INVARIANTS $\mathscr{L}$ ET DÉRIVÉES DE VALEURS PROPRES DE FROBENIUS

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous donnons une formule pour l'invariant-$\mathscr{L}$ de Fontaine d'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en termes de dérivées de valeurs propres de Frobenius. Combinée avec des résultats de Stevens et de Kisin, cette formule fournit une nouvelle démonstration de l'égalité des invariants-$\mathscr{L}$ de Fontaine et Coleman attachés aux formes modulaires.

Abstract. — We give a formula for Fontaine's $\mathscr{L}$-invariant attached to a 2-dimensional semi-stable representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ in terms of derivatives of eigenvalues of Frobenius. Combined with results of Stevens and Kisin, this gives a new proof of the equality between Fontaine's and Coleman's $\mathscr{L}$-invariants attached to modular forms.

Table des matières

Introduction 1
1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine 4
2. E-(φ, N)-modules filtrés 5
3. La représentation $W_{\mathscr{L},i}$ 6
4. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$ et sa cohomologie galoisienne 8
5. Cohomologie galoisienne de $W_{\mathscr{L},i}$ 9
6. Démonstration du résultat principal 10
Références 12

Introduction

0.1. Invariants $\mathscr{L}$ de formes modulaires. — Si f est une forme primitive de poids k_0 pair et niveau N divisible par p, vecteur propre pour[(1)] T_p pour la valeur propre $p^{k_0/2-1}$, la fonction L p-adique de f a un zéro supplémentaire en $s = k_0/2$. Mazur, Tate et Teitelbaum [**14**] ont conjecturé l'existence d'un invariant $\mathscr{L}(f)$ ne dépendant de f que « localement en p », tel que l'on ait[(2)]

$$L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}(f) \cdot L(f, k_0/2).$$

(1) Il s'agit de l'opérateur T_p de niveau N divisible par p, c'est-à-dire l'opérateur U_p d'Atkin-Lehner.

(2) Pour que la formule ci-dessous ait un sens, il faut considérer L_p comme à valeurs dans le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par les périodes de f.

Si $k_0 = 2$ et si les coefficients de Fourier de f sont rationnels, il correspond à f une courbe elliptique E, définie sur $\mathbf{Q}$, ayant mauvaise réduction multiplicative déployée en p. D'après le théorème d'uniformisation de Tate, il existe alors $q \in \mathbf{Q}_p^*$ de valuation non nulle, tel que E soit isomorphe, en tant que variété rigide, à $\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, et on a $\mathscr{L}(f) = \frac{\log q}{v_p(q)}$. Dans le cas général, deux définitions de l'invariant $\mathscr{L}(f)$ ont été proposées : l'une par Coleman [**1**] et l'autre par Fontaine [**15**]. L'invariant $\mathscr{L}_{\rm Col}(f)$ de Coleman est défini via la théorie de l'intégration p-adique de Coleman et l'invariant $\mathscr{L}_{\rm Fon}(f)$ de Fontaine est défini via le (φ, N)-module filtré de la restriction à un groupe de décomposition en p de la représentation galoisienne V_f associée à f. On dispose des résultats suivants :

Théorème 0.1 **(Stevens)**. — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\rm Col}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.2 **(Kato-Kurihara-Tsuji)**. — $L_p'(f, k_0/2) = \mathscr{L}_{\rm Fon}(f) \cdot L(f, k_0/2)$.

Théorème 0.3 **(Coleman-Iovita)**. — $\mathscr{L}_{\rm Col}(f) = \mathscr{L}_{\rm Fon}(f)$.

Le théorème de Coleman-Iovita est bien évidemment une conséquence des théorèmes de Stevens et de Kato-Kurihara-Tsuji, mais leur démonstration [**3**], qui se fait en déformant une courbe modulaire sur une famille de $\mathbf{P}^1$, est bien plus directe que celle obtenue en utilisant ces deux théorèmes.

La démonstration de Kato-Kurihara-Tsuji (non rédigée, mais voir [**17, 7**]) repose sur la construction, par Kato [**12**], d'un système d'Euler pour la représentation V_f dont l'image par l'exponentielle de Perrin-Riou [**16**] redonne la fonction $L_p(f, s)$ (la démonstration de ce dernier fait repose sur la loi de réciprocité explicite de Kato [**11**] dont la démonstration est très délicate).

La démonstration de Stevens en poids quelconque est une généralisation de celle qu'il avait obtenue avec Greenberg [**8**] en poids 2 ; elle repose sur les familles de formes modulaires p-adiques et leurs fonctions L. Coleman a construit [**2**], en interpolant(3) des formes modulaires classiques, une famille analytique de formes modulaires p-adiques f_x, pour $x \in \mathscr{X}$, où $\mathscr{X}$ est une boule fermée de $\mathbf{C}_p$ contenant k_0, avec $f_{k_0} = f$. Cette famille est propre pour tous les opérateurs de Hecke et les valeurs propres dépendent analytiquement de $x \in \mathscr{X}$; c'est en particulier le cas de la valeur propre a_p de T_p. Le lien entre $\mathscr{L}_{\rm Col}(f)$ et a_p est le suivant (cf. [**21**]).

Théorème 0.4 **(Stevens)**. — $\mathscr{L}_{\rm Col}(f) = -2a_p(k_0)^{-1} \cdot a_p'(k_0)$.

Dans cet article, nous démontrons (cf. th. 0.5 et cor. 0.7) une formule analogue pour l'invariant $\mathscr{L}_{\rm Fon}(f)$ en utilisant la famille de représentations galoisiennes attachée à la famille des f_x.

0.2. Familles analytiques de représentations galoisiennes de dimension 2. — Soit S une algèbre de Tate, i.e. un quotient d'une algèbre $\mathbf{Q}_p\{X_1, \dots, X_n\}$ de séries convergeant sur la boule unité fermée. L'espace analytique $\mathscr{X}$ associé à S est l'ensemble des morphismes continus de S dans $\mathbf{C}_p$, la topologie sur $\mathscr{X}$ étant celle de la convergence faible. Si $x \in \mathscr{X}$, on note E_x l'adhérence dans $\mathbf{C}_p$ du sous-corps engendré par l'image de S par x. Si E est un sous-corps de $\mathbf{C}_p$, on définit $\mathscr{X}(E)$ comme l'ensemble des $x \in \mathscr{X}$ vérifiant $E_x \subset E$. On voit un élément s de S comme une fonction analytique sur $\mathscr{X}$, en posant $s(x) = x(s)$.

(3)Si $k \in \mathbf{N}$ est un élément de $\mathscr{X}$ tel que $v_p(a_p(k)) < k - 1$, alors f_k est une forme modulaire classique de poids k et conducteur N.

Soit V une S-représentation de dimension 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un S-module libre de rang 2 muni d'une action S-linéaire continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Choisissons une base v_1, v_2 de V sur S et notons $A_\sigma \in \mathbf{GL}_2(S)$ la matrice de $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base. Si $x \in \mathscr{X}$, on note V_x la E_x-représentation de dimension 2, pour laquelle la matrice de $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est $A_\sigma(x)$. La fonction $x \mapsto A_\sigma(x)$ étant analytique, la famille de représentations V_x, $x \in \mathscr{X}$ définie par V est « analytique » et V est une *famille analytique de représentations de* $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ *de dimension* 2.

Soit $\psi_1 : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Q}_p$ le caractère (additif) non ramifié de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ normalisé par $\psi_1(\sigma) = 1$ si σ induit le frobenius $x \mapsto x^p$ sur $\overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\psi_2 : \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Q}_p$ le logarithme du caractère cyclotomique. Comme ψ_1, ψ_2 forment une base de $\mathrm{Hom}(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p)$, il existe $\delta, \kappa \in S$ tels que, quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait

$$\log(\det A_\sigma) = \delta \cdot \psi_1(\sigma) + \kappa \cdot \psi_2(\sigma).$$

Notre résultat principal est l'énoncé peu appétissant suivant :

Théorème 0.5. — *Supposons que V a un poids de Hodge-Tate*[(4)] *nul, et qu'il existe $\alpha \in S$ tel que $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=\alpha} \widehat{\otimes} V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ soit localement libre de rang 1 sur $\mathscr{X}$.*

Alors, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x_0 \in \mathscr{X}(E)$ est tel que V_{x_0} soit semi-stable d'invariant de Fontaine égal à $\mathscr{L} \in E$ et poids de Hodge-Tate 0 et $\kappa(x_0) \leqslant -1$, la forme différentielle

$$\frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\mathscr{L} \cdot d\kappa + \frac{1}{2} d\delta$$

s'annule en x_0.

Remarque 0.6. — (i) Le terme $d\delta$ pouvant s'éliminer en tordant par un caractère non ramifié, le théorème ci-dessus montre que l'invariant $\mathscr{L}$ de Fontaine s'exprime simplement en terme de la dérivée logarithmique de la valeur propre de frobenius par rapport au poids de Hodge-Tate, ce qui est *a priori* assez surprenant.

(ii) La démonstration repose sur un calcul de cohomologie galoisienne dans les anneaux de Fontaine. Le principe consiste à bouger la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{End}(V_{x_0}))$ pour se ramener à $\kappa(x_0) = -1$. Dans ce cas, la représentation V_{x_0} est une extension de $\mathbf{Q}_p(-1)$ par $\mathbf{Q}_p$ dont la classe dans $H^1(\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{Q}_p(1))$ est controlée par l'invariant $\mathscr{L}$; on peut alors faire tous les calculs explicitement en utilisant un peu de théorie locale du corps de classes. Cette technique consistant à bouger la filtration pour se ramener à des représentations plus simples a été introduite par Fontaine **[10]** et utilisée avec profit dans **[6]** pour démontrer la conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

Revenons à la famille analytique de formes modulaires construite par Coleman. On peut interpoler (cf. **[4]**) les représentations galoisiennes p-adiques associées aux formes classiques f_k, pour $k \in \mathbf{Z} \cap \mathscr{X}$ vérifiant $v_p(a_p(k)) < k - 1$, pour construire une S-représentation V de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}}$, où S est l'algèbre de Tate des fonctions analytiques sur $\mathscr{X}$. En particulier, on a $V_{k_0} = V_f$.

(4) Il s'agit des poids de Hodge-Tate κ_1, κ_2 fournis par la théorie de Sen **[19, 20]** ; ils vivent *a priori* dans une extension quadratique (car on est en dimension 2) de S et, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, si $x \in \mathscr{X}(E)$ est tel que V_x est de Hodge-Tate (considérée comme $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension $2 \cdot [E{:}\mathbf{Q}_p]$), alors $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ sont des entiers et les poids de Hodge-Tate de V_x sont $\kappa_1(x)$ et $\kappa_2(x)$ avec multiplicité $[E{:}\mathbf{Q}_p]$. L'hypothèse selon laquelle l'un des poids de Hodge-Tate est nul implique que l'autre est égal à κ.

Les poids de Hodge-Tate de V_x sont 0 et $1-x$ et la représentation $\det V_x$ se factorise à travers une extension finie de $\mathbf{Q}(\zeta_{p^\infty})$. Par ailleurs, Saito **[18]** a montré que, si f_x est une forme classique, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_x)^{\varphi=a_p(x)}\neq 0$, et Kisin **[13]** a montré que la représentation V vérifiait les conditions du théorème avec $\alpha=a_p$. On peut donc appliquer le théorème, avec $x_0=k_0$, $\alpha=a_p$, $\kappa(x)=1-x$, $\delta(x)=0$ et $\mathscr{L}=\mathscr{L}(V_{k_0})=\mathscr{L}_{\mathrm{Fon}}(f)$ pour en déduire le résultat suivant :

Corollaire 0.7. — $\mathscr{L}_{\mathrm{Fon}}(f)=-2a_p(k_0)^{-1}\cdot a_p'(k_0)$.

Finalement, en comparant le corollaire ci-dessus avec le résultat de Stevens, on obtient une nouvelle démonstration du théorème de Coleman-Iovita.

Corollaire 0.8. — $\mathscr{L}_{\mathrm{Fon}}(f)=\mathscr{L}_{\mathrm{Col}}(f)$.

1. Cohomologie galoisienne des anneaux de Fontaine

Dans tout le reste de l'article, E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et on s'intéresse aux E-représentations de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire aux E-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action E-linéaire continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

1.1. Anneaux de Fontaine. — Soient $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\subset\mathbf{B}_{\mathrm{st}}\subset\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ les anneaux de Fontaine et soient

$$\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}=E\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{B}_{\mathrm{cris}},\quad \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}=E\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{B}_{\mathrm{st}}\quad\text{et}\quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}=E\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$

On étend l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. De même, on étend l'action de φ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ et l'action de N sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ en une action E-linéaire sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. Finalement, on définit la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ en tensorisant par E la filtration $(\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR}})_{i\in\mathbf{Z}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. On a alors $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}^{N=0}=\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ induit la *suite exacte fondamentale*

$$0\to E\to\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}\to\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E}\to 0.$$

Soit t le $2i\pi$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}\subset\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ sur lequel $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par le caractère cyclotomique, et on a $\varphi(t)=pt$, $Nt=0$ et $t^j\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}=\mathbf{B}^{i+j}_{\mathrm{dR},E}$ si $i,j\in\mathbf{Z}$.

1.2. Cohomologie galoisienne. — Si M est un $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$-module et si $i\in\mathbf{N}$ (resp. si $j\in\mathbf{Z}$), on note $H^i(M)$ (resp. $M(j)$) le i-ième groupe de cohomologie continue de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans M (resp. le module M tordu par la puissance j-ième du caractère cyclotomique).

Proposition 1.1. — (i) *On a* $H^0(\mathbf{C}_p)=H^1(\mathbf{C}_p)=\mathbf{Q}_p$ *et* $H^i(\mathbf{C}_p(j))=0$ *si* $j\in\mathbf{Z}-\{0\}$ *ou si* $i\geqslant 2$.

(ii) *Si* $a\leqslant b\in\mathbf{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$, *alors* $H^0(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E})=H^1(\mathbf{B}^a_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^b_{\mathrm{dR},E})$ *si* $a>0$ *ou si* $b\leqslant 0$ (avec la convention $\mathbf{B}^{-\infty}_{\mathrm{dR},E}=\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$ et $\mathbf{B}^{+\infty}_{\mathrm{dR},E}=0$).

Démonstration. — Le (i) est dû à Tate **[22]** et le (ii) s'en déduit par dévissage et passage à la limite en utilisant le fait que $\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{i+1}_{\mathrm{dR},E}\cong E\otimes\mathbf{C}_p(i)\cong\mathbf{C}_p(i)^{[E:\mathbf{Q}_p]}$.

1.3. Le module U_1 et son H^1. — Si $i \in \mathbf{N}$, soit $U_i = \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}^{N^{i+1}=0,\varphi=p^{i-1}}$. Alors N induit, quel que soit $i \in \mathbf{N}$, la suite exacte

$$0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=p^i} \to U_{i+1} \xrightarrow{N} U_i \to 0.$$

Proposition 1.2. — *L'application naturelle*

$$H^1(E) \to \ker\left(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\right)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — La suite exacte $0 \to E(-1) \to U_0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{-1})$ permettent de montrer que l'application naturelle de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(U_0)$ est un isomorphisme. Comme par ailleurs les extensions non triviales de E par $E(-1)$ ne sont pas semi-stables, cela implique que l'application naturelle de $H^1(U_0)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ est injective. On en déduit l'égalité

$$\ker\left(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})\right) = \ker\left(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)\right).$$

Maintenant, comme N induit la suite exacte $0 \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to U_1 \to U_0 \to 0$ et comme $H^0(U_0) = U_0 \cap E = 0$, on obtient $\ker(H^1(U_1) \xrightarrow{N} H^1(U_0)) = H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$. Finalement, la suite exacte $0 \to E \to \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0} \to 0$ et l'annulation de $H^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ et $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{0})$ montrent que l'application naturelle de $H^1(E)$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1})$ est un isomorphisme, ce qui permet de conclure.

2. E-(φ, N)-modules filtrés

2.1. Définitions et rappels

1. E-(φ, N)-modules. — Un E-(φ, N)-module D est un E-espace vectoriel muni d'actions E-linéaires de φ et N avec la relation de commutation $N\varphi = p\varphi N$.

Si D est E-(φ, N)-module de dimension finie sur E, on définit l'invariant $t_N(D)$ par la formule $t_N(D) = v_p(\det \varphi)$, et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D)^{\varphi=1,N=0}.$$

Si D_1 et D_2 sont deux E-(φ, N)-modules, on fait de $D_1 \otimes_E D_2$ un E-(φ, N)-module en faisant agir φ et N sur $D_1 \otimes_E D_2$ par $\varphi \otimes \varphi$ et $N \otimes 1 + 1 \otimes N$ respectivement.

2. Filtrations. — Une filtration $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j\in\mathbf{Z}}$ sur un E-espace vectoriel D est une collection de sous-E-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^j D$, $j \in \mathbf{Z}$ avec $\mathrm{Fil}^{j+1} D \subset \mathrm{Fil}^j D$ quel que soit $j \in \mathbf{Z}$, $\cap_{j\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = 0$ et $\cup_{j\in\mathbf{Z}} \mathrm{Fil}^j D = D$. Les entiers j pour lesquels $\mathrm{Fil}^j D/\mathrm{Fil}^{j+1} D \neq 0$ s'appellent les degrés de la filtration.

