UNE REMARQUE

par

Pierre Colmez

La conj. 0.4, combinée avec le (ii) du th. 0.3, fournit une formule conjecturale pour la hauteur de Faltings d'une variété abélienne à multiplication complexe par l'anneau des entiers de son corps de multiplication complexe. On peut se demander "quelle portion" de la conj. 0.4 découle de la conjecture sur les hauteurs de Faltings ; le résultat suivant montre que c'est "la moitié" (par contre, la conjecture "en moyenne" ne fournit qu'une toute petite partie de la conj. 0.4).

Proposition 0.1. — *Le sous-espace de $\mathscr{CM}^0$ engendré par les $A^0_{E,\Phi}$ est l'espace des fonctions paires de $\mathscr{CM}^0$* (i.e. $\phi(g^{-1}) = \phi(g)$, pour tout $g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$).

Démonstration. — On a $A_{E,\Phi}(g) = |\Phi \cap g\Phi| = |g^{-1}\Phi \cap \Phi|$ et donc $A_{E,\Phi}$ est paire. Comme symétriser une fonction paire donne une fonction paire, $A^0_{E,\Phi}$ est aussi paire. L'orthogonal des constantes dans l'espace des fonctions paires de $\mathscr{CM}$ est de codimension 1 et comme $A_{E,\Phi}$ n'appartient pas à cet orthogonal, il suffit de prouver que l'espace engendré par les $A_{E,\Phi}$ contient cet orthogonal.

On définit $b_{E,\sigma,\tau}$ par

$$b_{E,\sigma,\tau}(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g\sigma = \tau, \\ -1 & \text{si } g\sigma = c\tau, \\ 0 & \text{si } g\sigma \neq \tau, c\tau. \end{cases}$$

Les $b_{E,\sigma,\tau}$ forment une famille génératrice de l'orthogonal des constantes dans $\mathscr{CM}$ et on a

$$b_{E,c\sigma,\tau} = b_{E,\sigma,c\tau} = -b_{E,\sigma,\tau}, \quad b_{E,c\sigma,c\tau} = b_{E,\sigma,\tau}$$

De plus, $b_{E,\sigma,\tau}(g^{-1}) = b_{E,\tau,\sigma}(g)$; on en déduit que les $b_{E,\sigma,\tau} + b_{E,\tau,\sigma}$ forment une famille génératrice de l'orthogonal des constantes dans l'espace des fonctions paires.

On écrit $2A_{E,\Phi} = |\Phi| + B_{E,\Phi}$ de telle sorte que $B_{E,\Phi}(g) + B_{E,\Phi}(cg) = 0$ pour tout g. Alors

$$B_{E,\Phi} = \sum_{\sigma,\tau\in\Phi} b_{E,\sigma,\tau}$$

Si on écrit $\Phi = \Psi \sqcup \{\alpha, \beta\}$, on fabrique des types CM

$$\Phi_{00} = \Phi, \quad \Phi_{01} = \Psi \sqcup \{\alpha, c\beta\}, \quad \Phi_{10} = \Psi \sqcup \{c\alpha, \beta\}, \quad \Phi_{11} = \Psi \sqcup \{c\alpha, c\beta\}$$

Alors

$$B_{E,\Phi_{00}} - B_{E,\Phi_{10}} - B_{E,\Phi_{01}} + B_{E,\Phi_{11}} = 4(b_{E,\alpha,\beta} + b_{E,\beta,\alpha})$$

On en déduit que l'espace engendré par les $A_{E,\Phi}$ contient une famille génératrice de l'espace des fonctions paires de $\mathscr{C}\mathscr{M}$, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque 0.2. — Il est facile d'écrire une fonction paire comme combinaison linéaire de 1 et des $b_{E,\sigma,\tau} + b_{E,\tau,\sigma}$; la preuve de la proposition fournit une formule permettant de transformer une telle expression en une combinaison linéaire des $A_{E,\Phi}$.

Pierre Colmez, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr