EXERCICES ADÉLIQUES

par

Pierre Colmez

Résumé. — On étudie la cohomologie du groupe des points rationnels d'un groupe algébrique linéaire sur des espaces fonctionnels adéliques, et on explore le lien avec la cohomologie complétée d'Emerton.

Abstract. — We study the cohomology of the group of rational points of a linear algebraic group on adelic functional spaces, and we explore the relation with Emerton's completed cohomology.

Table des matières

Introduction

Dans l'avatar p-adique du programme de Langlands, un objet fondamental est la cohomologie complétée d'Emerton [**5, 1**] : si $\mathbb{G}$ est un groupe réductif défini sur $\mathbf{Q}$, et si $K_{\mathbf{A}}$ est un sous-groupe ouvert compact maximal [1] de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, on dispose de la tour des espaces localement symétriques $Y(K) := \mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{Q})/K$, pour K sous-groupe ouvert de $K_{\mathbf{A}}$, et on pose

$$(\widehat{H}^i)^{(p)} := \varinjlim_{K^{]p[}} \widehat{H}^i(K^{]p[}), \quad \widehat{H}^i(K^{]p[}) := \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \big(\varprojlim_k \big(\varinjlim_{K_p} H^i(Y(K^{]p[}K_p), \mathbf{Z}/p^k)\big)\big)$$

où K_p (resp. $K^{]p[}$) décrit les sous-groupes ouverts de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ (resp. $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]p[})$) tels que $K^{]p[}K_p \subset K_{\mathbf{A}}$. On définit de même la cohomologie complétée à support compact, et les homologie complétée et homologie complétée à support compact. Tous ces groupes sont naturellement munis d'une action continue de $K_{\mathbf{A}}$ qui s'étend naturellement en une action continue de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et l'un des buts du programme de Langlands p-adique est de décrire les représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ apparaissant dans ces groupes.

On peut utiliser le lemme de Shapiro pour transformer la cohomologie de $Y(K)$ en celle de $Y(K_{\mathbf{A}})$ à valeurs dans un système de coefficents (fonctions sur $K_{\mathbf{A}}/K$), et passer à la limite pour écrire $\widehat{H}^i(K^{]p[})$ comme la cohomologie de $Y(K_{\mathbf{A}})$ à valeurs dans un gros système de coefficients (espace $\mathscr{C}^{(p)}(K_{\mathbf{A}})$ des fonctions continues sur $K_{\mathbf{A}}$, lisses en dehors de p) ; c'est le point de vue de Hill [**8**].

D'un autre côté, dans le programme de Langlands classique, le point de départ est plutôt les formes automorphes, i.e. les invariants sous $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ dans des espaces fonctionnels sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$: on fait agir $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ sur les fonctions sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ par

$$(\gamma * \phi)(x) = \phi(\gamma^{-1}x), \text{ si } \gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q}), \quad (g \star \phi)(x) = \phi(xg), \text{ si } g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}).$$

Ces deux actions commutent. Il s'ensuit que, si X est un espace de fonctions sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ qui est stable par ces deux actions, les groupes de cohomologie $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X)$ sont munis d'une action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$.

Dans le cas classique, on prend en général $i = 0$, on fixe un caractère central, et on prend pour X l'espace des fonctions de carré intégrable modulo le centre ou bien son sous-espace des formes automorphes (fonctions $K_{\mathbf{A}}$-finies, $\mathscr{C}^\infty$ comme fonctions de x_∞, se transformant par un caractère sous l'action du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie, et à décroissance rapide à l'infini).

Si on essaye d'interpréter la cohomologie complétée d'Emerton de cette manière, on peut transformer la cohomologie de $Y(K_{\mathbf{A}})$ en celle de son groupe fondamental [2], à savoir le groupe arithmétique $\Gamma := \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \cap K_{\mathbf{A}}^{]\infty[}$ (comme $Y(K_{\mathbf{A}})$ peut avoir plusieurs composantes connexes, il y a en fait plusieurs groupes arithmétiques qui interviennent), et on peut utiliser le lemme de Shapiro pour passer de Γ à $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, ce

1. On note $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$, et $\mathbf{A}^{]S[}$ l'anneau des adèles hors de S, si S est un ensemble fini de places de $\mathbf{Q}$.
2. C'est le point de vue adopté dans [**3, 4**] (pour $\mathbb{G} = \mathbf{GL}_2$).

qui transforme $\mathscr{C}^{(p)}(K_{\mathbf{A}})$ en un espace proche de $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ et suggère qu'un espace naturel à regarder est $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$. Mais l'espace $\mathscr{C}^{(p)}$ n'est pas le seul espace naturel que l'on peut considérer ; parmi les espaces possibles, mentionnons les espaces $\mathscr{C}\supset\mathscr{C}^{(p)}\supset\mathrm{LA}\supset\mathrm{LP}$, où ayant fixé une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$, on pose :

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) &:= \{\phi:\mathbb{G}(\mathbf{A})\to L,\ \phi \text{ continue}\}\\ \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) &:= \{\phi\in\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})),\ \phi \text{ localement lisse pour l'action de } \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})\}\\ \mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) &:= \{\phi\in\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})),\ \phi \text{ localement analytique en } x_p\}\\ \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) &:= \{\phi\in\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})),\ \phi \text{ localement algébrique en } x_p\}\end{aligned}$$

Notons que, L étant totalement discontinue, une fonction continue $\phi:\mathbb{G}(\mathbf{A})\to L$ est constante modulo la composante connexe $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ de l'identité de $\mathbb{G}(\mathbf{R})$. Si on impose à ϕ d'être aussi invariante par translation à gauche par $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, cela force ϕ à se factoriser par le quotient à gauche par l'adhérence de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$, et comme ce quotient est très petit, le groupe $H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ n'est pas très intéressant. On est donc forcé de regarder les

$$H^i(\mathbb{G},X):=H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$$

pour $i\geq 1$, dans le cadre du programme de Langlands p-adique.

Dans cet article, nous explorons les liens entre ces différents espaces et leurs versions à support compact, purement du point de vue des représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ (i.e. on ne s'intéresse qu'au versant automorphe du programme de Langlands p-adique). Nous n'abordons pas l'aspect le plus intéressant, à savoir le lien avec les représentations du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}$ de $\mathbf{Q}$. Les résultats d'Emerton [**7**] (cf. aussi [**4**]) pour $\mathbb{G}=\mathbf{GL}_2$ suggèrent que le centre de $\mathrm{End}_{\mathbb{G}(\mathbf{A})}H^i(\mathbb{G},\mathscr{C})$ paramètre des pseudocaractères de $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}$, mais il est probablement prématuré de formuler une conjecture précise (nous renvoyons à [**1**, § 1.8] pour des réflexions sur ce thème).

Le gros de l'article est consacré au cas où $\mathbb{G}=\mathbf{GL}_2$; beaucoup des résultats sont des reformulations en langage adélique de résultats d'Emerton (d'où le titre de l'article). Supposons donc $\mathbb{G}=\mathbf{GL}_2$ dans le reste de cette introduction (sauf mention explicite du contraire).

Théorème 0.1. — (i) *Si* $X=\mathscr{C},\mathscr{C}^{(p)},\mathrm{LA},\mathrm{LP},\mathrm{LC}$, *alors* $H^i(\mathbb{G},X)=0$ *si* $i\geq 2$, *et* $H^0(\mathbb{G},X)\cong X(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$, *l'action de* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ *sur* $\widehat{\mathbf{Z}}^*\cong\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$ *se faisant à travers* $\det:\mathbb{G}(\mathbf{A})\to\mathbf{A}^*$.

(ii) $H^1(\mathbb{G},\mathscr{C}^{(p)})$ *est la limite inductive des* $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[}))$ *qui sont des représentations admissibles de* $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$.

(iii) $H^1(\mathbb{G},\mathscr{C}^{(p)})$ *est l'ensemble des vecteurs* $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$*-lisses de* $H^1(\mathbb{G},\mathscr{C})$.

(iv) $H^1(\mathbb{G},\mathrm{LA})$ *est l'ensemble des vecteurs localement analytiques de* $H^1(\mathbb{G},\mathscr{C}^{(p)})$.

(v) $H^1(\mathbb{G},\mathrm{LP})$ *est l'ensemble des vecteurs localement algébriques de* $H^1(\mathbb{G},\mathscr{C}^{(p)})$.

Remarque 0.2. — Si $\mathbb{G}$ est général :

(i) Calegari et Emerton [**1**, conj. 1.5] conjecturent que[3] $H^i(\mathbb{G}, \mathscr{C}^{(p)}) = 0$ si $i > q_0$ et est petit si $i < q_0$.

(ii) Le (ii) reste valable pour tout H^i ; il est possible que le (iii) reste valable mais dans le cas où $\mathbb{G} = \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}\mathbf{GL}_1$ c'est équivalent à la conjecture de Leopoldt pour F (nous prouvons que $H^i(\mathbb{G}, \mathscr{C}) = 0$ si $i \geq 1$, et Hill [**8**] a prouvé que $H^i(\mathbb{G}, \mathscr{C}^{(p)}) = 0$ pour tout $i \geq 1$ si et seulement si la conjecture de Leopoldt est vraie pour F). Le (iv) reste vrai pour tout i, et ce que l'on peut espérer concernant le (v) n'est pas complètement clair.

En ce qui concerne la cohomologie à support compact, nous prouvons les résultats suivants (toujours pour $\mathbb{G} = \mathbf{GL}_2$).

Théorème 0.3. — (i) *On a* $H^i_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}) = 0$ *si* $i \neq 1$, *et une suite exacte de* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-*modules*

$$0 \to \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) \to H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}) \to H^1(\mathbb{G}, \mathscr{C}) \to 0$$

où $\widehat{\mathbf{Z}}^* = \mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$ *sur lequel* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ *agit à travers le déterminant, et* $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ *à travers* $\mathbb{L}(\mathbf{A})$ *sur* $\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})$.

(ii) $H^i_c(\mathbb{G}, \mathrm{LP}) = 0$ *si* $i \neq 1$; $H^1_c(\mathbb{G}, \mathrm{LP})$ *est l'ensemble des vecteurs localement algébriques de* $H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C})$ *et on a une suite exacte de* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-*modules*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 \arrow[r] & \mathrm{LP}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) \arrow[rr] & & H^1_c(\mathbb{G}, \mathrm{LP}) \arrow[dll] & & \\
& & & H^1(\mathbb{G}, \mathrm{LP}) \arrow[r] & \big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big)^\vee \arrow[r] & \mathrm{LP}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathbb{B}$ *est le borel supérieur de* $\mathbb{G}$, $\mathbb{L}$ *est son lévi, et* $(-)^\vee$ *désigne la contragrédiente.*

1. Préliminaires

Le but de ce chapitre est de fixer un certain nombre de notations et de normalisations.

1.1. Adèles

1.1.1. Notations. — On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Si $v \in \mathscr{P} \cup \{\infty\}$ est une place de $\mathbf{Q}$, on note $\mathbf{Q}_v$ le complété de $\mathbf{Q}$ en v (et donc $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$). On note $\mathbf{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$, produit restreint des $\mathbf{Q}_v$: si $\widehat{\mathbf{Z}} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \mathbf{Z}_p$ est le complété profini de $\mathbf{Z}$, on a $\mathbf{A} = \mathbf{R} \times (\mathbf{Q} \otimes \widehat{\mathbf{Z}})$.

Si $S \subset \mathscr{P} \cup \{\infty\}$ est fini, on pose

$$\mathbf{Z}_S = \prod_{\ell \in S \cap \mathscr{P}} \mathbf{Z}_\ell, \quad \mathbf{Z}[\tfrac{1}{S}] = \mathbf{Z}[\tfrac{1}{\ell}, \, \ell \in S \cap \mathscr{P}], \quad \mathbf{Q}_S = \prod_{v \in S} \mathbf{Q}_v$$

3. Les notations q_0 et ℓ_0 sont standard : ℓ_0 mesure le défaut d'existence de séries discrètes pour $\mathbb{G}(\mathbf{R})$ et $q_0 = (d - \ell_0)/2$ où d est la dimension des $Y(K)$.

On note $\mathbf{A}^{]S[}$ le produit restreint des $\mathbf{Q}_v$ pour $v \notin S$ et $\widehat{\mathbf{Z}}^{]S[}$ son intersection avec $\widehat{\mathbf{Z}}$. Par exemple, $\mathbf{A}^{]\infty[} = \mathbf{Q} \otimes \widehat{\mathbf{Z}}$. On a $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_S \times \mathbf{A}^{]S[}$ et $\widehat{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_S \times \widehat{\mathbf{Z}}^{]S[}$ pour tout S.

Si x est un objet adélique (i.e., un élément de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*$, $\mathbf{GL}_n(\mathbf{A})$, etc.), et si v est une place de $\mathbf{Q}$, on note x_v la composante de x en v (et donc $x = (x_v)_v$). Si S est un ensemble fini de places de $\mathbf{Q}$, on note $x_S = (x_v)_{v\in S}$ la composante de x en les éléments de S et $x^{]S[} = (x_v)_{v\notin S}$ la composante de x hors de S (et donc $x = (x_S, x^{]S[})$.

Si $\mathbb{G}$ est un groupe algébrique sur $\mathbf{Q}$, les projections $\mathbb{G}(\mathbf{A}) \to \mathbb{G}(\mathbf{Q}_v)$ ont des sections naturelles qui permettent de considérer les $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_v)$ comme des sous-groupes de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$.

De même, si S est un ensemble fini de places de $\mathbf{Q}$, alors $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S) = \prod_{v\in S}\mathbb{G}(\mathbf{Q}_v)$ est naturellement un sous-groupe de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x_S x^{]S[}$ avec $x_S \in \mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ et $x^{]S[} \in \mathbb{G}(\mathbf{A}^{]S[})$; de plus x_S et $x^{]S[}$ commutent.

1.1.2. Le caractère $|\ |_{\mathbf{A}}$ *et ses avatars*

• *Le caractère norme* $|\ |_{\mathbf{A}}$. Si v est une place de $\mathbf{Q}$, on note $|\ |_v$ la norme sur $\mathbf{Q}_v$ (si v est la place correspondant à un nombre premier ℓ, on a $|\ell|_v = \ell^{-1}$). On définit $|\ |_{\mathbf{A}}$ par la formule

$$|x|_{\mathbf{A}} = \prod_v |x_v|_v.$$

• *Le caractère* $\delta_{\mathbf{A}}$. On note $\delta_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^* \to \mathbf{C}^*$ le caractère

$$x \mapsto \delta_{\mathbf{A}}(x) = x_\infty^{-1}|x|_{\mathbf{A}},$$

et donc $\delta_{\mathbf{A}}$ est localement constant, à valeurs dans $\mathbf{Q}^*$. De plus,

$$\delta_{\mathbf{A},\infty} = \mathrm{sign}, \quad \delta_{\mathbf{A},\ell} = |\ |_\ell, \quad \delta_{\mathbf{A}} = |\ |_{\mathbf{A}} \text{ sur } (\mathbf{A}^{]\infty[})^*.$$

• *Le caractère* $|\ |_{\mathbf{A},p}$. On définit $|\ |_{\mathbf{A},p}$ par $|\ |_{\mathbf{A},p}(x) := x_p\delta_{\mathbf{A}}(x)$. La formule du produit implique que $|\ |_{\mathbf{A},p}$ se factorise à travers $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$. Notons que l'inclusion $\widehat{\mathbf{Z}}^* \hookrightarrow \mathbf{A}^*$ induit un isomorphisme $\widehat{\mathbf{Z}}^* \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$.

1.2. Espaces fonctionnels adéliques

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique réductif défini sur $\mathbf{Q}$. Alors $\mathbb{G}$ a un modèle lisse sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]$, pour S assez grand. On choisit pour tout $p \in \mathscr{P}$ un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ égal à $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$ si $p \notin S$, et on note encore $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$ ce sous-groupe si $p \notin S$. On pose $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) = \prod_p \mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$, et donc $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ est un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbf{A}^{]\infty[})$.

1.2.1. Fonctions continues. — Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et soit $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers. Si $\Lambda = L, \mathscr{O}_L$, on note $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \Lambda)$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ à valeurs dans Λ. On munit $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \Lambda)$ des actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ de l'introduction :

$$(\gamma * \phi)(x) = \phi(\gamma^{-1}x), \text{ si } \gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q}), \quad (g \star \phi)(x) = \phi(xg), \text{ si } g \in \mathbb{G}(\mathbf{A}).$$

Ces actions commutent.

On note $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ le sous-espace de $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ des ϕ qui sont localement $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$-lisses.

Dans la suite, on note simplement $X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ l'espace $X(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)$, si X est une classe de fonctions.

Remarque 1.1. — (i) Si $\phi\in\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$, alors ϕ est constante sur les classes (à gauche ou à droite) modulo $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ car $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ est connexe alors que L est totalement discontinu. Par contre, si $\ell\neq p$, une fonction continue de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ dans L n'est pas forcément localement constante bien que les topologies de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_\ell)$ et L ne soient pas très compatibles, et $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ est un (très) petit sous-espace de $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$.