Si D_1 et D_2 sont deux E-espaces vectoriels munis respectivement des filtration Fil_1 et Fil_2, et si D_1 ou D_2 est de dimension finie, alors $\mathrm{Fil}^j(D_1 \otimes_E D_2) = \sum_{j_1+j_2=j} \mathrm{Fil}_1^{j_1} D_1 \otimes_E \mathrm{Fil}_2^{j_2}$ est une filtration sur $D_1 \otimes_E D_2$.

Si $\mathrm{Fil} = (\mathrm{Fil}^j D)_{j\in\mathbf{Z}}$ est une filtration sur un E-espace vectoriel D de dimension finie, on définit l'invariant $t_H(D, \mathrm{Fil})$ par la formule $t_H(D, \mathrm{Fil}) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} j \dim_E(\mathrm{Fil}^j D/\mathrm{Fil}^{j+1} D)$ et on note $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil})$ le $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^{+}$-module

$$\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}\otimes D)/\mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}\otimes D).$$

3. E-(φ,N)-modules filtrés. — Un E-(φ,N)-module filtré (D,Fil) est un E-(φ,N)-module D muni d'une filtration. Un tel module est dit *admissible*, s'il est de dimension finie, si φ est inversible, si $t_H(D,\mathrm{Fil}) = t_N(D)$ et si $t_H(D',\mathrm{Fil}) \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-E-(φ,N)-module D' de D muni de la filtration induite. Si (D,Fil) est un E-(φ,N)-module filtré admissible, on note $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ le noyau de la flèche naturelle de $\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ dans $\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil})$ induite par l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$.

$\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ est naturellement muni d'une structure de E-(φ,N)-module filtré, la filtration étant induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}$. Si V est une E-représentation de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ hérite de la structure de E-(φ,N)-module filtré de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$. On a de plus $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \leqslant \dim_E V$ et on dit que V est *semi-stable* si $\dim_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \dim_E V$.

On dispose du résultat suivant [**6, 5**] :

Théorème 2.1. — (i) *Si V est une E-représentation semi-stable de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un E-(φ,N)-module filtré admissible et l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E V$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, et on a $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)) = V$.*

(ii) *Si (D,Fil) est un E-(φ,N)-module filtré admissible, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ est une représentation semi-stable de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la suite*

$$0\to \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})\to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)\to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil})\to 0$$

est exacte, l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}\otimes_E D$ est un isomorphisme commutant aux actions de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, φ, N et respectant les filtrations, les poids de Hodge-Tate de $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})$ sont les opposés des degrés de Fil, et on a $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D,\mathrm{Fil})) = (D,\mathrm{Fil})$.

(iii) *De plus, les équivalences de catégories $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ définies ci-dessus commutent aux produits tensoriels.*

3. La représentation $W_{\mathscr{L},i}$

3.1. E-(φ,N)-modules filtrés admissibles de dimension 2. — Soit $\alpha\in E$ vérifiant $2v_p(\alpha)\in\mathbf{N}$, et soit $i = 2v_p(\alpha)+1$. Soit D_α le E-(φ,N)-module défini par

$$D_\alpha = E\cdot e_1\oplus E\cdot e_2,\quad \varphi(e_1) = p\alpha e_1,\ \varphi(e_2) = \alpha e_2,\quad Ne_1 = e_2,\ Ne_2 = 0.$$

Si $\mathscr{L}\in E$, on note $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$ la filtration sur D_α définie par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L}} D_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } j>i,\\ E\cdot(e_1+\mathscr{L}e_2) & \text{si } 0<j\leqslant i,\\ D_\alpha & \text{si } j\leqslant 0.\end{cases}$$

Le E-(φ,N) module filtré $(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est admissible et la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ est une E-représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$. Réciproquement, toute E-représentation V semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$ est isomorphe à $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_\alpha,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ pour un unique couple $(\alpha,\mathscr{L})$ avec $2v_p(\alpha)+1 = i$; l'invariant $\mathscr{L}$ est *l'invariant de Fontaine* de V.

3.2. Le E-(φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$. — Soit $D = E\cdot f_1 \oplus E\cdot f_2 \oplus E\cdot f_3$ le (φ, N)-module défini par :

$$\varphi(f_1) = pf_1,\ \varphi(f_2) = f_2,\ \varphi(f_3) = p^{-1}f_3, \quad Nf_1 = 2f_2,\ Nf_2 = f_3,\ Nf_3 = 0.$$

Si $\mathscr{L} \in E$, soient

$$g_{\mathscr{L},1} = f_1 + 2\mathscr{L} f_2 + \mathscr{L}^2 f_3, \quad g_{\mathscr{L},2} = f_2 + \mathscr{L} f_3, \quad g_{\mathscr{L},3} = f_3,$$

et, si $i \in \mathbf{N} - \{0\}$, soit $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}$ la filtration sur D donnée par

$$\mathrm{Fil}^j_{\mathscr{L},i} D = \begin{cases} 0 & \text{si } j > i, \\ E \cdot g_{\mathscr{L},1} & \text{si } 0 < j \leqslant i, \\ E \cdot g_{\mathscr{L},1} \oplus E \cdot g_{\mathscr{L},2} & \text{si } -i < j \leqslant 0, \\ D & \text{si } j \leqslant -i. \end{cases}$$

Le (φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est admissible et on note $W_{\mathscr{L},i}$ la représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$.

