groupe de D engendré par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. On suppose que V est discret et de rang $n-1$, ce qui équivaut au fait que $\mathrm{Log}\,\varepsilon_1, \ldots, \mathrm{Log}\,\varepsilon_{n-1}$ soit une base de H. Soit S_{n-1} le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n-1\}$. Pour $\sigma \in S_{n-1}$, on définit la matrice $n \times n$

$\mathscr{B}_\sigma=(f_{1,\sigma},\dots,f_{n,\sigma})$, où $f_{1,\sigma}$ est l'élément neutre de D et pour $i>1$, $f_{i,\sigma}=\varepsilon_{\sigma(1)}\varepsilon_{\sigma(2)}\dots\varepsilon_{\sigma(i-1)}$.

Finalement, on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature de σ et $\Gamma(s)$ la fonction Γ d'Euler.

Théorème 1. *Pour tout entier* $k\geqq 1$, *tout* $z\in(\mathbb{C}^*)^n$ *et tout* $\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})\in D^{n-1}$ *tel que*

1) $\forall\,\sigma\in S_{n-1}$, $\det B_\sigma\neq 0$ *et*
2) $\operatorname{Log}\varepsilon_1,\dots,\operatorname{Log}\varepsilon_{n-1}$ *forment une base de* H,

on a, dès que la série converge, l'identité suivante:

$$\frac{\Gamma(k)^n}{(z_1\dots z_n)^k}=\eta\sum_{v\in V}\sum_{\sigma\in S_{n-1}}\varepsilon(\sigma)\det\mathscr{B}_\sigma\sum_{\underline{k}\in I_k}\alpha_{\underline{k}}(\mathscr{B}_\sigma)\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(k_i)}{(\operatorname{Tr}f_{i,\sigma}\,v\,z)^{k_i}} \tag{1}$$

où η *est une constante égale à* ± 1 *selon le signe de* $\det(1,\operatorname{Log}\varepsilon_1,\dots,\operatorname{Log}\varepsilon_{n-1})$.

Remarque. On verra dans la démonstration (Lemme 4) que la série converge presque partout.

Démonstration. Le principe de la démonstration est le suivant: un élément de $\mathbb{C}^n$ est dit réel et positif s'il est élément de $(\mathbb{R}^+)^n$. On commence par prouver la validité de la formule (1) dans le cas où $z,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}$ sont réels et positifs (Lemme 1). Puis, on utilise des arguments de prolongement analytique pour prouver (1) dans le cas général. En particulier les Lemmes 3 et 4 discutent de la convergence de la série du membre de droite de (1). Une démonstration directe, sans faire appel au prolongement analytique a été trouvée par Weselmann [We2].

Si $\omega_1,\dots,\omega_r$ sont r vecteurs réels et positifs de $\mathbb{C}^n$, on note $C(\omega_1,\dots,\omega_r)$ le cône engendré par ces vecteurs; i.e. $C(\omega_1,\dots,\omega_r)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda_1\omega_1+\dots+\lambda_r\omega_r$, où les λ_i sont des nombres réels strictement positifs. Si $\sigma\in S_{n-1}$, on note $C_\sigma=C(f_{1,\sigma},\dots,f_{n,\sigma})$. Soit $G=(\mathbb{R}^*_+)^n$. Les conditions sur les cônes C_σ dans le lemme suivant ont été motivées par le travail de Shintani [Sh].

Lemme 1. *Supposons que*

1) $z,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}$ *sont réels et positifs;*
2) $C_{\sigma_1}\cap C_{\sigma_2}=\emptyset$ *si* $\sigma_1\neq\sigma_2$;
3) $\mathbf{C}=\cup_{\sigma\in S_{n-1}}\bar{C}_\sigma$ *est un domaine fondamental á des ensembles de mesure nuller près pour l'action de* V *sur* G. *Alors la série dans le membre de droite de* (1) *est absolument convergente et l'égalité* (1) *est vérifiée.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(k)^n}{(z_1\dots z_n)^k}&=\int_G e^{-(u_1z_1+\dots+u_nz_n)}(u_1\dots u_n)^{k-1}\,du_1\dots du_n\\&=\sum_{v\in V}\int_{v\mathbf{C}} e^{-\operatorname{Tr}(uz)}(u_1\dots u_n)^{k-1}\,du_1\dots du_n\\&=\sum_{v\in V}\int_{\mathbf{C}} e^{-\operatorname{Tr}(uvz)}(u_1\dots u_n)^{k-1}\,du_1\dots du_n\\&=\sum_{v\in V}\sum_{\sigma\in S_{n-1}}\int_{C_\sigma} e^{-\operatorname{Tr}(uvz)}(u_1\dots u_n)^{k-1}\,du_1\dots du_n.\end{aligned}$$

Ecrivant $\mathscr{B}_\sigma=(f_{ij,\sigma})$, où $f_{i1,\sigma}, \ldots, f_{in,\sigma}$ sont les coordonnées du vecteur $f_{i,\sigma}$, faisant le changement de variables $u_j=\sum_{i=1}^{n} f_{ij,\sigma} x_i$, et utilisant le fait (prouvé ci-dessous) que

$$|\det \mathscr{B}_\sigma| = \eta\, \varepsilon(\sigma) \det \mathscr{B}_\sigma, \tag{2}$$

on obtient:

$$\frac{\Gamma(k)^n}{(z_1 \ldots z_n)^k} = \eta \sum_{v\in V} \sum_{\sigma\in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \det \mathscr{B}_\sigma \int_G e^{-L_{v,\sigma}(x_1,\ldots,x_n)} (u_1 \ldots u_n)^{k-1}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

où $L_{v,\sigma}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Tr}(f_{k,\sigma} v z)\, x_k$. Remplaçant alors u_i par sa valeur et effectuant l'intégration, on obtient (1).

Montrons alors que (2) est impliquée par notre hypothèse suivant laquelle $C_{\sigma_1} \cap C_{\sigma_2} = \emptyset$ si $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Comme S_{n-1} est engendré par les transpositions τ_i qui échangent i et $i+1$, il suffit de prouver que $\det \mathscr{B}_{\sigma_1}$ et $\det \mathscr{B}_{\sigma_2}$ sont de signes opposés si $\sigma_2 = \tau_i \sigma_1$. Dans ce cas on a $f_{j,\sigma_1} = f_{j,\sigma_2}$ pour $j \neq i$, et comme $C_{\sigma_1} \cap C_{\sigma_2} = \emptyset$, ceci implique que f_{i,σ_1} et f_{i,σ_2} ne sont pas du même côté de l'hyperplan engendré par les $f_{j,\sigma}$ pour $j \neq i$, et donc $\det \mathscr{B}_{\sigma_1}$ et $\det \mathscr{B}_{\sigma_2}$ sont de signes opposés comme on l'avait annoncé.

Lemme 2. *Soit $\mathscr{D} = (D \cap G)^{n-1}$. Alors il existe un ouvert U de $\mathscr{D}$ ayant les propriétés suivantes:*

1) *pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in U$, le sous-groupe V de G engendré par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ est libre et discret;*
2) *$C_{\sigma_1} \cap C_{\sigma_2} = \emptyset$ si $\sigma_1 \neq \sigma_2$;*
3) *$\mathbf{C} = \cup_{\sigma\in S_{n-1}} \bar{C}_\sigma$ est un domaine fondamental de G sous l'action de V.*

Remarque 1. En fait, il découlera de la démonstration du Théorème 1 que 1) et 2) impliquent 3), mais nous n'avons pas trouvé une démonstration directe de ce fait.

Remarque 2. On explique brièvement l'idée géométrique derrière le Lemme. Log V est un réseau dans H et $\mathrm{Log}(\mathbf{C}) \cap H$ est un solide dans H dont les sommets sont précisément les sommets du cube porté par les $\mathrm{Log}\, \varepsilon_i$ qui sont des générateurs de Log V, et dont les faces sont telles que pour toute face F de $\mathrm{Log}(\mathbf{C}) \cap H$, il existe i tel que $F \pm \mathrm{Log}\, \varepsilon_i$ soit une autre face de $\mathrm{Log}(\mathbf{C}) \cap H$. Donc $\mathrm{Log}(\mathbf{C}) \cap H$ ressemble beaucoup à un domaine fondamental pour l'action de Log V.

Démonstration. Etape I. 1) et 2) impliquent que $\bar{\mathbf{C}}$ contient un domaine fondamental de G sous l'action de V.

On appelle «polyèdre convexe» de $\mathbb{R}^n$ toute intersection finie de demi-espaces dans $\mathbb{R}^n$. Un polyèdre sera une réunion finie de polyèdres convexes. On va prouver que les conditions 1) et 2) impliquent que pour tout polyèdre compact K de G, on a

$$K \subset A = \sum_{v\in V} v\bar{\mathbf{C}},$$

où $\bar{\mathbf{C}}$ est l'adhérence de $\mathbf{C}$ dans $\mathbb{R}^n$. Ceci suffit à prouver que $A=G$, c'est-à-dire que $\bar{\mathbf{C}}$ contient un domaine fondamental de G sous l'action de V. Soit donc K un polyèdre compact de G. Comme $\mathbf{C}$ est lui-même un polyèdre dont l'intersection avec D est compact et que V est un sous-groupe discret de D, il n'existe qu'un nombre fini de $v\in V$ tels que $v\mathbf{C}\cap K \neq \emptyset$. Et comme la réunion et l'intersection d'un nombre fini de polyèdres est encore un polyèdre, on en conclut que $A\cap K$ est un polyèdre. Soit F une face de $A\cap K$ intérieure à K. D'après la définition de A et le fait que V est discret, F doit être incluse dans un translaté d'une face de $\mathbf{C}$. Or, on va prouver que les faces de $\mathbf{C}$ sont contenues dans l'intérieur de A à des polyèdres de codimension 2 près, ce qui prouve que F est de codimension au moins 2 et que $A\cap K$ est soit dense dans K soit d'intérieur vide. Soit alors K_n une suite de polyèdres compacts tels quee $K_n\cap A$ soit d'intérieur non-vide et $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n=G$. Comme A est fermé, et que $K_n\cap A$ est dense dans K_n, on a $K_n\cap A=K_n$ et $\bigcup_{n\in\mathbf{N}}(K_n\cap A)=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n=G$ et donc $A=G$.

Prouvons maintenant que les faces de $\mathbf{C}$ sont contenues dans l'intérieur de A à des sous-espaces de codimension 2 près. Soit F une des faces de $\mathbf{C}$; alors F est de l'une des formes suivantes:

a) $F=C(f_{1,\sigma},\dots,f_{i-1,\sigma},f_{i+1,\sigma},\dots,f_{n,\sigma})$, $1<i<n$,

b) $F=C(f_{1,\sigma},\dots,f_{n-1,\sigma})$;

c) $F=C(f_{2,\sigma},\dots,f_{n,\sigma})=\varepsilon_{\sigma(1)}C(f_{1,\sigma\circ\tau},\dots,f_{n-1,\sigma\circ\tau})$, où τ est le cycle $(1,2\dots n)$.

Dans le cas a), soit τ_i la permutation échangeant i et $i+1$: alors F est une face commune à C_σ et $C_{\sigma\circ\tau_i}$ et est donc à l'intérieur de $\overline{C_\sigma\cup C_{\sigma\circ\tau_i}}$ puisque $C_\sigma\cap C_{\sigma\circ\tau_i}=\emptyset$. Dans le cas b), F est une face commune à $\overline{C_\sigma}$ et $\varepsilon_{\sigma(n-1)}\overline{C_{\sigma\circ\tau^{-1}}}$ et pour prouver que F est intérieur à la réunion, il suffit de prouver que $\det\mathscr{B}_\sigma$ et $\det(f_{2,\sigma\circ\tau^{-1}},\dots,f_{n,\sigma\circ\tau^{-1}},f_{1,\sigma\circ\tau^{-1}})$ sont de signes opposés, ce qui suit facilement de (2) et d'un calcul de signature. Le cas c) est équivalent au cas b).

Remarque. Jusque là on a prouvé que si 1) et 2) sont vérifiés, alors $\bar{\mathbf{C}}$ contient un domaine fondamental de G sous l'action de V. Pour prouver que $\bar{\mathbf{C}}$ est un domaine fondamental à des ensembles de mesure nulle près de G sous l'action de V, il suffit de prendre une fonction continue f qui est strictement positive sur G et sommable sur G, et de vérifier que

$$\int_G f(x)\,dx=\sum_{v\in V}\int_{v\mathbf{C}} f(x)\,dx.$$

En particulier, on peut prendre $f(x)=e^{-(x_1z_1+\dots+x_nz_n)}$ et si on admet le Théorème 1 pour $k=1$, on voit que les conditions 1) et 2) du Lemme 2 impliquent la condition 3). Cette remarque est importante car elle permet de construire explicitement un domaine fondamental de G sons l'action de V. Voir [C] pour une application de ce résultat.

Etape II. Un lemme auxiliaire

Sous-Lemme. *S'il existe $v_0\neq 1$ dans V tel que $C_{\sigma_1}\cap v_0 C_{\sigma_2}$ soit d'intérieur non-vide, alors C_{σ_1} est inclus dans* $A'=\bigcup_{\substack{v\in V\\ v\neq 1}} v\bar{\mathbf{C}}$.

Démonstration. Soit F une face de $C_{\sigma_1} \cap A'$ intérieure à C_{σ_1}. D'après la démonstration précédente, il existe $\tau_1 \in S_{n-1}$ et $v_1 \in V$ tels que F est aussi une face de $v_1 C_{\tau_1}$. D'un autre côté, la démonstration prouve qu'il existe $\tau_2 \in S_{n-1}$ et $v_2 \in V$ tels que F est une face commune à $v_1 C_{\tau_1}$ et $v_2 C_{\tau_2}$ et intérieure à la réunion. Par la définition de A' et le résultat démontré à l'étape précédente, on doit alors avoir $v_2 = 1$ ce qui est une contradiction puisque $C_{\sigma_1} \cap C_{\tau_2}$ est soit vide soit égal à C_{σ_1}, et donc C_{τ_2} ne peut avoir de face intérieure à C_{σ_1}. Et par suite $C_{\sigma_1} \cap A'$ ne peut avoir de face intérieure à C_{σ_1} et donc est soit vide soit égal à C_{σ_1}, ce qui permet de terminer la démonstration.

Etape III. Construction de U vérifiant 1) et 2).

Soit $x > 0$. Notons e_i le vecteur $(1+x, 1, \ldots, 1, (1+x)^{-1}, 1, \ldots, 1)$, où $(1+x)^{-1}$ est à la $(i+1)$-ième place. Soit $U(x) = (e_1 B(1, x^2) \times \ldots \times e_{n-1} B(1, x^2))$, où $B(1, x^2)$ est la boule ouverte de centre 1 et de rayon x^2. Commençons par vérifier que les conditions 1) et 2) sont vérifiées pour tout $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ dans $U(x)$ pour x assez petit.

Pour vérifier 1) il faut prouver que $(\operatorname{Log} \varepsilon_1, \ldots, \operatorname{Log} \varepsilon_{n-1})$ forment une famille libre. On note $y_i = (1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)$ où -1 est à la $(i+1)$-ième place. On a alors $\operatorname{Log} \varepsilon_i = x y_i + O(x^2)$. Il existe donc δ_1, tel que, si $0 < x < \delta_1$, la condition 1) est vérifiée.

Pour vérifier 2), il faut prouver que si $\sigma_1 \neq \sigma_2$, l'équation

$$\lambda_1 f_{1,\sigma_1} + \ldots + \lambda_n f_{n,\sigma_1} = \mu_1 f_{1,\sigma_2} + \ldots + \mu_n f_{n,\sigma_2} \tag{3}$$

n'a pas de solutions en nombres réels strictement positifs. Sans nuire à la généralité de la démonstration, on peut supposer $\sigma_2 = \mathrm{Id}$, et noter $f_{i,\sigma_2} = f_i$, et $\sigma_1 = \sigma$. Si $f_{i,\sigma} = f_i$, on peut soustraire $\min(\lambda_i, \mu_i) f_i$ de l'égalité (3) et donc supposer que $\lambda_i = 0$ ou $\mu_i = 0$. On pose $\|\lambda\| = \max\limits_i (\lambda_i)$, $\|\mu\| = \max\limits_i (\mu_i)$. Comme on a $\operatorname{Tr}(f_{i,\sigma}) = n + O(x^2)$, on en déduit que

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + O(x^2)\|\lambda\| = \mu_1 + \ldots + \mu_n + O(x^2)\|\mu\|. \tag{4}$$

Puis prenant la $(i+1)$-ième coordonnée, on obtient

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\sigma^{-1}(i)} \lambda_j + \sum_{j=\sigma^{-1}(i)+1}^{n} \lambda_j (1-x) + O(x^2)\|\lambda\| \\ &\quad = \sum_{j=1}^{i} \mu_j + \sum_{j=i+1}^{n} \mu_j (1-x) + O(x^2)\|\mu\|. \end{aligned} \tag{5}$$

Retranchant (5) de (4), on obtient après division par x:

$$\sum_{j=\sigma^{-1}(i)+1}^{n} \lambda_j + O(x)\|\lambda\| = \sum_{j=i+1}^{n} \mu_j + O(x)\|\mu\|. \tag{6}$$

Soit alors i tel que $f_{i,\sigma} \neq f_i$. Cette condition signifie que σ n'est pas une permutation de $\{1, 2, \ldots, i-1\}$ et donc qu'il existe $i_1 \leqq i-1$ tel que $\sigma^{-1}(i_1) > i-1$ et $i_2 > i-1$ tel que $\sigma^{-1}(i_2) \leqq i-1$, et donc on obtient

$$\sum_{j=\sigma^{-1}(i_2)+1}^{j=\sigma^{-1}(i_1)} \lambda_j + O(x)\|\lambda\| = -\sum_{j=i_1+1}^{j=i_2} \mu_j + O(x)\|\mu\|. \tag{7}$$

Comme les λ_i et les μ_i sont positifs, ceci implique que $\lambda_i = O(x)(\|\lambda\| + \|\mu\|)$ et $\mu_i = O(x)(\|\lambda\| + \|\mu\|)$ si i est tel que $f_{i,\sigma} \neq f_i$. Maintenant, on a $f_i = f_1 + x y'_i + O(x^2)$ où $y'_i = \sum_{j=1}^{i-1} y_j$ et utilisant (4) et ce que l'on vient de démontrer, on en déduit (notant I l'ensemble des i tels que $f_{i,\sigma} = f_i$)

$$\sum_{i\in I-\{1\}} (\lambda_i - \mu_i)\, y'_i = O(x)(\|\lambda\| + \|\mu\|) \Rightarrow |\lambda_i - \mu_i| = O(x)(\|\lambda\| + \|\mu\|) \text{ si } i \in I - \{1\},$$

puisque les y'_i forment une famille libre. Donc, utilisant le fait que si $i \in I$, $\lambda_i = 0$ ou $\mu_i = 0$, on voit que pour tout i on a $\lambda_i = O(x)(\|\lambda\| + \|\mu\|)$ et $\mu_i = O(x)(\|\lambda\| + \|\mu\|)$. Il existe donc $\delta_2 > 0$ tel que $\delta_2 < \delta_1$ et quand $0 < x < \delta_2$,

$$\lambda_i \leqq \frac{1}{2(n+1)} (\|\lambda\| + \|\mu\|) \quad \text{et} \quad \mu_i \leqq \frac{1}{2(n+1)} (\|\lambda\| + \|\mu\|).$$

On en déduit finalement que

$$(\|\lambda\| + \|\mu\|) \leqq \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) \leqq \frac{2n}{2n+1} (\|\lambda\| + \|\mu\|)$$

et donc que $\|\lambda\| = \|\mu\| = 0$, ce qui implique que si $f_{i,\sigma_1} \neq f_{i,\sigma_2}$, $\lambda_i = \mu_i = 0$ dans l'égalité (3) et donc que la condition 2) est vérifiée pour $0 < x < \delta_2$.

Etape IV. La condition 3) est vérifiée pour U.

En fait, on montre qu'il existe δ_3 tel que $0 < \delta_3 < \delta_2$ et la condition 3) est vérifiée pour $U(x)$ quand $0 < x < \delta_3$. On a vu que quand $0 < x < \delta_2$, on a $\bigcup_{v\in V} v\bar{\mathbf{C}} = G$, et donc pour vérifier que $\mathbf{C}$ est un domaine fondamental, il suffit de vérifier que $\mathbf{C} \cap D$ a le volume d'un domaine fondamental sous l'action de V. Pour cela on se place dans l'espace logarithmique: le volume d'un domaine fondamental est égal au volume du cube formé par les $\operatorname{Log} \varepsilon_i$: c'est-à-dire $= x^{n-1} + O(x^n)$. De même

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Vol}(\operatorname{Log}(C_\sigma) \cap H) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} |\det(1, 1 + x y_{\sigma(1)}, \ldots, 1 + x y_{\sigma(1)} + \ldots + y_{\sigma(n-1)})| + O(x^n) \\
&= \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} + O(x^n)
\end{aligned}$$

(on a tout projeté sur l'hyperplan tangent à D en 1 et utilisé le fait que Log coïncide avec cette projection à des termes du second ordre près). Donc

$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Log}(\mathbf{C})\cap H)=\sum_{\sigma}\mathrm{Vol}(\mathrm{Log}(C_\sigma)\cap H)=x^{n-1}+O(x^n),$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{Log}(\mathbf{C})\cap H)}{\mathrm{Vol}(\text{domaine fondamental})}=1.$$

Supposons alors que 3) n'est pas vérifiée. Il existe donc $v\neq 1$ tel que $\mathbf{C}\cap v\mathbf{C}$ ne soit pas d'intérieur vide. Mais d'après l'étape II de la démonstration, ceci implique qu'il existe σ tel que $C_\sigma\subset\bigcup_{v\neq 1}v\mathbf{C}$. Cette condition implique alors que le volume de $\mathbf{C}\cap D$ est supérieur à la somme du volume d'un domaine fondamental et du volume de $C_\sigma\cap D$. Or

$$\mathrm{Vol}(C_\sigma\cap D)=\frac{1}{(n-1)!}\mathrm{Vol}(\mathbf{C}\cap D)+O(x^n).$$

On obtiendrait donc

$$\frac{\mathrm{Vol}(\mathbf{C}\cap D)}{\mathrm{Vol}(\text{domaine fondamental})}\geqq 1+\frac{1}{(n-1)!}+O(x),$$

ce qui contredit le fait que ce rapport tend vers 1. D'où l'on tire l'existence de δ_3. On peut alors prendre $U=U(\delta_3)$ et U satisfait les conditions 1), 2) et 3) du Lemme 2.

Munissons $\mathbb{Z}^{n-1}$ de la norme du sup. Soit e_i le i-ième vecteur de base de $\mathbb{Z}^{n-1}$. Si $\underline{t}\in\mathbb{Z}^{n-1}$ et $\sigma\in S_{n-1}$, posons

$$P(\sigma,\underline{t})=\left(\underline{t},\,\underline{t}+e_{\sigma(1)},\,\underline{t}+e_{\sigma(1)}+e_{\sigma(2)},\,\dots,\,\underline{t}+\sum_{i=1}^{n-1}e_i\right).$$

Soient $\mathscr{P}=\{P(\sigma,\underline{t});\,\underline{t}\in\mathbb{Z}^{n-1}\text{ et }\sigma\in S_{n-1}\}$ et $\mathscr{P}(\underline{t})=\{P\in\mathscr{P},\,\underline{t}\in P\}$. Soit Φ une application de $\mathbb{Z}^{n-1}$ dans $\mathbb{C}^n$. Si $P=P(\sigma,\underline{t})=(P(1),\dots,P(n))\in\mathscr{P}$, on pose $\mathscr{B}_{\Phi,P}=(\Phi(P(1)),\dots,\Phi(P(n)))$ et

$$\begin{aligned}F_{k,\Phi,P}(z)&=\varepsilon(\sigma)\det\mathscr{B}_{\Phi,P}\,\nabla^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{n}(\mathrm{Tr}\,\Phi(P(i))\,z)^{-1}\right)\\&=\varepsilon(\sigma)\det\mathscr{B}_{\Phi,P}\sum_{\underline{k}\in I_k}\alpha_{\underline{k}}(\mathscr{B}_{\Phi,P})\prod_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(k_i)}{(\mathrm{Tr}\,\Phi(P(i))\,z)^{k_i}}\end{aligned}$$

où $\alpha_{\underline{k}}(\mathscr{B})$ est la quantité définie avant l'énoncé du Théorème 1 et ∇ est l'opérateur $\prod_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial}{\partial z_i}\right)$. Pour montrer que les deux expressions définissant $F_{k,\Phi,P}(z)$ sont égales, on peut commencer par supposer que z et les $\Phi(P(i))$ sont totalement positifs et que $\det \mathscr{B}_{\Phi, P}$ est de même signe que $\varepsilon(\sigma)$. Si on note $\mathbf{C}$ le cône engendré par les $\Phi(P(i))$, on voit alors facilement que les deux termes sont égaux à

$$\int_C e^{-\operatorname{Tr} uz} \prod_{i=1}^{n} (u_i^{k-1}\, du_i).$$

Le cas général s'en déduit par «prolongement algébrique» (toutes les expressions sont des fractions rationnelles en les coordonnées des $\Phi(P(i))$).

Lemme 3. *$F_{k,\Phi,\underline{t}}(z) = \sum_{P \in \mathscr{P}(\underline{t})} F_{k,\Phi,P}(z)$ ne dépend pas de $\Phi(\underline{t})$.*

Démonstration. Supposons d'abord que les $\Phi(P(i))$ sont totalement positifs. Soit $C(P)$ le cône engendré par $\Phi(P(1)), \ldots, \Phi(P(n))$. On peut s'arranger pour que les $C(P)$ pour $P \in \mathscr{P}(\underline{t})$ soient disjoints deux à deux et que $\Phi(\underline{t})$ soit intérieur à la réunion $\mathbf{C}$ de leurs adhérences. On obtient

$$F_{k,\Phi,\underline{t}}(z) = \pm \int_{\mathbf{C}} e^{-\operatorname{Tr} uz} \prod_{i=1}^{n} (u_i^{k-1}\, du_i)$$

qui ne dépend de manière évidente pas de $\Phi(\underline{t})$. Le cas général s'en déduit par «prolongement algébrique».

Corollaire. *Posons $F_{k,\Phi}(z) = \sum_{P \in \mathscr{P}} F_{k,\Phi,P}(z)$. Si Φ et Φ' sont deux applications de $\mathbb{Z}^{n-1}$ dans $\mathbb{C}^n$ ne différant que pour un nombre fini de $\underline{t}$, si $F_{k,\Phi}(z)$ converge et si $\operatorname{Tr} \Phi'(\underline{t})z \neq 0$ quand $\Phi(\underline{t}) \neq \Phi'(\underline{t})$, alors $F_{k,\Phi'}(z)$ converge et $F_{k,\Phi}(z) = F_{k,\Phi'}(z)$.*

Soit $B \subset D^{n-1}$ l'ensemble des $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ tels que $\{\operatorname{Log} \varepsilon_1, \ldots, \operatorname{Log} \varepsilon_{n-1}\}$ forment une famille libre dans H et tels que $\forall \sigma \in S_{n-1}$, $\det \mathscr{B}_\sigma \neq 0$. Alors B a deux composantes connexes, B^+ et B^-. On note $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$.

Lemme 4. *Notons $F(k, z, \underline{\varepsilon})$ la série dans le second membre de* (1).

(a) *Cette série converge absolument presque partout*

(b) *elle se prolonge en une fonction holomorphe de $(z, \underline{\varepsilon})$ sur $(\mathbb{C}^*)^n \times B$.*

Démonstration. (a) Il suffit de constater que la fonction

$$F_1(z, \underline{\varepsilon}) = \sum_{u \in V} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(\operatorname{Tr} f_i v z)^{k_i}}$$

converge absolument presque partout. Notons $H_{i,v}$ l'hyperplan d'équation $\operatorname{Tr} f_i v z = 0$. Si $z \in \bigcup_{v \in V} H_{i,v}$, $F_1(z, \underline{\varepsilon})$ ne converge pas; mais $\bigcup_{v \in V} H_{i,v}$ est de mesure nulle. Supposons que $z \notin \bigcup_{v \in V} H_{i,v}$. Si $|\operatorname{Tr} f_i v z| \geqq \|v\|^{1/2}$ pour tous sauf un nombre fini de v, alors $F_i(z, \underline{\varepsilon})$ converge. Donc si elle ne converge pas, $|\operatorname{Tr} f_i v z| < \|v\|^{1/2}$

pour une infinité de v. Or, $\|f_i v\|$ tend vers l'infini comme $\|v\|$, donc il existe une constante c_{f_i} telle que

$$d(z, H_{i,v}) = \frac{|\operatorname{Tr} f_i v z|}{\|f_i v\|} < \frac{|\operatorname{Tr} f_i v z|}{c_{f_i} \|v\|} < \frac{1}{c_{f_i}} \|v\|^{-1/2}.$$

Mais comme $\sum_{v \in V} \|v\|^{-1/2} < +\infty$, l'ensemble des z vérifiant ceci est de mesure nulle, donc la série converge absolument presque partout.

La démonstration de (b) est longue et pénible et va nécessiter une longue série de sous-lemmes. Soient $U \subset B$ et $\underline{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Soit $J(\underline{t}, U)$ l'ensemble des $j \in [1, n]$ tels qu'il existe $\underline{\varepsilon} \in U$ tel que la j-ième coordonnée de $\underline{\varepsilon}^{\underline{t}} = \varepsilon_1^{t_1} \dots \varepsilon_{n-1}^{t_{n-1}}$ soit la plus grande en norme.

Sous-Lemme 1. *Soit $\underline{\varepsilon}_0 \in B$, il existe un voisinage U_1 de $\underline{\varepsilon}_0$ et une constante $a > 1$ tels que $\forall \underline{\varepsilon} \in U_1$, $\forall \underline{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\forall j \in J(\underline{t}, U_1)$, $|(\underline{\varepsilon}^{\underline{t}})_j| > a^{\|\underline{t}\|}$.*

Démonstration. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme du sup. L'application $\underline{t} \to \underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_0 = \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_0^{\underline{t}}$ est linéaire injective sur $\mathbb{Z}^{n-1} \otimes \mathbb{R}$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $\forall \underline{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $\|\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_0\| \geqq C \|\underline{t}\|$. Soit U_1' la boule ouverte dans $H (= \{x, \operatorname{Tr} x = 0\})^{n-1}$ de centre $\operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_0$ et de rayon $\frac{C}{4(n-1)^2}$. Soit $j_0 \in [1, n]$ réalisant le maximum de $(\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_0)_j$. Comme $\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_0 \in H$, on a

$$(\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_0)_{j_0} \geqq \frac{C}{n-1} \|\underline{t}\|.$$

Soit U_1 un voisinage de $\underline{\varepsilon}_0$ tel que $\operatorname{Log} U_1 \subset U_1'$ et soit $j \in J(\underline{t}, U_1)$. Il existe alors $\underline{\varepsilon}_1 \in U_1$ tel que $(\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_1)_j \geqq (\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_1)_{j_0}$. Utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$(\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_1)_{j_0} \geqq \frac{3C}{4(n-1)} \|\underline{t}\|$$

et réutilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\begin{aligned} \forall \underline{\varepsilon} \in U_1 \quad (\underline{t} \operatorname{Log} \underline{\varepsilon})_j &\geqq \frac{3C}{4(n-1)} \|\underline{t}\| - \|\underline{t}(\operatorname{Log} \underline{\varepsilon} - \operatorname{Log} \underline{\varepsilon}_1)\| \\ &\geqq \frac{3C}{4(n-1)} \|\underline{t}\| - \frac{2C}{4(n-1)} \|\underline{t}\|. \end{aligned}$$

D'où le lemme avec $a = \exp\left(\frac{C}{4(n-1)}\right)$.

Soit $\delta > 0$ tel que la boule ouverte de centre z_0 et de rayon δ de $\mathbb{C}^n$ soit incluse dans $(\mathbb{C}^*)^n$. Soit $T = \{\underline{t} \in \mathbb{Z}^{n-1}, \exists \underline{\varepsilon} \in U_1, \exists z \in B(z_0, \delta^-)$ tels que $\operatorname{Tr} \underline{\varepsilon}^{\underline{t}} z = 0\}$. Soit $U = B\left(z_0, \frac{\delta^-}{2}\right)$. Soit φ: $T \mapsto [1, n]$ telle que $\forall \underline{t} \in T$, $\varphi(\underline{t}) \in J(\underline{t}, U_1)$. Soit f_j le

j-ième vecteur de base de $\mathbb{C}^n$. Soient $\Phi_{\underline{\varepsilon}}$ et $\varphi_{\varphi,\underline{\varepsilon}}$ les applications de $\mathbb{Z}^{n-1}$ dans $\mathbb{C}^n$ définies par

$$\Phi_{\underline{\varepsilon}}(\underline{t})=\underline{\varepsilon}^{\underline{t}} \quad \text{et} \quad \Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}}(\underline{t})=\begin{cases}\underline{\varepsilon}^{\underline{t}} & \text{si } \underline{t}\notin T\\ f_{\varphi(\underline{t})}\underline{\varepsilon}^{\underline{t}} & \text{si } \underline{t}\in T.\end{cases}$$

On a $F_{k,\Phi_\varepsilon}(z)=F(k,z,\varepsilon)$. On notera $F_\varphi(k,z,\underline{\varepsilon})$ au lieu de $F_{k,\Phi_{\varphi,\varepsilon}}(z)$.

Sous-Lemme 2. *Quelle que soit l'application φ que l'on ait choisie, $F_\varphi(k,z,\underline{\varepsilon})$ est une fonction holomorphe de $(z,\underline{\varepsilon})\in U\times U_1$.*

Démonstration. Il s'agit de majorer $|F_{k,\Phi_\varphi,P}(z)|$. On peut écrire $\Phi_\varphi(P(i)) =\underline{\varepsilon}^{\underline{t}} g_{\sigma,i,\varphi}(\underline{\varepsilon})$ où $g_{\sigma,i,\varphi}(\underline{\varepsilon})$ décrit un ensemble borné quand $\underline{\varepsilon}$ décrit U_1. Comme V est invariant par $\underline{\varepsilon}^{\underline{t}}$

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial z_1\dots\partial z_n}=\frac{\partial^n}{\partial v_1 z_1\dots\partial v_n z_n} \qquad \text{si } v_1\dots v_n=1\right),$$

on a $\alpha_{\underline{k}}((\underline{\varepsilon}^{\underline{t}}g_1,\dots,\underline{\varepsilon}^{\underline{t}}g_n))=\alpha_{\underline{k}}((g_1,\dots,g_n))$ et de même

$$\det(\underline{\varepsilon}^{\underline{t}}g_1,\dots,\underline{\varepsilon}^{\underline{t}}g_n)=\det(g_1,\dots,g_n).$$

Il existe donc une constante C_1 telle que

$$\forall\,\underline{\varepsilon}\in U_1,\qquad \forall\,P\in\mathscr{P},\qquad |\det\mathscr{B}_{\Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}},P}|\sum_{\underline{k}\in I_k}|\alpha_{\underline{k}}(\mathscr{B}_{\Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}},P})|\prod_{i=1}^{n}\Gamma(k_i)\leqq C_1.$$

On a de plus $\forall\,\underline{\varepsilon}\in U_1$, $\forall\,\underline{t}\in\mathbb{Z}^{n-1}$, $\|\Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}}(\underline{t})\|\geqq a^{\|\underline{t}\|}$ d'après le sous-lemme 1. Si on note $H_y=\{z\in\mathbb{C}^n,\ \operatorname{Tr} yz=0\}$, on a $|\operatorname{Tr} yz|=d(z,H_y)\|y\|$ et comme $H_{\Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}}(\underline{t})}\cap B(z_0,\delta^-)=\emptyset$, on a $z\in U\Rightarrow d(z,H_{\Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}}(\underline{t})})\geqq\delta/2$. Ce qui nous donne:

$$\forall\,z\in U,\qquad \forall\,\underline{\varepsilon}\in U_1,\qquad \forall\,P\in\mathscr{P},\qquad |F_{k,\Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}},P}(z)|\leqq C_1\,a^{-nk(\|\underline{t}\|-1)}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-nk}.$$

D'où le lemme.

Sous-Lemme 3. *Soit $(z,\underline{\varepsilon})\in U\times U_1$ tel que $F(k,z,\underline{\varepsilon})$ converge absolument. Soit $\varphi_{\underline{\varepsilon}}$: $T\to[1,n]$ défini par: la $\varphi_{\underline{\varepsilon}}(\underline{t})$-ième coordonnée de $\underline{\varepsilon}^{\underline{t}}$ est une de celle qui a la plus grande norme. Alors $F(k,z,\underline{\varepsilon})=F_{\varphi_{\underline{\varepsilon}}}(k,z,\underline{\varepsilon})$.*

Démonstration. Soit $\Phi_M\colon\mathbb{Z}^{n-1}\to\mathbb{C}^n$ tel que

$$\Phi_M(\underline{t})=\begin{cases}\Phi_{\varphi_{\underline{\varepsilon}},\underline{\varepsilon}}(\underline{t}) & \text{si } \|\underline{t}\|\leqq M\\ \Phi_{\underline{\varepsilon}}(\underline{t}) & \text{si } \|\underline{t}\|>M\end{cases}.$$

D'après le Lemme 3, on a $F_{k,\Phi_M}(z)=F(k,z,\underline{\varepsilon})$ pour tout M. Le résultat découlera du théorème de convergence dominée si l'on arrive à majorer $|F_{k,\Phi_M,P}(z)|$ indépendamment de M par une série convergente. Si $\underline{t}\notin T$ ou si $\|\underline{t}\|>M$, on a $\Phi_M(\underline{t})$

$=\Phi_\varepsilon(\underline{t})$. Si $\underline{t}\in T$ et si $\|\underline{t}\|\leqq M$, il existe $z_1\in B(z_0,\delta^-)$ tel que $\operatorname{Tr}\Phi_\varepsilon(\underline{t})\,z_1=0$ et donc $|\operatorname{Tr}\Phi_\varepsilon(\underline{t})\,z|\leqq\frac{3\delta}{2}\|\Phi_\varepsilon(\underline{t})\|$. De même si $\underline{t}\in T$ et $\|\underline{t}\|\leqq M$, on a

$$|\operatorname{Tr}\Phi_M(\underline{t})\,z|\geqq\frac{\delta}{2}\|\Phi_M(\underline{t})\|\geqq\frac{\delta}{2\sqrt{n}}\|\Phi_\varepsilon(\underline{t})\|$$

et donc $\forall\,\underline{t}\in\mathbb{Z}^{n-1}$,

$$|\operatorname{Tr}\Phi_M(\underline{t})\,z|\geqq\frac{1}{3\sqrt{n}}|\operatorname{Tr}\Phi_\varepsilon(\underline{t})\,z|.$$

Ordonnons les éléments de $P=(\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_n)$ de telle sorte que

$$i\leqq j\Rightarrow|\operatorname{Tr}\Phi_M(\underline{t}_i)\,z|\leqq|\operatorname{Tr}\Phi_M(\underline{t}_j)\,z|.$$

On déduit alors des majorations précédentes

$$|F_{k,\Phi_M,P}(z)|\leqq C_1(3\sqrt{n})^{nk}|\operatorname{Tr}\Phi_\varepsilon(\underline{t}_1)\,z|^{-nk+n-1}\prod_{i=2}^{n}|\operatorname{Tr}\Phi_\varepsilon(\underline{t}_i)\,z|^{-1}.$$

La convergence absolue de $F(k,z,\underline{\varepsilon})$ entraîne alors la convergence de cette dernière série (en effet, on a $\alpha_{\underline{k}}(\mathscr{B})=1$ si $\underline{k}=(1,\dots,1,nk-n+1,1,\dots,1)$).

Pour terminer la démonstration du Lemme 4, il reste à vérifier que les $F_{k,\Phi_\varphi}(z)$ définissent la même fonction holomorphe sur $U\times U_1$ quand φ varie. Soit B' l'ouvert de Zariski de B défini par $\underline{\varepsilon}\in B'$ si et seulement si pour toute suite $\underline{t}_1=0,\underline{t}_2,\dots,\underline{t}_n$ d'éléments distincts de $\mathbb{Z}^{n-1}$ vérifiant $\|\underline{t}_i-\underline{t}_{i-1}\|\leqq 1$, $\bigcap_{i=1}^{n}H_{\underline{\varepsilon}^{\underline{t}_i}}=\{0\}$.