(ii) On peut aussi considérer $\mathscr{C}_b(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$, espace des fonctions continues bornées, ou l'espace $\mathscr{C}_u^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ des fonctions $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$-lisses, (i.e. telles qu'il existe un sous-groupe ouvert K_ϕ de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$ tel que l'on ait $\phi(x\kappa)=\phi(x)$ pour tous $x\in\mathbb{G}(\mathbf{A})$ et $\kappa\in K_\phi$) ; c'est la limite inductive des $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K)$, où K décrit les sous-groupes ouverts de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$.

1.2.2. Fonctions algébriques. — On suppose que L est assez grand pour que les représentations algébriques irréductibles de $\mathbb{G}$ soient définies sur L. On note $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ l'ensemble des L-représentations algébriques de $\mathbb{G}$ (à isomorphisme près). On voit $W\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ comme une représentation de $\mathbb{G}(L)$

On note $\mathrm{Alg}(\mathbb{G})$ l'espace des fonctions algébriques sur $\mathbb{G}(L)$, à valeurs dans L (i.e. $L\otimes\mathscr{O}(\mathbb{G})$, où $\mathscr{O}(\mathbb{G})$ désigne l'anneau des fonctions régulières sur la $\mathbf{Q}$-variété algébrique $\mathbb{G}$). On fait agir $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\times\mathbb{G}(L)$ sur $\mathrm{Alg}(\mathbb{G})$ par

$$(h_1,h_2)\cdot\phi(g)=\phi(h_1^{-1}gh_2).$$

Si W est une représentation algébrique de $\mathbb{G}$, on note W^* la représentation duale. Si $v\in W$ et $\check v\in W^*$, la fonction

$$g\mapsto\phi_{\check v,v}(g)=\langle g\cdot\check v,v\rangle$$

est un élément de $\mathrm{Alg}(\mathbb{G})$, et l'application $\check v\otimes v\mapsto\phi_{\check v,v}$, de $W^*\otimes W$ dans $\mathrm{Alg}(\mathbb{G})$, est $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\times\mathbb{G}(L)$-équivariante car $\langle h_1^{-1}gh_2\cdot\check v,v\rangle=\langle gh_2\cdot\check v,h_1\cdot v\rangle$ (et donc $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ agit trivialement sur W^*, tandis que $\mathbb{G}(L)$ agit trivialement sur W). Ceci fournit un isomorphisme $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\times\mathbb{G}(L)$-équivariant

$$\bigoplus\nolimits_{W\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}W^*\otimes W\cong\mathrm{Alg}(\mathbb{G}). \tag{1.2}$$

1.2.3. Fonctions localement algébriques. — Si $\Lambda=L,\mathscr{O}_L$, soit $\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\Lambda)$ l'espace des $\phi:\mathbb{G}(\mathbf{A})\to\Lambda$, localement constantes. Cet espace est stable par les actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ du n° 1.2. Soit

$$\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A})):=\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)\otimes_L\mathrm{Alg}(\mathbb{G})\cong\bigoplus\nolimits_{W\in\mathrm{Irr}}\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\otimes W^*\otimes W$$

Cet espace est muni d'actions de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ (actions diagonales des actions définies aux n$^{\text{os}}$ 1.2.1 et 1.2.2 ; dans la décomposition faisant intervenir les W, $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ agit diagonalement sur LC et W et trivialement sur W^*, et $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ agit diagonalement sur LC et W^* (sur lequel il agit à travers son quotient $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$) et trivialement sur W.

De plus, l'application $\phi \otimes P \mapsto \phi P$ induit une injection $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(\mathbf{A})$-équivariante

$$\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \hookrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$$

1.2.4. Fonctions localement analytiques. — On note $\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ le sous-espace de $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ des ϕ localement analytiques en x_p

Si θ est un caractère du centre $Z(U(\mathfrak{g}))$ de l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, on peut considérer l'espace $\mathrm{LA}^\theta(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$, sous-espace de $\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ sur lesquel $Z(U(\mathfrak{g}))$ agit par le caractère infinitésimal θ.

Si $W \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$, et si θ_W est le caractère à travers lequel $Z(U(\mathfrak{g}))$ agit sur W^*, alors

$$\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W \otimes W^* \subset \mathrm{LA}^{\theta_W}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$$

1.2.5. Autres espaces. — On peut varier les conditions de régularité en p à loisir, par exemple regarder les fonctions de classe $\mathscr{C}^r_u$, pour $r \in \mathbf{R}_+ \sqcup \{\infty\}$.

On peut aussi considérer les fonctions à support compact ou tendant vers 0 à l'infini, ainsi que les duaux de tous les espaces précédents, comme par exemple *l'espace* $\mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \Lambda)$ *des mesures* à valeurs dans Λ, qui est le Λ-dual de $\mathscr{C}_c(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \Lambda)$ (fonctions continues à support compact).

1.2.6. Cohomologie. — On va étudier les $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ pour X une classe de fonctions. Cela amène naturellement à regarder aussi des espaces du type $H^i(\mathbb{H}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ où $\mathbb{H}$ est un sous-groupe algébrique de $\mathbb{G}$, ou encore des $H^i(\mathbb{H}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K))$ où K est un sous-groupe de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$. Dans le cas de $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$, on se permet parfois d'abréger la notation en

$$H^i(\mathbb{G}, X) := H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$$

comme dans l'introduction.

2. Le borel de $\mathbf{GL}_2$

Le but de ce chapitre est de prouver la prop. 2.19 et le th. 2.22 qui nous servirons à comparer les cohomologie et cohomologie à support compact dans le cas de $\mathbf{GL}_2$.

2.1. Le groupe $\mathbf{G}_a$

Lemme 2.1. — *Si* $\mathbb{G} = \mathbf{G}_a$ *et si* X *est un des espaces* $\mathscr{C}, \mathscr{C}^{(p)}, \mathrm{LC}, \mathrm{LP}, \mathrm{LA}$*, on a*

$$X(\mathbb{G}(\mathbf{A})) = X(\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{G}(\mathbf{Z})}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$$

Démonstration. — L'égalité $X(\mathbb{G}(\mathbf{A})) = X(\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}))$ découle de ce que $\mathbb{G}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ est connexe ; le reste de l'énoncé résulte de ce que $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) = \mathbb{G}(\mathbf{Q})\cdot\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et l'écriture est unique à $(\gamma,\kappa)\mapsto(\gamma\alpha,\alpha^{-1}\kappa)$, avec $\kappa\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})\cap\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) = \mathbb{G}(\mathbf{Z})$ $(=\mathbf{Z})$. □

Proposition 2.2. — *Si $\mathbb{G} = \mathbf{G}_a$, on a les résultats suivants :*

$$H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \cong \begin{cases} L & si\ i=0,\\ 0 & si\ i\geq 1\end{cases}$$

$$H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \cong \begin{cases} L & si\ i=0,1,\\ 0 & si\ i\geq 2\end{cases}$$

Démonstration. — Comme $X(\mathbf{A}) = X(\mathbf{A}^{]\infty[})$, si $X = \mathscr{C},\mathrm{LC}$, le lemme de Shapiro implique que $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),X(\mathbb{G}(\mathbf{A})))\cong H^i(\mathbf{Z},X(\widehat{\mathbf{Z}}))$. La nullité des H^i, pour $i\geq 2$, est immédiate et le résultat pour les H^0 est une conséquence de ce que $\mathbf{Z}$ est dense dans $\widehat{\mathbf{Z}}$ et donc qu'une fonction invariante par $\mathbf{Z}$ est constante. Il reste à calculer les H^1.

• Pour $X=\mathscr{C}$, on a $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}},\mathscr{O}_L/p^n) = \mathscr{C}(\mathbf{Z},\mathscr{O}_L/p^n)$, d'où $H^1(\mathbf{Z},\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}},\mathscr{O}_L/p^n)) = 0$ par le lemme de Shapiro. Le résultat s'en déduit en passant à la limite et en inversant p.

• Pour $X=\mathrm{LC}$, H^1 est le conoyau de $\phi\mapsto\delta\phi$, avec $\delta\phi(x) = \phi(x)-\phi(x-1)$. Si $i\in\mathbf{Z}/N$, soit $e_{N,i} = \mathbf{1}_{i+N\widehat{\mathbf{Z}}}$. Les $e_{N,i}$ forment une base de $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}/N)$ sur L, et on a $\delta e_{N,i} = e_{N,i}-e_{N,i+1}$; il s'ensuit que les $\delta e_{N,i}$ forment une base de $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}/N)_0$ (noyau de la mesure de Haar sur $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}/N)$). Comme $\mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}})$ est la limite inductive des $\mathrm{LC}(\mathbf{Z}/N)$, on obtient une suite exacte

$$0\to\mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}})_0\to\mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}})\to H^1(\mathbf{Z},\mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}}))\to 0$$

Le résultat s'en déduit. □

Remarque 2.3. — $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ admet comme base naturelle l'image du 1-cocycle $r\mapsto r\,\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$, où $\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$ est la fonction constante $x\mapsto 1$.

Remarque 2.4. — La mesure de Haar induit une suite exacte

$$0\to\mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}},\mathscr{O}_L)_0\to\mathrm{LC}(\widehat{\mathbf{Z}},\mathscr{O}_L)\to L\to 0$$

qui montre qu'un quotient de deux $\mathscr{O}_L$-modules sans sous-L-droite peut parfaitement être un L-module non nul. On en déduit que

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathscr{O}_L))\cong L$$

Par contre, si M_1,M_2 sont séparés et complets pour la topologie p-adique, le quotient ne contient pas de sous-L-module non nul (si M_1/M_2 contient une suite d'éléments v_n vérifiant $v_n = pv_{n+1}$, et si $\hat v_n$ est un relèvement de v_n dans M_1, alors $x_n := \hat v_n - p\hat v_{n+1}\in M_2$ et donc $x_0+px_1+p^2x_2+\cdots$ converge dans M_2 et donc aussi dans M_1 vers la même limite (car M_1 est séparé), et comme cette limite est $\hat v_0$, cela implique $v_0=0$).

2.2. Le groupe $\mathbf{G}_m$

On suppose maintenant que $\mathbb{G} = \mathbf{G}_m$. Si Λ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}$, on note $\mathbb{G}(\Lambda)_+$ l'ensemble des $x \in \mathbb{G}(\Lambda)$ tels que $x_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ (en particulier, $\mathbb{G}(\mathbf{Z})_+ = \{1\}$).

Lemme 2.5. — *Si $\mathbb{G} = \mathbf{G}_m$ et si X est un des espaces $\mathscr{C}, \mathscr{C}^{(p)}, \mathrm{LC}, \mathrm{LP}, \mathrm{LA}$, on a*

$$X(\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})) \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{G}(\mathbf{Z})}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) \quad \text{et} \quad X(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{G}(\mathbf{Z})_+}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$$

Démonstration. — Pour $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$, cela résulte de ce que $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) = \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et l'écriture est unique à $(\gamma, \kappa) \mapsto (\gamma\alpha, \alpha^{-1}\kappa)$ près, avec $\alpha \in \mathbb{G}(\mathbf{Z})$. Pour $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, cela résulte de ce que $X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) = X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \times \mathbb{G}(\mathbf{R})_+)$ et de ce que $\mathbb{G}(\mathbf{A}) = \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \cdot (\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \times \mathbb{G}(\mathbf{R})_+)$, et l'écriture est unique à $(\gamma, \kappa, g_\infty) \mapsto (\gamma\alpha, \alpha^{-1}\kappa, \alpha^{-1}g_\infty)$ près, avec $\alpha \in \mathbb{G}(\mathbf{Z})_+$ (et donc est unique). $\square$

Proposition 2.6. — *Si $\mathbb{G} = \mathbf{G}_m$, et si $X = \mathscr{C}, \mathrm{LC}$, alors*

$$H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \cong \begin{cases} X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geq 1. \end{cases}$$

l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^*$ sur les H^0 se faisant à travers $\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^* \cong \widehat{\mathbf{Z}}^* = \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$.

Démonstration. — Cela résulte du lemme de Shapiro : on a $\mathbb{G}(\mathbf{Z})_+ = \{1\}$. $\square$

Si $\eta : \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \to L^*$ est un caractère, notons

$$\eta_{\mathbf{A}} : \mathbb{G}(\mathbf{A}) \to L^*$$

le caractère défini par $\eta_{\mathbf{A}}(r\, a\, x_\infty) = \eta(r)$, si $r \in \mathbf{Q}^*$, $a \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$ et $x_\infty \in \mathbf{R}_+^*$. Par exemple, si $\eta(r) = r^{-1}$, alors $\eta_{\mathbf{A}}$ est le caractère $\delta_{\mathbf{A}}$ du n° 1.1.2.

Le résultat suivant est immédiat.

Lemme 2.7. — *L'application $\phi \otimes \eta_{\mathbf{A}} \mapsto \eta_{\mathbf{A}}\phi$ induit un isomorphisme $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-équivariant*

$$H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X) \otimes \eta_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X \otimes \eta)$$

2.3. L'unipotent et le lévi

Dans le reste de ce chapitre, $\mathbb{G} = \mathbf{GL}_2$. Soit $\mathbb{B} = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ le borel de $\mathbb{G}$. On a $\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{L}$, où $\mathbb{U} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est l'unipotent et $\mathbb{L} = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$ est le lévi de $\mathbb{B}$ (un tore déployé). On a

$$\mathbb{B}(\mathbf{A}^{]\infty[})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \cong \mathbb{B}(\widehat{\mathbf{Z}})\backslash\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \cong \mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}) \tag{2.8}$$

Lemme 2.9. — *La projection naturelle $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \to \mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}})$ admet un scindage continu* (et même localement analytique).

Démonstration. — La flèche naturelle $\mathbb{B}(\widehat{\mathbf{Z}})\backslash\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \to \mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}})$ envoie $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ sur $\frac{z}{t}$ et on utilise comme scindage le produit des scindages $\mathbf{P}^1(\mathbf{Z}_\ell) \to \mathbb{G}(\mathbf{Z}_\ell)$ envoyant $r \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Z}_\ell) = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_\ell)$ sur $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{smallmatrix}\right)$ si $r \in \mathbf{Z}_\ell$, et sur $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1/r \end{smallmatrix}\right)$ si $r \in \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_\ell) \smallsetminus \mathbf{Z}_\ell$. $\square$

Lemme 2.10. — *Soit* $I_\infty = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{G}(\mathbf{R})$.

(i) *On a une factorisation* $\mathbb{B}(\mathbf{A})$*-équivariante*

$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \cong \mathscr{C}(\mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}))\,\widehat{\otimes}\,\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))^{I_\infty=1}$$

où $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ *agit trivialement sur* $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}))$.

(ii) *On a une factorisation* $\mathbb{L}(\mathbf{A})$*-équivariante*

$$\mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A})) \cong \mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}))\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\mathbf{A}))^{I_\infty=1}$$

où $\mathbb{L}(\mathbf{A})$ *agit trivialement sur* $\mathrm{LC}(\mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}))$.

Démonstration. — Cela résulte des décompositions $\mathbb{G}(\mathbf{A}) = \mathbb{B}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times \mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}) \times \mathbb{G}(\mathbf{R})$ et $\mathbb{U}(\mathbf{A})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}) = \mathbb{B}(\mathbf{A}^{]\infty[}) \times \mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}) \times (\mathbb{U}(\mathbf{R})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{R}))$. La raison pour laquelle il faut prendre les points fixes par I_∞ est que 1 et I_∞ sont dans la même composante connexe de $\mathbb{G}(\mathbf{R})$ mais pas dans la même composante connexe de $\mathbb{B}(\mathbf{R})$ ou $\mathbb{L}(\mathbf{R})$. □

Lemme 2.11. — *Si* $k \in \mathbf{N}$ *et* $j \in \mathbf{Z}$, *on a des isomorphismes de* $\mathbb{L}(\mathbf{Q})$*-modules*

$$H^i(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j}) \cong \begin{cases} L(a^{k+j} \otimes d^j) & \text{si } i = 0, \\ L(a^{j-1} \otimes d^{k+j+1}) & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

Démonstration. — On a

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \cdot (e_1^i e_2^{k-i} (e_1 \wedge e_2)^j) = (ad)^j (ae_1)^i (be_1 + de_2)^{k-i} (e_1 \wedge e_2)^j$$

On en déduit une suite exacte de représentations de $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$

$$0 \to e_1 \otimes W_{k-1,j} \to W_{k,j} \to L(a^j \otimes d^{k-j}) \to 0$$

(le caractère $a^j \otimes d^{k-j}$ est celui par lequel $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$ agit sur e_2^k modulo $e_1 \otimes W_{k-1,j}$). On en déduit, par récurrence sur k que $H^0(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j}) = L$ (engendré par $\mathbf{1}_{\mathbb{U}(\mathbf{A})} e_1^k$) et que $H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j}) = L$ (engendré par la classe du cocycle $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{U}(\mathbf{A})} \frac{(be_1+de_2)^{k+1} - e_2^{k+1}}{(k+1)e_1}$, i.e. $b\mathbf{1}_{\mathbb{U}(\mathbf{A})} e_2^k$ modulo $e_1 \otimes W_{k-1,j}$; notons que le cocycle correspondant pour $W_{k-1,j}$ (multiplié par e_1) meurt dans $H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j})$ (c'est le bord de $\frac{1}{k} e_2^k$), ce qui fait que $H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j}) \to H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})))$ est un isomorphisme, et permet de faire fonctionner la récurrence).

