Prolongement analytique des séries d'Eisenstein

Pierre Colmez

Dans cette note, on donne, utilisant des idées provenant de la construction des fonctions L p-adiques, une démonstration du prolongement analytique des séries d'Eisenstein (pour SL_2). Le principe est le suivant: on utilise l'analyticité de tous les termes (sauf le terme constant) du développement de Fourier de la série d'Eisenstein convenablement normalisée, pour en tirer des conclusions sur le terme constant. Nous n'avons traité que le cas de la fonction ζ, mais la généralisation aux séries d'Eisenstein pour SL_2 d'un corps de nombre arbitraire ne devrait pas trop poser de problème une fois la démonstration traduite dans le language adélique. Les seuls ingrédients utilisés sont:

— existence et prolongement analytique des modèles de Whittaker locaux,

— décroissance rapide à l'infini des fonctions du modèle de Whittaker à l'infini,

— calcul du coefficient de proportionnalité dans l'opérateur faisant passer de la représentation (en tant que représentation induite) à son modèle de Whittaker; c'est ce qui fait apparaitre les facteurs locaux des fonctions L.

Il n'est pas impossible que la méthode puisse s'étendre à d'autre groupes que SL_2. Le principal intérêt de la méthode par rapport aux méthodes usuelles pour démontrer des prolongements analytiques de fonctions L en utilisant les séries d'Eisenstein est que l'on traite directement une fonction L au lieu d'avoir à faire à des quotients de fonctions L et que l'analyse est réduite au strict minimum.

Soit $\Gamma = SL_2(\mathbf{Z})$. Faisons agir Γ sur le demi-plan de Poincaré et soit Γ_∞ le stabilisateur de la pointe à l'infini. Soit $E(s,z)$ la série d'Eisenstein donnée par la formule

$$E(s,z) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} Im(\gamma z)^s.$$

Cette série converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et nous définit une fonction périodique sur le demi-plan de Poincaré. Des calculs classiques nous donnent le développement de Fourier de $E(s,z)$; on obtient

$$E(s,z) = y^s + \frac{\xi(2s-1)}{\xi(2s)} y^{1-s} + \frac{\sqrt{y}}{\xi(2s)}\Big(\sum_{n\neq 0} \sigma_{1-2s}(|n|)|n|^{s-\frac12} K_{s-\frac12}(\pi|n|y)e^{2i\pi nx}\Big),$$

où $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)$ est la fonction ξ de Riemann, $\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s$ et K_s est donnée par la formule

$$K_s(y) = \int_0^{+\infty} \exp\Big(-y\Big(u + \frac{1}{u}\Big)\Big)u^s \frac{du}{u}.$$

Il est clair sur la formule que K_s est à décroissance rapide à l'infini et que $K_s = K_{-s}$. Cela peut aussi se voir en utilisant l'équation différentielle satisfaite par K_s, équation provenant du fait que $E(s, z)$ est une fonction propre du laplacien, et qui s'écrit

$$y^2 K"_s - yK'_s - 4y^2 K_s = s^2 K_s.$$

On a envie de simplifier l'expression de $E(s, z)$ en multipliant tout par $\xi(2s)$. Cette opération correspond, dans le langage des représentations, à prendre le vecteur canonique du modèle de Whittaker. L'intérêt de faire ceci est que toute la complication arithmétique se trouve concentrée dans le terme constant; les autres termes sont alors produits de fonctions simples (et qui doivent avoir une interprétation très simple dans le langage des représentations), la plus compliquée étant la fonction $K_{s-\frac{1}{2}}$ qui doit s'interpréter en termes du modèle de Whittaker à l'infini.

Posons donc $G(s, z) = \xi(2s)E(s, z)$ et $a_0(s, y) = \xi(2s)y^s + \xi(2s - 1)y^{1-s}$. La décroissance rapide de $K_{s-\frac{1}{2}}$ prouve que $G(s, z) - a_0(s, y)$ admet un prolongement holomorphe à tout le plan complexe, prolongement que nous noterons $b(z, s)$. D'autre part, comme $G(s, z)$ est une forme modulaire pour Γ, on a $G(s, z) = G(s, -\frac{1}{z})$ si $\mathrm{Re}(s) > 1$. Ce qui nous donne, prenant z de la forme iy,

$$a_0(s, y) - a_0(s, y^{-1}) = b(s, iy^{-1}) - b(s, iy).$$

Le membre de droite de cette identité a un prolongement holomorphe à tout le plan complexe, il en est donc aussi ainsi du membre de gauche. Prenant alors deux valeurs différentes de y, on obtient un système linéaire permettant de calculer $\xi(2s)$ et $\xi(2s - 1)$, d'où le prolongement méromorphe de $\xi(2s)$ (et celui de $G(s, z)$). D'autre part, les pôles éventuels de $\xi(2s)$ sont contenus dans l'intersection des zéros des différents determinants des systèmes obtenus en laissant varier les deux valeurs de y; ce qui nous donne le fait que $\xi(2s)$ est holomorphe en dehors de pôles simples éventuels en $s = 0, \frac{1}{2}$. De plus, on a $b(s, z) = b(1-s, z)$, comme on peut le constater facilement en utilisant l'équation fonctionnelle de K_s et de σ_s. Donc $G(s, z) - G(1 - s, z) = y^s(\xi(2s) - \xi(1 - 2s)) + y^{1-s}(\xi(2s - 1) - \xi(2 - 2s))$ est une forme modulaire, et si on utilise l'invariance par le changement de y en y^{-1}, on obtient l'équation fonctionnelle de ξ. Finalement, Si $\mathrm{Re}(2s) = 1$, alors $2s-1 = \overline{1 - 2s}$ et l'équation fonctionnelle de ξ alliée à l'identité $\xi(\overline{s}) = \overline{\xi(s)}$ montre que si $\mathrm{Re}(2s) = 1$ et $\xi(2s) = 0$, alors la forme $G(s, z)$ est parabolique. Comme c'est une série d'Eisenstein, cela implique qu'elle est orthogonale à elle-même pour le produit scalaire de Petersson et donc qu'elle est identiquement nulle, ce qui est absurde car la fonction $K_{s-\frac{1}{2}}$ n'est pas identiquement nulle et l'indépendance linéaire des $\log p$ sur $\mathbf{Q}$ implique qu'au plus un des $\sigma_{1-2s}(p)$ est nul quand p décrit les nombres premiers. On obtient donc ainsi la non-annulation de ξ (et donc de ζ) sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$.