On va montrer que si $(z_1,\underline{\varepsilon}_1)\in U\times(U_1\cap B')$ est tel que $F(k,z_1,\underline{\varepsilon}_1)$ converge, alors on a $F(k,z_1,\underline{\varepsilon}_1)=F_\varphi(k,z_1,\underline{\varepsilon}_1)$ pour toute application φ. Comme les $(z_1,\underline{\varepsilon}_1)$ vérifiant ces conditions sont partout denses dans $U\times U_1$ en vertu du (a) du Lemma 4, cela permet de conclure.

Sous-Lemme 4. *Il existe $\delta_0>0$ tel que pour toute suite $\underline{t}_1=0,\underline{t}_2,\dots,\underline{t}_n$ d'éléments distincts de $\mathbb{Z}^{n-1}$ vérifiant $\|t_i-t_{i-1}\|=1$, alors*

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{z\,|\,|\operatorname{Tr}\underline{\varepsilon}_1^{\underline{t}_i}z|<\delta_0\|z\|\}=\emptyset.$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition de B' et de la finitude de l'ensemble des suites considérées.

Soit U' un voisinage de z_1. On pose $T(U',\underline{\varepsilon}_1)=\{\underline{t}\in\mathbb{Z}^{n-1},\ H_{\underline{\varepsilon}_1^{\underline{t}}}\cap U'\neq\emptyset\}$. Si $\underline{t}_1\in Z^{n-1}$, on pose $T_1(\underline{t}_1)=\{\underline{t}_1\}$,

$$\mathscr{P}_i(\underline{t}_1)=\bigcup_{\underline{t}\in T_{i-1}(\underline{t}_1)}\mathscr{P}(\underline{t}),\qquad T_i(\underline{t}_1)=\bigcup_{P\in\mathscr{P}_i(\underline{t}_1)}P\cap T(U',\underline{\varepsilon}_1)\quad\text{et}\quad T(\underline{t}_1)=\bigcup_{i=1}^{+\infty}T_i(\underline{t}_1).$$

Sous-Lemme 5. *Il existe un voisinage $U'\subset B(z_0,\delta')$ de z_1 tel que $\forall\,\underline{t}_1\in\mathbb{Z}^{n-1}$, $T(\underline{t}_1)=T_{n-1}(\underline{t}_1)$ et donc en particulier tel que $T(\underline{t}_1)$ soit fini.*

Démonstration. Soit $\eta<1$, $U_\eta=z_1 B(1,\eta)$ est un voisinage de z_1 tel que pour tout j, $U_\eta\cap\{z, z_j=0\}=\emptyset$. Soit $U'=U_\eta\cap B(z_0,\delta^-)$. Il existe des constantes λ_1 et λ_2 vérifiant:

$$\forall z\in U', \quad \forall v\in\mathbb{C}^n, \quad \lambda_1\|v\|\,\|z\|\leqq\|vz\|\leqq\|v\|\,\|z\|$$
$$\forall z\in\mathbb{C}^n, \quad \forall \underline{t}\in\mathbb{Z}^{n-1} \quad \text{avec } \|\underline{t}\|\leqq n, \quad |\mathrm{Tr}\,\underline{\varepsilon}_1^{\underline{t}} z|\leqq\lambda_2\|z\|.$$

Supposons $T(\underline{t}_1)\neq T_{n-1}(\underline{t}_1)$; la suite $T_1(\underline{t}_1),\dots,T_n(\underline{t}_1)$ est alors strictement croissante et on peut trouver une suite $\underline{t}_1,\dots,\underline{t}_n$ d'éléments distincts de $T_n(\underline{t}_1)$ vérifiant $\|\underline{t}_i-\underline{t}_{i-1}\|=1$. Posons $v=\underline{\varepsilon}_1^{\underline{t}_1}$ et $v_i=\underline{\varepsilon}_1^{\underline{t}_i-\underline{t}_1}$. Il existe $z_i'\in U'$ tel que $\mathrm{Tr}\,v_i v z_i'=0$ et donc:

$$|\mathrm{Tr}\,v_i v z_1|=|\mathrm{Tr}\,v_i v(z_i'-z_1)|\leqq\lambda_2\|v(z_i'-z_1)\|\leqq\lambda_2\eta\|v\|\,\|z_1\|\leqq\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\eta\|vz_1\|.$$

Il suffit alors de prendre $\eta<\dfrac{\lambda_1\delta_0}{\lambda_2}$ où δ_0 a été défini au Sous-Lemme 4. On peut maintenant terminer la démonstration. Soit Ψ une bijection de $\mathbb{N}$ sur T. Si $\underline{t}\in T$, soit $T(\underline{t})\subset T$ l'ensemble défini au Sous-Lemme 5.

Soit $\Phi_M\colon\mathbb{Z}^{n-1}\to\mathbb{C}^n$

$$\Phi_M(\underline{t})=\begin{cases}\Phi_{\varphi,\underline{\varepsilon}_1}(\underline{t}) & \text{si } \underline{t}\in\bigcup\limits_{j<M}T(\Psi(j))=T_M\\ \Phi_{\underline{\varepsilon}_1}(\underline{t}) & \text{sinon.}\end{cases}$$

Comme $T(\underline{t})$ est fini, on a $F(k,z_1,\underline{\varepsilon}_1)=F_{k,\Phi_M}(z_1)$ pour tout M. De plus la même démonstration que pour le Sous-Lemme 2 nous dit que

$$\begin{aligned}|F_{k,\Phi_M,P}(z_1)|&\leqq C_1\left(\inf\left(\frac{\delta}{2},\eta\right)\right)^{-nk}a^{-nk(\|\underline{t}\|-1)} \quad \text{si } P\cap T_M\neq\emptyset\\ &\leqq|F_{k,\Phi_{\underline{\varepsilon}_1},P}(z_1)| \quad \text{sinon.}\end{aligned}$$

Comme les deux séries intervenant dans la majoration sont absolument convergentes, on en déduit $\lim\limits_{M\to+\infty}F_{k,\Phi_M}(z_1)=F_\varphi(k,z_1,\underline{\varepsilon}_1)$ d'après le théorème de convergence dominée.

Soit alors U l'ouvert construit au Lemme 2. $(\mathbb{R}_+^*)^n\times U$ est un ouvert de l'espace réel sous jacent à $(\mathbb{C}^*)^n\times B$. On termine alors la démonstration du Théorème 1 par prolongement analytique en utilisant le fait que l'identité (1) est vraie si $(z,\underline{\varepsilon})\in(\mathbb{R}_+^*)^n\times U$ (Lemmes 1 et 2). Le signe η qui apparaît est constant sur chacune des composantes connexes de $(\mathbb{C}^*)^n\times B$ et donc ne dépend que de $\det(1,\mathrm{Log}\,\varepsilon_1,\dots,\mathrm{Log}\,\varepsilon_n)$.

Chapitre II. Séries d'Eisenstein-Kronecker

0. *Définition*

Soient $\Lambda_1,\dots,\Lambda_n$ n réseaux de $\mathbb{C}$ et A un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Soit Λ le réseau de $\mathbb{C}^n$ défini par $\Lambda=A(\Lambda_1\times\dots\times\Lambda_n)$. On munit $\mathbb{C}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle y|z\rangle = \mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \bar{z}_i\right)$, et on note $\hat{\Lambda}$ le dual de Λ pour ce produit scalaire. Soient $\mathscr{L}=(L_1, \ldots, L_n)$ et $\mathscr{M}=(M_1, \ldots, M_n)$ les familles de formes linéaires définies par: $L_i(A(z))=z_i$ pour $1 \leqq i \leqq n$ et

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{M_i(z)}\, L_i(y)\right) = \langle y|z\rangle.$$

Soient $\underline{t}=(t_1, \ldots, t_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$, $k \in \mathbf{N}$, $u \in \mathbf{C}^n$ et $s \in \mathbf{C}$; on pose:

$$F(k, \underline{t}, s, u, \Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda} \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(t_i)}{L_i(\omega+u)^{t_i}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{\omega_i + u_i}^{\,k}}{|\omega_i+u_i|^{2s}}.$$

On suppose que la série définissant $F(k, \underline{t}, s, u, \Lambda)$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, et on cherche à étudier l'existence d'un prolongement analytique et en particulier la valeur en $s=0$ de ce prolongement.

Nous supposerons que n formes linéaires prises parmi $M_1, \ldots, M_n, z_1, \ldots, z_n$ forment toujours une famille libre. Soit $y \in \mathbf{C}^n$, on pose $M_{n+i}(z)=z_i-y_i$ pour $1 \leqq i \leqq n$. Soit I une partie à n éléments de $[1, 2n]$, et soit $x_I(y)$ la solution du système $(M_i(z)=0)$ pour $i \in I$. On définit finalement des formes linéaires $N_{I,j}(y)$ pour $j \notin I$, par $N_{I,j}(y)=M_j(x_I(y))$. On dit alors que $(\hat{\Lambda}, \mathscr{M})$ vérifie l'hypothèse (H), si pour tout $\varepsilon>0$, tout $\delta>0$ et toute partie I à n éléments de $[1, 2n]$, il n'existe qu'un nombre fini de $\omega \in \hat{\Lambda}$ tels que:

$$\prod_{j \in I} |N_{I,j}(\omega)| \leqq \|\omega\|^{-\varepsilon} \quad \text{et} \quad |\omega_i| \leqq \delta \qquad \text{si } n+i \in I.$$

Remarque. On peut démontrer que $(\hat{\Lambda}, \mathscr{M})$ vérifie presque surement l'hypothèse (H).

Théorème 2. *Si $(\hat{\Lambda}, \mathscr{M})$ vérifie l'hypothèse (H), alors $F(k, \underline{t}, s, u, \Lambda)$ possède un prolongement analytique à $X(n, k)$, où $X(n, k)$ est le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} - \frac{1}{2(n-2)}$ *si $n \geqq 3$, et $X(n, k)=\mathbf{C}$ si $n=1$ ou 2.*

La démonstration de ce théorème est technique et utilise la théorie des distributions.

1. Généralités sur les distributions

Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbf{C}^n$. Si $\varphi \in \mathscr{C}$ et t est un entier positif, on pose

$$\|\varphi\|_t = \sup_{t_1+\ldots+t_{2n} \leqq t} \sup_{z \in \mathbf{C}^n} \left| \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{t_i} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right)^{t_{n+i}} \varphi(z) \right|.$$

Soit U un ouvert borné et $\mathscr{C}(U)$ l'espace des fonctions C^∞ à support dans U. Une distribution d'ordre t sur $\mathbf{C}^n$ est une application linéaire sur $\mathscr{C}$, continue sur $\mathscr{C}(U)$ muni de la norme $\| \ \|_t$ pour tout ouvert borné U. Si f est une fonction localement L^1 sur $\mathbb{C}^n$, l'application $\varphi \to \int_{\mathbb{C}^n} f(z)\varphi(z)\,dz$ définit une distribution d'ordre 0 sur $\mathbb{C}^n$ (dz est la forme de volume usuelle sur $\mathbb{C}^n$). Nous noterons $\mathscr{D}_t$ l'espace des distributions d'ordre t et $\mathscr{D} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_t$ l'espace des distributions d'ordre borné. Si T est une distribution d'ordre t, nous poserons

$$\|T\|_{U,t} = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{C}(U)\\ \varphi\neq 0}} \frac{|T(\varphi)|}{\|\varphi\|_t}.$$

Nous noterons aussi $\mathscr{S}$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide à l'infini et $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}$ l'espace des distributions temperées, $\mathscr{S}'$ est le dual de $\mathscr{S}$. Soit V un ouvert de $\mathbb{C}^r$ et $s \to T(s)$ une application de V dans $\mathscr{D}$. On dit que $T(s)$ est holomorphe (resp. méromorphe), si pour tout $\varphi\in\mathscr{C}$, $T(s)(\varphi)$ est une fonction holomorphe (resp. méromorphe). Une application $f\colon \mathbb{C}^r \to \mathbb{C}$ sera dite à croissance lente à l'infini, si pour toute famille de réels $(A_i, B_i)_{1\leqq i\leqq r}$, avec $A_i \leqq B_i$, il existe des polynômes P et Q tels que, pour tout $s=(s_1, \ldots, s_r)$ vérifiant $A_i \leqq \operatorname{Re}(s_i) \leqq B_i$, on ait: $|P(s) f(s)| \leqq |Q(s)|$. Une application $s \to T(s)$ de $\mathbb{C}^r$ dans $\mathscr{D}$ sera dite à croissance lente à l'infini si en plus des polynômes P et Q, il existe t tel que $T(s)$ soit d'ordre t pour tout s vérifiant $A_i \leqq \operatorname{Re}(s_i) \leqq B_i$ et $|P(s)|\,\|T(s)\|_{U,t} \leqq |Q(s)|$. De même une application $s \to u(s)$ de $\mathbb{C}^r$ dans l'espace des endomorphismes continues de $\mathscr{C}$ sera dite à croissance lente à l'infini si pour tout (A_i, B_i), U et t il existe des polynômes P et Q tels que $|P(s)|\,\|u(s)\|_{U,t} \leqq |Q(s)|$ si $A_i \leqq s \leqq B_i$. Il est clair que si $T(s)$ et $u(s)$ sont à croissance lente à l'infini $T(s)\circ u(s)$ l'est aussi, que faire la somme, le produit de deux fonctions à croissance lente à l'infini donne un résultat qui l'est aussi.

Une distribution T sur $\mathbb{C}^n$ sera dite L_1, si il existe un ouvert borné U et un réseau Λ de $\mathbb{C}^n$, tels que la réunion des translatés de U par ce réseau soit égale à $\mathbb{C}^n$ et $\sum_{\omega\in\Lambda} \|T\|_{\omega+U,t} < +\infty$. Dans ce cas T se prolonge en une forme linéaire continue sur les applications C^∞ dont toutes les dérivées sont bornées; on peut en particulier calculer $\int_{\mathbb{C}^n} T(z)\,dz = T(1)$.

Si T est une distribution d'ordre t, il faut en général que φ soit une fonction t-fois continûment dérivable pour que le produit φT ait un sens. En particulier si on a $f(k,s,z) = \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$, on ne peut en général faire le produit de $f(k,s,z)$ avec une distribution T que si $\operatorname{Re}(s) \ll 0$. Les Lemmes 1 à 5 vont nous permettre de définir ce produit pour toute valeur de s, si T est d'une forme particulière.

2. Prolongement analytique de distributions

Soient $k\in\mathbb{N}$ et $\lambda_k(s) = \frac{\Gamma(k+1-s)}{\Gamma(s)}$; les estimations classiques sur la fonction Γ montrent que λ_k et λ_k^{-1} sont à croissance lente à l'infini. Posons aussi $f(k,s,z)$

$=\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$. La fonction $\lambda_k(s) f(k, k+1-s, z)$ est L^1 pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}$ et donc on peut définir pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}$ la distribution

$$T_k(s)(\varphi) = \lambda_k(s) \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) f(k, k+1-s, z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i\pi}.$$

Lemme 1. *$T_k(s)$ est méromorphe pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2}$, holomorphe en dehors de pôles simples aux entiers supérieurs ou égaux à $k+1$, et possède un prolongement méromorphe à tout le plan complexe que nous noterons encore $T_k(s)$, qui est holomorphe en dehors de $k+1+\mathbf{N}$ et à croissance lente à l'infini. De plus, si $n \in \mathbf{N}$, $T_k(-n)$ est la distribution ponctuelle*

$$(-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+k} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n_{|z=0}.$$

Remarque. On n'a rien fait d'autre que définir une partie finie d'Hadamard.

Démonstration. La première partie du lemme est immédiate à partir de la formule $T_k(s)(\varphi) = -T_k(s+1)\left(\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} \varphi\right)$ qui nous donne de plus que l'ordre de $T_k(s)$ est $[k - 2\mathrm{Re}(s)]$ où $[\ ]$ désigne la partie entière. Pour calculer $T(-n)(\varphi)$ on fait un développement limité de φ au voisinage de 0: $\varphi(z) = \sum_{i+j \leq t} a_{i,j} z^i \bar{z}^j + o(|z|^t)$ et on calcule

$$\lim_{s \to -n} \lambda_k(s) \int_{|z|<1} z^i \bar{z}^j f(k, k+1-s, z) \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i\pi}$$

$$= \begin{cases} (-1)^n n!(n+k)! & \text{si } i = n+k \text{ et } j = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le résultat s'en déduit.

Lemme 2. *Soit $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{N}^n$ et $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{C}^n$. On peut définir par prolongement analytique une distribution $T_{\underline{k}}(\underline{s})$ par*

$$T_{\underline{k}}(\underline{s})(\varphi) = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(z) \prod_{i=1}^n \lambda_{k_i}(s_i) f(k_i, k_i+1-s_i, z_i) \bigwedge_{i=1}^n \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{2i\pi}$$

pour $\mathrm{Re}(s_i) > \frac{k_i}{2}$;

de plus $T_{\underline{k}}(\underline{s})$ est à croissance lente à l'infini et holomorphe en dehors des hyperplans d'équations $s_i = k_i + 1 + m_i$, $m_i \in \mathbf{N}$. Si $\underline{s} = (-m_1, \ldots, -m_n)$ avec $m_i \in \mathbf{N}$, alors

$$T_{\underline{k}}(\underline{s}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{k_i + m_i} \left(\frac{-\partial}{\partial \bar{z}_i}\right)^{m_i}_{|z=0}.$$

Démonstration. Tout ceci découle immédiatement du Lemme 1 et des théorèmes généraux sur le produit tensoriel des distributions.

Lemme 3. *Soient $\mathscr{L} = (L_1, \ldots, L_r)$ une famille de $r \leqq n$ formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{C}^n$ et $k_1, \ldots, k_r$ des entiers positifs. On peut définir une distribution $T_{\underline{k}, \mathscr{L}}(\underline{s})$ par prolongement analytique en posant pour $\mathrm{Re}(s_i) > \frac{k_i}{2}$*

$$T_{k, \mathscr{L}}(\underline{s})(\varphi) = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(z) \prod_{j=1}^{n} \lambda_{k_j}(s_j) f(k_j, k_j + 1 - s_j, L_j(z)) \bigwedge_{j=1}^{n} \frac{d z_j \wedge d \bar{z}_j}{2 i \pi}.$$

De plus $T_{k, \mathscr{L}}(\underline{s})$ est à croissance lente à l'infini et holomorphe en dehors des hyperplans d'équations $s_j = k_j + 1 + m_j$ avec $m_j \in \mathbf{N}$.

Démonstration. Après un changement de variables linéaire, on fait la même démonstration que pour le Lemme 2.

Lemme 4. *Soit $\mathscr{L} = (L_1, \ldots, L_r)$ une famille de $r \leqq n$ formes linéaires telle que n formes linéaires prises parmi $L_1, \ldots, L_r, z_1, \ldots, z_n$ forment toujours une famille libre et soit I une partie de $[1, n]$. On peut définir une distribution $T_{k, \mathscr{L}, I}(s)$ par prolongement analytique en posant pour $\mathrm{Re}(s_i) > \frac{k}{2} + 1$:*

$$T_{k, \mathscr{L}, I}(s)(\varphi) = \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(z) \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{L_j(z)} \prod_{j \in I} \lambda_k(s) f(k, k+1-s, z_j) \bigwedge_{i=1}^{n} \frac{d z_i \wedge d \bar{z}_i}{2 i \pi}.$$

De plus $T_{k, \mathscr{L}, I}(s)$ est à croissance lente à l'infini.

Démonstration. Soit $Y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ x_1 + \ldots + x_n = 1\}$. Soit $(\psi_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ une famille de fonctions C^∞ sur Y vérifiant les conditions suivantes:

1) $\sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) = 1$, $\forall\, x \in Y$.

2) $\psi_i(x) = 0$ s'il existe $j \neq i$ tel que $x_j > 2 x_i$.