L'action de $\mathbb{L}(\mathbf{A})$ sur $H^0(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j})$ est celle sur $e_1^k (e_1 \wedge e_2)^j$, i.e. $a^{j+k} \otimes d^j$, ce qui fournit le résultat pour H^0.

Pour H^1, il y a une torsion supplémentaire par rapport à l'action sur $e_2^k (e_1 \wedge e_2)^j$: en effet, $\gamma \in \mathbb{L}(\mathbf{Q})$ agit sur un 1-cocycle $u \mapsto \phi_u$ en l'envoyant sur le 1-cocycle $u \mapsto \gamma * \phi_{\gamma^{-1}u\gamma}$, et comme $\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & d^{-1} \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a^{-1}dr \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ est multipliée par $a^{-1}d$ par rapport à celle sur $e_2^k (e_1 \wedge e_2)^j$; on obtient donc le caractère $a^{j-1} \otimes d^{k+j+1}$. □

Lemme 2.12. — *Si $\eta : \mathbb{L}(\mathbf{Q}) \to L^*$ est un caractère, alors*

$$H^i(\mathbb{L}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes \eta) \cong \begin{cases} \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\big(H^0(\mathbb{L}, \mathrm{LC}) \otimes \eta_{\mathbf{A}}\big) & si\ i = 0, \\ 0 & si\ i \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. — La factorisation du (ii) du lemme 2.10 alliée au lemme 2.6 fournit le résultat pour $i \geq 1$.

Pour $i = 0$, le membre de gauche s'identifie à l'espace des $\phi : \mathbb{G}(\mathbf{A}) \times \mathbb{L}(\mathbf{A}) \to L$ vérifiant $\phi(x, y\ell) = \phi(x, y)$ si $\ell \in \mathbb{L}(\mathbf{A})$ (et donc $\phi(x, y) = \phi(x, 1)$ et la seconde variable ne joue pas vraiment de rôle), $\phi(u^{-1}x, y) = \phi(x, y)$ si $u \in \mathbb{U}(\mathbf{A})$, et $\eta(\lambda)\phi(\lambda^{-1}x, y) = \phi(x, y)$ si $\lambda \in \mathbb{L}(\mathbf{Q})$; l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ étant $(g \star \phi)(x, y) = \phi(xg, y)$.

Posons $\phi^*(z, t) = \phi(tz, t)$ (et donc $\phi(x, y) = \phi^*(y^{-1}x, y)$). Les conditions ci-dessus deviennent $\phi^*(\ell^{-1}z, t\ell) = \phi^*(z, t)$ si $\ell \in \mathbb{L}(\mathbf{A})$, $\phi^*(t^{-1}utz, t) = \phi^*(z, t)$ si $u \in \mathbb{U}(\mathbf{A})$ (comme $u \mapsto t^{-1}ut$ est un isomorphisme de $\mathbb{U}(\mathbf{A})$, cette condition équivaut à $\phi^*(u^{-1}z, t) = \phi^*(z, t)$ si $u \in \mathbb{U}(\mathbf{A})$), et $\eta(\lambda)\phi^*(\lambda^{-1}z, t) = \phi^*(z, t)$ si $\lambda \in \mathbb{L}(\mathbf{Q})$ (compte-tenu de la première condition, et de la commutativité de $\mathbb{L}$, cette condition équivaut à $\eta(\lambda)\phi^*(z, \lambda^{-1}t) = \phi^*(z, t)$ si $\lambda \in \mathbb{L}(\mathbf{Q})$) ; l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ restant $(g \star \phi^*)(z, t) = \phi^*(zg, y)$.

La dernière condition se traduit par $\phi^* \in \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes H^0(\mathbb{L}, \mathrm{LC} \otimes \eta)$, et on a $H^0(\mathbb{L}, \mathrm{LC} \otimes \eta) = \eta_{\mathbf{A}} H^0(\mathbb{L}, \mathrm{LC})$, cf. lemme 2.7. Les deux premières conditions se traduisent par l'invariance par $\mathbb{B}(\mathbf{A})$, pour l'action $(b * \phi^*)(z, t) = \phi(b^{-1}z, t\overline{b})$ où $b \mapsto \overline{b}$ est la projection naturelle $\mathbb{B} \to \mathbb{L}$. On reconnait la définition de l'induite, ce qui permet de conclure. □

2.4. Le borel

2.4.1. Cohomologie à valeurs dans des espaces fonctionnels sur $\mathbb{B}(\mathbf{A})$>

Proposition 2.13. — *On a :*

$$H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))) \cong \begin{cases} \mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) & si\ i = 0 \\ 0 & si\ i \geq 1. \end{cases}$$

$$H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))) \cong \begin{cases} \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) & si\ i = 0 \\ \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes (\delta_{\mathbf{A}} \otimes \delta_{\mathbf{A}}^{-1}) & si\ i = 1 \\ 0 & si\ i \geq 2. \end{cases}$$

l'action de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ se faisant à travers $\mathbb{L}(\mathbf{A})$ qui agit sur $\mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ et $\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ à travers $\mathbb{L}(\mathbf{A})/\mathbb{L}(\mathbf{R})_+\mathbb{L}(\mathbf{Q}) \cong \mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})$.

Démonstration. — On utilise la suite spectrale de Hochschild-Serre pour

$$1 \mapsto \mathbb{U}(\mathbf{Q}) \to \mathbb{B}(\mathbf{Q}) \to \mathbb{L}(\mathbf{Q}) \to 1$$

La décomposition $\mathbb{B}=\mathbb{U}\mathbb{L}$ fournit des factorisations

$$\mathrm{LC}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))\cong\mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A}))\otimes\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\mathbf{A}))$$
$$\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))\cong\mathscr{C}(\mathbb{U}(\mathbf{A}))\,\widehat{\otimes}\,\mathscr{C}(\mathbb{L}(\mathbf{A}))$$

Compte-tenu des prop. 2.2 et 2.6, les seuls $H^i(\mathbb{L}(\mathbf{Q}),H^j(\mathbb{U}(\mathbf{Q}),-))$ non nuls sont $i=j=0$ pour $\mathscr{C}$ et LC, et $i=0, j=1$ pour LC.

On en déduit le résultat pour les H^0 via la prop. 2.6, puisque les $H^0(\mathbb{U}(\mathbf{Q}),X(\mathbb{U}(\mathbf{A})))$ sont égaux à L, avec action triviale de $\mathbb{L}(\mathbf{Q})$ (prop. 2.2). Par contre, l'action de $\mathbb{L}(\mathbf{Q})$ sur $H^1(\mathbb{U}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A})))\cong L$ n'est pas triviale : γ agit sur un 1-cocycle $u\mapsto\phi_u$ en l'envoyant sur le 1-cocycle $u\mapsto\gamma*\phi_{\gamma^{-1}u\gamma}$, et comme $\left(\begin{smallmatrix}a^{-1}&0\\0&d^{-1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&r\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&a^{-1}dr\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, l'action de $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$ est la multiplication par $a^{-1}d$ puisque $\gamma*\mathbf{1}_{\mathbf{A}}=\mathbf{1}_{\mathbf{A}}$. Notons $a^{-1}\otimes d$ le caractère $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\mapsto a^{-1}d$. Il résulte de ce qui précède que

$$H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{B}(\mathbf{A})))\cong H^0(\mathbb{L}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\mathbf{A}))\otimes L(a^{-1}\otimes d))$$

et le résultat est une conséquence du lemme 2.7 et du fait que le caractère de $\mathbb{L}(\mathbf{A})$ associé à $a^{-1}\otimes d$ est $\delta_{\mathbf{A}}\otimes\delta_{\mathbf{A}}^{-1}$. □

Remarque 2.14. — La même preuve montre, en utilisant la rem. 2.4, que

$$H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathrm{LC}(\mathbb{B}(\mathbf{A}),\mathscr{O}_L))\cong\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}),L)\otimes(\delta_{\mathbf{A}}\otimes\delta_{\mathbf{A}}^{-1})$$

2.4.2. Induction de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{G}$

Lemme 2.15. — *Si $r\leq s$, $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(a^r\otimes d^s)=\mathrm{Sym}^{s-r}\otimes\det^r$.*

Démonstration. — On a $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x&y\\z&t\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}ax+bz&ay+bt\\dz&dt\end{smallmatrix}\right)$. Il s'ensuit que $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(a^r\otimes d^s)$ est l'espace des $\phi\in L[x,y,z,t,(xt-yz)^{-1}]$ vérifiant $P(ax+bz,ay+bt,dz,dt)=a^rd^sP(x,y,z,t)$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{B}$. On peut écrire $P=(xy-zt)^r\tilde P$ et on a $\tilde P(ax+bz,ay+bt,dz,dt)=d^{s-r}\tilde P(x,y,z,t)$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$. Utilisant cette identité pour $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ prouve que $\tilde P$ est constant en x et y, et pour $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)$, que $\tilde P$ est homogène de degré total $s-r$ en z et t. Le résultat s'en déduit. □

Lemme 2.16. — *Si V est une représentation lisse de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ et si $r\leq s\in\mathbf{Z}$, alors*[4]

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\big(V\otimes(a_p^r\otimes d_p^s)\big)=\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}V\big)\otimes\mathrm{Sym}_p^{s-r}\otimes\det\nolimits_p^r$$

où $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ agit sur Sym_p^{s-r} et $\det_p^r$ à travers $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, et Sym_p^{s-r} et $\det_p^r$ sont les représentations algébriques usuelles de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, et $a_p^r\otimes d_p^s$ est le caractère $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)\mapsto a_p^rd_p^s$ de $\mathbf{B}(\mathbf{A})$.

Démonstration. — On a $\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))=\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\otimes\mathrm{Alg}(\mathbb{G})$. Le membre de droite est l'espace des points fixes de $\big(\mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\otimes V\big)\otimes\big(\mathrm{Alg}(\mathbb{G})\otimes(a^r\otimes b^s)\big)$ sous l'action de $\mathbb{B}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}$ (où $\mathbb{B}$ est considéré comme un groupe algébrique et muni de la topologie

4. L'induite du membre de gauche est l'induite localement algébrique ; celle du membre de droite est l'induite lisse.

de Zariski), et le membre de gauche est celui des points fixes sous l'action de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ s'envoyant dans $\mathbb{B}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}$ par l'application $\mathrm{id}\times(x\mapsto x_p)$. Ces deux espaces coïncident car l'image de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ est dense dans $\mathbb{B}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}$. □

Remarque 2.17. — Si $r>s$, alors

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}}^{\mathbb{G}}(a^r\otimes d^s)=0\quad\text{et}\quad \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\big(V\otimes(a_p^r\otimes d_p^s)\big)=0$$

En effet, en écrivant $P=(xy-zt)^s\tilde P$, on obtient $\tilde P(ax+bz,ay+bt,dz,dt)=a^{r-s}\tilde P(x,y,z,t)$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\right)$, ce qui implique que $\tilde P$ est constant en x,y et homogène de degré $r-s$ en x,y.

Remarque 2.18. — Si M est une L-représentation continue de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$, alors

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}M=\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}M^{I_\infty=1}$$

En effet, $M=M^{I_\infty=1}\oplus M^{I_\infty=-1}$, et comme $I_\infty\in\mathbb{G}(\mathbf{R}_+)$, on a $\phi((I_\infty)x)=\phi(x)$ si $\phi:\mathbb{G}(\mathbf{A})\to M$ est continue. Par ailleurs, comme $I_\infty\in\mathbf{B}(\mathbf{A})$, on a $\phi((I_\infty)x)=\pm\phi(x)$ si $\phi\in\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}M^{I_\infty=\pm}$. Il en résulte que $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}M^{I_\infty=-1}=0$.

De même, comme $\mathbb{B}(\widehat{\mathbf{Z}})\backslash\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\cong\mathbb{B}(\mathbf{A}^{]\infty[})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$,

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{G}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})}\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}M\cong\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\widehat{\mathbf{Z}})}^{\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})}\mathrm{Res}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{B}(\widehat{\mathbf{Z}})}M^{I_\infty}$$

2.4.3. Cohomologie de $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$ à valeurs dans des induites

Proposition 2.19. — *On a des isomorphismes de représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$*

$$H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))\cong\begin{cases}\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) & si\ i=0,\\ 0 & si\ i\geq 1.\end{cases}$$

l'action de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ sur $\mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ se faisant à travers le quotient $\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})\cong\mathbb{L}(\mathbf{A})/\mathbb{L}(\mathbf{R})_+\mathbb{L}(\mathbf{Q})$ de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$.

Démonstration. — D'après le lemme 2.10, on a une factorisation $\mathbb{B}(\mathbf{A})$-équivariante $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\cong\mathscr{C}(\mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}))\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))^{I_\infty=1}$, où $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ agit trivialement sur $\mathscr{C}(\mathbf{P}^1(\widehat{\mathbf{Z}}))$. Comme $\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))=\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))^{I_\infty=1}\oplus\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))^{I_\infty=-1}$, et comme $H^i(\mathbb{B},\mathscr{C})=0$ si $i\geq 1$ (prop. 2.13), cela prouve que $H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))=0$, pour $i\geq 1$.

Passons au calcul de $H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$. On a

$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))=\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A}))=H^0(\mathbb{B}(\mathbf{A}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}(\mathbf{A})))$$

où $b\in\mathbb{B}(\mathbf{A})$ agit (à droite) sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}(\mathbf{A})$ par $b\cdot(x,y)=(b^{-1}x,yb)$. Si $\beta\in\mathbb{B}(\mathbf{Q})$ agit (à droite) sur $\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}(\mathbf{A})$ par $\beta\cdot(x,y)=(x,\beta^{-1}y)$, on a :

$$\begin{aligned}H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))&=H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),H^0(\mathbb{B}(\mathbf{A}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}(\mathbf{A}))))\\&=H^0(\mathbb{B}(\mathbf{A}),H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})\times\mathbb{B}(\mathbf{A}))))\\&=\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{B}(\mathbf{A})))\end{aligned}$$

On conclut en utilisant la prop. 2.13. □

Proposition 2.20. — *Si $k \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}$, alors*[5]

$$H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes (W_{k,j} \otimes W_{k,j}^*)) \cong \begin{cases} \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))_{k,j} & si\ i = 0, \\ \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))'_{k,j} & si\ i = 1, \\ 0 & si\ i \geq 2. \end{cases}$$

Où $\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))_{k,j}$ *et* $\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))'_{k,j}$ *sont les twists :*

$$\begin{aligned} \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))_{k,j} &:= \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes (|a|_{\mathbf{A},p}^{-k-j} \otimes |d|_{\mathbf{A},p}^{-j}) \\ \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))'_{k,j} &:= \mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes (|a|_{\mathbf{A},p}^{-k-j} \otimes |d|_{\mathbf{A},p}^{-j}) \otimes (\delta_{\mathbf{A}} \otimes \delta_{\mathbf{A}}^{-1})^{k+1} \end{aligned}$$

Démonstration. — On utilise la suite spectrale de Hochschild-Serre associée au dévissage $1 \to \mathbb{U}(\mathbf{Q}) \to \mathbb{B}(\mathbf{Q}) \to \mathbb{L}(\mathbf{Q}) \to 1$. Par ailleurs, $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$ agit trivialement sur $W_{k,j}^*$ qui peut donc être sorti de la cohomologie. D'après le lemme 2.11, $H^i(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W_{k,j})$ est 0 pour $i \geq 2$ et de la forme $\mathrm{LC}(\mathbb{U}(\mathbf{A}) \backslash \mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes \eta_{k,j}^{(i)}$, si $i = 0, 1$, où $\eta_{k,j}^{(0)} = a^{k+j} \otimes d^j$ et $\eta_{k,j}^{(1)} = a^{j-1} \otimes d^{k+j+1}$. On peut donc utiliser le lemme 2.12 pour en déduire que $H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), -) = H^0(\mathbb{L}(\mathbf{Q}), H^i(\mathbb{U}(\mathbf{Q}), -))$ (tous les autres E_2-termes de la suite spectrale sont 0), et obtenir la formule (pour $i = 0, 1$)

$$H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes (W_{k,j} \otimes W_{k,j}^*)) \cong \big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \big(H^0(\mathbb{L}, \mathrm{LC}) \otimes \eta_{k,j,\mathbf{A}}^{(i)}\big)\big) \otimes W_{k,j}^*$$

Pour conclure, on écrit $W_{k,j}^* = W_{k,-k-j}$ sous la forme $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{Q}_p)}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)} (a_p^{-k-j} \otimes d_p^{-j})$ et on utilise la prop. 2.6 pour mettre $H^0(\mathbb{L}, \mathrm{LC})$ sous la forme $\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))$, le lemme 2.16 pour faire rentre $W_{k,-k-j}$ dans l'induite, et les identités

$$\begin{aligned} (a^{j+k} \otimes d^j) \otimes (a_p^{-k-j} \otimes d_p^{-j}) &= |\ |_{\mathbf{A},p}^{-k-j} \otimes |\ |_{\mathbf{A},p}^{-j} \\ (a^{j-1} \otimes d^{k+j+1}) \otimes (a_p^{-k-j} \otimes d_p^{-j}) &= \big(|\ |_{\mathbf{A},p}^{-k-j} \otimes |\ |_{\mathbf{A},p}^{-j}\big) \otimes (\delta_{\mathbf{A}} \otimes \delta_{\mathbf{A}}^{-1})^{k+1} \end{aligned}$$ □

Si π est une L-représentation localement algébrique de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, on note $\pi^\vee$ sa contragrédiente, i.e. l'ensemble des vecteurs $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$-finis de π^*.

Exemple 2.21. — (i) Si $\eta_1, \eta_2 : \mathbf{A}^{]\infty[,*} \to L^*$ sont des caractères lisses, alors

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} (\eta_1 \otimes \eta_2)\big)^\vee \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} (\eta_1^{-1} \delta_{\mathbf{A}} \otimes \eta_2^{-1} \delta_{\mathbf{A}}^{-1})$$

(ii) Si $\eta_1, \eta_2 : \mathbf{A}^{]\infty[,*} \to L^*$ sont des caractères lisses, et si $s \geq r$, alors

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} (\eta_1 a_p^r \otimes \eta_2 d_p^s)\big)^\vee \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} (\eta_1^{-1} \delta_{\mathbf{A}} a_p^{-s} \otimes \eta_2^{-1} \delta_{\mathbf{A}}^{-1} d_p^{-r})$$

$$\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} (\eta_1 |\ |_{\mathbf{A},p}^r \otimes \eta_2 |\ |_{\mathbf{A},p}^s)\big)^\vee \cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \big((\eta_1^{-1} |\ |_{\mathbf{A},p}^{-s} \otimes \eta_2^{-1} |\ |_{\mathbf{A},p}^{-r}) \otimes (\delta_{\mathbf{A}} \otimes \delta_{\mathbf{A}}^{-1})^{s-r+1}\big)$$

5. $W_{k,j} = \mathrm{Sym}^k \otimes \det^j$, $\delta_{\mathbf{A}}$ et $|\ |_{\mathbf{A},p}$ sont les caractères de $\mathbf{A}^*$ définis au n° 1.1.2, en particulier $|\ |_{\mathbf{A},p}$ est unitaire contrairement à $\delta_{\mathbf{A}}$, et on a $|x|_{\mathbf{A},p} = x_p \delta_{\mathbf{A}}(x)$.

Le (i) est classique, le (ii) s'en déduit en utilisant le lemme 2.16 et l'identité

$$(\mathrm{Sym}^{s-r}\otimes\det{}^r)^*\cong\mathrm{Sym}^{s-r}\otimes\det{}^{-s}$$

Remarquons que ces formules sont encore valables si $s<r$, mais alors les deux membres sont 0 (cf. rem. 2.17).

Théorème 2.22. — *On les isomorphismes suivants de représentations de* $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ *:*

$$H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))\cong\begin{cases}\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) & si\ i=0,\\ \big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big)^\vee & si\ i=1,\\ 0 & si\ i\geq 2.\end{cases}$$

Démonstration. — Le cas $i=0$ résulte de la prop. 2.20 en prenant la somme directe sur $k\in\mathbf{N}$ et $j\in\mathbf{Z}$, en utilisant la décomposition

$$\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))=\bigoplus\nolimits_{r,s\in\mathbf{Z}}\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big(|\ |_{\mathbf{A},p}^r\otimes|\ |_{\mathbf{A},p}^s\big)$$

et le fait que $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\big(\mathrm{LC}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))(|\ |_{\mathbf{A},p}^r\otimes|\ |_{\mathbf{A},p}^s)\big)=0$ si $s<r$.

Pour le cas $i=1$, on étend les scalaires à $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour écrire

$$\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))=\bigoplus\big(\eta_1|\ |_{\mathbf{A},p}^r\otimes\eta_2|\ |_{\mathbf{A},p}^s\big)\tag{2.23}$$

où la somme porte sur $r,s\in\mathbf{Z}$ et sur η_1,η_2 caractères lisses de $\widehat{\mathbf{Z}}^*$ (vus comme des caractères de $\mathbf{A}^{]\infty[,*}/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$). On utilise alors la prop. 2.20 et le (ii) des exemples ci-dessus pour écrire la contragrédiente de $\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ comme l'ensemble des vecteurs $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$-finis de

$$\prod\nolimits_{r,s,\eta_1,\eta_2}\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\big(\eta_1\,|\ |_{\mathbf{A},p}^r\otimes\eta_2\,|\ |_{\mathbf{A},p}^s\big)\big)^\vee$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le fait que l'ensemble des vecteurs $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$-finis du produit est la somme directe car il n'y a qu'un nombre fini de couples (η_1,η_2) de conducteurs bornés et que des couples (r,s) distincts induisent des représentations algébriques irréductibles et non isomorphes. □

Remarque 2.24. — La décomposition (2.23) fournit une décomposition

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathrm{LP}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))=\bigoplus_{r,s,\eta_1,\eta_2}\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\big(\eta_1|\ |_{\mathbf{A},p}^r\otimes\eta_2|\ |_{\mathbf{A},p}^s\big)$$

mais il résulte des rem. 2.17 et 2.18 que l'induite à droite est 0 si $s<r$ ou si $(-1)^{r+s}\eta_{1,\infty}\eta_{2,\infty}(-1)=-1$ (où $\eta_{1,\infty},\eta_{2,\infty}$ sont les restrictions de η_1,η_2 à $\mathbf{R}^*$).

3. Le cas $\mathbb{G} = \mathbf{GL}_2$

3.1. Descente de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ à Γ

On note Γ le sous-groupe $\mathbb{G}(\mathbf{Z})_+ = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$. Le résultat suivant est classique.

Lemme 3.1. — *Tout élément x de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ peut s'écrire sous la forme $x = \gamma^{-1}x_\infty\kappa$, avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$, $x_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et $\kappa \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$. De plus $\gamma^{-1}x_\infty\kappa = (\gamma')^{-1}x'_\infty\kappa'$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \Gamma$ tel que $\gamma' = \alpha\gamma$, $x'_\infty = \alpha_\infty x_\infty$ et $\kappa' = \alpha^{]\infty[}\kappa$.*

On fait agir Γ sur $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ par $(\alpha\cdot\phi)(x) = \phi((\alpha^{]\infty[})^{-1}x)$.

Lemme 3.2. — *Si $X = \mathscr{C}, \mathscr{C}^{(p)}, \mathrm{LA}, \mathrm{LP}, \mathrm{LC}$, alors $X(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \cong \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})} X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$.*

Démonstration. — Si $\phi \in \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)$, alors ϕ est constante sur les classes modulo $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$. Si $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$, soit $\phi_\gamma \in \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L)$ définie par $\phi_\gamma(\kappa) = \phi(\gamma^{-1}x_\infty\kappa)$ pour n'importe quel choix de $x_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ (le résultat ne dépend pas de ce choix d'après ce qui précède).

Si $\alpha \in \Gamma$, alors

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\gamma}(\kappa) = \phi(\gamma^{-1}\alpha^{-1}x_\infty\kappa) &= \phi(\gamma^{-1}(\alpha_\infty^{-1}x_\infty)((\alpha^{]\infty[})^{-1}\kappa)) \\ &= \phi_\gamma((\alpha^{]\infty[})^{-1}\kappa) = (\alpha * \phi_\gamma)(\kappa),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $(\phi_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})} \in \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$.

Réciproquement, si $(\phi_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})} \in \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$, on définit $\phi \in \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L)$, en posant $\phi(\gamma^{-1}x_\infty\kappa) = \phi_\gamma(\kappa)$: le lemme 3.1 implique que $\gamma^{-1}x_\infty\kappa$, avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$, la condition $\phi_{\alpha\gamma} = \alpha * \phi_\gamma$ est exactement celle qu'il faut pour que $\phi(z)$ ne dépende pas de la décomposition de z sous la forme $\gamma^{-1}x_\infty\kappa$. □

Il résulte du lemme 3.2 et du lemme de Shapiro que l'on a :

Corollaire 3.3. — *Si $X = \mathscr{C}, \mathscr{C}^{(p)}, \mathrm{LA}, \mathrm{LP}, \mathrm{LC}$ et si $i \in \mathbf{N}$, alors*

$$H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \cong H^i(\Gamma, X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))).$$

Sous la forme du membre de droite, les groupes ont l'air beaucoup plus petits et maniables, mais l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ n'est plus visible.

Remarque 3.4. — Il résulte du cor. 3.3 et de la compacité de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ que

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}_b(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$$

où $\mathscr{C}_b$ désigne l'espace des fonctions continues bornées (cf. (i) de la prop. 3.8).

Proposition 3.5. — (i) *Si $X = \mathscr{C}, \mathscr{C}^{(p)}, \mathrm{LA}, \mathrm{LP}, \mathrm{LC}$, alors,*

$$H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \cong X(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \quad \text{et} \quad H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = 0 \ \textit{si}\ i \geq 2.$$

Démonstration. — Le cas $i = 0$ est une conséquence du cor. 3.3 et de ce que l'adhérence de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ dans $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ est $\mathbf{SL}_2(\widehat{\mathbf{Z}})$: une fonction continue de $g \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, invariante par Γ, ne dépend donc que de $\det g \in \widehat{\mathbf{Z}}^*$.

Le cas $i \geq 2$ est une conséquence du fait que Γ contient un sous-groupe libre d'indice fini. $\square$

3.1.1. Cohomologie de Γ. — Soient

$$I = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Lemme 3.6. — *Si M est un Γ-module sur lequel 2 est inversible, on a une suite exacte :*

$$0 \to H^0(\Gamma, M) \longrightarrow M^{S=1} \xrightarrow{1-U} M^{1+U+U^2=0} \longrightarrow H^1(\Gamma, M) \to 0$$

Démonstration. — $U^3 = S^2 = I$ et $I^2 = 1$ est une présentation de Γ par générateurs et relations. En particulier, S et U sont respectivement d'ordre 2 et 3 dans $\overline{\Gamma} = \Gamma/\{\pm I\}$, et $\overline{\Gamma}$ est le produit libre des sous-groupes engendrés par S et U.

Soit $M_+ = \big\{x \in M,\ I \cdot x = x\big\}$. Alors $H^i(\Gamma, M) = H^i(\overline{\Gamma}, M_+)$. Par ailleurs, comme $\overline{\Gamma}$ est le produit libre des sous-groupes engendrés par S et U, un 1-cocycle sur $\overline{\Gamma}$ est déterminé par ses valeurs x et y en S et U, avec les seules conditions $x + Sx = 0$ et $(1 + U + U^2)y = 0$. On en déduit que

$$H^1(\overline{\Gamma}, M_+) \cong \frac{\{(x, y) \in M_+ \times M_+,\ x + Sx = 0,\ (1 + U + U^2)y = 0\}}{\{(1 - S)z, (1 - U)z,\ z \in M_+\}}.$$

En prenant $z = \frac{1}{2}x$, on peut tuer x et obtenir la suite exacte suivante

$$(3.7) \qquad 0 \to H^0(\overline{\Gamma}, M_+) \longrightarrow M_+^{S=1} \xrightarrow{1-U} M_+^{1+U+U^2=0} \longrightarrow H^1(\overline{\Gamma}, M_+) \to 0$$

On conclut en remarquant que $M^{S=1} = M_+^{S=1}$ et $M^{1+U+U^2=0} = M_+^{1+U+U^2=0}$. $\square$

3.2. La cohomologie des fonctions continues

3.2.1. Lien avec la cohomologie complétée d'Emerton

On envoie $\mathbf{C}^*$ dans $\mathbb{G}(\mathbf{R})$ par $a + ib \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. Alors

$$\mathbb{G}(\mathbf{R})/\mathbf{C}^* \cong \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \mathbf{P}^1(\mathbf{R}) = \mathscr{H} \sqcup \overline{\mathscr{H}}.$$

Soit $\widehat{\Gamma}(N) = \mathrm{Ker}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \to \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}))$. Soit

$$Y(N)_{\mathbf{C}} = \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \backslash \mathbb{G}(\mathbf{A}) / (\mathbf{C}^* \times \widehat{\Gamma}(N)).$$

La proposition suivante montre que $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), L))$ n'est autre que la cohomologie complétée d'Emerton de la tour des courbes modulaires de tous niveaux.

Proposition 3.8. — (i) $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)) = L\otimes_{\mathscr{O}_L} H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathscr{O}_L))$.

(ii) $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathscr{O}_L)) = \varprojlim_k H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathscr{O}_L/p^n))$.

(iii) $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathscr{O}_L/p^n)) \cong H^1(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L/p^n))$.

(iv) $H^1(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L/p^n)) = \varinjlim_N H^1(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}),\mathscr{O}_L/p^n))$.

(v) $H^1(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}),\mathscr{O}_L/p^n)) \cong H^1(Y(N)_{\mathbf{C}},\mathscr{O}_L/p^n)$.

Démonstration. — Pour le (i), on utilise les isomorphismes

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L)) \cong H^1(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),L))$$
$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}),\mathscr{O}_L)) \cong H^1(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L))$$

la compacité de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ qui implique que $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),L) \cong L\otimes_{\mathscr{O}_L}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L)$, et le lemme 3.6.

Le (ii) est une conséquence facile du lemme 3.6 et de ce que

$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L)^{1+U+U^2}/p^n \to \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L/p^n)^{1+U+U^2}$$
$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L)^{S=1}/p^n \to \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L/p^n)^{S=1}$$

sont injectives de conoyaux respectivement tués par 6 et 4 puisque U et S sont d'ordre 6 et 4.

Le (iii) résulte de ce que $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),\mathscr{O}_L/p^n) = \varinjlim_N \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}),\mathscr{O}_L/p^n)$.

Le (v) est une conséquence du lemme de Shapiro et de ce que le demi-plan supérieur est contractile. $\square$

Remarque 3.9. — On a aussi $H^1(Y(N)_{\mathbf{C}},\mathscr{O}_L/p^n) \cong H^1_{\text{ét}}(Y(N)_{\overline{\mathbf{Q}}},\mathscr{O}_L/p^n)$ et comme $Y(N)$ est définie sur $\mathbf{Q}$, cela munit tous les goupes ci-dessus d'une action du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}$.

Remarque 3.10. — Soit $S\subset\mathscr{P}\cup\{\infty\}$ fini. Si $\infty\in S$ (resp. $\infty\notin S$), tout élément de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S)$ s'écrit sous la forme $\gamma^{-1}x_\infty\kappa$ (resp. $\gamma^{-1}\kappa$), avec $\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])$, $x_\infty\in\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et $\kappa\in\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S)$, et une telle écriture est unique à changements simultanés $\gamma\mapsto\alpha\gamma$, $x_\infty\mapsto\alpha_\infty x_\infty$ et $\kappa\mapsto\alpha_{S\setminus\{\infty\}}\kappa$, avec $\alpha\in\Gamma$ (resp. $\alpha\in\mathbb{G}(\mathbf{Z})$). On en déduit des isomorphismes de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])$-modules, si $X=\mathscr{C}$, $\mathscr{C}^{(p)}$, LC, LP, LA :

$$X(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),L) = \begin{cases}\mathrm{Ind}_{\Gamma}^{\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])} X(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),L) & \text{si } \infty\in S,\\ \mathrm{Ind}_{\mathbb{G}(\mathbf{Z})}^{\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}])} X(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_S),L) & \text{si } \infty\notin S\end{cases}$$

En particulier, si $\infty\in S$, alors $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Z}[\frac{1}{S}]),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}_S),L))$ est la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires de niveaux dont les facteurs premiers appartiennent à S.

3.2.2. Vecteurs lisses en dehors de p. — L'action de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$ sur $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ n'est pas lisse (seulement localement lisse) mais la proposition suivante montre que celle sur la cohomologie de $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ l'est.

Proposition 3.11. — *L'application naturelle*

$$\varinjlim_{K^{]p[}} H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[})) \to H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$$

est un isomorphisme ($K^{]p[}$ décrit les sous-groupes ouverts de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$)

Démonstration. — On a une suite d'isomorphismes

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) &\cong H^1(\Gamma, \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))) \\ &\cong \varinjlim_{K^{]p[}} H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[})) \\ &\cong \varinjlim_{K^{]p[}} H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[})) \end{aligned}$$

Le premier isomorphisme est le lemme de Shapiro, le second résulte de ce que $\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))) \cong \varinjlim_{K^{]p[}} \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[})$ (par compacité de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$), et le troisième est de nouveau le lemme de Shapiro.

Le résultat s'en déduit. □

Remarque 3.12. — (i) Nous prouvons plus loin (prop. 3.14) que

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[})) = H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{K^{]p[}}$$

et donc que $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ est l'ensemble des vecteurs $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$-lisses de $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$.

(ii) En reprenant les arguments de la preuve de la prop. 3.8, on démontre que $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[}))$ est la cohomologie complétée de la tour des courbes modulaires de niveaux $K^{]p[}K_p$ où K_p décrit les sous-groupes ouverts de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$.

Proposition 3.13. — $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[}))$ *est une représentation admissible de* $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$.