Un petit calcul montre que, si $2v_p(\alpha) + 1 = i$, alors $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est le carré symétrique de $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ tordu par $\det(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})^{-1}$ qui n'est autre que le (φ, N)-module filtré des endomorphismes de trace nulle de $(D_\alpha, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$. On obtient donc le résultat suivant :

Proposition 3.1. — *Si V est une représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$, avec $i > 0$, alors $\mathrm{End}^0(V) \cong W_{\mathscr{L},i}$.*

Remarque 3.2. — Le E-(φ, N)-module filtré $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ est autodual, et il est facile de voir que tout E-(φ, N)-module filtré autodual, de dimension 3, avec $N \neq 0$, est isomorphe à $(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i})$ pour un unique couple $(i, \mathscr{L})$ de $(\mathbf{N} - \{0\}) \times E$.

3.3. Le module $\mathrm{Hom}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$

Proposition 3.3. — *On a $\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \otimes W_{\mathscr{L},i} = \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D)$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est un résultat général sur les E-(φ, N)-modules filtrés admissible : si (D, Fil) est un tel module, alors l'application naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D$ est un isomorphisme commutant à φ et N (th. 2.1 (ii)) et donc

$$\mathbf{B}^{\varphi=1}_{\mathrm{cris},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}))^{\varphi=1,N=0} = (\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D)^{\varphi=1,N=0} = \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D).$$

Si $j = 1, 2, 3$, on note $\pi_j : \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ l'application définie par

$$x = \pi_1(x)f_1 + \pi_2(x)f_2 + \pi_3(x)f_3.$$

Lemme 3.4. — *Si $x \in \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes D$, alors*

$$\pi_3(x) \in U_2, \quad \pi_2(x) = -N\pi_3(x) \in U_1 \quad \text{et} \quad \pi_1(x) = \frac{1}{2}N^2\pi_3(x) \in U_0.$$

Démonstration. — C'est une simple traduction des conditions $\varphi(x) = x$ et $Nx = 0$.

Proposition 3.5. — *Si $i \in \mathbf{N}$, et si $j = 1, 2, 3$, le E-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j})$ est de dimension 1 et la restriction de π_j à $W_{\mathscr{L},i}$ en est une base.*

Démonstration. — $\oplus_{j=1}^3 \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j})$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, \mathbf{B}_{\mathrm{st}}) = \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(W_{\mathscr{L},i}^*)$ et donc $\sum_{j=1}^3 \dim_E \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_{3-j}) \leqslant \dim_E W_{\mathscr{L},i}^* = 3$. Pour conclure, il suffit donc de prouver qu'aucun des π_i n'est identiquement nul sur $W_{\mathscr{L},i}$, ce qui suit du fait que l'application naturelle $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E D$ est un isomorphisme d'après le (ii) du th. 2.1.

4. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$ et sa cohomologie galoisienne

4.1. Éléments de théorie du corps de classes locale. — Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, on note (α) la classe de α dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ obtenue par la théorie de Kummer.

Si t est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine, soit $v \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=p}$ tel que $\frac{v}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=1}$ ait pour image $\frac{1}{t}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^0$. Alors v est bien déterminé à addition près d'un élément de la forme at, avec $a \in E$. Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$ est de valuation nulle, alors $(\alpha) \in H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est la classe du cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1)(\log \alpha \cdot v)$.

Soit u le $\log p$ p-adique de Fontaine. C'est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ vérifiant
(i) $u \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^1$,
(ii) $\varphi(u) = pu$ et $Nu = -1$,
(iii) $\sigma(u) - u \in \mathbf{Q}_p t$ et la classe de $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ dans $H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ est égale à (p).

Le E-espace vectoriel $H^1(E(1)) = E \otimes H^1(\mathbf{Q}_p(1))$ admet comme base les images des cocycles $\sigma \mapsto \sigma(u) - u$ et $\sigma \mapsto \sigma(v) - v$; on utilise cette base pour mettre $H^1(E(1))$ en bijection avec E^2 en envoyant le cocycle $\sigma \mapsto (\sigma - 1) \cdot (b_1 u + b_2 v)$ sur (b_1, b_2).

Le E-espace vectoriel $H^1(E)$ est aussi de dimension 2 ; il admet comme base les caractères ψ_1, ψ_2 définis dans l'introduction. L'accouplement $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to \mathbf{Q}_p$, défini via le cup-produit $H^1(\mathbf{Q}_p) \times H^1(\mathbf{Q}_p(1)) \to H^2(\mathbf{Q}_p(1))$ et l'isomorphisme $H^2(\mathbf{Q}_p(1)) \cong \mathbf{Q}_p$ de la théorie du corps de classes locale, induit par E-linéarité un accouplement $\langle\ ,\ \rangle : H^1(E) \times E^2 \to E$. Comme $\psi_1 \cup (\alpha) = -v_p(\alpha)$ et $\psi_2 \cup (\alpha) = \log_p \alpha$, si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, l'accouplement $\langle\ ,\ \rangle$ est donné par la formule

$$\langle a_1\psi_1 + a_2\psi_2, (b_1, b_2)\rangle = -a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

4.2. La représentation $W_{\mathscr{L},1}$

Lemme 4.1. — *$W_{\mathscr{L},1}$ est le E-espace vectoriel engendré par v_1, v_2 et v_3, avec*

$$v_1 = tf_3, \quad v_2 = (u - \mathscr{L}v)f_3 - f_2 \quad \text{et} \quad v_3 = \frac{(u - \mathscr{L}v)^2}{2t} f_3 - \frac{u - \mathscr{L}v}{t} f_2 + \frac{1}{2t} f_1.$$

Démonstration. — L'inclusion $E \cdot v_1 \oplus E \cdot v_2 \oplus E \cdot v_3 \subset W_{\mathscr{L},1}$ se démontre en utilisant le fait que $\frac{u}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^0$ et $\frac{v-1}{t} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^0$; on en déduit l'égalité pour des raisons de dimension.

Corollaire 4.2. — (i) *$W_{\mathscr{L},1}$ admet une filtration croissante par des sous-représentations $0 = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3 = W_{\mathscr{L},1}$, avec $W_i = \oplus_{j \leqslant i} E \cdot v_j$.*
(ii) *$W_1 \cong E(1)$.*
(iii) *la représentation W_2 est une extension de E par $E(1)$ dont la classe dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1, \mathscr{L})$.*
(iv) *Le quotient W' de $W_{\mathscr{L},1}$ par W_1 est isomorphe à $W_2(-1)$.*

Proposition 4.3. — *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$ dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N \circ \pi_2$ est nulle. Alors il existe $c \in W_{\mathscr{L},1}$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$ uniques, tels que, quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait $\pi_2(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + (\sigma - 1)\cdot\pi_2(c)$ et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'application $\pi_2 : W_{\mathscr{L},1} \to U_1$ envoie v_1 sur 0, v_2 sur -1 et v_3 sur $\frac{u-\mathscr{L}v}{t}$; elle se factorise donc à travers W' et l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(U_1)$ est donc incluse dans celle de $H^1(W')$. Maintenant, l'application $N : U_1 \to U_0$ composée avec π_2 induit la suite exacte $0 \to E \to W' \to E(-1) \to 0$ et, en passant à la cohomologie galoisienne, la suite exacte $0 \to H^1(E) \to H^1(W') \to H^1(E(-1)) \to 0$. Comme les extensions de E par $E(-1)$ ne sont pas de de Rham et donc, a fortiori, pas cristallines, l'application de $H^1(E(-1))$ dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E})$ induite par l'appartenance de t^{-1} à $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$, est injective. On en déduit que l'inclusion de E dans W' induit un isomorphisme de $H^1(E)$ sur $\ker(H^1(W') \xrightarrow{N} H^1(U_0))$. Ceci nous permet de montrer l'existence de c, γ_1 et γ_2 ainsi que l'unicité de γ_1 et γ_2.

Par ailleurs, la suite exacte $0 \to E(1) \to W_{\mathscr{L},1} \to W' \to 0$ induit, en passant à la cohomologie galoisienne, des applications de connexion $H^i(W') \to H^{i+1}(E(1))$. La restriction de ces applications de connexion au sous-groupe $H^i(E)$ de $H^i(W')$ est donnée par le cup-produit avec la classe δ de l'extension de E par $E(1)$ induite par $W_2 \subset W_{\mathscr{L},1}$. Comme l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ dans $H^1(W')$ est le noyau de l'application de connexion $H^1(W') \to H^2(E(1))$, on voit que $a\psi_1 + b\psi_2 \in H^1(E) \subset H^1(W')$ est dans l'image de $H^1(W_{\mathscr{L},1})$ si et seulement si $(a\psi_1 + b\psi_2) \cup \delta = 0$. Finalement, en utilisant le fait que l'image de δ dans $H^1(E(1)) \cong E^2$ est $(1, \mathscr{L})$, et la formule ci-dessus pour le cup-produit, on en déduit le résultat.

5. Cohomologie galoisienne de $W_{\mathscr{L},i}$

Proposition 5.1. — *L'image de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ ne dépend pas de $i \geqslant 1$.*

Démonstration. — On utilise la suite exacte (th. 2.1 (ii))

$$0 \to W_{\mathscr{L},i} \to \mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0$$

pour se ramener à montrer que le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ ne dépend pas de i. Pour comparer ce noyau pour i quelconque et $i = 1$, introduisons le $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR},E}$-module $M = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D)/(\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i} \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1})$. Comme

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}},$$

on a

$$\mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},i}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) \cap \mathrm{Fil}^0_{\mathscr{L},1}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR},E} \otimes D) = \mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{1,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^0_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{2,\mathscr{L}} \oplus \mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E} \cdot g_{3,\mathscr{L}};$$

on en déduit les suites exactes

$$0 \to (\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{3,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}) \to 0,$$
$$0 \to (\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) \cdot g_{1,\mathscr{L}} \to M \to \mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D, \mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}) \to 0.$$

Par ailleurs, comme

$$H^0(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^0(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^1_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR},E}) = H^1(\mathbf{B}^{-i}_{\mathrm{dR},E}/\mathbf{B}^{-1}_{\mathrm{dR},E}) = 0,$$

les applications naturelles de $H^1(M)$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ sont des isomorphismes et donc les noyaux des applications de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},1}))$ et $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{dR}}(D,\mathrm{Fil}_{\mathscr{L},i}))$ coïncident tous les deux avec le noyau de l'application de $H^1(\mathbf{X}_{\mathrm{st}}(D))$ dans $H^1(M)$. Ceci permet de conclure.

Proposition 5.2. — *Soit $w \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$. Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $W_{\mathscr{L},1}$ dont l'image dans $H^1(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ par l'application $N \circ w$ est nulle. Alors il existe $c \in U_1$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$ uniques, tels que, quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait $w(c_\sigma) = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(c) - c$ et on a $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.*

Démonstration. — L'existence de c, γ_1, γ_2 et l'unicité de γ_1, γ_2 sont des conséquences de la prop. 1.2. De plus, comme $\mathrm{Hom}_G(W_{\mathscr{L},i}, U_1)$ est un-E-espace vectoriel de dimension 1 engendré par π_2 d'après la prop. 3.5, on peut supposer que $w = \pi_2$, ce que nous ferons. La prop. 5.1 montre que l'image par π_2 de $H^1(W_{\mathscr{L},i})$ dans $H^1(U_1)$ ne dépend pas de i, ce qui permet d'utiliser la proposition 4.3 pour montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, et conclure.

6. Démonstration du résultat principal

Passons à la démonstration du théorème 0.5. Comme il s'agit d'un énoncé portant sur les dérivées à l'ordre 1, il suffit de traiter le cas $S = E[z]/z^2$. On se retrouve dans la situation suivante :

(i) V est une $(E[z]/z^2)$-représentation de dimension 2 ;

(ii) la E-représentation $V_0 = V/zV$ est semi-stable, de poids de Hodge-Tate 0 et $-i$ avec $i > 0$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0) \cong D_{\alpha_0,\mathscr{L}}$, avec $2v_p(\alpha_0) + 1 = i$;

(iii) il existe $a \in E$ tel que le $(E[z]/z^2)$-module $(\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}^{\varphi=\alpha_0(1+az)} \otimes_E V)^{\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ soit libre de rang 1.