Si $z \in \mathbb{C}^n$ on pose $x(z) = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i = \frac{|z_i|^2}{\|z\|}$ de telle sorte que $x(z) \in Y$, et on pose $\theta_i(z) = \psi_i(x(z))$. La fonction θ_i est alors C^∞ sur $\mathbb{C}^n - \{0\}$ et on a $\sum_{i=1}^{n} \theta_i(z) = 1$. On a alors pour

$$\mathrm{Re}(s) > \frac{k}{2} + 1, \qquad T_{k, \mathscr{L}, I}(s)(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} T_{k, \mathscr{L}, I}(s)(\theta_i \varphi).$$

Dans l'intégrale définissant le i-ème terme de la somme, faisons le changement de variables $z_i = u_i$ et $z_j = u_i u_j$ pour $j \neq i$. Si $L_l(z) = \sum_{j=1}^{n} a_{l,j} z_j$, posons $L_{l,i}(u) = a_{l,i} + \sum_{j \neq i} a_{l,j} u_j$; et si $\varphi \in \mathscr{C}$, posons

$$\varphi_i(u) = \theta_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \ldots, u_n)\, \varphi(u_i u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i u_n);$$

φ_i est à support compact car si $|u_j| > \sqrt{2}$ et $j \neq i$, le premier terme s'annule, et si u_i est trop grand, le second s'annule. De plus $\varphi \to \varphi_i$ est une application continue de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$. Soit $J_i = I \cup \{i\} \cup \{n+1, \ldots, n+r\}$. Si $j \in J_i$, posons $M_j(u) = u_j$ si $j \leqq n$, et $M_{n+j}(u) = L_{j,i}(u)$. Finalement posons:

$$k_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geqq n+1 \\ r + k \operatorname{card} I & \text{si } j = i \\ k & \text{si } j \in I - \{i\} \end{cases}$$

et

$$t_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geqq n+1 \\ r + 1 - n + \operatorname{card} I(1 + k - s) & \text{si } j = i \\ k + 1 - s & \text{si } j \in I - \{i\}. \end{cases}$$

On obtient:

$$T_{k,\lambda,I}(s)(\varphi) = \lambda_k(s)^{\operatorname{card} I} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{C}^n} \varphi_i(u) \prod_{j \in J_i} f(k_j, t_j, M_j(u)) \bigwedge_{j=1}^{n} \frac{du_j \wedge d\bar{u}_j}{2i\pi}.$$

L'hypothèse suivant laquelle n formes linéaires prises parmi $L_1, \ldots, L_n, z_1, \ldots, z_n$ forment une famille libre, implique que $n+1$ formes affines prises parmi les $M_j(u)$ ne sont jamais simultanément nulles. Soit ψ une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}$, à support dans $B(0, 1)$ et valant 1 dans $B(0, \frac{1}{2})$. Choisissons des réels $(\eta_j)_{j \in J_i}$ assez petits pour que si J' est une partie à $n+1$ éléments de J_i, on ait:

$$\prod_{j \in J'} \psi\left(\frac{M_j(u)}{\eta_j}\right) = 0.$$

Ecrivant alors

$$1 = \prod_{j \in J_i} \left[\psi\left(\frac{M_j(u)}{\eta_j}\right) + \left(1 - \psi\left(\frac{M_j(u)}{\eta_j}\right)\right)\right],$$

et développant, on obtient une identité du type $1 = \sum_{\alpha \in A_i} \psi_\alpha(u)$, où ψ_α est une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}$ dont toutes les dérivées sont bornées. De plus, si on note $\mathscr{M}_\alpha$ l'ensemble des M_j s'annulant en au moins un point du support de ψ_α, on a Card $\mathcal{M}_\alpha \leqq n$. Si $I=[1,n]$, il y a une seule ψ_α non nulle dans un voisinage de 0, à savoir

$$\prod_{j=1}^{n} \psi\left(\frac{u_j}{\eta_j}\right) \prod_{j=1}^{r}\left(1-\psi\left(\frac{L_{j,i}(u)}{\eta_{n+j}}\right)\right);$$

nous la noterons ψ_i. On a d'ailleurs $\psi_i(u)=1$ dans un voisinage de 0. On pose finalement

$$J_{\alpha,1}=\{j\in J_i \mid M_j\in \mathcal{M}_\alpha\}, \qquad J_{\alpha,2}=J_i-J_{\alpha,1}$$

et

$$\varphi_{\alpha,i}(u)=\varphi_i(u)\,\psi_\alpha(u)\prod_{j\in J_{\alpha,2}} f(k_j,t_j,M_j(u)).$$

L'application $\varphi\to\varphi_{\alpha,i}$ et de manière évidente continue sur $\mathscr{C}$ et à croissance lente (en s) à l'infini. On obtient finalement:

$$T_{k,\mathscr{L},I}(s)(\varphi)=\lambda_k(s)^{\operatorname{card} I}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha\in A_i}\int_{\mathbb{C}^n}\varphi_{\alpha,i}(u)\prod_{j\in J_{\alpha,1}} f(k_j,t_j,M_j(u))\bigwedge_{j=1}^{n}\frac{du_j\wedge d\bar{u}_j}{2i\pi}.$$

On termine alors la démonstration en utilisant le Lemme 3.

Lemme 5. *Soit $\mathscr{L}=(L_1,\dots,L_n)$ une famille de n formes linéaires, telle que n formes linéaires prises parmi $L_1,\dots,L_n, z_1,\dots,z_n$ forment toujours une famille libre. Notons $T_{k,\mathscr{L}}(s)$ la distribution $T_{k,\mathscr{L},[1,n]}(s)$ définie au lemme précédent. Si $1\leqq i\leqq n$, notons*

$$K_{k,i}=\left\{\underline{k}=(k_1,\dots,k_n)\,\middle|\,\sum_{j=1}^{n}k_j=n(k+1)\ \text{et}\ 0\leqq k_j\leqq k\ \text{si}\ j\neq i\right\}.$$

Si $\underline{k}\in K_{k,i}$, posons

$$\alpha_{\underline{k},\mathscr{L}}=\frac{k!}{k_i!}\left(\prod_{j\neq i}C_k^{k_j}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{k-k_j}\right)\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{1}{L_{l,i}(u)}\right)_{|u=0}.$$

Alors

$$T_{k,\mathscr{L}}(0)(\varphi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\underline{k}\in K_{k,i}}\alpha_{\underline{k},\mathscr{L}}\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{k_j}\right]\varphi(z)_{|z=0}.$$

Démonstration. Reprenons l'expression obtenue à la fin de la démonstration du Lemme 4. Le facteur $\lambda_k(s)^n$ ayant un zéro d'ordre n en $s=0$, le seul terme qui va donner une contribution non nulle est celui tel que $J_{\alpha,1}=[1,n]$. On peut alors utiliser le Lemme 2 avec $k_j=k$ et $s_j=s$ si $j\neq i$, $k_i=n(k+1)$ et $s_i=ns$. On obtient alors

$$T_{k,\mathscr{L}}(0)(\varphi)=\lim_{s\to 0}\frac{\lambda_k(s)}{\lambda_{k_i}(ns)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)^{n(k+1)}\prod_{j\neq i}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)^{k}\varphi_{\alpha,i}(u)_{|u=0}.$$

Or

$$\lim_{s\to 0}\frac{\lambda_k(s)}{\lambda_{k_i}(ns)}=\frac{1}{n}\,\frac{k!}{[n(k+1)]!}\quad \text{et}\quad \varphi_{\alpha,i}(u)=\varphi_i(u)\,\psi_i(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{L_{l,i}(u)},$$

et comme $\psi_i(u)$ vaut 1 dans un voisinage de 0, ses dérivées n'interviendront pas. De même $\theta_i(u_1, \ldots, 1, \ldots, u_n)$ vaut 1 dans un voisinage de 0 et donc

$$T_{k,\mathscr{L}}(0)(\varphi)=\frac{1}{n}\,\frac{k!}{[n(k+1)]!}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{k,i}\left(\varphi(u_i u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i u_n)\prod_{l=1}^{n}\frac{1}{L_{l,i}(u)}\right)$$

où $\Delta_{k,i}$ est la distribution

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)^{n(k+1)}\prod_{j\neq i}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{k}_{|u=0}.$$

Il n'y a plus qu'à développer $\varphi(u_i u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_i u_n)$ autour de 0, pour obtenir le résultat après des calculs sans mystère.

3. Quelques rappels sur la transformée de Fourier

Si T est une distribution tempérée sur $\mathbb{C}^n$, on peut lui associer la distribution $\mathscr{F}(T)$ définie par $\mathscr{F}(T)(y)=\int_{\mathbb{C}^n} T(z)\,e^{-2i\pi\langle z|y\rangle}\,dz$. Pour le sens à donner à cette expression, voir [Sc, chapitre 7]. Si T est la distribution associée à une fonction L^1 l'intégrale converge et nous obtenons la transformée de Fourier classique. Les formules suivantes sont soit classiques soit évidentes à partir de la définition:

1) *Transformée de Fourier réciproque*

$$\mathscr{F}(\mathscr{F}(T))(z)=T(-z) \qquad \text{ou encore } T(z)=\int_{\mathbb{C}^n}\mathscr{F}(T)(y)\,e^{2i\pi\langle y|z\rangle}\,dy.$$

2) *Formule d'inversion:* si T est une distribution tempérée et φ est une fonction suffisamment dérivable, à décroissance suffisamment rapide à l'infini, on a

$$\int_{\mathbb{C}^n} T(z)\,\varphi(z)\,dz=\int_{\mathbb{C}^n}\mathscr{F}(T)(y)\,\mathscr{F}(\varphi)(-y)\,dy.$$

Ceci peut être considéré comme une définition de $\mathscr{F}(T)$.

3) *Changement de variable:* si A est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{C}^n$, alors

$$\mathscr{F}(T\circ A)(y)=\frac{1}{|\det A|^2}\,\mathscr{F}(T)({}^t\bar{A}^{-1}(y)).$$

4) *Translation de l'espace:* soit t_u l'application qui à T associe $t_u(T)$ défini par $t_u(T)(z)=T(u+z)$ et m_v l'application qui à T associe $e^{-2i\pi\langle v|z\rangle}\,T$. Alors

$$\mathscr{F}(m_v\circ t_u(T))(y)=e^{2i\pi\langle u|y+v\rangle}\,\mathscr{F}(T)(y+v).$$

5) Si T est une distribution sur $\mathbb{C}$, on a

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial}{\partial z} T\right)(y)=i\pi\bar{y}\mathscr{F}(T)(y) \quad \text{et} \quad \mathscr{F}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} T\right)(y)=i\pi y\mathscr{F}(T)(y).$$

6) Si Λ est un réseau de $\mathbb{C}$, on note $\hat{\Lambda}$ le réseau dual de Λ pour le produit scalaire usuel. Si $T(z)=\sum_{\omega\in\Lambda}\delta_\omega$ où δ_ω désigne la masse de Dirac en ω, alors $\mathscr{F}(T)(y)=\frac{1}{\operatorname{vol}\Lambda}\sum_{\omega\in\hat{\Lambda}}\delta_\omega$ (formule de Poisson).

7) La *transformée de Fourier* de

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\,\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}} \quad \text{est} \quad (-i)^k\,\frac{\Gamma(k+1-s)}{\pi^{k+1-s}}\,\frac{\bar{y}^k}{|y|^{2(k+1-s)}}$$

$\left(\text{pour le sens à donner à } \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}} \text{ pour } \operatorname{Re}(s)\gg 0, \text{ voir le Lemme 1}\right)$.

Soit T une distribution tempérée; on peut multiplier T par $\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$ si $k-2\operatorname{Re}(s)$ est supérieur à l'ordre de T. On suppose alors que $T(z)\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$ et $\mathscr{F}(T)(z)\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$ possèdent un prolongement méromorphe à tout le plan complexe; T étant tempérée, $T(z)\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$ est L_1 pour $\operatorname{Re}(s)\gg 0$ et s non un pôle (conséquence de [Sc, Chap. 7, Th. VI]). Posons alors

$$F(T,k,s)=\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\int_{\mathbb{C}} T(z)\,\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}\,\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i\pi}.$$

Théorème 3. *Sous les conditions précédentes, $F(T,k,s)$ et $F(\mathscr{F}(T),k,s)$ possèdent des prolongements méromorphes à tout le plan complexe, et de plus, on a l'équation fonctionnelle $F(T,k,s)=i^k F(\mathscr{F}(T),k,k+1-s)$.*

Remarque. Cette égalité est une extension de la formule 2) à $\varphi(z)=\frac{\Gamma(s)\bar{z}^k}{\pi^s|z|^{2s}}$. Pour faire la démonstration de ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 6. *Soit $\varphi_1(z)$ une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}$, paire, à support dans $B(0,2)$ et valant 1 dans $B(0,1)$; soit*

$$\mu_k(s)=i^k\,\frac{\Gamma(k+1-s)}{\pi^{k+1-s}}\,\frac{\pi^s}{\Gamma(s)}.$$

Soit $\psi_s(z)$ la transformée de Fourier de $\mu_k(s)\varphi_1(z)\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2(k+1-s)}}$, c'est une fonction C^∞ à croissance lente, et de plus, quels que soient les réels A et $B(A\leqq B)$, et *l'entier* $m \geqq B - \frac{k}{2} + 1$, *il existe des polynômes* P *et* Q_m *tels que, si* $A \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq B$ et $|z| \geqq 1$, *alors*

$$\left| P(s) \left(\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}} - \psi_s(z) \right) \right| \leqq |Q_m(s)| \frac{1}{|z|^{2m}}.$$

Démonstration. La transformée de Fourier d'une distribution à support compact est une fonction C^∞ à croissance lente ([Sc, Chap. 7, §5]). $\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}} - \psi_s(z)$ est la transformée de Fourier de $\mu_k(s) \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2(k+1-s)}} (1 - \varphi_1(z))$ qui est une fonction C^∞ égale à $\mu_k(s) \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2(k+1-s)}}$ en dehors de $B(0, 2)$. Fixons A et B et soit P un polynôme tel que $P(s)\,\mu_k(s)$ soit holomorphe pour $A \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq B$. Il existe alors un polynôme $Q'_m(s)$ tel que:

$$\left| |P(s)\,\mu_k(s)| \left(\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar{z}} \right)^m \left(\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2(k+1-s)}} (1 - \varphi_1(z)) \right) \right|$$
$$\leqq |Q'_m(s)| \, (1 + |z|)^{2\mathrm{Re}(s) - k - 2 - 2m}.$$

Comme m est supérieur à $B - \frac{k}{2} + 1$, on a

$$(1 + |z|)^{2\mathrm{Re}(s) - k - 2 - 2m} \leqq (1 + |z|)^{-4}$$

et on obtient donc, en utilisant la formule 5)

$$(\pi^2 |z|^2)^m \, |P(s)| \left| \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}} - \psi_s(z) \right| \leqq |Q'_m(s)| \int_{\mathbb{C}} (1 + |z|)^{-4} \, dx \, dy.$$

Le lemme s'en déduit alors sans difficulté.

Revenons à la démonstration du théorème. Pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, $(1 - \varphi_1(z)) \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$ est une fonction C^∞ à décroissance suffisamment rapide et on peut donc utiliser la formule d'inversion pour obtenir pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$

$$\frac{\pi^s}{\Gamma(s)} F(T, k, s) = \int_{\mathbb{C}} T(z)\, \varphi_1(z) \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$$
$$+ \mu_k(k+1-s) \int_{\mathbb{C}} \mathscr{F}(T)(z) \left(\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2(k+1-s)}} - \psi_{(k+1-s)}(z) \right).$$

Les majorations obtenues au Lemme 6, plus le fait que

$$T(z) \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}} \quad \text{et} \quad \mathscr{F}(T)(z) \frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}$$

ont des prolongements méromorphes à tout le plan complexe, nous donnent le prolongement de $F(T, k, s)$. Pour obtenir l'équation fonctionnelle, il suffit d'appliquer la formule d'inversion à

$$\int_{\mathbb{C}} T(z)\left(\varphi_1(z)\,\frac{\bar{z}^k}{|z|^{2s}}\right)$$

pour $\operatorname{Re}(s) \ll 0$.

4. Séries d'Eisenstein-Kronecker classiques

Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}$ et u et v deux éléments de $\mathbb{C}$. Soit $T_{u,v,\Lambda}(z)$ la distribution $\sum_{\omega\in\Lambda} \delta_{\omega+u}\, e^{2i\pi\langle z|v\rangle}$. Utilisant les formules 4) et 6), on obtient

$$\mathscr{F}(T_{u,v,\Lambda})(z) = \frac{1}{\operatorname{vol}\Lambda}\, e^{2i\pi\langle u|v\rangle}\, T_{-v,u,\hat{\Lambda}}(z).$$

Posons de plus

$$H_k(u, v, \Lambda, s) = \frac{\Gamma(s)}{\pi^s} \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{\overline{\omega+u}^k}{|\omega+u|^{2s}}\, e^{2i\pi\langle\omega+u|v\rangle}.$$

Le Théorème 3 appliqué à la distribution $T_{u,v,\Lambda}$ nous donne:

$$H_k(u, v, \Lambda, s) = \frac{i^k}{\operatorname{vol}\Lambda}\, e^{2i\pi\langle u|v\rangle}\, H_k(-v, u, \hat{\Lambda}, k+1-s).$$

Cette relation est l'équation fonctionnelle classique des séries d'Eisenstein-Kronecker qu'on peut trouver dans [W, Chap. VIII, (32)]. En fait, pour se ramener à cette formule, il suffit de remarquer que $\hat{\Lambda} = \frac{1}{i\operatorname{vol}\Lambda}\,\Lambda$ et de poser $v' = \frac{v}{i\operatorname{vol}\Lambda}$. On a de plus les relations suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial v} H_k(u, v, \Lambda, s) = i\pi H_{k+1}(u, v, \Lambda, s)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}} H_k(u, v, \Lambda, s) = i(s-1)\, H_{k-1}(u, v, \Lambda, s-1).$$

Ces relations alliées à l'équation fonctionnelle, montrent qu'à u fixé, $H_k(u, v, \Lambda, s)$ est C^∞ en v en dehors de $\hat{\Lambda}$ et à v fixé, C^∞ en u en dehors de Λ. De plus, au voisinage de $\omega\in\hat{\Lambda}$, $H_t(u, z, \Lambda, t)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{i^t}{\operatorname{vol}\Lambda}\, e^{2i\pi\langle\omega|u\rangle}\, \frac{\overline{z-\omega}^{\,t-1}}{z-\omega} + \psi_\omega(z-\omega)$$

où $\psi_\omega(z-\omega)$ est C^∞ dans un voisinage de 0. Posons de plus $\Phi_t(u, z, \Lambda) = zH_t(u, z, \Lambda, t)$ et $E_k(u, \Lambda, s) = H_k(u, 0, \Lambda, s)$; alors $\Phi_t(u, z, \Lambda)$ est C^∞ en z au voisinage de 0 et on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k_{|z=0} \Phi_t(u, z, \Lambda) = \begin{cases} k(i\pi)^{k-1} E_{k+t-1}(u, \Lambda, t) & \text{si } k \geqq 1 \\ 0 & \text{si } k=0 \text{ et } t \geqq 2. \\ \dfrac{i}{\pi \operatorname{vol} \Lambda} & \text{si } k=0 \text{ et } t=1 \end{cases}$$

5. Démonstration du Théorème 2

Revenons à nos moutons: à partir de maintenant $\Lambda, u, \underline{t}, L_i, M_i$, etc. seront les objets décrits au paragraphe 0. Notons $T_{u,\underline{t},\Lambda}(z)$ la distribution

$$\sum_{\omega \in \Lambda} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(t_i)}{L_i(z)^{t_i}} \delta_{\omega+u}.$$

Lemme 7. $\mathscr{F}(T_{u,\underline{t},\Lambda})(z) = \prod_{i=1}^n \pi^{t_i} H_{t_i}(L_i(u), M_i(-z), \Lambda_i, t_i)$.

C'est immédiat à partir de la formule 3).