Démonstration. — Par définition, il suffit de regarder l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$, et on peut utiliser le lemme de Shapiro pour descendre de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ à Γ et écrire le groupe qui nous intéresse comme $H^1(\Gamma, M)$, avec $M = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})/K^{]p[})$. Le $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-module M est trivialement admissible (c'est la somme directe d'un nombre fini de copies de $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)))$. On en déduit que $M^{S=1}$ et M^{1+U+U^2} sont admissibles en tant que sous-$\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-modules fermés d'un module admissible. Le lemme 3.16 permet alors d'en déduire que $H^0(\Gamma, M)$ et $H^1(\Gamma, M)$ sont admissibles en tant que noyau et conoyau d'un morphisme de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$-modules admissibles **[10]**. □

Proposition 3.14. — *On a*

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[})) = H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{K^{]p[}}$$

Démonstration. — Posons $K = K^{]p[}$. Le lemme de Shapiro nous ramène à prouver que $H^1(\Gamma, M^K) = H^1(\Gamma, M)^K$, avec $M = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$. Pour cela, compte-tenu du calcul des H^0 du lemme 3.15, il suffit de prouver que la suite des K-invariants de la suite du lemme 3.6 est exacte. Cela résulte du critère du lemme 3.16 avec $A = \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$ et $B = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^*))^{S=1}$, et les résultats d'annulation des lemmes 3.15 et 3.18. □

Lemme 3.15. — *On a les résultats suivants :*

$$H^0(K, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{S=1}) = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K)^{S=1} \qquad H^1(K, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{S=1}) = 0$$
$$H^0(K, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{1+U+U^2=0}) = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K)^{1+U+U^2=0} \quad H^1(K, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{1+U+U^2=0}) = 0$$

Démonstration. — Comme 2 et 3 sont inversibles dans L, on a des décompositions K-équivariantes

$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{S=1} \oplus \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{S=-1}$$
$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{1+U+U^2=0} \oplus \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{U=1} \oplus \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))^{U^3=-1}$$

Il suffit de prouver que $H^0(K, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))) = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K)$, ce qui est immédiat, et $H^1(K, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))) = 0$, ce qui suit de ce que $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p))\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[}))$ et $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})) \cong \mathscr{C}(K)^{\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})/K}$.

Lemme 3.16. — *Soit* $0 \to A \to B \to C \to D \to 0$ *une suite exacte de K-modules topologiques. Si* $H^1(K, B) = 0$ *et si* $H^1(K, A) = H^2(K, A) = 0$, *la suite* $0 \to A^K \to B^K \to C^K \to D^K \to 0$ *est exacte.*

Démonstration. — On a des suites exactes $0 \to A \to B \to B/A \to 0$ et $0 \to B/A \to C \to D$. Si $H^1(K, A) = 0$, on a $(B/A)^K = B^K/A^K$, et donc la suite $0 \to A^K \to B^K \to C^K \to D^K \to 0$ est exacte si et seulement si $C^K \to D^K$ est surjective. Ceci est le cas si $H^1(K, B/A) = 0$. Or on a une suite exacte $H^1(K, B) \to H^1(K, B/A) \to H^2(K, A)$; l'hypothèse $H^1(K, B) = H^2(K, A) = 0$ permet donc de conclure. □

3.2.3. Résultats d'annulation pour la cohomologie de $\mathbf{SL}_2$. — Soit $\mathbb{G}' = \mathbf{SL}_2 \subset \mathbb{G}$.

Lemme 3.17. — *On suppose* $\ell \neq p$.
(i) $H^1(\mathbb{G}'(\mathbf{F}_\ell), \mathbf{Z}/p^n) = 0$.
(ii) $H^2(\mathbb{G}'(\mathbf{F}_\ell), \mathbf{Z}/p^n) = 0$.

Démonstration. — Le (i) est évident si $\ell \geq 5$ car $\mathbf{PSL}_2(\mathbf{F}_\ell)$ est alors un groupe simple (et $H^1 = \mathrm{Hom}$). Les cas $\ell = 2, 3$ se traitent à la main et il ressort que, même si on ne suppose pas $\ell \neq p$, les seuls cas où $\mathrm{Hom}(\mathbb{G}'(\mathbf{F}_\ell), \mathbf{Z}/p^n) \neq 0$ sont : $p = 2$ et $\ell = 2$ où ce groupe est égal à $\mathbf{Z}/2$, $p = 3$ et $\ell = 3$ où ce groupe est égal à $\mathbf{Z}/3$.

Le (ii) est un cas particulier du th. 14 du chap. 7 de **[12]** (cf. (a) des Remarks à la suite du théorème). □

Lemme 3.18. — (i) *Si* $K_N = \mathrm{Ker}\big(\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[}) \to \mathbb{G}'(\mathbf{Z}/N)\big)$, *avec* $(N,p) = 1$, *alors* $H^i(K_N, \mathbf{Z}_p) = 0$ *si* $i = 1, 2$.

(ii) *Si* K *est un sous-groupe ouvert de* $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$, *alors* $H^i(K, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}})) = 0$ *si* $i = 1, 2$.

Démonstration. — (i)

• Pour H^1, on commence par remarquer que tout morphisme continu $K_N \to \mathbf{Z}/p^m$ se factorise à travers $\prod_{\ell \nmid pN} \mathbb{G}'(\mathbf{F}_\ell)$ car le noyau est un produit de pro-ℓ-groupes, avec $\ell \neq p$. Comme cette image est un produit de groupes finis et que $\mathbf{Z}_p$ ne contient pas de sous-groupe fini, cela permet de conclure. (En fait, il résulte du (i) du lemme 3.17 que $H^1(K_N, \mathbf{Z}/p^m) = 0$ pour tout m.)

• Pour H^2, la nullité de $H^1(K_N, \mathbf{Z}/p^m)$ implique que $H^2(K_N, \mathbf{Z}_p)$ est la limite projective des $H^2(K_N, \mathbf{Z}/p^n)$ puisque le $\mathrm{R}^1 \lim$ des $H^1(K_N, \mathbf{Z}/p^m)$ est nul. Il suffit donc de prouver que $H^2(K_N, \mathbf{Z}/p^n) = 0$ pour tout n et, par dévissage, il suffit de le prouver pour $n = 1$.

Comme le noyau de $K_N \to \prod_{\ell \nmid pN} \mathbb{G}'(\mathbf{F}_\ell)$ est d'ordre premier à p, la suite spectrale de Hochschild-Serre permet de remplacer K_N par $K'_N = \prod_{\ell \nmid pN} \mathbb{G}'(\mathbf{F}_\ell)$. Par continuité des cocycles considérés, $H^2(K'_N, \mathbf{Z}/p^n)$ est la limite inductive des $H^2(\prod_{\ell \in S} \mathbb{G}'(\mathbf{F}_\ell), \mathbf{Z}/p)$, avec S fini. Une récurrence immédiate sur le cardinal de S, utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre et le lemme 3.17 pour $|S| = 1$, permet de conclure.

(ii) On a une suite exacte $1 \mapsto K' \to K \to U \to 1$, où K' est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$ et U un sous-groupe ouvert de $\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[,*}$. Quitte à remplacer K par un sous-groupe d'indice fini (et à utiliser restriction et corestriction pour revenir à K), on peut supposer que $K' = K_N$. On est alors ramené à vérifier que $H^i(U, H^j(K_N, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*))) = 0$ si $1 \leq i + j \leq 2$ (en particulier $j \leq 2$).

Comme K agit par $g \cdot \phi(x) = \phi(x \det g)$ sur $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$, l'action de K_N est triviale et donc $H^0(K_N, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)) = \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$. Maintenant, $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) = \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*) \widehat{\otimes} \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[,*})$, et on a $H^i(U, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[,*})) = 0$ si $i \geq 1$, pour tout sous-groupe ouvert compact U de $\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[,*}$. On en déduit que $H^i(U, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)) = 0$ pour tout $i \geq 1$ (car U agit trivialement sur $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*)$), ce qui permet de traiter le cas $j = 0$.

Si $j = 1, 2$, comme l'action de K_N sur $\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$ est triviale, on a $H^j(K_N, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)) = H^j(K_N, \mathbf{Z}_p) \widehat{\otimes} \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) = 0$, d'après le (i).

Ceci permet de conclure. □

Lemme 3.19. — (cf. [**5**, cor. 4.3.2]) *Si* K_p *est un sous-groupe ouvert de* $\mathbb{G}'(\mathbf{Z}_p)$, *et si* W *est une représentation de dimension finie de* $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, *alors* $H^i(K_p, W) = 0$ *si* $i = 1, 2$.

Démonstration. — D'après Lazard [**9**], $H^i(K_p, W) \cong H^i(\mathfrak{sl}_2, W)$, et comme $\mathfrak{sl}_2$ est une algèbre de Lie semi-simple, on a $H^1(\mathfrak{sl}_2, W)$ et $H^2(\mathfrak{sl}_2, W) = 0$ d'après les premier et second lemmes de Whitehead. □

Lemme 3.20. — *Si K est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ et si W est une représentation algébrique de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, alors $H^i(K, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes W) = 0$ si $i = 1, 2$.*

Démonstration. — Si $K' = K \cap \mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}})$, alors $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes W$ est la somme d'un nombre fini de copies de $\mathrm{Ind}_{K'}^{K} W$, et il suffit de prouver que $H^i(K', W) = 0$ si $i = 1, 2$.

Quitte à remplacer notre K initial par un sous-groupe d'indice fini (et utiliser la corestriction pour revenir à K), on peut supposer $K' = K^{]p[} K_p$ où K_p est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$ et $K^{]p[}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$. Alors $H^i(K', W) = \oplus_{j+k=i} H^j(K^{]p[}, L) \otimes H^k(K_p, W)$ et dans chaque terme, au moins un des deux groupes qui apparaît est 0 d'après les lemmes 3.18 et 3.19. □

3.3. Vecteurs localement analytiques et localement algébriques

Si W est une représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, on note W^{an} et W^{alg} les sous-espaces des vecteurs localement analytiques et localement algébriques.

3.3.1. Cohomologie des fonctions localement analytiques

Théorème 3.21. — $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\mathrm{an}} = H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$.

Démonstration. — C'est une question qui ne fait intervenir que l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$. Le lemme de Shapiro permet de descendre de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ à Γ sans faire disparaitre l'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$: il suffit de prouver que, pour tout quotient $Y = \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})/K^{]p[}$, où $K^{]p[}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$, on a

$$H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y))^{\mathrm{an}} = H^1(\Gamma, \mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y)).$$

Cela résulte de :
- la suite exacte du lemme 3.6 appliquée à $M = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y)$,
- l'exactitude du foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{an}}$ pour les représentations admissibles [**11**],
- l'identité $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y)^{\mathrm{an}} = \mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y)$,
- la suite exacte du lemme 3.6 appliquée à $M = \mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y)$.

3.3.2. Vecteurs localement algébriques de la cohomologie complétée

Le résultat suivant est une reformulation d'un résultat d'Emerton [**5**, (4.3.4)], [**6**, th. 7.4.2] (et la preuve qui suit est une adaptation de celle d'Emerton).

Théorème 3.22. — $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\mathrm{alg}} = H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$.

Démonstration. — Via le lemme de Shapiro, on se ramène, comme ci-dessus, à prouver que $H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y))^{\mathrm{alg}} = H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y)^{\mathrm{alg}})$, pour tout quotient $Y = \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})/K^{]p[}$. Ceci se ramène à vérifier que, si W est une représentation algébrique de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, et si K_p est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$, alors

$$H^1(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y) \otimes W)^{K_p} = H^1(\Gamma, (\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p) \times Y) \otimes W)^{K_p}).$$

Il suffit donc de prouver que la suite des K_p-invariants de la suite exacte du lemme 3.6 tensorisée par W est encore exacte. Pour cela, on utilise le critère du lemme 3.16, avec

$A = \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p^*) \otimes W$ et $B = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)) \otimes W$. On a $H^1(K_p, B) = 0$ car B est isomorphe à une somme de copies de $\mathscr{C}(K_p)$, et le lemme 3.20 fournit la nullité de $H^1(K_p, A)$ et $H^2(K_p, A)$ qui permet de conclure. $\square$

En utilisant la décomposition (1.2) de $\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.23. — *On a une décomposition*

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\mathrm{alg}} = \bigoplus\nolimits_W \big(H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W)\big) \otimes W^*$$

où W parcourt les $\mathbf{Q}_p$-représentations algébriques irréductibles de $\mathbb{G}$.

Remarque 3.24. — (i) L'action de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$ sur $H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W)$ est lisse ; celle sur W^* est algébrique.

(ii) Le lemme de Shapiro permet de descendre de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ à Γ puis à $\Gamma(N)$ pour les fonctions invariantes par $\widehat{\Gamma}(N) := \mathrm{Ker}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) \to \mathbb{G}(\mathbf{Z}/N))$: on obtient alors

$$H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W) \cong \varinjlim\nolimits_N H^1_{\mathrm{et}}(Y_{N,\overline{\mathbf{Q}}}, W)$$

ou N parcourt les entiers ≥ 1. L'espace $H^1_{\mathrm{et}}(Y_{N,\overline{\mathbf{Q}}}, W)$ est celui dans lequel on decoupe les représentations galoisiennes associées aux formes modulaires de niveau N et de poids déterminé par W.

3.4. Cohomologie à support compact

3.4.1. Cocycles nuls sur le borel. — Si M est un $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$-module, on définit la cohomologie à support compact $H^\bullet_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M)$ comme la cohomologie du cône $[\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M) \to \mathrm{R}\Gamma(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), M)]$. On a une suite exacte longue

(3.25)

$$\cdots \to H^{i-1}(B, M) \to H^i_c(G, M) \to H^i(G, M) \to H^i(B, M) \to H^{i+1}_c(G, M) \to \cdots$$

La cohomologie à support compact est calculée par le complexe [6] (dans lequel on note simplement B et G les groupes $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$ et $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$)

$$M \to \mathscr{C}(G, M) \oplus M \to \mathscr{C}(G \times G, M) \oplus \mathscr{C}(B, M) \to \mathscr{C}(G \times G \times G, M) \oplus \mathscr{C}(B \times B, M) \to \cdots,$$

où les flèches $\mathscr{C}(H^i, M) \to \mathscr{C}(H^{i+1}, M)$, pour $H = G, B$, sont les différentielles usuelles, les flèches $\mathscr{C}(G^i, M) \to \mathscr{C}(B^i, M)$ sont les restrictions, et les autres flèches sont nulles [7]. En particulier,

$$H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M) = \frac{\{((c_\sigma)_{\sigma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})}, c_B),\ c_{\sigma\tau} = \sigma \cdot c_\tau + c_\sigma,\ c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c_B,\ \text{si } \sigma \in \mathbb{B}(\mathbf{Q})\}}{\{(((\sigma - 1) \cdot a)_{\sigma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})}, a),\ a \in M\}}.$$

On note $Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M)$ le module des 1-cocycles (c_σ) sur $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, à valeurs dans M, qui sont identiquement nuls sur $\mathbb{B}(\mathbf{Q})$. On dispose d'une application naturelle $Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathbb{B}(\mathbf{Q}), M) \to H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), M)$ envoyant (c_σ) sur la classe de $((c_\sigma), 0)$.

6. $\mathscr{C}$ désigne les fonctions continues, mais comme $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ est discret, toutes les fonctions sont continues.

7. On définit de même $H^1_c(\Gamma(1), M)$.

Lemme 3.26. — *Cette application induit un isomorphisme naturel*
$$Z^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathbb{B}(\mathbf{Q}),M)\xrightarrow{\sim} H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),M).$$

Démonstration. — Cela résulte de ce que
$$((c_\sigma),c_B)=((c_\sigma-(\sigma-1)\cdot c_B),0)+(((\sigma-1)\cdot c_B),c_B).\qquad\square$$

3.4.2. Lien entre cohomologie et cohomologie à support compact

Théorème 3.27. — *On a $H^i_c(\mathbb{G},\mathscr{C})=0$ si $i\neq 1$, et une suite exacte de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$-modules*
$$0\to\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)\to\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\to H^1_c(\mathbb{G},\mathscr{C})\to H^1(\mathbb{G},\mathscr{C})\to 0$$
où $\widehat{\mathbf{Z}}^*=\mathbf{A}^*/\mathbf{R}_+^*\mathbf{Q}^*$ sur lequel $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ agit à travers le déterminant, et $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ à travers $\mathbb{L}(\mathbf{A})$ sur $\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})$.

Démonstration. — On utilise la suite exacte longue (3.25) pour $M=\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$. Comme $H^0(\mathbb{G},\mathscr{C})\to H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ est injective, on a $H^0_c(\mathbb{G},\mathscr{C})=0$. Comme $H^i(\mathbb{G},\mathscr{C})=0$ pour $i\geq 2$ et $H^0(\mathbb{G},\mathscr{C})=\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$ (prop. 3.5), il suffit de prouver que $H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))=0$, pour $i\geq 1$, et d'identifier $H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$, ce qui fait l'objet de la prop. 2.19 $\square$

3.5. Dualité entre cohomologie et cohomologie à support compact

3.5.1. Descente de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ à Γ pour la cohomologie à support compact. — Le lemme de Shapiro n'a, a priori, pas de raison d'être vrai pour la cohomologie à support compact (on a quand même une flèche naturelle $H^i_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}M)\to H^i_c(\Gamma,M)$ obtenue en évaluant les fonctions $\phi:\mathbb{G}(\mathbf{Q})\to M$ en 1). Mais on a le résultat suivant :

Proposition 3.28. — *Si $X=\mathscr{C},\mathscr{C}^{(p)},\mathrm{LA},\mathrm{LP},\mathrm{LC}$, l'application naturelle induit, pour tout $i\geq 0$, un isomorphisme*
$$H^i_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),X(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L))\xrightarrow{\sim} H^i_c(\Gamma,X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),L))$$

Démonstration. — On a un diagramme commutatif à lignes exactes, où
$$B=\mathbb{B}(\mathbf{Q}),\ \ G=\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\ \ U=\mathbb{B}(\mathbf{Q})\cap\Gamma,\ \ X_{\mathbf{A}}=X(\mathbb{G}(\mathbf{A}),L),\ \ X_{\widehat{\mathbf{Z}}}=X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}),L)$$
et les deux isomorphismes verticaux résultent du lemme de Shapiro :
$$\begin{tikzcd} H^{i-1}(G,X_{\mathbf{A}}) \arrow[r]\arrow[d,"\wr"] & H^{i-1}(B,X_{\mathbf{A}}) \arrow[r]\arrow[d] & H^i_c(G,X_{\mathbf{A}}) \arrow[r]\arrow[d] & H^i(G,X_{\mathbf{A}}) \arrow[r]\arrow[d,"\wr"] & H^i(B,X_{\mathbf{A}})\arrow[d] \\ H^{i-1}(\Gamma,X_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^{i-1}(U,X_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^i_c(\Gamma,X_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^i(\Gamma,X_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \arrow[r] & H^i(U,X_{\widehat{\mathbf{Z}}}) \end{tikzcd}$$
Pour conclure, grâce au lemme des 5, il suffit de vérifier que les flèches $H^j(B,X_{\mathbf{A}})\to H^j(U,X_{\widehat{\mathbf{Z}}})$, pour $j=i-1,i$, sont des isomorphismes.

On a $\mathbb{G}(\mathbf{A})=\mathbb{B}(\mathbf{Q})\cdot(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+)$ et $\mathbb{B}(\mathbf{Q})\cap(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+)=U$. Il en résulte que $X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))\cong\mathrm{Ind}_U^B X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$, et on conclut en utilisant le lemme de Shapiro. $\square$

3.5.2. Dualité entre H^0 et H^2_c

On reprend les notations du nº 3.1.1. Le groupe $\overline{\Gamma}$ est engendré par $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, les seules relations étant $S^2 = 1$ et $U^3 = 1$. De plus, si $\overline{B} \subset \overline{\Gamma}$ est l'image de $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, alors SU est un générateur de $\overline{B}$ (c'est l'image de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$).

Si M est un $\mathbf{Z}_p[\overline{\Gamma}]$-module, on note M^* son dual (suivant les cas, cela peut être le dual de Pontryagin, le $\mathbf{Z}_p$-dual, ou le $\mathbf{Q}_p$-dual (ou L-dual) topologique).

Proposition 3.29. — (i) *On a une identification naturelle*

$$H^2_c(\overline{\Gamma}, M^*) = M^*/(U-1, S-1)$$

(ii) $H^2_c(\overline{\Gamma}, \Lambda) = \Lambda$.

(iii) *Le cup produit* $H^2_c(\overline{\Gamma}, M^*) \times H^0(\overline{\Gamma}, M) \to H^2_c(\overline{\Gamma}, \Lambda) = \Lambda$ *induit un isomorphisme*

$$H^0(\overline{\Gamma}, M) \cong H^2_c(\overline{\Gamma}, M^*)^*$$

Démonstration. — Comme $H^2(\overline{\Gamma}, M^*) = 0$ (puisque $\overline{\Gamma}$ contient un groupe libre d'indice 6), on a $H^2_c(\overline{\Gamma}, M^*) = H^1(\overline{B}, M^*)/H^1(\overline{\Gamma}, M^*)$. Comme $\overline{B}$ est engendré par SU, on a $H^1(\overline{B}, M^*) = M^*/(SU-1)$, où un cocycle $\gamma \mapsto c_\gamma$ est envoyé sur l'image de c_{SU}.

Par ailleurs, comme on l'a vu plus haut un 1-cocyle $\tau \mapsto c_\tau$ sur $\overline{\Gamma}$ est cohomologue à un 1-cocycle vérifiant $c_S = 0$ et $c_U \in (U-1)M^*$ arbitraire. On a alors $c_{SU} = Sc_U$ et donc $H^2_c(\overline{\Gamma}, M^*) = M^*/(SU-1, S(U-1)) = M^*/(S-1, U-1)$.

Ceci prouve le (i). Le (ii) s'en déduit immédiatement, et le (iii) résulte de ce que $H^0(\overline{\Gamma}, M) = M^{S=1,U=1}$. □

Remarque 3.30. — On peut expliciter l'isomorphisme

$$H^2_c(\overline{\Gamma}, M^*) = H^1(\overline{B}, M^*)/H^1(\overline{\Gamma}, M^*)$$

utilisé dans la preuve. Une classe $c \in H^2_c(\overline{\Gamma}, M^*)$ est représentée par $((c_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau}, (b_\sigma)_\sigma)$ où $(\sigma, \tau) \mapsto c_{\sigma,\tau}$ est un 2-cocycle sur $\overline{\Gamma}$, et $b_\sigma : \overline{B} \to M^*$ vérifie $c_{\sigma,\tau} = b_{\sigma\tau} - \sigma \cdot b_\tau - b_\sigma$, pour tous $\sigma, \tau \in \overline{B}$. Comme $H^2(\overline{\Gamma}, M^*) = 0$, on peut trivialiser le 2-cocycle (i.e. l'écrire comme le bord de $\sigma \mapsto c_\sigma$ (bien déterminé à addition près d'un 1-cocycle sur Γ)), et obtenir un représentant de la forme $((0)_{\sigma,\tau}, (b'_\sigma)_\sigma)$, où $\sigma \mapsto b'_\sigma = b_\sigma - c_\sigma$ est un 1-cocycle sur $\overline{B}$, unique à addition près de la restriction à $\overline{B}$ d'un 1-cocycle sur $\overline{\Gamma}$.

Dans le cas où $M = \Lambda$ (et donc $M^* = \Lambda$), un 1-cocycle sur $\overline{\Gamma}$ est identiquement nul puisque $\overline{\Gamma}$ est engendré par S et U qui sont de torsion. Il s'ensuit que le 1-cocycle $(b'_\sigma)_\sigma$ ci-dessus est uniquement déterminé et l'isomorphisme $H^2_c(\overline{\Gamma}, \Lambda) \cong \Lambda$ est celui envoyant c sur b'_{SU}.

3.5.3. Dualité entre H^1 et H^1_c. — Le groupe $H^1_c(\overline{\Gamma}, M^*)$ est le groupe des 1-cocycles $\sigma \mapsto c^*_\sigma$ sur $\overline{\Gamma}$, à valeurs dans M^*, qui sont identiquement nuls sur $\overline{B}$. Un tel cocycle est entièrement déterminé par c^*_U et c^*_S, et on a $(1+S)c^*_S = 0$ et $(1+U+U^2)c^*_U = 0$ (à cause des relations $S^2 = 1$ et $U^3 = 1$) et la relation $c^*_{SU} = 0$ impose en plus que

$Sc_U^* + c_S^* = 0$, ou encore $Sc_U^* - Sc_S^* = 0$, et donc $c_U^* = c_S^*$. Autrement dit, on a une identification

$$H_c^1(\overline{\Gamma}, M^*) = (M^*)^{1+U+U^2=0} \cap (M^*)^{1+S=0} \tag{3.31}$$

Par ailleurs, il résulte de la suite exacte (3.7) que l'on a

$$H^1(\overline{\Gamma}, M) \cong M^{1+U+U^2=0}/(U-1)M^{S=1} \tag{3.32}$$

Notons $\langle\ ,\ \rangle : M^* \times M \to \Lambda$, où $\Lambda = \mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ ou $\mathbf{Q}_p, L...$, l'accouplement naturel. L'accouplement

$$H_c^1(\overline{\Gamma}, M^*) \times H^1(\overline{\Gamma}, M) \to H_c^2(\overline{\Gamma}, \Lambda) = \Lambda$$

induit, en utilisant les identification précédentes, un accouplement

$$\cup : \big((M^*)^{1+U+U^2=0} \cap (M^*)^{1+S=0}\big) \times \big(M^{1+U+U^2=0}/(U-1)M^{S=1}\big) \to \Lambda$$

Lemme 3.33. — *On a* $3(c^* \cup c) = \langle c^*, (1-U^2)c\rangle$.

Démonstration. — Soient $\sigma \mapsto c_\sigma^*$ le 1-cocycle sur $\overline{\Gamma}$ correspondant à c^* et $\tau \mapsto c_\tau$ celui correspondant à c. En particulier :

- $c_\sigma^* = 0$ si $\sigma \in \overline{B}$, et $c_S^* = c_U^* = c^*$.
- $c_S = 0$ et c est l'image de c_U.

Alors $(\sigma, \tau) \mapsto c_{\sigma,\tau} := \langle c_\sigma^*, \sigma \cdot c_\tau\rangle$ est un 2-cocycle sur Γ (dont la restriction à $\overline{B} \times \overline{B}$, et même à $\overline{B} \times \overline{\Gamma}$ est identiquement nulle), et $c^* \cup c$ est la classe de $((c_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau}, (0)_\sigma)$. Comme $H^2(\overline{\Gamma}, \Lambda) = 0$, il existe $\phi : \Gamma \to \Lambda$, unique, telle que l'on ait

$$\langle c_\sigma^*, \sigma \cdot c_\tau\rangle = \phi(\sigma\tau) - \phi(\sigma) - \phi(\tau)$$

et on a $c^* \cup c = \phi(SU)$ (cf. rem. 3.30).

Par exemple, si $c_\tau = (\tau - 1)c$, on a $\phi(\sigma) = \langle c_\sigma^*, \sigma \cdot c\rangle$ et $c^* \cup c = \langle c_{SU}^*, SU \cdot c\rangle = 0$ (comme il se doit) puisque $c_{SU}^* = 0$ vu que $SU \in \overline{B}$.

Par définition, $\phi(SU) = \langle c_S^*, Sc_U\rangle + \phi(S) + \phi(U)$. Notons que $\phi(1) = 0$ (appliquer la formule à $\sigma = \tau = 1$). Par ailleurs $\phi(1) - 2\phi(S) = \langle c_S^*, Sc_S\rangle$ (appliquer la formule à $\sigma = \tau = S$), et comme $c_S = 0$, on obtient $\phi(S) = 0$.

Maintenant, si on applique la formule pour $\sigma = \tau = U$ et pour $\sigma = U$, $\tau = U^2$, on obtient

$$\langle c_U^*, Uc_U\rangle = \phi(U^2) - 2\phi(U), \quad \langle c_U^*, Uc_{U^2}\rangle = -\phi(U) - \phi(U^2)$$

Comme $Uc_{U^2} = c_{U^3} - c_U = -c_U$, on en tire $3\phi(U) = \langle c_U^*, (1-U)c_U\rangle$, et comme $c_U^* = c_S^*$, on obtient finalement,

$$3(c^* \cup c) = \langle c^*, (U+2)c\rangle = \langle c^*, (1-U^2)c\rangle$$

car l'adjoint de $U^2 + U + 1$ est $U^{-2} + U^{-1} + 1 = U + U^2 + 1$ qui tue c^*, et $U + 2 = (1-U^2) + (1 + U + U^2)$. □

Proposition 3.34. — *L'accouplement* $\cup$ *induit un isomorphisme (à* 6*-torsion près)*

$$H_c^1(\overline{\Gamma}, M^*) \cong H^1(\overline{\Gamma}, M)^*$$

Démonstration. — A 3-torsion près, on a $M = M^{U=1} \oplus M^{U^2+U+1=0}$ et $M^* = (M^*)^{U=1} \oplus (M^*)^{U^2+U+1=0}$. L'orthogonal de $M^{U=1}$ est $(M^*)^{U^2+U+1=0}$, et donc le dual de $M^{U^2+U+1=0}$ pour $\langle\ ,\ \rangle$ s'identifie à $(M^*)^{U^2+U+1=0}$. Comme $c \mapsto (1-U^2)c$ est un isomorphisme de $M^{1+U+U^2=0}$ (à 3-torsion près), il en est de même pour l'accouplement $\cup$.

Il s'ensuit (cf. formule (3.32)) que $H^1(\overline{\Gamma}, M)^* = (M^*)^{U^2+U+1=0} \cap ((U-1)M^{S=1})^\perp$ (où $\perp$ désigne l'orthogonal pour $\cup$). Or le membre de droite est l'ensemble des $c^* \in (M^*)^{U^2+U+1=0}$ vérifiant $\langle c^*, (1-U^2)(U-1)c\rangle = 0$ pour tout $c \in M^{S=1}$. Comme $(1-U^2)(U-1) = -(U^2+U+1) - 3$ et comme l'adjoint de U^2+U+1 est $U^{-2} + U^{-1} + 1 = U + U^2 + 1$ qui tue c^*, le membre de droite est aussi l'ensemble des $c^* \in (M^*)^{U^2+U+1=0}$ vérifiant $\langle c^*, 3c\rangle = 0$ pour tout $c \in M^{S=1}$. Comme cette dernière condition équivaut à $c^* \in (M^*)^{S+1=0}$ (à 2-torsion près), on en déduit le résultat grâce à la description (3.31) de $H^1_c(\overline{\Gamma}, M^*)$. □

Remarque 3.35. — (i) Si M est un $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-module, on en déduit un isomorphisme $H^1_c(\Gamma, M^*) \cong H^1(\Gamma, M)^*$ (à 12-torsion près).

(ii) L'isomorphisme dans l'autre sens $H^1(\Gamma, M) \cong H^1_c(\Gamma, M^*)^*$ n'est pas automatique, même si $(M^*)^* = M$: par exemple, si M est L-espace vectoriel topologique, il faut que $H^1(\Gamma, M)$ soit séparé ; si M est un $\mathscr{O}_L$-module sans torsion, il faut que $H^1(\Gamma, M)$ soit sans torsion.

Corollaire 3.36. — *Les groupes $H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C})$ et $H^1(\mathbb{G}, \mathrm{Mes})$ sont en dualité.*

Démonstration. — D'après le cor. 3.3 et la prop. 3.28, on a des isomorphismes :

$$H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}) \cong H^1_c(\Gamma, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L))$$
$$H^1(\mathbb{G}, \mathrm{Mes}) \cong H^1(\Gamma, \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), L))$$

La prop. 3.34 (cf. rem. 3.35) implique donc une dualité dans un sens. Pour en déduire celle dans l'autre sens, il suffit de vérifier que $H^1(\Gamma, \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L))$ est sans p-torsion, ce qui résulte de ce que $H^0(\Gamma, \mathrm{Mes}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), k_L)) = 0$ car une mesure invariante par Γ l'est aussi par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \subset \left(\begin{smallmatrix} 1 & \widehat{\mathbf{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ par continuité de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \widehat{\mathbf{Z}} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc est nulle (pas de mesure de Haar en p-adique). □

3.6. Cohomologie à support compact et vecteurs localement algébriques

3.6.1. Cohomologie des fonctions localement algébriques

Théorème 3.37. — *Si $X = \mathrm{LC}, \mathrm{LP}$, on a*

$$H^i_c(\mathbb{G}, X) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq 1, 2, \\ X(\widehat{\mathbf{Z}}^*) & si\ i = 2, \end{cases}$$

et on a une suite exacte de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$*-modules :*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \arrow[r] & \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} X(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) \arrow[r] & H^1_c(\mathbb{G}, X) \arrow[dll] \\ & H^1(\mathbb{G}, X) \arrow[r] & \big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} X(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big)^\vee \arrow[r] & X(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Commençons par calculer H^2_c. On a $H^i_c(\mathbb{G}, X) = H^i_c(\Gamma, X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))$ d'après la prop. 3.28. Par ailleurs, $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) = \mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} \widehat{\mathbf{Z}}^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, et donc $H^2_c(\mathbb{G}, X) \cong H^2_c(\Gamma, \mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes X(\widehat{\mathbf{Z}}^*)$, et on est ramené à prouver que $H^2_c(\Gamma, X(\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}))) = L$. Or $X(\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}))$ est une limite inductive de représentations de Γ de dimension finie (de la forme $\oplus_W \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{Z}/N)) \otimes (W \otimes W^*)$, la somme étant sur un ensemble fini de représentations algébriques irréductibles de $\mathbb{G}'(\mathbf{Q}_p)$). Il résulte de la prop.;3.29 que $H^2_c(\Gamma, X(\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}})))$ est le dual de $H^0(\Gamma, X(\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}))^*)$. Mais $H^0(\Gamma, -) = H^0(\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}), -)$ car Γ est dense dans $\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}})$. Utiliser l'action de l'algèbre de Lie permet de montrer que seule la partie correspondant à $W = 1$ contribue ; i.e. on obtient le même résultat pour $X = \mathrm{LC}$ que pour $X = \mathrm{LP}$. Maintenant, si $X = \mathrm{LC}$, il est facile de voir que la seule forme linéaire invariante (à multiplication près par un scalaire) est la [(8)] "mesure de Haar" μ définie par $\mu(\mathbf{1}_{\gamma K}) = \frac{1}{[\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}):K]}$ si K est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}})$, et $\gamma \in \mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}})$. On a donc $H^0(\Gamma, X(\mathbb{G}'(\widehat{\mathbf{Z}}))^*) \cong L$; on en déduit le résultat pour H^2_c.