Choisissons une base v_1, v_2 de V sur $E[z]/z^2$ et écrivons la matrice B_σ de $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans cette base sous la forme $B_\sigma = (I + z(\delta_\sigma I + U_\sigma))A_\sigma$, avec $A_\sigma \in \mathbf{GL}_2(E)$, $\delta_\sigma \in E$ et $U_\sigma \in \mathbf{M}_2(E)$ de trace nulle. Si $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ désignent les images de v_1 et v_2 modulo z, alors A_σ est la matrice de σ dans la base $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ de V_0. Par ailleurs, on a

$$\log(\det B_\sigma) = \log(\det A_\sigma) + 2z\delta_\sigma$$

et donc $\sigma \mapsto \log(\det A_\sigma)$ et $\sigma \mapsto \delta_\sigma$ sont des caractères additifs de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et il existe[(5)] d_1, d_2 et $\delta_1, \delta_2 \in E$ tels que l'on ait $\log(\det A_\sigma) = d_1\psi_1(\sigma) + d_2\psi_2(\sigma)$ et $\delta_\sigma = \delta_1\psi_1(\sigma) + \delta_2\psi_2(\sigma)$, quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Dans les notations du théorème 0.5, on a $\delta = d_1 + 2\delta_1 z$, $\kappa = d_2 + 2\delta_2 z$ et $\alpha = \alpha_0(1 + az)$ et on est ramené à démontrer la formule suivante :

Proposition 6.1. — $a = \mathscr{L}\delta_2 - \delta_1$.

Soit $\overline{e}_1 = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2$ un générateur de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=p\alpha_0}$, et soit $\overline{e}_2 = N\overline{e}_1 = y_1\overline{v}_1 + y_2\overline{v}_2$. Ceci fait de $\overline{e}_2$ un générateur de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)^{\varphi=\alpha_0}$, et $\overline{e}_1 + \mathscr{L}\overline{e}_2 \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},E}^i \otimes_E V_0$ par définition de l'invariant $\mathscr{L}$. Comme $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ forment une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V_0)$, la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$ et vérifie $M^{-1}A_\sigma\sigma(M) = I$ quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(5) On a d'ailleurs $d_2 = -i$.

Soient $e_1 = x_1v_1 + x_2v_2$ et $e_2 = Ne_1 = y_1v_1 + y_2v_2$. Comme M est inversible, e_1, e_2 forment une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E V$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S$. La matrice de σ dans cette base est alors

$$M^{-1}B_\sigma\sigma(M) = I + z(\delta_\sigma I + M^{-1}U_\sigma M).$$

Par ailleurs, un calcul brutal montre que, si l'on pose

$$U_\sigma = \begin{pmatrix} u_{1,\sigma} & u_{3,\sigma} \\ u_{2,\sigma} & -u_{1,\sigma} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c_\sigma = \frac{2u_{1,\sigma}x_1x_2 - u_{2,\sigma}x_1^2 + u_{3,\sigma}x_2^2}{2(x_1y_2 - x_2y_1)},$$

alors

$$M^{-1}U_\sigma M = \begin{pmatrix} Nc_\sigma & N^2c_\sigma \\ -2c_\sigma & -Nc_\sigma \end{pmatrix}.$$

Comme $z^2 = 0$, le fait que $\sigma \mapsto M^{-1}B_\sigma\sigma(M)$ soit un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E} \otimes_E S)$ implique que $\sigma \mapsto M^{-1}U_\sigma M$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{B}_{\mathrm{st},E})$, et que $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$; la formule ci-dessus montre que ce 1-cocycle est en fait à valeurs dans U_2 et donc que le 1-cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma - \delta_\sigma$ est à valeurs dans U_1.

Lemme 6.2. — *L'application naturelle $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ est surjective et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est égal à $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$.*

Démonstration. — La multiplication par z induit la suite exacte suivante de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules

$$0 \to V_0 \to V \to V_0 \to 0.$$

En tensorisant par $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},E}$ et en prenant les invariants sous $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on en déduit la suite exacte

$$0 \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0),$$

et comme $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$ est de dimension 1 sur E alors que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ contient $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=\alpha_0(1+az)}$ qui est, par hypothèse, de dimension 2 sur E, cela permet de conclure.

Lemme 6.3. — *Les cocycles $\sigma \mapsto N^2c_\sigma$ et $\sigma \mapsto -\delta_\sigma + Nc_\sigma$ se trivialisent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 6.2, il existe g dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ ayant pour image $\overline{e}_2$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V_0)$, et il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ tels que

$$g = e_2 + z(\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2).$$

Comme

$$\sigma(e_1) = e_1 + z\big((\delta_\sigma + Nc_\sigma)\cdot e_1 - 2c_\sigma \cdot e_2\big) \quad \text{et} \quad \sigma(e_2) = e_2 + z\big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2\big),$$

et comme $z^2 = 0$, on obtient, quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$,

$$\begin{aligned} 0 = \sigma(g) - g =& \sigma(e_2) - e_2 + z\big(\sigma(\lambda_1)\sigma(e_1) - \lambda_1e_1 + \sigma(\lambda_2)\sigma(e_2) - \lambda_2e_2\big) \\ =& z\Big(N^2c_\sigma \cdot e_1 + (\delta_\sigma - Nc_\sigma)\cdot e_2 + (\sigma(\lambda_1) - \lambda_1)\cdot e_1 + (\sigma(\lambda_2) - \lambda_2)\cdot e_2\Big), \end{aligned}$$

et donc $N^2c_\sigma = \sigma(-\lambda_1) - (-\lambda_1)$ et $Nc_\sigma - \delta_\sigma = \sigma(\lambda_2) - \lambda_2$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 6.4. — *Il existe $\lambda \in U_1$ et $\gamma_1, \gamma_2 \in E$ tels que, quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on ait*

$$Nc_\sigma = \gamma_1\psi_1(\sigma) + \gamma_2\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Démonstration. — Cela suit de la proposition 1.2.

La proposition 6.1 est alors une conséquence immédiate de la proposition suivante, ce qui permet de terminer la démonstration du théorème 0.5.

Proposition 6.5. — *On a les relations suivantes :*
(i) $\gamma_2 = \delta_2$ *;*
(ii) $a = \gamma_1 - \delta_1$ *;*
(iii) $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$.

Démonstration. — (i) On a

$$\sigma(\lambda_2) - \lambda_2 = Nc_\sigma - \delta_\sigma = (\gamma_1 - \delta_1)\psi_1(\sigma) + (\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) + \sigma(\lambda) - \lambda.$$

Soit $\omega \in W(\overline{\mathbf{F}}_p)$ vérifiant $\varphi(\omega) - \omega = 1$. Comme φ engendre topologiquement le groupe de Galois de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, et comme ψ_1 est normalisé par $\psi(\varphi) = 1$, on a $\sigma(\omega) - \omega = \psi_1(\sigma)$ et

$$(\gamma_2 - \delta_2)\psi_2(\sigma) = (\sigma - 1)\cdot(\lambda_2 - \lambda - (\gamma_1 - \delta_1)\omega),$$

quel que soit $\sigma \in \mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme l'extension de $\mathbf{Q}_p$ par $\mathbf{Q}_p$ définie par ψ_2 n'est pas de Hodge-Tate, et donc *a fortiori* pas semi-stable, on a $\gamma_2 - \delta_2 = 0$ et $\lambda_2 = \lambda + (\gamma_1 - \delta_1)\omega + \mu$, avec $\mu \in E$.

(ii) Comme $g \in \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, et comme $Ne_1 = e_2$ et $Ne_2 = 0$, on a

$$0 = Ng = z(N\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_1 \cdot e_2 + N\lambda_2 \cdot e_2).$$

Ceci implique en particulier $\lambda_1 = -N\lambda_2 = -N\lambda \in U_0$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} &\varphi(\lambda_1) = p^{-1}\lambda_1, \quad \varphi(\lambda_2) = \lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1),\\ \varphi(g) =&\varphi(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)) = \alpha_0\big(e_2 + z(\lambda_1 e_1 + (\lambda_2 + (\gamma_1 - \delta_1))e_2\big)\\ =&\alpha_0(1 + (\gamma_1 - \delta_1)z)g, \end{aligned}$$

et donc $a = \gamma_1 - \delta_1$.

(iii) Si $\overline{v}_1^*, \overline{v}_2^*$ est la base de V_0^* duale de $\overline{v}_1, \overline{v}_2$, l'application E-linéaire de V_0^* dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$, qui envoie $\overline{v}_1^*$ sur x_1 et $\overline{v}_2^*$ sur x_2 commute à l'action de $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$. La formule explicite (cf. ci-avant) pour c_σ montre donc que le cocycle $\sigma \mapsto Nc_\sigma$ est l'image dans U_1 d'un cocycle à valeurs dans $(\mathrm{Sym}^2 V_0^*) \otimes (\det V_0^*)^{-1} \cong W_{\mathscr{L},i}$. Par ailleurs, le cocycle $\sigma \mapsto N^2 c_\sigma$ se trivialisant dans $\mathbf{B}_{\mathrm{st},E}$ d'après le lemme 6.3, la proposition 5.2 permet de montrer que $\gamma_1 = \mathscr{L}\gamma_2$, ce qui permet de conclure.

Références

[1] R. Coleman, A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, Contemp. Math. **165** (1994) 21–51.

[2] R. Coleman, p-adic Banach spaces, and families of modular forms, Invent. Math. **127** (1997), 417-479.

[3] R. Coleman et A. Iovita, Hidden structures on semi-stable curves, preprint 2003.

[4] R. Coleman et B. Mazur, The eigencurve, *Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry (Durham 1996)*, London Math. Soc. Lect. Note **254** (1997), 1–113.

[5] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[6] P. Colmez et J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. **140** (2000), 1–43.

[7] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, Séminaire Bourbaki, exp. 919, juin 2003.

[8] R. Greenberg et G. Stevens, p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms, Invent. Math. **111** (1993) 407–447.

[9] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. dans "*Périodes p-adiques*" exposé II, Astérisque **223**, 59-102, 1994.

[10] J-M. Fontaine, exposé à Orsay, 1998.

[11] K. Kato, Generalized explicit reciprocity laws, *Algebraic number theory (Hapcheon/Saga, 1996)*, Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan) **1** (1999), 57–126.

[12] K. Kato, Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque (à paraître).

[13] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[14] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84** (1986), 1-48.

[15] B. Mazur, On monodromy invariants occuring in global arithmetic, and Fontaine's theory, Contemp. Math. **165** (1994) 1–20.

[16] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. **115** (1994), 81-149.

[17] B. Perrin-Riou, Quelques remarques sur la théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques, *Number theory for the millennium, III* (Urbana, IL, 2000) 119–147.

[18] T. Saito, Modular forms and p-adic Hodge theory, Invent. Math. **129** (1997), 607–620.

[19] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. Math. **62** (1980/81), 89–116.

[20] S. Sen, An infinite dimensional Hodge-Tate theory, Bull. S.M.F. **121** (1993), 13–34.

[21] G. Stevens, Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, preprint 1996.

[22] J. Tate, p-divisible groups, *Proc. of a conference on local fields, Nuffic Summer School at Driebergen*, Springer, Berlin, 158-183, 1967.

Pierre Colmez, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : `colmez@math.jussieu.fr`