Lemme 8. $T_{u,\underline{t},\Lambda}(z) \prod_{i=1}^n \frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2s}}$ *et* $\mathscr{F}(T_{u,\underline{t},\Lambda})(z) \prod_{i=1}^n \frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2s}}$ *qui sont définis pour* $\operatorname{Re}(s) \ll 0$ *possèdent des prolongements analytiques à croissance lente à l'infini.*

Démonstration. C'est évident pour $T_{u,\underline{t},\Lambda}$. Pour $\mathscr{F}(T_{u,\underline{t},\Lambda})$, le Lemme 7 allié à l'étude locale de $H_t(u, \underline{t}, \Lambda)$ nour montre que

$$\mathscr{F}(T_{u,\underline{t},\Lambda})(z) \prod_{i=1}^n \frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2s}}$$

est localement du type des distributions étudiées au Lemme 4, ce qui permet de conclure.

Pour alléger les notations nous écrirons T au lieu de $T_{u,\underline{t},\Lambda}$ et $F(s)$ au lieu de $F(k, \underline{t}, s, u, \Lambda)$. L'idée de la démonstration du Théorème 2 est la suivante. la distribution $T(z) \prod_{i=1}^n \frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2s}}$ est L_1 pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ et on a

$$F(s) = \int_{\mathbb{C}^n} T(z) \prod_{i=1}^n \frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2s}}.$$

On va alors essayer d'utiliser la formule d'inversion comme dans la démonstration du Théorème 3 pour obtenir:

$$F(s)=\int_{\mathbb{C}^n} \mathscr{F}(T)(z)\prod_{i=1}^{n}\mu_k(s)\frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2(k+1-s)}}.$$

Malheureusement, la situation n'est pas aussi idyllique que dans le cas $n=1$, car $\prod_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2(k+1-s)}}$ a des singularités situées sur les hyperplans d'équation $z_i=0$, et ces derniers ne sont pas bornés. Ces singularités sont elles-mêmes amplifiées par les singularités de $\mathscr{F}(T)$, ce qui fait que le produit n'est en général pas L^1 pour $\operatorname{Re}(s)\ll 0$. La condition (H) implique alors que le produit

$$\mathscr{F}(T)(z)\prod_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2(k+1-s)}}$$

est L_1 pour $s\in Y(n,k)$, où $Y(n,k)=X(n,k)\cap\left\{s\,|\operatorname{Re}(s)<\frac{k}{2}\right\}$. La démonstration de tout ceci est malheureusement très technique.

Soit $\varphi_1(z)$ la fonction décrite au Lemme 6 et $\varphi(z)=\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(z_i)$; posons

$$F_\varepsilon(s)=\int_{\mathbb{C}^n}\varphi(\varepsilon z)\,\mathscr{F}(T)(z)\prod_{i=1}^{n}\mu_k(s)\frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2(k+1-s)}}.$$

$F_\varepsilon(s)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et à croissance lente à l'infini, holomorphe en dehors de $\bigcup_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\mathbb{Z}$ avec au plus des pôles d'ordre n en chacun de ces points (cf. Lemmes 2, 3, 4).

Lemme 9. *Il existe A_0, tel que, pour tout couple de réels A, B vérifiant $A_0<A<B$, il existe des polynômes P et Q tels que $\frac{P(s)\,F_\varepsilon(s)}{Q(s)}$ tend normalement vers $\frac{P(s)\,F(s)}{Q(s)}$ sur $\{s\,|\,A\leqq\operatorname{Re}(s)\leqq B\}$.*

Démonstration. Pour $\operatorname{Re}(s)\gg 0$, $\prod_{i=1}^{n}\varphi_1(\varepsilon z_i)\frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2(k+1-s)}}$ est une fonction à support compact suffisamment dérivable, et on peut donc appliquer la formule d'inversion pour obtenir:

$$F_\varepsilon(s)=\int_{\mathbb{C}^n}T(z)\prod_{i=1}^{n}\varepsilon^{k-2s}\psi_s\!\left(\frac{z_i}{\varepsilon}\right).$$

Le résultat découle des majorations obtenues au Lemme 6, de la convergence de la série définissant $F(s)$ pour $\operatorname{Re}(s)\gg 0$, et du théorème de convergence dominée.

Lemme 10. *Si* $(\hat{\Lambda}, \mathcal{M})$ *vérifient l'hypothèse* (H), *alors pour tout couple de réels* A, B *vérifiant* $A \leqq B$ *et* $A, B \in Y(n, k)$, *il existe des polynômes* P *et* Q *tels que* $\dfrac{P(s)\, F_\varepsilon(s)}{Q(s)}$ *converge normalement sur* $\{s \mid A \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq B\}$.

La démonstration de ce Lemme sera faite ultérieurement.

Soit alors $A \in Y(n, k)$ et $B \geqq A_0$ (cf. Lemme 9), soit de plus P un polynôme tel que $P(s)\, F_\varepsilon(s)$ soit holomorphe sur $A \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq B$ pour tout ε. Appliquons le thérorème du maximum à $P(s)\, e^{s^2}(F_\varepsilon(s) - F_{\varepsilon'}(s))$. Utilisant les Lemmes 9 et 10, on en déduit que $P(s)\, F_\varepsilon(s)$ tend uniformément sur tout compact de $\{s \mid A \leqq \mathrm{Re}(s) \leqq B\}$ vers une fonction holomorphe, ce qui termine la démonstration de Théorème 2 (modulo le Lemme 10).

6. Calcul de $F(k, \underline{t}, 0, u, \Lambda)$

Utilisant le Lemme 5, on démontre que

$$\mathcal{F}(T)(z) \prod_{i=1}^{n} \mu_k(s) \frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2(k+1-s)}}$$

tend vers une distribution ponctuelle concentrée en 0 quand s tend vers 0, et donc que $F_\varepsilon(0)$ ne dépend pas de ε. On suppose dorénavant que $0 \in X(k, n)$ et donc $F(0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(0)$. Notons $\mathscr{C}'$ l'espace des fonctions φ définies dans un voisinage de 0, telles qu'il existe une famille $\mathscr{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ de formes linéaires de telle sorte que $\varphi(z) \prod\limits_{i=1}^{n} L_i(z)$ soit C^∞ dans un voisinage de 0. Définissons alors un opérateur $\square_k$ sur $\mathscr{C}'$ par

$$\square_k(\varphi) = \left(\frac{i}{\pi}\right)^{nk} T_{k, \mathscr{L}}(0) \left[\varphi(z) \prod_{i=1}^{n} L_i(z)\right],$$

où $T_{k, \mathscr{L}}(0)$ est la distribution définie au Lemme 5. Comme on peut le constater d'après la définition de $T_{k, \mathscr{L}}(0)$, le résultat ne dépend pas du choix de $\mathscr{L}$; de plus si φ est elle-même C^∞, on a

$$\square_k(\varphi) = \left(\frac{i}{\pi}\right)^{nk} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^k \varphi(z)_{|z=0}.$$

Utilisant alors la formule obtenue au Lemme 5, on obtient

Théorème 4.

$$F(k, \underline{t}, 0, u, \Lambda) = \square_k\left(\prod_{i=1}^{n} \pi^{t_i} H_{t_i}(L_i(u), M_i(-z), \Lambda_i, t_i)\right).$$

Le facteur $\left(\frac{i}{\pi}\right)^{nk}$ qui apparaît provient du fait que $\mu_k(s)=i^k \frac{\pi^s}{\pi^{k+1-s}} \lambda_k(s)$ et que la forme de volume utilisée au Lemme 5 est $\frac{dz\wedge d\bar z}{2i\pi}$ au lieu de $\frac{dz\wedge d\bar z}{2i}$.
On a

$$\left(-\frac{\partial}{\partial u}\right) H_k(u, v, \Lambda, s)=\pi H_{k+1}(u, v, \Lambda, s+1)-i\pi\bar v H_k(u, v, \Lambda, s);$$

on obtient alors

Théorème 4 bis.

$$F(k, \underline{t}, 0, u, \Lambda)=\square_k\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{-\partial}{\partial L_j(u)}\right)^{t_j-1}\left[\prod_{i=1}^{n}\pi H_1(L_i(u), M_i(-z), \Lambda_i, 1)\right]\right].$$

Corollaire. *Supposons alors que tous les coefficients des L_i sont algébriques, que les Λ_i sont des réseaux d'un corps quadratique imaginaire fixe K, et que les $L_i(u)$ sont éléments de K. Soit Ω_∞ une période d'une courbe elliptique à multiplication complexe par K définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, nous obtenons alors $F(k, \underline{t}, 0, u, \Lambda)\in\Omega_\infty^{t_1+\dots+t_n+nk}\,\pi^{-nk}\,\bar{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. On a $E_{t+k}(L_j(u), t, \Lambda_j)\in\left(\frac{\Omega_\infty}{\pi}\right)^{t+k}\bar{\mathbb{Q}}$ (cf. [G-S] ou [W]), le résultat est alors immédiat à partir des formules de $\square_k$ données au Lemme 5 et des formules donnant les dérivées de $\Phi_t(u, z, \Lambda)$ en $z=0$ données à la fin de la section sur les séries d'Eisenstein classiques.

7. Quelques majorations

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties à n éléments de $[1, 2n]$. Si $I\in\mathscr{P}$, soit $N_{I,j}(y)$ les formes linéaires décrites au §0. Soit $y\in\mathbb{C}$ tel que, $\forall I\in\mathscr{P}$ *et* $\forall j\notin I$, $N_{I,j}(y)\neq 0$. Soit U un ouvert borné. Si $\varphi\in\mathscr{C}(U)$, posons

$$H(y, s, \varphi)=\int_{\mathbb{C}^n}\varphi(z)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{M_i(z)}\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{z_i-y_i}^{\,k}}{|z_i-y_i|^{2(k+1-s)}}.$$

La proposition suivante est la clé de la démonstration du Lemme 10.

Proposition 1. *Pour tout couple de réels (A, B) tel que $A\leqq B<0$, il existe un entier t, des polynômes P et Q, tels que pour tout s vérifiant $A\leqq \mathrm{Re}(s)-\frac{k}{2}\leqq B$, tout $\varphi\in\mathscr{C}(U)$ et tout y tel que $N_{I,j}(y)\neq 0$, $\forall I\in\mathscr{P}$, $\forall j\notin I$, et $\|y\|\gg 0$ on ait: ($\|y\|\gg 0$ sera précisé au Lemme 15bis)*

$$|P(s)\,H(y, s, \varphi)|\leqq|Q(s)|\,\|\varphi\|_t\sum_{I\in\mathscr{P}}\Big(\prod_{j\notin I}|N_{I,j}(y)|^{2\mathrm{Re}(s)-k-2}\Big)\inf(1, \alpha_I(y))^{r(s)}$$

où $\alpha_I(y)=\inf_{j\notin I}|N_{I,j}(y)|$ *et* $r(s)=1+(n-2)(2\operatorname{Re}(s)-k)$.

La démonstration de cette proposition va nécessiter un certain nombre de lemmes préparatoires.

Soit $U_I=\{z\in\mathbb{C}^n/\forall\, i\in I$ et $\forall\, j\notin I,\ |M_i(z)|\leqq|M_j(z)|\}$.

Lemme 11. *Il existe une constante* $\lambda=\lambda(\mathscr{M})$, *telle que, si* $z\in U_I$ *et* $j\notin I$, *alors* $|M_j(z)|\geqq\lambda|N_{I,j}(y)|$.

Démonstration. Comme toutes les normes sont équivalentes sur un espace de dimension finie, il existe des constantes λ_0 et λ_1 telles que

$$\sup_{i\in I}|M_i(z)|=\sup_{i\in I}|M_i(z)-M_i(x_I(y))|\geqq\lambda_0\,\|z-x_I(y)\|$$

$$|M_j(z)-M_j(x_I(y))|\leqq\lambda_1\,\|z-x_I(y)\|.$$

Comme $z\in U_I$, on a $\sup_{i\in I}|M_i(z)|\leqq|M_j(z)|$ et donc

$$|M_j(z)|\geqq\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\,|M_j(z)-N_{I,j}(y)|\geqq\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\,(|N_{I,j}(y)|-|M_j(z)|).$$

On peut donc prendre $\lambda=\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0+\lambda_1}$.

Lemme 12. *Il existe une constante* $\lambda'=\lambda'(\mathscr{M})$, *telle que, si* $d(z,U_I)\leqq\lambda'\alpha_I(y)$, *alors* $|M_j(z)|\geqq\dfrac{\lambda}{2}\,|N_{I,j}(y)|$.

Démonstration. Soit $z_0\in U_I$ tel que $\|z-z_0\|=d(z,U_I)$. On a alors

$$|M_j(z)|\geqq|M_j(z_0)|-\lambda_1\,\|z-z_0\|,$$

d'où le lemme, avec $\lambda'=\dfrac{\lambda}{2\,\lambda_1}$.

Posons alors $\beta_I=\beta_I(y)=\frac{1}{2}\lambda'\alpha_I(y)$, et mettons une relation d'ordre totale sur $\mathscr{P}$ vérifiant $I_1\leqq I_2\Rightarrow\beta_{I_1}\geqq\beta_{I_2}$. On pose alors:

$$V_I=\{z\in\mathbb{C}^n\,|\,d(z,U_I)\leqq\beta_I\}\quad\text{et}\quad W_I=\{z\in\mathbb{C}^n\,|\,d(z,V_I)\leqq\beta_I\}.$$

Soit ψ une fonction C^∞ à support dans $B(0,1)$, telle que $\int_{\mathbb{C}^n}\psi(z)\,dz=1$. Si $\alpha>0$, on pose $\psi_\alpha(z)=\dfrac{1}{\alpha^{2n}}\,\psi\left(\dfrac{z}{\alpha}\right)$. La fonction ψ_α est C^∞ à support dans $B(0,\alpha)$ et vérifie aussi $\int_{\mathbb{C}^n}\psi_\alpha(z)\,dz=1$. Posons alors $\varphi_{1,I}=\psi_{\beta_I}*1_{V_I}$ où $*$ désigne le produit de convolution et 1_{V_I} la fonction caractéristique de V_I. La fonction $\varphi_{1,I}$ est C^∞ à support dans W_I et vaut 1 sur U_I. On pose finalement $\varphi_I(z)=\varphi_{1,I}(z)\prod_{I'<I}(1-\varphi_{1,I'}(z))$.

Lemme 13. *On a* $\sum_{I\in\mathscr{P}}\varphi_I(z)=1$ *et de plus, pour tout* $t\in\mathbf{N}$, *il existe une constante* $C(t)$ *telle que* $\|\varphi_I\|_t\leqq C(t)\sup(1,\beta_I^{-t})$.

Démonstration. La première partie du Lemme est une conséquence directe de l'égalité $\bigcup_{I\in\mathscr{P}}U_I=\mathbf{C}^n$. Pour démontrer le reste, montrons qu'il existe une constante $C'(t)$ telle que $\|\varphi_{1,I}\|_t\leqq C'(t)\sup(1,\beta_I)^{-t}$. En effet, on a $\varphi_{1,I}=\eta_{\beta_I}*1_{V_I}$ et donc, si $\Delta^{\underline{t}}$ est l'opérateur $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{t_i}\left(\frac{\partial}{\partial\bar z_i}\right)^{t_{n+i}}$, alors

$$\Delta^{\underline{t}}\varphi_{1,I}=\beta_I^{-(t_1+\dots+t_{2n}+2n)}(\Delta^{\underline{t}}\psi)(\beta_I^{-1}z)*1_{V_I}$$

et donc

$$|\Delta^{\underline{t}}\varphi_{1,I}(z)|\leqq\beta_I^{-(t_1+\dots+t_{2n})}\|\psi\|_{t_1+\dots+t_{2n}}\operatorname{vol}(\text{support }\psi).$$

On en déduit le résultat en ce qui concerne $\varphi_{1,I}$. Pour l'obtenir pour φ_I, il suffit d'utiliser la formule de Leibnitz pour la dérivée d'un produit et le fait que $I'<I\Rightarrow\beta_{I'}\geqq\beta_I$.

On peut alors écrire $H(y,s,\varphi)=\sum_{I\in\mathscr{P}}H(y,s,\varphi\varphi_I)$, le problème est alors de majorer $|H(y,s,\varphi\varphi_I)|$. On va obtenir

$$|P(s)H(y,s,\varphi\varphi_I)|\leqq Q(s)\|\varphi\|_t\prod_{j\notin I}|N_{I,j}(y)|^{2\operatorname{Re}(s)-k-2}\inf(1,\alpha_I(y))^{r(s)}$$

où tous les objets intervenant dans cette inégalité ont été définis à la proposition 1. Cette inégalité implique d'ailleurs la proposition 1 de manière évidente.

Lemme 14. *Il existe une constante* $\delta=\delta(U,\mathscr{M})$, *telle que si* $\beta_I>\delta$ *et* $I\neq[1,n]$, *alors* $\varphi(z)\varphi_I(z)=0$.

Démonstration. Si $I\neq[1,n]$, il existe $i\leqq n$ tel que $i\notin I$, et donc, d'après la définition de β_I, $|M_i(z)|\geqq\frac{\lambda}{\lambda'}\beta_I$ si $z\in W_I$. De plus, U étant borné, il existe une constante δ_0 telle que: $z\in U\Rightarrow\sup_{i\leqq n}|M_i(z)|\leqq\delta_0$, et donc, si $\beta_I\geqq\frac{\lambda'\delta_0}{\lambda}$, alors $U\cap W_I=\emptyset$ et $\varphi(z)\varphi_I(z)=0$.

Corollaire. *Si* $\beta_I\geqq\delta$, *on obtient une majoration du type souhaitée.*

Démonstration. Si $I\neq[1,n]$, c'est évident, et si $I=[1,n]$, la fonction $\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{M_i(z)}$ est L^1 sur U et

$$\varphi(z)\varphi_I(z)\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{z_i-y_i}^{\,k}}{|z_i-y_i|^{2(k+1-s)}}$$

est une fonction continue sur U dont le maximum est inférieur ou égal à $\|\varphi\varphi_I\|_0 \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{2}{\lambda|y_i|}\right)^{k+2-2\,\mathrm{Re}(s)}$. On en tire le résultat; on peut méme prendre $t=0$, P et Q constants.

Lemme 15. *Il existe $\delta'=\delta'(\mathcal{M}, U)$, tel que si $|y_i|\geqq\delta'$ et $n+i\in I$, alors $\varphi(z)\,\varphi_I(z)=0$.*

Démonstration. Les formes linéaires $M_j(x_I(y))$ *pour* $j\in[1, n]-I$ forment une base des formes linéaires ne faisant intervenir que les y_i pour $n+i\in I$. Il existe donc une constante λ_2 telle que: $\lambda_2>0$ et

$$\sup_{\substack{j\leqq n\\ j\notin I}}|M_j(x_I(y))|\geqq\lambda_2\sup_{n+i\in I}|y_i|.$$

Or, si z est élément du support de φ_I, et si $j\notin I$, alors $|M_j(z)|\geqq\frac{\lambda}{2}\,|M_j(x_I(y))|$. Il suffit alors de prendre $\delta'=\frac{2\delta_0}{\lambda\lambda_2}$, δ_0 étant définie dans la démonstration du lemme précédent.

Lemme 15bis. *Il existe une constante $\delta''=\delta''(U, \mathcal{M})$, telle que si $\|y\|\geqq\delta''$, si $n+i\in I\Rightarrow|y_i|\leqq\delta'$ et si $\beta_I\leqq\delta$, alors*

$$\sup_{\substack{i\geqq n+1\\ i\notin I}}|M_i(x_I(y))|\geqq 2\alpha_I(y).$$

Démonstration. Il existe des constantes λ_3 et λ_4 strictement positives, telles que

$$\lambda_3\|y\|\leqq\sup_{i\notin I}|M_i(x_I(y))| \quad \text{et} \quad \sup_{\substack{i\leqq n\\ i\notin I}}|M_i(x_I(y))|\leqq\lambda\sup_{n+i\in I}|y_i|.$$

Il suffit alors de prendre δ'' vérifiant:

$$\delta''>\delta', \qquad \lambda_2\delta''>2\alpha_I(y)\geqq(4/\lambda')\,\delta \quad \text{et} \quad \lambda_2\delta''>\lambda_3\delta'.$$

Supposons dorénavant $\beta_I(y)\leqq\delta$ et $\sup_i|y_i|\geqq\delta''$. Effectuons le changement de variable $u_i=M_i(z)$ pour $i\in I$; on pose $\tilde{\varphi}(u)=\varphi(z)$, $\tilde{\varphi}_I(u)=\varphi_I(z)$ et $L_i(u)=M_i(z)$ si $i\notin I$. Soit A_I la jacobien de la transformation. Pour simplifier les notations, nous poserons:

$$(u_i, s_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{u_i} & \text{si } i\leqq n \text{ et } i\in I\\[2ex] \dfrac{\bar{u}_i^k}{|u_i|^{2(k+1-s)}} & \text{si } i\geqq n-1 \text{ et } i\in I,\end{cases}$$

et nous définirons (L_i, s_i) de la même manière pour $i\notin I$. Soit θ une fonction C^∞ sur $\mathbb{C}$ valant 1 sur $B(0, 1)$ et 0 en dehors de $B(0, 2)$. Ecrivant

$$1=\prod_{i\in I}\left[\left(1-\theta\left(\frac{u_i}{\beta_I}\right)\right)+\theta\left(\frac{u_i}{\beta_I}\right)\right]$$

et développant, on est ramené à majorer pour P décrivant les parties de I:

$$H(I, P, y, s, \varphi) = A_I \int_{\mathbb{C}^n} \prod_{i\in P} (u_i, s_i) \prod_{i\in I-P} \left[\left(1-\theta\left(\frac{u_i}{\beta_I}\right)\right)(u_i, s_i)\right] \varphi_{I,P}(u),$$

où

$$\varphi_{I,P}(u) = \tilde{\varphi}(u)\, \tilde{\varphi}_I(u) \prod_{i\in P} \theta\left(\frac{u_i}{\beta_I}\right) \prod_{i\notin I} (L_i, s_i).$$

Lemme 16. *Pour tout entier t, et tout couple de réels (A, B) vérifiant $A \leqq B$, il existe un polynôme $Q(s)$, tel que pour tout $\underline{t} = (t_i)_{i\in P}$ vérifiant $\sum_{i\in P} t_i = t$, tout s tel que $A \leqq \mathrm{Re}(s) - \frac{k}{2} \leqq B$ et tout u élément du support de $\varphi_{I,P}$, on ait:*

$$\left|\prod_{i\in P} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_i}\right)^{t_i} \varphi_{I,P}(u)\right| \leqq |Q(s)|\, \|\varphi\|_t\, \beta_I^{-t} \prod_{i\notin I} |(L_i(u), s_i)|.$$

Démonstration. Etant donné les formules pour la dérivée d'un produit, on s'aperçoit qu'il suffit de démontrer la même chose pour chacun des termes composant $\varphi_{I,P}$. Pour $\tilde{\varphi}(u)$ et $\theta\left(\frac{u_i}{\beta_I}\right)$, le résultat est évident; pour $\tilde{\varphi}_I$, c'est une conséquence directe du Lemme 13; il ne reste donc plus que (L_i, s_i) à examiner. Or on a

$$\prod_{j\in P} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}_j}\right)^{t_j} (L_i(u), s_i) = \frac{Q'(s)(L_i(u), s_i)}{\overline{L_i(u)^t}},$$

où $Q'(s)$ est un polynôme. Le résultat est alors une conséquence du fait que $|L_i(u)| \geqq \frac{\lambda}{\lambda'} \beta_I$ si u est élément du support de $\tilde{\varphi}_I$.

Effectuons alors une intégration par partie par rapport à $\bar{u}_i$ pour $i\in P$ (on intègre (u_i, s_i) et on dérive le reste) jusqu'à ce que l'on obtienne une fonction continue sur le support de $\varphi_{I,P}$. Supposons que l'on a intégré t_i fois par rapport à u_i et soit $t = \sum_{i\in P} t_i$, posons de plus

$$\alpha_i = \begin{cases} t_i - 1 & \text{si } i \leqq n \text{ et } i \in P \\ t_i - k - 2 + 2\,\mathrm{Re}(s) & \text{si } i \geqq n+1 \text{ et } i \in P \end{cases}$$

et

$$\gamma_i = \begin{cases} -1 & \text{si } i \leqq n \text{ et } i \notin P \\ -k - 2 + 2\,\mathrm{Re}(s) & \text{si } i \geqq n+1 \text{ et } i \notin P. \end{cases}$$

Soit P le polynôme $\prod_{i\in P\cap[n+1,\,2n]} s(s+1)\dots(s+t_i-1)$ et finalement soit $W = \{u \in \mathbb{C}^n \mid |u_i| \leqq 2\beta_I \text{ si } i \in P \text{ et } |u_i| \leqq \eta \text{ si } i \notin P\}$, où $\eta = \eta(\mathcal{M}, U)$ est un nombre réel tel que $\varphi_{I,P} \in \mathscr{C}(B(0, \eta))$. On obtient alors en utilisant le lemme précédent:

$$|P(s)\, H(I, P, y, s, \varphi)|$$

$$\leqq |Q(s)|\, \|\varphi\|_t\, \beta_I^{-t} A_I \int_W \prod_{i\in P} |u_i|^{\alpha_i} \prod_{i\in I-P} \left|1 - \theta\left(\frac{u_i}{\beta_I}\right)\right| |u_i|^{\gamma_i} \prod_{i\notin I} |L_i(u)|^{\gamma_i}.$$

Lemme 17. *Il existe une constante C telle que pour tout u élément du support de $\varphi_{I,P}$, tout $i \notin I$ et tout s tel que $A \leqq \mathrm{Re}(s) - \frac{k}{2} \leqq B < 0$, on ait:*

$$|L_i(u)|^{\gamma_i} \leqq C\, |N_{I,i}(y)|^{-k-2+2\mathrm{Re}(s)}.$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence du Lemme 12 si $\gamma_i = -k-2+2\mathrm{Re}(s)$; si $\gamma_i = -1$, comme $-1 > -k-2+2\mathrm{Re}(s)$, il suffit de vérifier que $L_i(u)$ est borné sur le support de $\varphi_{I,P}$, ce qui est évident.

Soit $i_0 \notin I$ tel que $|N_{I,i_0}(y)| = \frac{2}{\lambda'}\beta_I$. Majorons dans l'intégrale $|L_i(u)|^{\gamma_i}$ par $C|N_{I,i}(y)|^{-k-2+2\mathrm{Re}(s)}$ sauf si $i = i_0$, et $|u_i|$ par $2\beta_I$ si $i \in P$. Soit $W' = \{u \in \mathbb{C}^n \,|\, |u_i| \leqq 2\beta_I$ si $i \in P$ et $\beta_I \leqq |u_i| \leqq \eta$ si $i \notin P\}$. On obtient alors:

$$|P(s)\, H(I, P, y, s, \varphi)| \leqq |Q_1(s)|\, \|\varphi\|_t\, \beta_I^{-t+\sum_{i\in P}\alpha_i} \prod_{i \neq i_0} |N_{I,i}(y)|^{-k-2+2\mathrm{Re}(s)}$$
$$\cdot \int_{W'} \Big(\prod_{i \in I-P} |u_i|^{\gamma_i} \Big) |L_{i_0}(u)|^{\gamma_{i_0}}.$$

$Q_1(s)$ est un polynôme faisant intervenir Q, A_I et C. Soit $r_0 = \mathrm{card}(P \cap [1, n])$ et $r = \mathrm{card}([n+1, 2n] \cap I)$; notons que $r \leqq n-1$ car $\sup_i |y_i| \geqq \delta'$, et que d'après le Lemme 15, si $|y_i| \geqq \delta'$ et $n+i \in I$, alors $\varphi_{I,P} = 0$.

Plusieurs cas se présentent alors. Premièrement $\gamma_{i_0} = -1$, auquel cas on majore $|L_{i_0}(u)|^{\gamma_{i_0}}$ par $\frac{\lambda'}{\lambda\beta_I}$ et on obtient après intégration:

$$\begin{aligned} &|P'(s)\, H(I, P, y, s, \varphi)| \\ &\quad \leqq |Q_2(s)|\, \|\varphi\|_t\, \beta_I^{-r(k-2\mathrm{Re}(s))-1+r_0} \prod_{i \neq i_0} |N_{I,i}(y)|^{-k-2-2\mathrm{Re}(s)} \\ &\quad \leqq |Q_2(s)|\, \|\varphi\|_t \prod_{i \notin I} |N_{I,i}(y)|^{-k-2-2\mathrm{Re}(s)}\, \beta_I^{1+r_0+(r-1)(2\mathrm{Re}(s)-k)}, \end{aligned}$$

qui est une majoration du type voulu (ne pas oublier que $\beta_I \leqq \delta$).

Deuxièmement, $\gamma_{i_0} = -k-2+2\mathrm{Re}(s)$ et $r_0 \neq 0$. Dans ce cas, on doit avoir $r \leqq n-2$. En effet, on a $i_0 \notin I$ et $i_0 \geqq n+1$; de plus, on a $\sup_{i \in n+I} |N_{I,i}(y)| \geqq 2\alpha_I(y) = 2|N_{I,i_0}(y)|$ donc il existe $i_1 \in n+I$ tel que $|N_{I,i_1}(y)| \geqq 2|N_{I,i_0}(y)|$ et donc i_0 et i_1 sont différents et n'appartiennent pas à I, donc $r \leqq n-2$. Majorant alors $|L_{i_0}(u)|^{\gamma_{i_0}}$ par $\left(\frac{\lambda\beta_I}{\lambda'}\right)^{-k-2+2\mathrm{Re}(s)}$, on obtient:

$$|P'(s)\, H(I, P, y, s, \varphi)| \leqq |Q_3(s)\, \|\varphi\|_t \prod_{i \notin I} |N_{I,i}(y)|^{-k-2+2\mathrm{Re}(s)}\, \beta_I^{r_0+r(2\mathrm{Re}(s)-k)},$$

qui est du type voulu. Enfin, $\gamma_{i_0} = -k-2+2\mathrm{Re}(s)$ et $r_0 = 0$. On a encore $r \leqq n-2$, il existe alors $i_2 \in I-P$ tel que $\gamma_{i_2} = -1$. On majore alors $u_{i_2}^{-1}$ par $\frac{1}{\beta_I}$, et on obtient après intégration une majoration du type précédent, où l'exposant de β_I est $1+r(2\,\mathrm{Re}(s)-k)$, ce qui permet de conclure (après un changement de variable, on se ramène au 1er cas).

Remarque. Soit δ' la constante introduite au Lemme 15 et $\mathscr{P}(y)$ l'ensemble des éléments I de $\mathscr{P}$ tels que $n+i\in I \Rightarrow |y_i| \leqq \delta'$. Utilisant ce même Lemme 15, on obtient une majoration du même type que celle de la proposition 1, mais ou $\sum_{I\in\mathscr{P}}$ est remplacée par $\sum_{I\in\mathscr{P}(y)}$. C'est cette majoration qu'on utilisera par la suite.

8. Convergence de certaines séries

Dans cette section, $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme du sup.

Proposition 2. *Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}^n$. On suppose qu'il existe une constante $C>0$ et $\varepsilon>0$ tels que: $\omega\in\Lambda$ et $\prod_{i=1}^{n}|\omega_i| \leqq C\|\omega\|^{-\varepsilon} \Rightarrow \omega=0$. Alors la série $\sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ \omega\neq 0}} \|\omega\|^{-\delta}\prod_{i=1}^{n}|\omega_i|^{-2x}$ converge si $\delta-2\varepsilon x>0$ et $x>1$.*

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{C}=\mathbb{R}+i\mathbb{R}$) et on pose $K(\alpha)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|x|\leqq\alpha \text{ et } |y|\leqq\alpha\}$.

Lemme 18. *Soit $\alpha=(\alpha_i)$ une famille de réels strictement positifs vérifiant $\sqrt{2^n}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i \leqq C\,2^{-\varepsilon/2}\|\alpha\|^{-\varepsilon}$, alors $\omega\in\Lambda\cap\prod_{i=1}^{n}K(\alpha_i)\Rightarrow\omega=0$, ($\|\alpha\|=\sup_i \alpha_i$).*

Démonstration. Si $\omega\in\Lambda\cap\prod_{i=1}^{n}K(\alpha_i)$, alors:

$$\prod_{i=1}^{n}|\omega_i| \leqq \prod_{i=1}^{n}\sqrt{2}\,|\alpha_i| \leqq C\sqrt{2}^{-\varepsilon}\|\alpha\|^{-\varepsilon} \leqq C\|\omega\|^{-\varepsilon},$$

et donc $\omega=0$.

Corollaire. *Soit $\alpha=(\alpha_i)$ une famille de réels strictement positifs vérifiant $\sqrt{2}^{3n}\prod_{i=1}^{n}|\alpha_i| \leqq C\sqrt{2}^{-3\varepsilon}\|\alpha\|^{-\varepsilon}$. Alors dans tout translaté de $\prod_{i=1}^{n}K(\alpha_i)$, il y a au plus un élément de Λ.*

Démonstration. La différence de 2 éléments d'un translaté de $\prod_{i=1}^{n}K(\alpha_i)$ est dans $\prod_{i=1}^{n}K(2\alpha_i)$.

Lemme 19. *Soit A un ensemble de points de $\mathbb{C}^k$ vérifiant les conditions suivantes: $\exists\,\alpha$, $0<\alpha<1$ tel que*

1) $\forall\, \omega \in A, \prod_{i=1}^{k} |\omega_i| > \alpha$

2) *si* $\prod_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leqq \alpha$, *alors dans tout translaté de* $\prod_{i=1}^{k} K(\alpha_i)$, *il y a au plus un élément de* A.

Soit $N(r) = \operatorname{card}\left\{\omega \in A \,\middle|\, \prod_{i=1}^{k} |\omega_i| \leqq \alpha r \text{ et } |\omega_i| \leqq 1 \text{ si } 1 \leqq i \leqq k\right\}$. *Il existe alors une constante* $C(k)$ *telle que* $N(r) \leqq C(k)\,|\mathrm{Log}(\alpha)|^{k-1}\, r^2$ *pour* $1 \leqq r \leqq 1/\alpha$.

Démonstration. On peut recouvrir $\prod_{i=1}^{k} K(\alpha_i)$ par au plus $(r+1)^2$ translatés de $\prod_{i=1}^{k-1} K(\alpha_i) \times K\left(\frac{\alpha_k}{r}\right)$, et donc, si $\prod_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leqq \alpha r$, il y a au plus $(r+1)^2$ points de A dans $\prod_{i=1}^{k} K(\alpha_i)$. De plus $\left\{z \in \mathbb{C}^k \,\middle|\, |z_i| \leqq 1 \text{ et } \prod_{i=1}^{k} |z_i| \leqq \alpha r\right\}$ est inclus dans la réunion

$$\bigcup_{\substack{m_1 + \ldots + m_k = 0 \\ m_i \leqq |\mathrm{Log}_2 2(\alpha r)^{1/k}| + 1}} \prod_{i=1}^{n} K(2^{m_i+1}(\alpha r)^{1/k}).$$

On en tire le résultat.

Soit $\mathscr{P}$ l'ensemble des parties de $[1, n]$. Si $I \in \mathscr{P}$, on note

$$A_I = \{\omega \in A \,|\, |\omega_i| \geqq 1 \text{ si } i \in I \text{ et } |\omega_i| < 1 \text{ si } i \notin I\}.$$

Soit $S_I = \sum_{\substack{\omega \in A_I \\ \omega \neq 0}} \|\omega\|^{-\delta} \prod_{i=1}^{n} |\omega_i|^{-2x}$. Il est évident que pour démontrer la Proposition 2 il suffit d'étudier la convergence de S_I. $S_\emptyset$ converge trivialement et une simple comparaison avec $\int_{\substack{|z_i| > 1 \\ 1 \leqq i \leqq n}} \prod_{i=1}^{n} |z_i|^{-2x} \|z\|^{-\delta}$ prouve que $S_{[1,n]}$ converge si $x > 1$. Soit alors $I \in \mathscr{P} - \{\emptyset, [1, n]\}$; on peut supposer, sans nuire à la généralité du raisonnement, que $I = \{1, 2, \ldots, l\}$. Soit $k = n - l$. Soient $m_1, \ldots, m_l$ des entiers positifs ou nuls; on peut de même supposer que $m_1 = \sup(m_i)$. On note

$$A_I(\underline{m}) = \{(\omega_{l+1}, \ldots, \omega_n) / \omega \in A_I \text{ et } 2^{m_i} \leqq |\omega_i| \leqq 2^{m_i+1} \text{ si } i \in I\},$$

et on pose:

$$S_I(\underline{m}) = \sum_{\substack{\omega \in A_I \\ 2^{m_i} \leqq |\omega_i| \leqq 2^{m_i+1} \text{ si } i \in I}} \prod_{i=1}^{n} |\omega_i|^{-2x} \|\omega\|^{-\delta}.$$

Remarquons alors que $\|\omega\| \geqq 2^{m_1}$, ce qui nous permet d'écrire

$$S_I(\underline{m}) \leqq 2^{-(m_1\delta + 2x(m_1+\ldots+m_l))} \sum_{\omega \in A_I(\underline{m})} \prod_{i=1}^{k} |\omega_{l+i}|^{-2x}.$$

Lemme 20. *Soit* $C' = C2^{-\left(l+\frac{5}{2}\varepsilon+\frac{3n}{2}\right)}$, *alors* $A_I(\underline{m})$ *vérifie les hypothèses du Lemme 19 avec* $\alpha(\underline{m}) = C'\,2^{-(m_1(1+\varepsilon)+m_2+\ldots+m_l)}$.

Démonstration. On a pour tout ω élément de $A_I(\underline{m})$

$$\prod_{i=l+1}^{n} |\omega_i| > C2^{-(l+\varepsilon)}\,2^{-(m_1(1+\varepsilon)+m_2+\ldots+m_l)}.$$

Il n'y a alors qu'à appliquer le Lemme 18 avec $\alpha_i = 2^{m_i+1}$ pour $i \in I$. On a alors

$$\sum_{\omega \in A_I(\underline{m})} \prod_{i=1}^{k} |\omega_{l+i}|^{-2x} = \int_0^1 \sum_\beta \delta_\beta\, r^{-2x},$$

où δ_β désigne la masse de Dirac en β et β parcourt l'ensemble des nombres de la forme $\prod_{i=1}^{k} |\omega_{l+i}|$, avec $(\omega_{l+1}, \ldots, \omega_n) \in A_I(\underline{m})$. Effectuant une intégration par partie et utilisant le Lemme 19, on obtient:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\omega \in A_I(\underline{m})} \prod_{i=1}^{n} |\omega_{l+i}|^{-2x} \\
&\quad \leqq 2x\,C(k)\,|\mathrm{Log}(\alpha(\underline{m}))|^{k-1} \left(\int_{\alpha(\underline{m})}^{1} \left(\frac{r}{\alpha(\underline{m})}\right)^2 r^{-2x-1}\,dr + \frac{1}{\alpha(\underline{m})^2} \right) \\
&\quad \leqq \frac{2x}{x-1}\,C(k)\,|\mathrm{Log}(\alpha(\underline{m}))|^{k-1}\,\frac{1}{\alpha(\underline{m})^{2x}}.
\end{aligned}$$

Il existe une constante C telle que $|\mathrm{Log}(\alpha(\underline{m}))| \leqq C m_1$, et donc

$$S_I(\underline{m}) \leqq \frac{2x}{x-1}\,C(k)\,C^{k-1}\,m_1^{k-1}\,2^{-m_1(\delta-2x)\varepsilon}.$$

Il y a au plus m_1^{l-1} l-uplets $(m_1, \ldots, m_l)$, tels que $m_1 = \sup m_i$, et donc

$$S_I \leqq l\,\frac{2x}{x-1}\,C(k)\,C^{k-1} \sum_{m=1}^{+\infty} m^{l+k-2}\,2^{-m(\delta-2x\varepsilon)} < +\infty \qquad \text{si } \delta - 2\varepsilon x > 0,$$

ce qui termine la démonstration.

Corollaire 1. *Soit Λ un réseau de $\mathbb{C}^n$. On suppose que $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, C(\varepsilon)>0$, tel que: $\omega\in\Lambda$ et $\prod_{i=1}^{n}|\omega_i|\leqq C(\varepsilon)\|\omega\|^{-\varepsilon}\Rightarrow\omega=0$. Alors la série $\sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ \omega\neq 0}}\prod_{i=1}^{n}|\omega_i|^{-2x}\|\omega\|^{-\delta}$ converge si $\delta>0$ et $x>1$.*

Corollaire 2. *Sous les mêmes hypothèses qu'au Corollaire 1, la série $\sum_{\substack{\omega\in\Lambda\\ \omega\neq 0}}\inf_i(1,|\omega_i|)^{\delta}\prod_{i=1}^{n}|\omega|^{-2x}$ converge si $\delta>0$ et $x>1$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon>0$ et I une partie de $[1,n]$. Soient

$$U_{I,\varepsilon}=\{\omega\in\Lambda\,|\,|\omega_i|\geqq 1 \text{ si } i\in I \text{ et } \|\omega\|^{-\varepsilon}\leqq|\omega_i|\leqq 1 \text{ si } i\notin I\},$$
$$V_{I,\varepsilon}=\{\omega\in\Lambda\,|\,|\omega_i|\leqq 1 \text{ si } i\in I,\ \|\omega_i\|\leqq 1 \text{ si } i\notin I \text{ et } \inf_i|\omega_i|\leqq\|\omega\|^{-\varepsilon}\}.$$

Soit i_0 tel que $|\omega_{i_0}|=\|\omega\|$. Alors

$$\sum_{\omega\in U_{I,\varepsilon}}\inf_i(1,|\omega_i|)^{\delta}\prod_{i=1}^{n}|\omega_i|^{-2x}\leqq\sum_{\omega\in U_{I,\varepsilon}}|\omega_{i_0}|^{-2x+(n-\operatorname{card} I)\varepsilon 2x}\prod_{i\in I-\{i_0\}}|\omega_i|^{-2x}$$

qui converge si $2x-(n-\operatorname{card} I)\varepsilon>2$ comme on peut le constater en faisant une comparaison avec l'intégrale, et

$$\sum_{\omega\in V_{I,\varepsilon}}\inf_i(1,|\omega_i|)^{\delta}\prod_{i=1}^{n}|\omega_i|^{-2x}\leqq\sum_{\omega\in V_{I,\varepsilon}}\|\omega\|^{-\delta\varepsilon}\prod_{i=1}^{n}|\omega_i|^{-2x}$$

qui converge en raison du corollaire 1. Il suffit alors de prendre ε suffisamment petit pour terminer la démonstration.

9. Démonstration du Lemme 10

Soit B un $\mathbb{R}$-isomorphisme entre $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{C}^n$ tel que $B(\mathbb{Z}^{2n})=\hat{\Lambda}$. Soit $U=B(]-\frac{2}{3},\frac{2}{3}[^{2n})$. Les translatés de U par les éléments de $\hat{\Lambda}$ recouvrent $\mathbb{C}^n$ et de plus $\prod_{i=1}^{n}M_i(z-\omega)\mathscr{F}(T)(z)$ est C^∞ sur $\omega+U$. En outre $e^{2i\pi\langle u|z\rangle}\mathscr{F}(T)(z)$ est périodique de période $\hat{\Lambda}$. Soit alors $R(s)$ la distribution $\mathscr{F}(T)(z)\prod_{i=1}^{n}\frac{\bar{z}_i^k}{|z_i|^{2(k+1-s)}}$; utilisant la remarque à la fin de la démonstration de la proposition 1, nous obtenons:

$$|P(s)|\,\|R(s)\|_{\omega+U,t}\leqq|Q(s)|\sum_{I\in\mathscr{P}(\omega)}\prod_{i\notin I}|N_{I,i}(\omega)|^{2\operatorname{Re}s-k-2}\inf(1,\alpha_I(\omega))^{r(s)}.$$

Utilisant alors le Corollaire 2 de la Proposition 2, nous en déduisons que $R(s)$ est L^1 si $2\operatorname{Re}(s)-k<0$ et $r(s)>0$ et que $\dfrac{P(s)}{\mu_k(s)^n Q(s)}F_\varepsilon(s)$ converge normalement sur $\{s \mid A \leqq \operatorname{Re}(s) \leqq B\}$, où A et B sont assujettis aux conditions du Lemme 10. Ceci termine la démonstration du Lemme 10 et par voie de conséquence, celle du Théorème 2.

Chapitre III. Algébricité de valeurs spéciales de fonctions L

Soit K un corps quadratique imaginaire, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et F une extension finie de degré n de K. Un plongement de K dans $\mathbb{C}$ étant fixé, on plonge F dans $\mathbb{C}^n$ par $\alpha \in F \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ où $\alpha_i = \tau_i(\alpha)$ et τ_i est le i-ème plongement de F dans $\mathbb{C}$ au-dessus de K. Soit ψ un caractère de Hecke de K, dont le type à l'infini est $\bar{z}$, et soit θ un caractère de Dirichlet de F. On pose $\Phi_k = \theta \times \psi^k \circ N_{F/K}$; alors Φ_k est un caractère de Hecke de F, soit $\mathfrak{m}$ son conducteur. On pose $\Lambda(\Phi_k, s) = \Gamma(s)^n \sum_{\mathfrak{g}} \Phi_k(\mathfrak{g})\, N(\mathfrak{g})^{-s}$, où la somme est étendue à tous les idéaux entiers de F premiers à $\mathfrak{m}$.

Il est bien connu que $\Lambda(\Phi_k, s)$ a un prolongement analytique à tout le plan complexe. Soit t un entier vérifiant $1 \leqq t \leqq k$. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème 5. *$\Lambda(\Phi_k, t) \in \Omega_\infty^{nk}\, \pi^{n(t-k)}\, \bar{\mathbb{Q}}$, où Ω_∞ est la période réelle d'une courbe elliptique à multiplication complexe par K définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$, dans les cas suivants:*

$n = 2$, $1 \leqq t \leqq k$, F quelconque

$n \geqq 3$, $k = t$ et l'image de l'action de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ sur les plongements de F dans $\mathbb{C}$ est S_n (groupe des permutations d'ordre n) ou A_n (groupe alterné d'ordre n).

Démonstration. Soit V le groupe des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{m}$ et G le groupe de classes de rayons modulo $\mathfrak{m}$. Soient $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_r$ un système de représentants entiers de G. Si $\mathfrak{b}$ est dans la classe de $\mathfrak{g}_i$, on a $\mathfrak{b} = (\beta)\, \mathfrak{g}_i$ où $\beta \in 1 + \mathfrak{g}_i^{-1}\mathfrak{m}$ et β est défini modulo V.

On a alors $\Lambda(\Phi_k, s) = \sum_{i=1}^{r} \Phi_k(\mathfrak{g}_i)\, N(\mathfrak{g}_i)^{-s}\, \Lambda(\Phi_k, s, \mathfrak{g}_i)$, avec

$$\Lambda(\Phi_k, s, \mathfrak{g}) = \sum_{\substack{\beta \in 1 + \mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{m} \\ \beta \bmod V}} \Gamma(s)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{\bar{\beta}_i^k}{|\beta_i|^{2s}}.$$

Comme $\Phi_k(\mathfrak{g}_i)\, N(\mathfrak{g}_i)^{-t} \in \bar{\mathbb{Q}}$, il suffit de prouver le résultat pour $\Lambda(\Phi_k, s, \mathfrak{g}_i)$. La démonstration va alors consister à appliquer le Theorème 1 pour se débarrasser de la condition $\beta \bmod V$ et se placer dans les conditions du Théorème 4 qui permettent de conclure.

Quitte à augmenter $\mathfrak{m}$, ce qui ne fait que rajouter des facteurs d'Euler tout à fait innocents en ce qui concerne la transcendance, on peut supposer que V est sans torsion et que $n \notin \operatorname{Tr} \mathfrak{m}$. On s'intéresse alors à la limite quand s tend vers t de $\Lambda(\Phi_k, s, \mathfrak{g})$; faisons donc le changement de variable $s \to t + s$ et faisons tendre s vers 0. On obtient:

$$\Lambda(\Phi_k, t, \mathfrak{g}) = \lim_{s \to 0} \sum_{\substack{\beta \in 1 + \mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{m} \\ \beta \bmod V}} \Gamma(t+s)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i^t} \prod_{i=1}^{n} \frac{\bar{\beta}_i^{k-t}}{|\beta_i|^{2s}}.$$

Choisissons alors une base de V, $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ telle que le signe η défini au Théoréme 1 soit égal à 1. Utilisons le Théorème 1 pour transformer $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta_i^t}$, et utilisons aussi l'identité

$$\sum_{\substack{\beta \in X \\ \beta \bmod V}} \sum_{v \in V} f(v\beta) = \sum_{\beta \in X} f(\beta),$$

nous obtenons

$$\Lambda(\Phi_k, t+s, \mathfrak{g}) = \frac{\Gamma(t+s)^n}{\Gamma(t)^n} \sum_{\beta \in 1+\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{m}} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} f_\sigma(s, \beta)$$

où

$$f_\sigma(s, \beta) = \varepsilon(\sigma) \det \mathscr{B}_\sigma \sum_{\underline{t} \in I_t} \alpha_{\underline{t}}(\mathscr{B}_\sigma) \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(t_i)}{(\operatorname{Tr} f_{i,\sigma}\beta)^{t_i}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^{k-t}}{|\beta_i|^{2s}}.$$

Pour appliquer le Théorème 1, il faut quand même vérifier que la série converge, mais ceci est assuré par le fait qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$\beta \in 1+\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{m} \Rightarrow |\operatorname{Tr} f_{i,\sigma}\beta| \geqq C (\beta \equiv 1[\mathfrak{m}] \Rightarrow \operatorname{Tr} f_{i,\sigma}\beta \neq 0 \text{ car } \operatorname{Tr} 1 \notin \operatorname{Tr} \mathfrak{m}).$$

Soit alors $\mathscr{B}_\sigma$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ donné par:

$$\mathscr{B}_\sigma(z) = (\operatorname{Tr} f_{1,\sigma} z, \ldots, \operatorname{Tr} f_{n,\sigma} z),$$

$\mathscr{B}_\sigma(\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{m})$ est alors un réseau de K^n et contient donc $(\gamma_\sigma \mathcal{O}_K)^n$ pour un certain γ_δ. Soit $\Lambda_\sigma = \mathscr{B}_\sigma^{-1}(\gamma_\sigma \mathcal{O}_K)^n$ et Y_σ un système de représentants de $1+\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{m}$ modulo Λ_σ. Notons de plus $L_{i,\sigma}(z) = \operatorname{Tr} f_{i,\sigma} z$ et soit $\mathscr{M}_\sigma$ la famille de formes linéaires définie par: $\operatorname{Re} \prod_{i=1}^{n} L_{i,\sigma}(z) \overline{M_{i,\sigma}(y)} = \langle z \mid y \rangle$. On obtient

$$\Lambda(\Phi_k, t+s, \mathfrak{g}) = \frac{\Gamma(t+s)^n}{\Gamma(t)^n} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma) \det \mathscr{B}_\sigma \sum_{y \in Y_\sigma} F_\sigma(s, y),$$

où $F_\sigma(s, y) = \sum_{\underline{t} \in I_t} \alpha_{\underline{t}}(\mathscr{B}_\sigma) F(k-t, \underline{t}, s, y, \Lambda_\sigma)$ et $F(k-t, \underline{t}, s, y, \Lambda_\sigma)$ est une série d'Eisenstein-Kronecker étudiée à la partie II. Supposons alors que n formes linéaires prises parmi $M_{1,\sigma}, \ldots, M_{n,\sigma}, z_1, \ldots, z_n$ forment toujours une famille libre. Notons que l'on peut toujours choisir une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ de V de telle sorte que ceci soit vérifié car les bases de V sont Zariski denses dans D^{n-1} et le fait qu'une famille de n formes linéaires prises parmi $M_{1,\sigma}, \ldots, M_{n,\sigma}$, $z_1, \ldots, z_n$ soit liée s'écrit comme une relation polynomiale en $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$. Compte tenu du Corollaire du Théorème 4bis, il suffit de vérifier que la série $F(k-t, \underline{t}, s, y, \Lambda_\sigma)$ vérifie les conditions du théorème 2, pour démontrer le Théorème 5. C'est-à-dire qu'il faut vérifier que la série est convergente pour $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ et que $(\hat{\Lambda}_\sigma, \mathscr{M}_\sigma)$ vérifie l'hypothèse (H). Pour vérifier la première partie de ces conditions, il suffit de constater qu'il existe une constante $C>0$ telle que $\beta \in 1+\mathfrak{g}^{-1}\mathfrak{m}$ implique $\prod_{i=1}^{n} |\beta_i| = N_{F|\mathbb{Q}}(\beta)^{\frac{1}{2}} > C$ et ensuite d'appliquer la proposition 2 (il existe i tel que $|\mathrm{Tr}\, f_{i,\sigma}\beta| > C' \|\beta\|$). Pour démontrer la seconde condition, constatons que Λ_σ contient un idéal de F et donc que $\hat{\Lambda}_\sigma$ est contenu dans un idéal fractionnaire du corps conjugué F^v, et que de plus il existe $g_{i,\sigma} \in F^v$ tel que $M_{i,\sigma}(z) = \mathrm{Tr}\, g_{i,\sigma} z$. On est donc ramené à démontrer que si $\mathfrak{d}$ est un idéal fractionnaire de F, $(g_1, \dots, g_n)$ une base de F sur K, $M_i(z) = \mathrm{tr}\, g_i z$ et si l'image de l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur les plongements de F dans $\mathbb{C}$ contient A_n, alors $(\mathfrak{d}, \mathscr{M})$ vérifie l'hypothèse (H), $\mathscr{M}$ étant la famille $(M_1, \dots, M_n)$.

La démonstration repose sur le lemme suivant dû à Schmidt [Sch], et qui est en quelque sorte une vaste généralisation du théorème de Roth.

Lemme 1. *Soient $L_1, \dots, L_n$, n formes linéaires indépendantes à coefficients algébriques réels et $C_1, \dots, C_n$, n réels vérifiant $C_1 + \dots + C_n < 0$. Soit Λ un réseau de $\mathbb{Q}^n$. On suppose qu'il existe un ensemble non majoré de réels M, tel que si $Q \in M$, $\exists\, x(Q) \in \Lambda - \{0\}$ tel que:*

$$|L_j(x(Q))| \leqq Q^{C_j}, \qquad 1 \leqq j \leqq n.$$

Il existe alors un sous-espace rationnel V de $\mathbb{Q}^n$ de dimension d, où $1 \leqq d \leqq n-1$, et un sous-ensemble M' non borné de M, tel que si $Q \in M'$ alors $x(Q) \in V$.

Lemme 2. *Soient $L_1, \dots, L_n$, n formes linéaires indépendantes à coefficients algébriques et $C_1, \dots, C_n$ comme au lemme précédent. Soit Λ un $\mathcal{O}_K$-module de rang n de K^n. On suppose qu'il existe un ensemble non borné M de réels, tel que si $Q \in M$, $\exists\, x(Q) \in \Lambda - \{0\}$ tel que:*

$$|L_j(x(Q))| \leqq Q^{C_j}, \qquad 1 \leqq j \leqq n.$$

Il existe alors un sous-espace vectoriel W de K^n de dimension d sur K, avec $1 \leqq d \leqq n-1$ et un sous-ensemble M' non borné de M, tel que si $Q \in M'$, alors $x(Q) \in W$.

Démonstration. Soit $1, \tau$ une base de K sur $\mathbb{Q}$. K^n s'identifie alors à $\mathbb{Q}^{2n}$ et $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$. Soit V le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^{2n}$ tel qu'il existe $M' \subset M$ ensemble non borné de réels tel que si $Q \in M'$, $x(Q) \in \Lambda \cap V - \{0\}$. On a

$$V = K\mu_1 \oplus \dots \oplus K\mu_s \oplus \mathbb{Q}\mu_{s+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}\mu_r,$$

où $\mu_1, \dots, \mu_r$ sont indépendants sur K. Si $r < n$, on peut prendre $W = K\mu_1 \oplus \dots \oplus K\mu_r$. Supposons alors $r = n$ et $C_1 \leqq C_2 \leqq \dots \leqq C_n$.

Soient $W_1 = K\mu_1 \oplus \dots \oplus K\mu_s = V \cap \tau V$, $W_2 = K\mu_{s+1} \oplus \dots \oplus K\mu_n$ et $V_2 = \mathbb{Q}\mu_{s+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}\mu_n$. Soit $I = \{i_1, \dots, i_s\}$ où i_j est le plus petit entier tel que $L_1, \dots, L_{i_j}$ forment un système de rang j sur W_1. Si $i \notin I$, soit k le plus grand entier tel que $i_k \in I$ et $i_k \leqq i$. Il existe alors des nombres algébriques $\alpha_{i,j}$ tels que la forme linéaire

$$M_i = \left(1 + \sum_{j=1}^{k} |\alpha_{i,j}|\right)^{-1} \left(L_i - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} L_{i_j}\right)$$

soit nulle sur W_1. Posons aussi $M_{i_j} = L_{i_j}$. On a alors, utilisant le fait que $C_1 \leqq C_2 \leqq \dots \leqq C_n$:

$$\forall\, Q \in M', \qquad \forall\, 1 \leqq i \leqq n, \qquad |M_i(x(Q))| \leqq Q^{C_i}.$$

De plus, la famille $M_1, \ldots, M_n$ est une famille libre, et ceci implique en particulier que $(M_i)_{i \notin I}$ est une famille libre sur $W_2 \otimes_K \mathbb{C}$. On peut donc trouver des formes linéaires $N_i(x)$ sur V_2 pour $i \notin I$, telles que $N_i(x) = \mathrm{Re}(M_i(x))$ ou $N_i(x) = \mathrm{Im}(M_i(x))$ et que les N_i forment une famille libre sur $V_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ (car $\bigwedge_{j \notin I} \mathrm{Re}(M_j) + i\,\mathrm{Im}(M_j) = \bigwedge_{j \notin I} M_j \neq 0$). Soit finalement, si $i \in I$, $N_i(x) = \mathrm{Re}(M_i(x))$, $N_{n+i}(x) = \mathrm{Im}(M_i(x))$, et $C_{n+i} = C_i$.

Soit $I' = [1, n] \cup n + I$ et $I'' = [1, n] - I$. Remarquons que l'une au moins des deux quantités $\sum_{i \in I'} C_i$ et $\sum_{i \in I''} C_i$ est strictement négative (leur somme l'est). Si c'est la première, comme les $(N_i)_{i \in I'}$ forment une famille libre sur $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et que, si $Q \in M'$, $|N_i(x(Q))| \leqq Q^{C_i}$, $\forall\, i \in I'$, appliquant le lemme 1, on en déduit qu'il existe un sous-ensemble M'' non borné de M', un sous-espace propre V' de V tels que $Q \in M''$ implique $x(Q) \in V'$, ce qui est contraire à la définition de V. Dans le second cas, soit p la projection de V sur V_2 parallèlement à W_1. On a alors,

$$\forall\, Q \in M', \quad \forall\, i \in I'', \quad |N_i(p(x(Q)))| = |N_i(x(Q))| \leqq Q^{C_i}$$

et donc, appliquant le Lemme 1, on en déduit qu'il existe un sous-ensemble M'' non borné de M', un sous-espace propre V_2' de V_2, tel que $Q \in M'' \Rightarrow p(x(Q)) \in V_2' \Rightarrow x(Q) \in V_2' \oplus W_1$, ce qui est contraire à la définition de V. Donc $r < n$.

Lemme 3. *Soient $L_1, \ldots, L_n$, n formes linéaires à coefficients algébriques et A un $\mathcal{O}_K$ module de rang n de K^n. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et un ensemble $X \subset A$ infini tels que: $\omega \in X \Rightarrow 0 < \prod_{i=1}^{n} |L_i(\omega)| \leqq \|\omega\|^{-\varepsilon}$. Alors, il existe un sous-espace W de K^n de dimension d avec $1 \leqq d \leqq n-1$, et $L_{i_1}, \ldots, L_{i_d}$ formant une famille liée sur W avec $W \cap \ker L_{i_1} \cap \ldots \cap \ker L_{i_d} = \{0\}$.*

Démonstration. Si σ est une permutation de $[1, n]$, on note X^σ le sous-ensemble de X formé des $\omega \in X$ tels que: $i < j \Rightarrow |L_{\sigma(i)}(\omega)| \leqq |L_{\sigma(j)}(\omega)|$. On prendra dans la suite $\sigma \in S_n$ tel que X^σ soit infini. On construit alors une suite (W_k, X_k^σ) de la manière suivante: W_k est un sous-espace vectoriel de K^n de dimension d_k et X_k^σ est un sous-ensemble infini d'un réseau de W_k vérifiant:

$$\omega \in X_k^\sigma \Rightarrow 0 < \prod_{i=1}^{d_k} |L_{\sigma(i)}(\omega)| \leqq \|\omega\|^{-\varepsilon}.$$

W'_{k+1} sera alors un sous-espace minimal de W_k contenant une infinité d'éléments de X_k^σ et W_{k+1} sera l'orthogonal dans W'_{k+1} de

$$N_{k+1} = \bigcap_{i=1}^{\dim W'_{k+1}} \ker L_{\sigma(i)} \cap W'_{k+1}.$$

Soit p_k la projection orthogonale sur W_{k+1}; on posera $X_{k+1}^\sigma = p_k(X_k^\sigma \cap W'_{k+1})$. $(W_{k+1}, X_{k+1}^\sigma)$ vérifie bien l'hypothèse de construction car si $i \leqq d_{k+1}$, et

$\omega \in X_k \cap W'_{k+1}$, on a $L_{\sigma(i)}(\omega) = L_{\sigma(i)}(p_k(\omega))$ et $\|p_k(\omega)\| \leqq \|\omega\|$; de plus X^σ_{k+1} est bien infini, car sinon, on pourrait trouver $\omega \in X^\sigma_{k+1}$ ayant une infinité (ω_j) d'antécédents par p_k, et on aurait alors,

$$\left|\prod_{i=1}^{d_k} L_{\sigma(i)}(\omega)\right| = \prod_{i=1}^{d_k} |L_{\sigma(i)}(\omega_j)| \leqq \|\omega_j\|^{-\varepsilon} \qquad \forall j,$$

et donc,

$$\prod_{i=1}^{d_k} L_{\sigma(i)}(\omega_j) = 0,$$

contrairement à l'hypothèse. Enfin, X^σ_{k+1} est bien inclus dans un réseau de W_{k+1}, car un réseau d'un K espace vectoriel se projette en un réseau.

Prenons alors $W = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} W_k$ et $i_j = \sigma(j)$ pour $1 \leqq j \leqq d$. W possède les propriétés suivantes: il existe un ensemble infini X' d'éléments de W vérifiant $0 < \prod_{j=1}^{d} |L_{i_j}(\omega)| \leqq \|\omega\|^{-\varepsilon}$, et W n'a pas de sous-espace propre dont l'intersection avec X' est infini, et donc, d'après le Lemme 2, $L_i, \ldots, L_{i_d}$ forment une famille liée sur W, et de plus $W \cap \ker L_{i_1} \cap \ldots \cap \ker L_{i_d}$ est nul par construction.

Pour appliquer le Lemme 2, posons si $\omega \in X'$, $Q(\omega) = \|\omega\|$, $|L_{i_j}(\omega)| = \|\omega\|^{q_j(\omega)}$ et soit $(C'_1, \ldots, C'_d)$ un point d'accumulation de $(q_1(\omega), \ldots, q_d(\omega))$. On pose alors $C_i = C'_i + \dfrac{\varepsilon}{d+1}$. On a

$$\sum_{i=1}^{d} C_i = \frac{d}{d+1}\,\varepsilon + \sum_{i=1}^{d} C'_i \leqq -\frac{1}{d+1}\,\varepsilon.$$

De plus, d'après la définition de $C'_1, \ldots, C'_d$, il existe une infinité d'éléments de X', tels que $|L_{i_j}(\omega)| \leqq Q(\omega)^{C_j}$. On est donc bien dans les hypothèses du Lemme 2.

Remarque. En utilisant la démonstration de Schmidt [Sch], on peut en fait démontrer beaucoup plus fort.

Supposons alors que $(\mathfrak{d}, \mathcal{M})$ ne vérifie pas (H).

Il existe alors I, partie à n éléments de $[1, 2n]$, $\varepsilon > 0$, et une infinité de $\omega \in \Lambda$, vérifiant $|\omega_i| < \delta$ si $n+i \in I$, et $\prod_{i=1}^{n} |N_{I,i}(\omega)| < \|\omega\|^{-\varepsilon}$.

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $I = \{1, \ldots, r, n+r+1, \ldots, 2n\}$. Commençons par calculer les formes linéaires $N_{I,i}$. Pour cela, il faut calculer la solution du système

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} g_1 z &= 0 \\
&\vdots \\
\operatorname{Tr} g_r z &= 0 \\
z_{r+1} &= \omega_{r+1} \\
&\vdots \\
z_n &= \omega_n .
\end{aligned}$$

Soit $f_1, \ldots, f_n$ la base duale de $g_1, \ldots, g_n$. On obtient:

$$N_{I,i}(\omega) = \operatorname{Tr} g_i z = \frac{\det(f_{r+1}, \ldots, f_{i-1}, \omega, f_{i+1}, \ldots, f_n)(r+1, \ldots, n)}{\det(f_{r+1}, \ldots, f_n)(r+1, \ldots, n)} \quad \text{si } r+1 \leqq i \leqq n,$$

et

$$N_{I,n+i}(\omega) = z_i - \omega_i = \frac{\det(f_{r+1}, \ldots, f_n, \omega)(i, r+1, \ldots, n)}{\det(f_{r+1}, \ldots, f_n)(r+1, \ldots, n)} \quad \text{si } 1 \leqq i \leqq r,$$

où $\det(v_1, \ldots, v_r)(i_1, \ldots, i_r)$ signifie que l'on considère le déterminant (r, r) obtenu en prenant les $i_1, \ldots, i_r$-ième coordonnées des vecteurs $(v_1, \ldots, v_r)$.

Lemme 4. $\operatorname{Tr} g_i z = 0 \Leftrightarrow \omega \in K f_{r+1} \oplus \ldots \oplus K f_{i-1} \oplus K f_{i+1} \oplus \ldots \oplus K f_n$.

Démonstration.

$$\operatorname{Tr} g_i z = 0 \Leftrightarrow \det(f_{r+1}, \ldots, f_{i-1}, \omega, f_{i+1}, \ldots, f_n)(r+1, \ldots, n) = 0.$$

Appliquant un élément de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ sur cette dernière égalité et utilisant le fait que l'image de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ contient A_n, on obtient:

$$\det(f_{r+1}, \ldots, f_{i-1}, \omega, f_{i+1}, \ldots, f_n)(j_1, \ldots, j_{n-r}) = 0, \qquad \forall (j_1, \ldots, j_{n-r}),$$

et donc les vecteurs $f_{r+1}, \ldots, f_{i-1}, \omega, f_{i+1}, \ldots, f_n$ sont liés.

Lemme 5. $z_i - \omega_i = 0 \Leftrightarrow (\omega, f_{r+1}, \ldots, f_n)$ *famille liée.*

La démonstration de ce lemme est identique à la démonstration du Lemme 4.

Lemme 6. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\mathbb{C}^n$, *soient* $h_1, \ldots, h_s$ *des éléments de* F *et* J *une partie à* $(n-s)$ *éléments de* $[1, n]$. *Alors si la famille de vecteurs* $(h_1, \ldots, h_s, e_j$ *pour* $j \in J)$ *est liée, les vecteurs* $h_1, \ldots, h_s$ *forment une famille liée.*

Démonstration.

$$\det(h_1, \ldots, h_s, e_j, j \in J) = \det(h_1, \ldots, h_s)(j_1, \ldots, j_s)$$

où les j_i sont les éléments de $[1, n] - J$. On termine alors la démonstration comme au Lemme 4.

Corollaire. *Il y a au plus un nombre fini de* $\omega \in \mathfrak{d}$ *tel que* $|\omega_i| \leqq \delta$ *si* $n+i \in I$ *et* $\prod_{j \notin I} N_{I,j}(\omega) = 0$.

Démonstration. Si $\prod_{j \notin I} N_{I,j}(\omega) = 0$, alors $\omega \in \operatorname{Vect}(f_{r+1}, \ldots, f_n)$ d'après les Lemmes 4 et 5. Utilisant le Lemme 6, on montre alors que

$$\operatorname{Vect}(f_{r+1}, \ldots, f_n) \cap \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_r) = \{0\}$$

et donc que l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^n$ tels que $|z_i| \leqq \delta$ si $i \leqq r$ et $z \in \operatorname{Vect}(f_{i+1}, \ldots, f_n)$ est compact, ce qui permet de conclure.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées de ω dans la base $f_1, \ldots, f_n$, et posons

$$N_i(x) = \operatorname{Tr} g_i z \quad \text{pour } r+1 \leqq i \leqq n \quad \text{(cf. juste avant le Lemme 4)}$$
$$P_i(x) = z_i - \omega_i \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq r.$$

Les P_i sont des formes linéaires ne faisant intervenir que $x_1, \ldots, x_r$, alors que N_i fait intervenir $x_1, \ldots, x_r$ et x_i. D'après le Lemme 3, il existe alors un sous-espace vectoriel W de dimension d de K^n, d_1 formes linéaires prises parmi les N_i et d_2 formes linéaires prises parmi les P_i avec $d_1 + d_2 = d$, de telle sorte que ces formes linéaires forment une famille liée sur W et $W \bigcap_i \ker N_i \bigcap_i \ker P_i = \{0\}$.

W est alors défini par $n-d$ équations de la forme $\operatorname{Tr} h_i \omega = 0$ avec $h_i \in F$ et $1 \leqq i \leqq n-d$, de telle sorte que la famille $(h_i)_{1 \leqq i \leqq n-d}$ soit libre sur K. Traduit en x, $\operatorname{Tr} h_i \omega$ devient $L_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ avec $a_{ij} \in K$.

Soit $J_1 \subset [r+1, n]$ (resp. $J_2 \subset [1, r]$) l'ensemble des i tels que N_i (resp. P_i) fasse partie des formes choisies. D'après les Lemmes 4 et 5, $F \bigcap_{i \in J_1} \ker N_i \bigcap_{i \in J_2} \ker P_i = V_{J_1}$ où $V_{J_1} = \bigoplus_{j \in [r+1, n] - J_1} K f_j$. Comme $W \cap V_{J_1}$ est nul, on peut choisir $h_1, \ldots, h_{n-d}$ de la manière suivante: $L_{r-d_2+1}, \ldots, L_{n-d}$ forment une famille libre sur V_{J_1} et $a_{i,j} = 0$ si $i \leqq r - d_2$ et $j \in [r+1, n] - J_1$. Dire que la famille $(N_i,\ i \in J_1;\ P_i,\ i \in J_2)$ est liée sur W, signifie que la famille $(L_i,\ 1 \leqq i \leqq n-d;\ N_i,\ i \in J_1;\ P_i,\ i \in J_2)$ est liée sur $\mathbb{C}^n$. Cette dernière condition s'exprime par l'annulation d'un déterminant $n \times n$. Appliquant à ce déterminant un élément de $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ qui laisse globalement fixe les plongements $(r+1, \ldots, n)$ et qui envoie J_2 sur J_2' (ceci est possible sauf dans le cas particulier $n=3$, $r=2$, $d_2=1$ et $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$ agit par A_3; ce cas sera traité directement après), on obtient: $\forall\, J$ partie à d_2 éléments de $[1, r]$, la famille de formes linéaires $(L_i,\ 1 \leqq i \leqq n-d;\ N_i,\ i \in J_1;\ P_i,\ i \in J)$ est liée. De plus, $y \to x_I(y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}^n$; on en tire le fait que les $N_{I,i}$ forment une famille libre et donc que $P_1, \ldots, P_r$ forment une famille libre et donc génératrice des formes linéaires ne faisant intervenir que $(x_1, \ldots, x_r)$. Soit A la matrice formée des $(N_i)_{i \in J_1}$ et des $(L_i)_{1 \leqq i \leqq n-d}$ (une forme linéaire étant écrite en ligne dans la base $f_1, \ldots, f_n$). Ecrivons alors $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} P_j$. Soit J une partie à d_2 éléments de $[1, r]$. Développant par linéarité le produit extérieur $\bigwedge_{j \in J} x_j \bigwedge_{j \in J_1} N_j \bigwedge_{j=1}^{n-d} L_j$ et utilisant le fait que pour toute famille J_2 à d_2 éléments de $[1, r]$, $\bigwedge_{j \in J_2} P_j \bigwedge_{j \in J_1} N_j \bigwedge_{j=1}^{n-d} L_j$ est nul, on en déduit que la famille formée des $n-r$ dernières colonnes de A et des j-ièmes colonnes pour $j \in [1, r] - J$ est liée, et ce, pour toute famille J à d_2 éléments de $[1, r]$. De plus, utilisant le fait que N_i est la seule forme faisant intervenir x_i parmi les N_j et le choix que l'on a fait des $h_{r-d_2+1} \leqq h_{n-d}$, on en déduit que la famille $(N_i,\ i \in J_1;\ L_i,\ r - d_2 + 1 \leqq i \leqq n-d)$ est libre sur $V \in \{x \in \mathbb{C}^n,\ x_i = 0 \text{ si } i \leqq r\}$ et donc que $n-r$ dernières colonnes de A sont libres. Utilisant alors le théorème de la base incomplète, on en déduit que le rang de A est strictement inférieur à $n-d_2$ et donc que la famille (N_i, $i\in J_1$; L_i, $1\leqq i\leqq(n-d)$) est liée. Utilisant le fait que les formes linéaires $(N_i)_{i\in J_1}$ et $(L_i)_{1\leqq i\leqq r-d_2}$ sont nulles sur V_{J_1} et que $L_{r-d_2+1}, \ldots, L_{n-d}$ forment une famille libre sur V_{J_1}, on en déduit que la famille (N_i, $i\in J_1$; L_i, $1\leqq i\leqq r-d_2$) est liée et donc a fortiori la famille (N_i, $i\in[r+1, n]$; L_i, $i\in[1, r]$). Revenant alors dans la base canonique, et utilisant le fait que l'espace vectoriel engendré par les $(N_i)_{i\in[r+1,n]}$ est le même que celui engendré par $\omega_{r+1}, \ldots, \omega_n$, on en déduit le fait que la famille ($\mathrm{Tr}\, h_i\omega$, $1\leqq i\leqq r$; ω_i, $r+1\leqq i\leqq n$) est liée et donc que $h_1, \ldots, h_r$, $e_{r+1}, \ldots, e_n$ forment une famille liée, ce qui implique d'après le Lemme 6 que $h_1, \ldots, h_r$ forment une famille liée contrairement à l'hypothèse.

Il reste maintenant le cas particulier à examiner (à savoir $n=3$, $r=2$, $d_2=1$). On peut supposer $J_2=\{1\}$. Si $d_1=0$, W est de dimension 1 et P_1 est liée donc nulle sur W donc $W\subset\ker P_1$ contrairement au fait que $W\cap\ker P_1=\{0\}$. Si $d_1=1$, W est de dimension 2 défini par une équation $\mathrm{Tr}\, h\omega=0$, $h\neq 0$. Or on a $N_3(\omega)=\dfrac{\omega_3}{f_{3,3}}$ et $P_1(\omega)=\dfrac{f_{3,1}\,\omega_3-f_{3,3}\,\omega_1}{f_{3,3}}$ et donc la nullité du déterminant de N_3, P_1, $\mathrm{Tr}\, h\omega$ qui est égal à

$$\begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{f_{3,3}}{f_{3,3}} & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ \dfrac{1}{f_{3,3}} & \dfrac{f_{3,1}}{f_{3,3}} & h_3 \end{vmatrix}$$

entraîne la nullité de h_2 donc de h, ce qui est contraire à l'hypothèse et donc termine la démonstration.

Utilisant les formules explicites pour $F(k, \underline{t}, 0, u, \Lambda)$ données au Théorème 4bis, on peut obtenir des formules explicites pour $\Lambda(\Phi_k, t, \mathfrak{g})$. Soit V l'opérateur $\prod_{i=1}^{n}\left(-\dfrac{\partial}{\partial u_i}\right)$. Pour tout $\sigma\in S_{n-1}$, on a (cela découle de la démonstration du Théorème 1; plus précisément du Lemme 3 de cette démonstration)

$$V^{t-1}=\sum_{\underline{t}\in I_t}\alpha_{\underline{t}}(\mathscr{B}_\sigma)\prod_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial}{\partial(\mathrm{Tr}\, f_{i,\sigma}u)}\right)^{t_i-1}.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} E_{\mathfrak{g}}(u, z) &= \sum_{\sigma\in S_{n-1}}\varepsilon(\sigma)\det\mathscr{B}_\sigma\sum_{\omega\in\mathfrak{g}^{-1}} m\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{Tr}\, f_{i,\sigma}(\omega+u+1)}\, e^{2i\pi\langle\omega+u+1\,|\,z\rangle} \\ &= \sum_{\sigma\in S_{n-1}}\varepsilon(\sigma)\det\mathscr{B}_\sigma\sum_{y\in Y_\sigma}\mathscr{F}(T_{y+u,\underline{1},\Lambda_\sigma})(z), \qquad \text{où } \underline{1}=(1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Soit $\Box_k$ l'opérateur défini au II, § 6, et $\Delta_t(\varphi)=V^{t-1}(\varphi)_{|u=0}$. On obtient alors:

Théorème 6. $\Lambda(\Phi_k, t, \mathfrak{g}) = \square_{k-t} \Delta_t E_{\mathfrak{g}}(u, z)$ *dans les cas suivants:*

$n=2$ *et* $1 \leqq t \leqq k$

$n \geqq 3$, $t=k$ *et l'image de* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ *sur les plongements de* F *dans* $\mathbb{C}$ *contient* A_n.

Conjecture. *Cette formule est vraie sans restriction, à savoir si* $1 \leqq t \leqq k$, n *et* F *quelconques.*

Remarques. On doit pouvoir supprimer la condition sur les plongements de F dans $\mathbb{C}$ en utilisant une version forte du Lemme 3.

La formule du Théorème 6 est très utile pour obtenir des résultats d'intégralité concernant les $\Lambda(\Phi_k, t)$, en particulier elle permet leur interpolation p-adique.

Remerciements. Ce travail a fait l'objet d'une thèse soutenue à l'institut Fourier à Grenoble et la version finale a été rédigée à l'institut Max-Planck à Bonn. Je voudrais remercier ces deux institutions pour leur accueil et je voudrais remercier tout spécialement U. Weselmann pour m'avoir signalé plusieurs erreurs dans la version initiale.

Bibliographie

[C] Colmez, P.: Résidu en $s=1$ des fonctions zêta p-adiques. Invent. Math. **91**, 371–389 (1988)

[D] Deligne, P.: Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. Proc. Symp. Pure Math. **33**, 313-346 (1979)

[Da] Damerell, R.M.: L-functions of elliptic curves with complex multiplication, I. Acta Arith. **17**, 287–301 (1970); II. **19**, 311–317 (1971)

[G-S] Goldstein, C., Schappacher, N.: Série d'Eisenstein et fonctions L de courbes elliptiques à multiplication complexe. J. Reine Angew. Math. **327**, 184–218 (1981)

[H] Harder, G.: Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2. Invent. Math. **89**, 37–118 (1987)

[H-S] Harder, G., Schappacher, N.: Special values of Hecke L-functions and abelian integrals. (Lecture Notes in Math., Vol. 1111, pp. 17–49). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1985

[I] Ito, H.: A function on the upper half space which is analogous to the imaginary part of $\log \eta(\tau)$. J. Reine Angew. Math. **385**, 148–165 (1987)

[Sc] Schwarz, L.: Théorie des distributions. Paris: Hermann 1966

[Sch] Schmidt, W.M.: Linearformen mit algebraischen Koeffizienten, II. Math. Ann. **191**, 1–20 (1971)

[Scz] Sczech, R.: Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen. Invent. Math. **76**, 523–551 (1984)

[Sh] Shintani, T.: An evaluation of zeta functions of totally real algebraic fields at non positive integers. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA **23**, 393–417 (1976)

[W] Weil, A.: Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1976

[We] Weselmann, U.: Eisensteinkohomologie und Dedekindsummen für GL_2 über imaginär-quadratischen Zahlkörpern. J. Reine Angew. Math. **389**, 90–121 (1988)

[We2] Weselmann, U.: Invent. Math. **95**, 207–214 (1989)

Oblatum 22-VI-1988