Le reste de l'énoncé résulte d'une combinaison de la suite exacte (3.25) pour $M = X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$, du th. 2.22 qui donne la valeur de $H^i(B, M)$ pour tout i, et de la prop. 3.5 qui donne celle de $H^i(G, M)$ pour $i \neq 1$. □

Remarque 3.38. — Le th. 3.37 semble ne pas être compatible avec le th. 3.27 mais $H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$ est un L-espace vectoriel (cela résulte de la rem. 2.14 et de la prop. 2.20), et donc son image dans $H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$ est *a priori* nulle ; il n'est donc pas absurde que $H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = 0$ bien que $H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), \mathrm{LC}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \neq 0$.

3.6.2. Vecteurs localement algébriques. — Soit W une représentation algébrique de $\mathbb{G}$, que l'on voit comme une représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$ agissant à travers $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$. Tensoriser la suite exacte

$$0 \to \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \to \mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}})) \to H^1_c(\mathbb{G}, \mathscr{C}) \to H^1(\mathbb{G}, \mathscr{C}) \to 0$$

par W, fournit encore une suite exacte. Soit K un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$. D'après le lemme 3.20, on a $H^i(K, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \otimes W)$ si $i = 1, 2$. Il s'ensuit que

$$H^1(K, \big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big) \otimes W) \xrightarrow{\sim} H^1\big(K, \big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} \mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big)/\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*)\big) \otimes W\big)$$

8. Cette mesure n'est pas bornée ce qui explique qu'il n'y ait pas de vraie mesure de Haar comme nous l'avons affirmé dans la preuve du cor. 3.36).

et que l'on a une suite exacte
(3.39)

$$\begin{array}{c}
0 \to \big(\mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^*) \otimes W\big)^K \longrightarrow \big(\big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big) \otimes W\big)^K \longrightarrow \big(H^1_c(\mathbb{G},\mathscr{C}) \otimes W\big)^K \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow \\
H^1(K, \big(\mathrm{Ind}_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})}\mathscr{C}(\mathbb{L}(\widehat{\mathbf{Z}}))\big) \otimes W) \longleftarrow \big(H^1(\mathbb{G},\mathscr{C}) \otimes W\big)^K
\end{array}$$

Théorème 3.40. — $H^1_c(\mathbb{G},\mathscr{C})^{\mathrm{alg}} = H^1_c(\mathbb{G},\mathrm{LP})$

Démonstration. — Il suffit de prouver que, pour tout sous-groupe ouvert compact K de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et toute représentation algébrique W de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$, on a

$$H^0(K, H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \otimes W) = H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), H^0(K,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W))$$

En effet, si on fixe W et que l'on prend la limitive inductive sur K, le membre de gauche calcule la W^*-composante de $H^1_c(\mathbb{G},\mathscr{C})^{\mathrm{alg}}$ et le membre de droite celle de $H^1_c(\mathbb{G},\mathrm{LP})$: d'après la prop. 3.28, on a $H^1_c(\mathbb{G},\mathrm{LP}) = H^1_c(\Gamma,\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))$; par ailleurs

$$\begin{aligned}
H^1_c(\Gamma,\mathrm{LP}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))) &= \oplus_W H^1_c(\Gamma, \varinjlim_K H^0(K,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes W \otimes W^*)) \\
&= \oplus_W \varinjlim_K H^1_c(\Gamma, H^0(K,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) \otimes W)) \otimes W^* \\
&= \oplus_W \varinjlim_K H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), H^0(K,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W)) \otimes W^*
\end{aligned}$$

(le dernier isomorphisme se démontre comme la prop. 3.28).

Si Γ est un sous-groupe de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(\mathbf{A})$, posons $H^i(\Gamma) := H^i(\Gamma,\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W)$. On a les annulations suivantes :

- $H^i(\mathbb{B}(\mathbf{Q})) = 0$ si $i \geq 1$, d'après la prop. 2.19.
- $H^i(K) = 0$ si $i \geq 1$, car $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W = \prod_{g\in\mathbb{G}(\mathbf{A})/K}(\mathscr{C}(gK) \otimes W)$ et chaque $\mathscr{C}(gK) \otimes W$ est une induite de $\{1\}$ à K de W.
- $H^i(K, H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}))) = 0$ si $i = 1, 2$, d'après le lemme 3.20.

On a alors le diagramme commutatif suivant à colonnes exactes

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), H^0(K)) & = & H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times K) & = & H^0(K, H^0(\mathbb{G}(\mathbf{Q}))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), H^0(K)) & = & H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}) \times K) & = & H^0(K, H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), H^0(K)) & \to & H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times K) & \to & H^0(K, H^1_c(\mathbb{G}(\mathbf{Q}))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), H^0(K)) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times K) & \xrightarrow{\sim} & H^0(K, H^1(\mathbb{G}(\mathbf{Q}))) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}), H^0(K)) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q}) \times K) & \xleftarrow{\sim} & H^1(K, H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q})))
\end{array}$$

La première colonne est la suite (3.25) pour $M = \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W$, la seconde est l'analogue de la suite exacte précédente pour $B = \mathbb{B}(\mathbf{Q}) \times K$ et $G = \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times K$, et la troisième est la suite exacte (3.39). Les flèches des 4-ième et 5-ième lignes proviennent des applications d'inflation et restriction ; ce sont des isomorphismes grâce aux résultats d'annulation rappelés ci-dessus.

La commutativité du diagramme est immédiate sauf celle du carré en bas à droite. Pour la vérifier, partons d'un 1-cocycle $(\gamma, k) \mapsto \phi_{\gamma,k}$ sur $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times K$. Comme $H^1(\mathbb{B}(\mathbf{Q})) = 0$, on peut supposer $\phi_{\beta,1} = 0$ si $\beta \in \mathbb{B}(\mathbf{Q})$. La relation de cocycle donne alors $\phi_{\beta,k} = \beta\phi_{1,k} + \phi_{\beta,1} = \beta\phi_{1,k}$ et $\phi_{\beta,k} = k \cdot \phi_{\beta,1} + \phi_{1,k} = \phi_{1,k}$. Il s'ensuit que $\phi_{1,k} \in H^0(\mathbb{B}(\mathbf{Q}))$, et $k \mapsto \phi_{1,k}$ est le cocycle représentant l'image de $(\gamma, k) \mapsto \phi_{\gamma,k}$ dans $H^1(K, H^0(\mathbb{B}))$. Il est alors clair que son inflation à $\mathbb{B}(\mathbf{Q}) \times K$ est la restriction de $(\gamma, k) \mapsto \phi_{\gamma,k}$ à $\mathbb{B}(\mathbf{Q}) \times K$, ce qui prouve la commutativité.

Le lemme des 5 permet d'en déduire que les flèches de la 3-ième ligne sont des isomorphismes, ce qui permet de conclure. □

4. Le cas $\mathbb{G}$ général

4.1. Descente à un sous-groupe arithmétique. — On fixe un sous-groupe compact maximal $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ de $\mathbb{G}(\mathbf{A}^{]\infty[})$ comme dans le § 1.2. Soient $g_1, \dots, g_r$ des représentants des classes $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A})/\mathbb{G}(\mathbf{R})_+\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, et soit

$$\Gamma_i := \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \cap g_i\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+g_i^{-1}$$

Si $\alpha \in \Gamma_i$, alors $g_i^{-1}\alpha g_i = \alpha_i^{]\infty[}\alpha_{\infty,i}$ avec $\alpha_i^{]\infty[} \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ et $\alpha_{\infty,i} \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et $\alpha \mapsto \alpha_i^{]\infty[}$, $\alpha \mapsto \alpha_{\infty,i}$ sont des morphismes de groupes.

Proposition 4.1. — *Soit X une classe de fonctions telle que $\phi \in X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ si et seulement si $\kappa \mapsto \phi(x\kappa) \in X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ pour tout $x \in X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$. On a un isomorphisme de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$-modules*

$$X(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \cong \oplus_i \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}(X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))$$

Démonstration. — Il suffit de prouver que, pour $i = 1, \dots, r$, on a un isomorphisme de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$-modules

$$X(\mathbb{G}(\mathbf{Q})g_i\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+) \cong \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{\mathbb{G}(\mathbf{Q})}(X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))$$

où Γ_i agit sur $X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ par $(\alpha *_i \phi)(x) = \phi((\alpha_i^{]\infty[})^{-1}x)$.

Un élément de $\mathbb{G}(\mathbf{Q})g_i\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ s'écrit, sous la forme $\gamma^{-1}g_i\kappa x_\infty$, avec $\gamma \in \mathbb{G}(\mathbf{Q})$, $\kappa \in \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ et $x_\infty \in \mathbb{G}(\mathbf{R})_+$ et cette écriture est unique à changements simultanés $\gamma \mapsto \alpha\gamma$, $\kappa \mapsto \alpha_i^{]\infty[}\kappa$ et $x_\infty \mapsto \alpha_{\infty,i}x_\infty$, où $\alpha \in \Gamma_i$. Si $\phi \in X(\mathbb{G}(\mathbf{Q})g_i\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+)$, on définit $\phi_\gamma \in X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ par $\phi_\gamma(\kappa) := \phi(\gamma^{-1}g_i\kappa x_\infty)$ (et le résultat ne dépend pas de x_∞

pour les raisons habituelles). On a alors

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\gamma}(x) &= \phi(\gamma^{-1}\alpha^{-1}g_i\kappa x_\infty) = \phi(\gamma^{-1}g_i(g_i^{-1}\alpha^{-1}g_i)\kappa x_\infty)\\ &= \phi_\gamma((\alpha_i^{]\infty[})^{-1}\kappa) = \alpha *_i \phi(\kappa)\end{aligned}$$

ce qui fournit une flèche $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$-équivariante du membre de gauche dans le membre de droite. Réciproquement, si $(\phi_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{G}(\mathbf{Q})}$, on définit $\phi(\gamma^{-1}g_i\kappa x_\infty) := \phi_\gamma(\kappa)$, et le résultat est indépendant du choix de γ car $\phi_{\alpha\gamma} = \alpha *_i \phi$, si $\alpha \in \Gamma_i$. □

Il en résulte, via le lemme de Shapiro, que :

Corollaire 4.2. — *Si $r \geq 0$ et si $K^{]p[}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$, on a des isomorphismes :*

$$\begin{aligned}H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) &\cong \oplus_i H^r(\Gamma_i, X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))\\ H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), X(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[})) &\cong \oplus_i H^r(\Gamma_i, X(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}))\end{aligned}$$

Remarque 4.3. — Les résultats de la prop. 4.1 et du cor. 4.2 s'appliquent à $X = \mathscr{C}$, $\mathscr{C}^{(p)}$, LA, LP, LC, etc.

Corollaire 4.4. — *On a $H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L))$.*

Démonstration. — On utilise le cor. 4.2 pour desscendre de $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))$ à $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ et la compacité de $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))$ qui implique que $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L)$. □

4.2. La cohomologie de Γ_i

4.2.1. Admissibilité. — Soit K_∞ un sous-groupe compact maximal de $\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$. L'espace symétrique $\mathbb{G}(\mathbf{R})/K_\infty$ est contractile. Notons $Y(\Gamma_i)$ le quotient $\Gamma_i\backslash\mathbb{G}(\mathbf{R})/K_\infty$ (ce quotient peut être une orbifold si Γ_i est trop gros, comme dans le cas $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$).

Si M est un Γ_i-module, on transforme M en un système local $\underline{M}$ sur $Y(\Gamma_i)$ en considérant le quotient $\Gamma_i\backslash((\mathbb{G}(\mathbf{R})/K_\infty) \times M))$. On a alors $H^r(\Gamma_i, M) = H^r(Y(\Gamma_i), \underline{M})$. Ceci permet, en triangulant $Y(\Gamma_i)$, de représenter la cohomologie de Γ_i à valeur dans M comme celle d'un complexe

$$\mathrm{R}\Gamma(\Gamma_i, M) := M^{J_0} \to M^{J_1} \to M^{J_2} \to \cdots \to M^{J_d} \tag{4.5}$$

où les J_i sont des ensembles finis et d est la dimension de $Y(\Gamma_i)$. Notons que les J_i et les applications de connexion ne dépendent que de la triangulation et pas de M (comme dans le lemme 3.6).

Proposition 4.6. — *Si $K^{]p[}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$, et si $\Lambda = L, \mathscr{O}_L, \mathscr{O}_L/p^n$, les $H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[}, \Lambda))$ sont des Λ-représentations admissibles de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$.*

Démonstration. — Grâce au cor. 4.2, on se ramène à prouver le même énoncé pour $H^r(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}, \Lambda))$, et le résultat est une conséquence de ce que $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}, \Lambda)$ est admissible comme représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$, et donc le complexe $\mathrm{R}\Gamma(\Gamma_i, M)$ est un complexe de représentations admissibles de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$, et donc sa cohomologie est admissible comme représentation de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$ et donc aussi, par définition, de $\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p)$. □

4.2.2. Lien avec la cohomologie complétée d'Emerton. — Si $n \geq 1$, on a

$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L/p^n) = \varinjlim_K \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K, \mathscr{O}_L/p^n)$$
$$\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}, \mathscr{O}_L/p^n) = \varinjlim_K \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}K_p, \mathscr{O}_L/p^n)$$

où K (resp. K_p) décrit les sous-groupes ouverts de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ (resp. $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$).

On définit la cohomologie complétée d'Emerton par :

$$H^r_{\mathrm{Em}} := \oplus_i \varprojlim_n H^r(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L/p^n))$$
$$H^r_{\mathrm{Em}}(K^{]p[}) := \oplus_i \varprojlim_n H^r(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}, \mathscr{O}_L/p^n))$$

Proposition 4.7. — *On a un isomorphisme*

$$H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[}, \mathscr{O}_L)) \xrightarrow{\sim} H^r_{\mathrm{Em}}(K^{]p[})$$

Démonstration. — On a une suite exacte

$$\begin{array}{c} 0 \to \oplus_i \mathrm{R}^1 \varprojlim_n H^{r-1}(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}, \mathscr{O}_L/p^n)) \\ \downarrow \\ H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/K^{]p[}, \mathscr{O}_L)) \twoheadrightarrow H^r_{\mathrm{Em}}(K^{]p[}) \to 0 \end{array}$$

et il suffit de prouver que $\mathrm{R}^1 \varprojlim_n H^{r-1}(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}, \mathscr{O}_L/p^n)) = 0$.

Or $H^{r-1}(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}, \mathscr{O}_L/p^n))$ est une représentation admissible de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$, et donc toute suite décroissante de sous-représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{Z}_p)$ est stationnaire. Il s'ensuit que le système projectif ci-dessus vérifie le critère de Mittag-Leffler, ce qui permet de conclure. □

Question 4.8. — A-t-on $H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L)) \xrightarrow{\sim} H^r_{\mathrm{Em}}$? Comme ci-dessus, on a une suite exacte

$$0 \to \oplus_i \mathrm{R}^1 \varprojlim_n H^{r-1}(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}), \mathscr{O}_L/p^n)) \to H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}), \mathscr{O}_L)) \to H^r_{\mathrm{Em}} \to 0$$

mais l'argument d'admissibilité ci-dessus fait défaut pour prouver que $\mathrm{R}^i \varprojlim = 0$.

4.3. Vecteurs $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$-lisses

On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) & & H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})-\text{lisses}} \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \oplus_i H^r(\Gamma_i, \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))) & \longrightarrow & \oplus_i H^r(\Gamma_i, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))^{\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})-\text{lisses}} \end{array}$$

qui montre que la flèche naturelle $H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ atterrit dans les vecteurs $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$-lisses. Une question naturelle est de savoir si on obtient de la sorte un isomorphisme : c'est le cas si $\mathbb{G} = \mathbf{GL}_2$ d'après la prop. 3.14 (cf. rem. 3.12). Le cas où $\mathbb{G}$ est la restriction des scalaires de F à $\mathbf{Q}$ de $\mathbb{G}_m$ montre que cette question innocente est plus subtile qu'elle n'en a l'air : la flèche ci-dessus est un isomorphisme si et seulement si la conjecture de Leopoldt est vraie pour F (rem. 4.12). Dans le cas général, on a juste une suite spectrale reliant les deux termes (prop. 4.13).

4.3.1. Le cas de $\mathbf{GL}_1$ *sur un corps de nombres.* — Dans ce n°, on part d'un corps de nombres F, et on prend pour $\mathbb{G}$ le groupe algébrique $\mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}}\mathbf{GL}_1$. On a donc $\mathbb{G}(\Lambda) = (F \otimes_{\mathbf{Q}} \Lambda)^*$ pour toute $\mathbf{Q}$-algèbre Λ. En particulier,

$$\mathbb{G}(\mathbf{Q}) = F^*, \quad \mathbb{G}(\mathbf{R}) = (F \otimes \mathbf{R})^* = (\mathbf{R}*)^{r_1} \times (\mathbf{C}^*)^{r_2},$$
$$\mathbb{G}(\mathbf{Q}_p) = (F \otimes \mathbf{Q}_p)^* = \prod\nolimits_{v|p} F_v^*, \quad \mathbb{G}(\mathbf{A}) = (F \otimes \mathbf{A})^*$$

Notons que $F^*\backslash(F \otimes \mathbf{A})^*/(F \otimes \mathbf{R})_+^* \cong G_F^{\mathrm{ab}}$ d'après la théorie du corps de classes.

Proposition 4.9. — *On a*

$$H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = \begin{cases} \mathscr{C}(F^*\backslash(F \otimes \mathbf{A})^*/(F \otimes \mathbf{R})_+^*) & si\ i = 0 \\ 0, & si\ i \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Le cas $i = 0$ est immédiat sur les définitions, compte-tenu du fait qu'une fonction continue sur $(F \otimes \mathbf{R})_+^*$, à valeurs dans L, est constante.

Posons $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}) = (\mathscr{O}_F \otimes \widehat{\mathbf{Z}})^*$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ des représentants du groupe des classes $\mathbb{G}(\mathbf{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbf{A})/\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+$. Alors $\Gamma_i := \mathbb{G}(\mathbf{Q}) \cap \alpha_i \mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})\mathbb{G}(\mathbf{R})_+ \alpha_i^{-1}$ est indépendant de i car on est dans un groupe commutatif, et est égal au groupe U_F des unités totalement positives de $\mathscr{O}_F$. On déduit du cor. 4.2 et de la commutativité de $\mathbb{G}$, que

$$H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \cong H^i(U_F, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))^{\oplus h}$$

Maintenant, si $\widehat{U}_F$ désigne l'adhérence de l'image de U_F dans le groupe profini $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, on peut décomposer $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, en tant que U_F-ensemble, sous la forme $\widehat{U}_F \times X$, où X est un ensemble profini muni d'une action triviale de U_F (prendre une section ensembliste continue de la projection de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$ sur $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/\widehat{U}_F$). On a alors $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})) \cong \mathscr{C}(\widehat{U}_F)\widehat{\otimes}\mathscr{C}(X)$, et on se ramène à prouver que $H^i(U_F, \mathscr{C}(\widehat{U}_F)) = 0$ si $i \geq 1$.

La prop. 4.10 ci-dessous fournit un isomorphisme naturel $(U_F \otimes \widehat{\mathbf{Z}}) \xrightarrow{\sim} \widehat{U}_F$ de groupes topologiques. On conclut en utilisant le fait que $H^i(\mathbf{Z}^d, \mathscr{C}(\widehat{\mathbf{Z}}^d)) = 0$, si $i \geq 1$ (cf. preuve de la prop. 2.2). $\square$

Proposition 4.10. — *L'application naturelle $(U_F \otimes \widehat{\mathbf{Z}}) \to \widehat{U}_F$ est un isomorphisme de groupes topologiques.*

Démonstration. — Cela résulte d'un théorème de Chevalley [**2**] selon lequel tout sous-groupe d'indice fini de U_F est de congruence (i.e. contient $U_F(N) = U_F \cap \mathrm{Ker}(\mathscr{O}_F^* \to (\mathscr{O}_F/N)^*)$ pour un certain N). En effet, $\widehat{U}_F$ est le complété de U_F par rapport aux sous-groupes de congruences, tandis que $U_F \otimes \widehat{\mathbf{Z}}$ est le complété profini de U_F (i.e. le complété par rapport à tous les sous-groupes d'indice fini). Le théorème de Chevalley implique que les deux systèmes de sous-groupes considérés sont cofinaux et donc que les deux complétés sont les mêmes. $\square$

Remarque 4.11. — On conjecture (conjecture de Leopoldt) que l'application naturelle $(U_F \otimes \mathbf{Z}_p) \to (\mathscr{O}_F \otimes \mathbf{Z}_p)^*$ est injective.

Remarque 4.12. — Hill [**8**] a montré que $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = 0$ pour tout $i \geq 1$ si et seulement si la conjecture de Leopoldt est vraie pour (F,p). Il s'ensuit que $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})\text{-lisses}}$, pour tout i, si et seulement si la conjecture de Leopoldt est vraie pour (F,p).

4.3.2. Le cas général. — Si H est un sous-groupe fermé de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, on a deux suites spectrales de Hochschild-Serre convergeant vers $H^{i+j}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times H, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$, à savoir $H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), H^j(H, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))))$ et $H^i(H, H^j(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$. Or, dans la première, tous les termes sont nuls sauf ceux correspondant à $j = 0$ (représentation induite). On a donc $H^{i+j}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}) \times H, \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = H^{i+j}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/H))$, et la suite spectrale de terme $E_2^{i,j} = H^i(H, H^j(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))))$ converge vers $H^{i+j}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})/H))$. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 4.13. — *La suite spectrale de terme*

$$E_2^{i,j} := \varinjlim_{K^{]p[}} H^i(K^{]p[}, H^j(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))))$$

converge vers $H^{i+j}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}), \mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$.

Remarque 4.14. — Si W est une représentation algébrique irréductible de $\mathbb{G}$, on peut utiliser la technique ci-dessus pour $\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})) \otimes W$ et H un sous-groupe ouvert compact de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})$, pour retrouver la suite spectrale d'Emerton [**5**, th. 0.5].

4.4. Vecteurs localement analytiques

On a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) & & H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\mathrm{an}} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \oplus_i H^r(\Gamma_i,\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}))) & \longrightarrow & \oplus_i H^r(\Gamma_i,\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})))^{\mathrm{an}} \end{array}$$

qui montre que la flèche naturelle $H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ atterrit dans les vecteurs localement analytiques.

Proposition 4.15. — *La flèche $H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to H^r(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))^{\mathrm{an}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de le prouver pour les vecteurs fixes par $K^{]p[}$, où $K^{]p[}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}}^{]p[})$, et on est ramené à prouver que la flèche naturelle

$$H^r(\Gamma_i,\mathrm{LA}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[})) \to H^r(\Gamma_i,\mathscr{C}^{(p)}(\mathbb{G}(\widehat{\mathbf{Z}})/K^{]p[}))^{\mathrm{an}}$$

est un isomorphisme. Cela résulte de :
- l'existence du complexe (4.5) calculant la cohomologie de Γ_i,
- l'exactitude du foncteur “vecteurs localement analytiques” pour les représentations admissibles [**11**]. □

4.5. Cohomologie à support compact

Si $\mathbb{P}$ est un parabolique de $\mathbb{G}$, la restriction fournit une application naturelle du complexe $\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ des cochaines sur $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$ dans le complexe $\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ des cochaines sur $\mathbb{P}(\mathbf{Q})$. On définit la *cohomologie à support compact* $H^i_{\mathrm{c}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))$ comme la cohomologie du cône

$$\Big[\mathrm{R}\Gamma(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to \bigoplus_{\mathbb{P}\,\mathrm{mod}\sim} \mathrm{R}\Gamma(\mathbb{P}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A})))\Big].$$

On a une suite exacte longue

$$\begin{array}{l} \cdots \to H^i_{\mathrm{c}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \longrightarrow H^i(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \\ \qquad \bigoplus_{\mathbb{P}\,\mathrm{mod}\sim} H^i(\mathbb{P}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to H^{i+1}_{\mathrm{c}}(\mathbb{G}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) \to \cdots \end{array}$$

Soit $\mathbb{P}=\mathbb{U}\mathbb{L}$ un parabolique de $\mathbb{G}$, où $\mathbb{L}$ est le lévi de $\mathbb{P}$ et $\mathbb{U}$ est unipotent.

Proposition 4.16. — *On a un isomorphisme de représentations de $\mathbb{G}(\mathbf{A})$.*

$$H^i(\mathbb{P}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{G}(\mathbf{A}))) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}(\mathbf{A})}^{\mathbb{G}(\mathbf{A})} H^i(\mathbb{L}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{L}(\mathbf{A}))),$$

où $\mathbb{P}(\mathbf{A})$ agit sur $H^i(\mathbb{L}(\mathbf{Q}),\mathscr{C}(\mathbb{L}(\mathbf{A})))$ à travers la surjection naturelle $\mathbb{P}(\mathbf{A}) \to \mathbb{L}(\mathbf{A})$.

Démonstration. — Pour alléger les notations, on note $\mathbb{G}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{U}$, les groupes $\mathbb{G}(\mathbf{A})$, $\mathbb{P}(\mathbf{A})$, $\mathbb{L}(\mathbf{A})$, $\mathbb{U}(\mathbf{A})$, et G, P, L, U, les groupes $\mathbb{G}(\mathbf{Q})$, $\mathbb{P}(\mathbf{Q})$, $\mathbb{L}(\mathbf{Q})$, $\mathbb{U}(\mathbf{Q})$.

On fait agir $b \in \mathbb{P}$ sur $\mathbb{P}\times\mathbb{G}$ par $b\cdot(x,y) = (xb, b^{-1}y)$, $\beta \in \mathrm{P}$ par $\beta\cdot(x,y) = (\beta^{-1}x, y)$ et $g \in \mathbb{G}$ par $g\cdot(x,y) = (x, yg)$ (ces trois actions sont des actions à droite et commutent deux à deux). Cela induit des actions à gauche sur $\mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G})$. On a

$$\mathscr{C}(\mathbb{G}) = \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}}\mathscr{C}(\mathbb{P}) = H^0(\mathbb{P}, \mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G}))$$

On en déduit des isomorphismes

$$\begin{aligned} H^i\big(\mathrm{P}, \mathscr{C}(\mathbb{G})\big) &\cong H^i\big(\mathrm{P}, H^0(\mathbb{P}, \mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G}))\big) \\ &\cong H^i\big(\mathrm{P}\times\mathbb{P}, \mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G})\big) \\ &\cong H^0\big(\mathbb{P}, H^i(\mathrm{P}, \mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G}))\big) \\ &\cong H^0\big(\mathbb{P}, H^i(\mathrm{P}, \mathscr{C}(\mathbb{P}))\,\widehat{\otimes}\,\mathscr{C}(\mathbb{G})\big) \\ &\cong \mathrm{Ind}_{\mathbb{P}}^{\mathbb{G}} H^i\big(\mathrm{P}, \mathscr{C}(\mathbb{P})\big) \end{aligned}$$

En effet, le premier isomorphisme résulte de ce qui précède, le dernier est la définition de l'induite et l'avant-dernier résulte de ce que P agit trivialement sur le facteur $\mathbb{G}$ de $\mathbb{P}\times\mathbb{G}$. Pour établir les deux isomorphismes restant, il suffit de prouver que tous les autres termes des suites spectrales convergeant vers $H^i(\mathrm{P}\times\mathbb{P}, \mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G}))$ sont nuls, ce qui nous faisons après un petit interlude.

Remarque 4.17. — Soient G un groupe topologique, X une classe de fonctions [9], et M un G-module tel que les orbites sont de classe X. On munit $X(G,M)$ de l'action de G donnée par $(g\cdot\phi)(x) = g\cdot\phi(g^{-1}x)$. Alors, $m \mapsto \alpha_m$, avec $\alpha_m(x) = x\cdot m$, est un isomorphisme de M sur $H^0(G, X(G,M))$.

Soit $\iota : X(G,M) \to X(G, H^0(G, X(G,M)))$ l'application définie par $\iota(\phi)(z) = \alpha_{z^{-1}\cdot\phi(z)}$. Si on munit $X(G, H^0(G, X(G,M)))$ de l'action de $g \in G$ donnée par $(g\cdot\Phi)(z) = \Phi(g^{-1}z)$, alors ι est un isomorphisme G-équivariant, l'isomorphisme inverse s'obtenant en composant les applications naturelles

$$X(G, H^0(G, X(G,M))) \hookrightarrow X(G, X(G,M)) = X(G\times G, M) \to X(G,M)$$

où la dernière flèche est $\phi^{(2)} \mapsto \phi$ avec $\phi(x) = \phi^{(2)}(x,x)$; l'application composée $X(G,M) \to X(G\times G, M)$ est $\phi \mapsto \phi^{(2)}$, avec $\phi^{(2)}(z,t) = tz^{-1}\cdot\phi(z)$. Comme $X(G, H^0(G, X(G,M))) \cong X(G)\,\widehat{\otimes}\,H^0(G, X(G,M))$, cela fournit un isomorphisme G-équivariant

$$X(G,M) \cong X(G)\,\widehat{\otimes}\,H^0(G, X(G,M))$$

où $g \in G$ agit trivialement sur $H^0(G, X(G,M))$ et par $(g\cdot\phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$ sur $X(G)$.

9. Pour la prop. 4.16, telle qu'elle est énoncée, on n'a besoin que de $X = \mathscr{C}$, mais sa preuve s'adapterait pour d'autres X (mais pas tous).

Revenons à la preuve de la prop. 4.16.

• En tant que $\mathbb{P}$-module, $\mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G})\cong\mathscr{C}(\mathbb{P})\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{G})$ (avec action diagonale) est isomorphe à $\mathscr{C}(\mathbb{P})\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{G})$ avec action triviale sur $\mathscr{C}(\mathbb{G})$ et donc

$$H^j(\mathbb{P},\mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G}))\cong H^j(\mathbb{P},\mathscr{C}(\mathbb{P}))\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{G})$$

est nul si $j\geq 1$ puisque $H^j(\mathbb{P},\mathscr{C}(\mathbb{P}))=0$ (lemme de Shapiro). A fortiori, si $j\geq 1$,

$$H^{i-j}(\mathrm{P},H^j(\mathbb{P},\mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G})))=0$$

• De même, $H^{i-j}(\mathrm{P},\mathscr{C}(\mathbb{P}\times\mathbb{G}))\cong H^{i-j}(\mathrm{P},\mathscr{C}(\mathbb{G})\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{P}))$, avec action diagonale de $\mathbb{P}$, est isomorphe à $H^{i-j}(\mathrm{P},\mathscr{C}(\mathbb{G}))\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{P})$, avec action triviale de $\mathbb{P}$ sur $H^{i-j}(\mathrm{P},\mathscr{C}(\mathbb{G}))$. On en déduit que

$$H^j(\mathbb{P},H^{i-j}(\mathrm{P},\mathscr{C}(\mathbb{G}))\widehat{\otimes}\mathscr{C}(\mathbb{P}))=0$$

si $j\geq 1$ puisque $H^j(\mathbb{P},\mathscr{C}(\mathbb{P}))=0$.

Pour conclure, il suffit donc de prouver que $H^i(\mathrm{P},\mathscr{C}(\mathbb{P}))\cong H^i(\mathrm{L},\mathscr{C}(\mathbb{L}))$. Or un dévissage à partir du cas de $\mathbf{G}_a$ (prop. 2.2) nous donne

$$H^i(\mathrm{U},\mathscr{C}(\mathbb{U}))=\begin{cases}L & \text{si } i=0,\\ 0 & \text{si } i\geq 1.\end{cases}$$

D'où l'on déduit que

$$H^i(\mathrm{U},\mathscr{C}(\mathbb{P}))=\begin{cases}\mathscr{C}(\mathbb{L}) & \text{si } i=0,\\ 0 & \text{si } i\geq 1.\end{cases}$$

et on conclut en utilisant la suite exacte $1\mapsto\mathrm{U}\to\mathrm{P}\to\mathrm{L}\to 1$ et la suite spectrale associée à ce dévissage de P. □

Références

[1] F. Calegari, M. Emerton, Completed cohomology : a survey, *Nonabelian Fundamental Groups and Iwasawa Theory*, London Math. Soc. Lect. Notes **393** (2011), 239–257. 2, 3, 4

[2] C. Chevalley, Deux théorèmes d'arithmétique, J. Math. Soc. Japan **3** (1951), 36–44. 34

[3] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, Sém. Bourbaki 2002-2003, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251–319. 2

[4] P. Colmez, S. Wang, Une factorisation de la cohomologie complétée et du système de Beilinson-Kato, `arXiv:2104.09200[math.NT]`, preprint 2021 (nouvelle version 2024). 2, 3

[5] M. Emerton, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, Invent. math. **164** (2006), 1–84. 2, 21, 22, 34

[6] M. Emerton, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure and Applied Math. Quarterly **2** (2006), 279–393. (special issue in honour of John Coates' 60th birthday). 22

[7] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, preprint 2008 ! 3

[8] R. Hill, On Emerton's p-adic Banach spaces, IMRN **2010** (2010), 3588–3632. 2, 4, 34

[9] M. Lazard, Groupes analytiques p-adiques, Publ. IHES **26** (1965), 389–603. 21

[10] P. Schneider, J. Teitelbaum, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. **127** (2002), 359–380. 19

[11] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. Math. **153** (2003), 145–196. 22, 35

[12] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, University Lecture Series **66**, AMS 2016. 20

Pierre Colmez, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbaonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr