Math. Ann. 292, 629–644 (1992)

Mathematische Annalen

Périodes p-adiques des variétés abéliennes

Pierre Colmez

C.N.R.S., Laboratoire de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, U.R.A. 762, 45 rue d'Ulm, F-75005 Paris, France

Reçu le 8 février 1991; version révisée reçue le 8 novembre 1991

0 Introduction

Le but de cet article est de donner une construction des périodes p-adiques des variétés abéliennes qui soit la plus proche possible de la construction classique dans le cas complexe. Plus précisément, soit X une variété abélienne définie sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, et $\mathscr{X}$ un modèle de X sur les entiers de K. Soit $\mathbf{B}_{DR}^+$ l'anneau construit par Fontaine [F 2] et θ le morphisme canonique de $\mathbf{B}_{DR}^+$ dans $\mathbf{C}_p$. On peut trouver un sous-anneau A de $\mathbf{B}_{DR}^+$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'image de $A \cap (\operatorname{Ker}\theta)^k$ dans $(\operatorname{Ker}\theta)^k/(\operatorname{Ker}\theta)^{k+1}$ soit bornée et tel que l'application θ de $\mathscr{X}(A)$ dans $X(\mathbf{C}_p)$ soit surjective. Si ω est une forme différentielle de seconde espèce sur X, on peut, utilisant la loi de groupe sur X, construire une primitive F_ω de ω bien définie à addition d'une constante près. Si $u = (0, \ldots, u_n, \ldots)$ est un élément du module de Tate $T_p(X)$ de X, module jouant le rôle de $H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, on définit alors $\int_u \omega$ par la formule

$$\int_u \omega = \lim_{n \to \infty} p^n (F_\omega(a_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n)),$$

où $\oplus$ désigne la loi de groupe sur X, $\hat{u}_n \in \mathscr{X}(A)$ vérifie $\theta(\hat{u}_n) = u_n$ et $a_n \in \mathscr{X}(A)$ est choisi de telle sorte que ni a_n ni $a_n \oplus \hat{u}_n$ ne soient proches d'un pôle de ω.

On peut poursuivre la similitude avec la situation complexe en utilisant un analogue du logarithme de la fonction théta associée à un diviseur pour construire des formes de Riemann p-adiques et on obtient alors des relations de Riemann p-adiques.

Utilisant cette construction des périodes, on peut retrouver les périodes de Hodge-Tate construites par Fontaine [F 3] et Coleman [C 1]. Remarquons qu'il existe une méthode alternative utilisant l'extension universelle de X, pour construire les périodes p-adiques. C'est la méthode originellement suivie par Fontaine et Messing dans un travail non-rédigé (voir aussi la note ajoutée sur épreuves à la fin de [C 1]) et utilisée par Wintenberger [W] pour traiter le cas des variétés abéliennes sur une base.

Le plan de l'article est le suivant. Dans le par. 1, on rappelle la théorie complexe sans démonstration. On en profite pour définir par voie transcendante un certain nombre d'objets algébriques. Le par. 2 est consacré à la définition d'un certain nombre de sous-anneaux de $\mathbf{B}_{DR}^{+}$ qui interviendront par la suite. Dans le par. 3, pour donner un avant-goût des méthodes (sans les complications d'ordre technique) et des résultats dans le cas des variétés abéliennes, nous donnons la construction des périodes p-adiques des groupes formels. Dans le par. 4, nous donnons la construction de F_{ω} et des fonctions thêtas p-adiques (où plutôt de leur logarithme) et dans le par. 5, nous commençons par montrer l'existence d'un sous-anneau A de $\mathbf{B}_{DR}^{+}$ ayant les propriétés annoncées au début de l'introduction et nous donnons la construction des périodes des variétés abéliennes. Le reste de l'article est consacré à divers compléments: comparaison avec les périodes de Hodge-Tate, raffinements dans le cas de bonne réduction.

1 Périodes complexes

Dans ce paragraphe, nous rappelons sans démonstration un certain nombre de résultats classiques. On peut trouver les démonstrations dans les livres de Mumford [M] et Swinnerton-Dyer [S]. Soit K un sous-corps de $\mathbf{C}$ et X une variété abélienne de dimension d définie sur K. La loi de groupe sur X sera notée par $\oplus$ et, si $n \in \mathbf{Z}$, l'endomorphisme multiplication par n sera noté par $[n]$. Soient $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ une base du K espace vectoriel $H^0(X, \Omega_X^1)$ des formes différentielles holomorphes, $(\partial_1, \ldots, \partial_d)$ la base de l'espace des dérivations invariantes sur X duale de $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ et Λ le réseau de $\mathbf{C}^d$ image de $H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ par l'application $u \to \left(\int_u \omega_1, \ldots, \int_u \omega_d\right)$. On a un isomorphisme de groupes de Lie compacts de $\mathbf{C}^d/\Lambda$ sur $X(\mathbf{C})$ et donc une surjection pr de $\mathbf{C}^d$ sur $X(\mathbf{C})$.

Soit $H_{DR}^1(X)$ le quotient de l'espace vectoriel des formes différentielles de seconde espèce par celui des différentielles de fonctions rationnelles sur X. On munit $H_{DR}^1(X)$ de la filtration de Hodge en posant $\mathrm{Fil}^0(H_{DR}^1(X)) = H_{DR}^1(X)$, $\mathrm{Fil}^1(H_{DR}^1(X)) = H^0(X, \Omega_X^1)$ et $\mathrm{Fil}^2(H_{DR}^1(X)) = 0$. Si ω est une différentielle de seconde espèce sur X définie sur K, soit f_ω une primitive méromorphe de $pr^*\omega$ sur $\mathbf{C}^d$. Alors la fonction $f_\omega(z_0+z_1+z_2) - f_\omega(z_0+z_1) - f_\omega(z_0+z_2) + f_\omega(z_0)$ de $(\mathbf{C}^d)^3$ dans $\mathbf{C}$ est périodique de période Λ^3 et induit par passage au quotient une fonction rationnelle F_ω^3 sur X^3 définie sur K. On peut d'ailleurs définir F_ω^3 purement algébriquement comme la fonction rationnelle sur X^3 vérifiant $F_\omega^3(x_0, 0, x_2) = F_\omega^3(x_0, x_1, 0) = 0$ et dont la différentielle est $m_{\{0,1,2\}}^*\omega - m_{\{0,1\}}^*\omega - m_{\{0,2\}}^*\omega + m_{\{0\}}^*\omega$, où, si I est une partie de $\{0,1,2\}$, alors m_I est l'application de X^3 dans X qui à (x_0, x_1, x_2) associe $\bigoplus_{i \in I} x_i$. Si $u \in H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ et si $a \in \mathbf{C}^d$ n'est pas un pôle de f_ω, alors $f_\omega(i(u)+a) - f_\omega(a)$ ne dépend que de u et de la classe de ω dans $H_{DR}^1(X)$ et l'application «périodes complexes» $(\omega, u) \to \int_u \omega$ de $H_{DR}^1(X) \times H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ ainsi obtenue est bilinéaire et non-dégénérée quand on étend les scalaires à $\mathbf{C}$.

Soit D un diviseur de X défini sur K et θ_D une fonction thêta associée au diviseur D. C'est une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}^d$ de diviseur $pr^*(D)$ et qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta_D(z+\lambda) = \exp(a_\lambda(z))\theta_D(z),$$

où a_λ pour $\lambda \in \Lambda$ est une fonction affine de z. Ces deux propriétés ne définissent θ_D qu'à multiplication près par un facteur de la forme $\exp(P(z_1, \ldots, z_n))$ où P est un polynôme de degré total inférieur ou égal à 2. La fonction

$$f_D(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{\theta_D(z_0+z_1+z_2+z_3)\theta_D(z_0+z_1)\theta_D(z_0+z_2)\theta_D(z_0+z_3)}{\theta_D(z_0+z_1+z_2)\theta_D(z_0+z_1+z_3)\theta_D(z_0+z_2+z_3)\theta_D(z_0)} \tag{1.1}$$

est indépendante du choix de θ_D, périodique de période Λ^4 et induit par passage au quotient une fonction rationnelle F_D sur X^4 définie sur K. On peut aussi caractériser F_D algébriquement comme la fonction rationnelle sur X^4 vérifiant $F_D(x_0, x_1, x_2, x_3) = 1$ si x_1, x_2 ou $x_3 = 0$ et dont le diviseur est $\sum_{I \subset \{1,2,3\}} (-1)^{\operatorname{card} I - 1} m^*_{\{0\} \cup I} D$.

Ecrivons $d\theta_D/\theta_D = \sum_{i=1}^{d} g_{i,D} dz_i$. Alors $dg_{i,D}$ est périodique de période Λ et est l'image réciproque $pr^*(\omega_{i,D})$ d'une forme différentielle sur X de seconde espèce $\omega_{i,D}$ et on peut normaliser θ_D (ce que nous supposerons avoir fait) de telle sorte que $\omega_{i,D}$ soit définie sur K si $1 \leqq i \leqq d$. On peut aussi caractériser algébriquement le vecteur $(\omega_{1,D}, \ldots, \omega_{d,D})$ [à addition près d'un vecteur de la forme $M(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ où M est une matrice symétrique à coefficients dans K] par les propriétés suivantes (cf. [C, Theorem 10]):

(i) $\sum_{i=1}^{d} \omega_{i,D} \wedge \omega_i = 0$.

(ii) Si $\alpha \in X(\mathbf{C})$ est un point de m-torsion, et si t_α désigne l'application $x \to x \oplus \alpha$, il existe, à multiplication par une constante non-nulle près, une seule fonction rationnelle $G_{\alpha,D}$ de diviseur $m(t^*_\alpha D - D)$ et on a $d(\partial_i G_{\alpha,D}/G_{\alpha,D}) = m(t^*_\alpha \omega_{i,D} - \omega_{i,D})$. Remarquons que l'on a une formule analytique donnant $G_{\alpha,D}$. En effet, si $a \in \mathbf{C}^d$ vérifie $pr(a) = \alpha$, alors l'application

$$g_{a,D}(z) = \frac{\theta_D(z+a)^m}{\theta_D(z)^{m-1}\theta_D(z+ma)}$$

est périodique de période Λ et induit $G_{\alpha,D}$ par passage au quotient.

On associe à D une forme bilinéaire alternée $E_{D,\infty}$ (forme de Riemann) sur $H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ à valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$ de la manière suivante. Soient $a \in \mathbf{C}^d - pr^*D$, $u_1, u_2 \in H_1(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ et γ_{u_j} un chemin dans $\mathbf{C}^d$ allant de a à $a + i(u_j)$ et ne rencontrant pas $pr^*(D)$. Alors $\left(\int_{\gamma_{u_1}} + \int_{i(u_1)+\gamma_{u_2}} - \int_{i(u_2)+\gamma_{u_1}} - \int_{\gamma_{u_2}}\right) d\theta_D/\theta_D$ ne dépend pas du choix des γ_{u_j} et sera noté par définition $E_{D,\infty}(u_1, u_2)$. On a la relation de Riemann

$$E_{D,\infty}(u_1, u_2) = \sum_{i=1}^{d} \left(\int_{u_1} \omega_{i,D} \int_{u_2} \omega_i - \int_{u_2} \omega_{i,D} \int_{u_1} \omega_i \right).$$

Il existe une version algébrique (l'accouplement de Weil) de $E_{D,\infty}$. Si α et β sont des points de m-torsion de $X(\mathbf{C})$, la fonction

$$\frac{G_{\beta,D}(x \oplus \alpha) G_{\alpha,D}(x)}{G_{\beta,D}(x) G_{\alpha,D}(x \oplus \beta)}$$

est constante égale à une racine m-ième de l'unité que nous noterons $e_{m,D}(\alpha, \beta)$. Soient $a, b \in \mathbf{C}^d$ tels que $pr(a) = \alpha$ et $pr(b) = \beta$. Si $P_m(X) = \sum_{k=0}^{m-2} a_{k,m} X^k \in \mathbf{Z}[X]$ est le quotient de la division de $X^m - mX + m - 1$ par $(X-1)^2$, posons

$$F_{m,D}(y_0, y_1, y_2) = \prod_{k=0}^{m-2} F_D(y_0 \oplus [k] y_2, y_2, y_2, y_1)^{-a_{k,m}}. \tag{1.2}$$

Utilisant la formule (1.1), l'expression analytique pour $G_{\alpha,D}$ et l'intégration de $d\theta_D/\theta_D$ sur un contour bien choisi, on obtient:

$$\begin{aligned} e_{m,D}(\alpha,\beta) &= \frac{\theta_D(z+mb)\theta_D(z+a)\theta_D(z+ma+b)}{\theta_D(z+mb+a)\theta_D(z+b)\theta_D(z+ma)} \\ &= F_{m,D}(x,\alpha,\beta) \\ &\doteq \exp\left(\frac{E_{D,\infty}(i^{-1}(ma), i^{-1}(mb))}{m}\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

2 $\mathbf{B}_{DR}$ et certains de ses sous-anneaux

Rappelons brièvement la construction, due à Fontaine (cf. [F 2; F 4]), de l'anneau $\mathbf{B}_{DR}^+$. Soient p un nombre premier, $\bar{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de $\bar{\mathbf{Q}}_p$, $\mathbf{C}_p$ le complété p-adique de $\bar{\mathbf{Q}}_p$, $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ son anneau d'entiers, $\hat{v}$ la valuation de $\mathbf{C}_p$ normalisée par $\hat{v}(p)=1$ et $|x|_p = p^{-\hat{v}(x)}$ la norme usuelle sur $\mathbf{C}_p$. Soit R l'ensemble des suites $x=(x^{(n)})$, $n\in\mathbf{N}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On fait de R un anneau de caractéristique p valué et complet en posant $v_R(x) = \hat{v}(x^{(0)})$, puis $x+y=s$ avec $s^{(n)} = \lim_{m\to\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $xy=t$ avec $t^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$.

Soit $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R et si $x\in R$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $W(R)$. Soit θ l'homomorphisme de $W(R)$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui à $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n [x_n^{p^{-n}}]$ associe $\sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)}$. Alors θ est surjectif et son noyau est un idéal principal. Notons encore θ l'homomorphisme de $W(R)[p^{-1}]$ dans $\mathbf{C}_p$ et soit $\mathbf{B}_{DR}^+ = \varprojlim_n W(R)[p^{-1}]/(\operatorname{Ker}\theta)^n$. On peut prolonger θ par continuité à $\mathbf{B}_{DR}^+$ et alors $\mathbf{B}_{DR}^+$ est un anneau de valuation discrète, d'idéal maximal $\operatorname{Ker}\theta$ et de corps résiduel $\mathbf{C}_p$. De plus, si pour $k,n\in\mathbf{N}$, on pose $U_{n,k} = p^k W(R) + I^n$, alors $\mathbf{B}_{DR}^+$ est aussi le séparé complété de $W(R)[p^{-1}]$ pour la topologie obtenue en prenant comme système fondamental de voisinages les $x+U_{n,k}$, pour $x\in W(R)[p^{-1}]$ et $n,k\in\mathbf{N}$. On munit $\mathbf{B}_{DR}^+$ d'une filtration en posant $\operatorname{Fil}^i(\mathbf{B}_{DR}^+) = (\operatorname{Ker}\theta)^i$ si $i\in\mathbf{N}$.

D'après le théorème de structure des anneaux de valuation discrète complets en égale caractéristique, le morphisme θ de $\mathbf{B}_{DR}^+$ sur $\mathbf{C}_p$ possède une section (non canonique), mais cette section ne peut être choisie ni continue, ni même compatible à l'action de $\operatorname{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$. Par contre, $\bar{\mathbf{Q}}_p$ s'identifie canoniquement à la clôture intégrale de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{B}_{DR}^+$. Notons $\mathbf{B}_{DR}$ le corps des fractions de $\mathbf{B}_{DR}^+$; si x est n'importe quel élément non-nul de $\operatorname{Fil}^1(\mathbf{B}_{DR}^+)$, alors on a $\mathbf{B}_{DR} = \mathbf{B}_{DR}^+[x^{-1}]$.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau de ses entiers et $A_{\inf,K}$ le sous-anneau de $\mathbf{B}_{DR}^+$ engendré par $W(R)$ et $\mathcal{O}_K$. Alors $A_{\inf,K}$ est le $\mathcal{O}_K$-épaississement p-adic infinitésimal universel de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ (cf. [F 4]) et $\operatorname{Ker}\theta\cap A_{\inf,K}$ en est idéal principal. Soit π_K (resp. ϱ_K) ou encore π (resp. ϱ) s'il n'y a pas de risque de confusion, une uniformisante de $\mathcal{O}_K$ (resp. un générateur de $\operatorname{Ker}\theta\cap A_{\inf,K}$). Si $k\in\mathbf{N}$, le sous-anneau fermé $A_{\inf,K}[[\pi^{-k}\varrho]]$ de $\mathbf{B}_{DR}^+$ ne dépend pas du choix de π et ϱ et sera noté $A_{\inf,K}^k$; en particulier, on a $A_{\inf,K}^k = A_{\inf,K}$ si $k=0$.

Soit u un générateur de $\operatorname{Ker}\theta \cap W(R)$. Notons $W^{PD}(R)$ le sous-anneau de $\mathbf{B}_{DR}^{+}$ des éléments x de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} x_n u^n$, où $n!\, u_n$ est une suite d'éléments de $W(R)$ tendant vers 0. Posons $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+} = W^{PD}(R)[p^{-1}]$ et soit φ l'endomorphisme de Frobenius de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+}$ obtenu en prolongeant par continuité l'action canonique de Frobenius $(x_0, \ldots, x_n, \ldots) \to (x_0^p, \ldots, x_n^p, \ldots)$ de $W(R)$. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, notons $A_{\mathrm{cris},K}$ le sous-anneau de $\mathbf{B}_{DR}^{+}$ engendré par $W^{PD}(R)$ et $\mathcal{O}_K$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},K}^{+} = A_{\mathrm{cris},K}[p^{-1}]$. Si K_0 est l'extension non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ maximale incluse dans K, on a $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},K}^{+} \cong K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{+}$ et on note φ_K l'endomorphisme $\mathrm{id} \otimes \varphi^{[K_0:\mathbf{Q}_p]}$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},K}^{+}$. Si $k \in \mathbf{N}$, posons $A_{\mathrm{cris},K}^{k} = A_{\mathrm{cris},K}$ si $k=0$ et $A_{\mathrm{cris},K}^{k} = A_{\mathrm{inf},K}^{k+1}$ si $k \geqq 1$.

Lemme 2.1. *Soient e l'indice de ramification absolu de K, p^s plus petite puissance de p supérieure ou égale à e et $r(e) = \sup\{em - p^{m-s} \mid m - s \in \mathbf{N}\}$. Si, $u \in (A_{\mathrm{inf},K}^{k} \cap \operatorname{Ker}\theta)$ et $l, n \in \mathbf{N}$ avec $l \leqq n$, alors $\frac{u^n}{l} \in \pi^{-r(e)} A_{\mathrm{cris},K}^{k}$.*

Démonstration. Le cas $k \geqq 1$ étant plus facile que le cas $k=0$, nous ne traiterons que le cas $k=0$. Soit $x = (x^{(n)}) \in R$ tel que $x^{(0)} = \pi$. Alors $[x] - \pi$ est un générateur de $A_{\mathrm{inf},K} \cap \operatorname{Ker}\theta$ et on peut se ramener au cas $l = n = p^m$ et $u = [x] - \pi$. On a $v_R(x^{p^s}) > 1$ et on peut donc trouver $y \in W(R)$ tel que $\alpha = [x]^{p^s} - py$ appartienne à $(W(R) \cap \operatorname{Ker}\theta)$. On peut alors écrire $u^{p^s} = \alpha + \pi\beta$ avec $\beta \in A_{\mathrm{inf},K}$. On obtient, si $m \geqq s$,

$$\frac{u^{p^m}}{p^m} = \frac{(\alpha + \pi\beta)^{p^{m-s}}}{p^m} = \sum_{i+j=p^{m-s}} \frac{\alpha^i}{i!} \frac{(p^{m-s}-1)!\, \pi^j}{j!} \beta^j .$$

Comme $\frac{\alpha^i}{i!} \in A_{\mathrm{cris},K}$ et $p^{s-m} \pi^{p^{m-s}} \in \pi^{-r(e)} \mathcal{O}_K$, on en déduit le résultat.

Corollaire. *Si $F \in K[[z_1, \ldots, z_d]]$ vérifie*

(i) $F(0) = 0$;

(ii) $dF = \sum_{i=1}^{d} f_i dz_i$ *avec* $f_i \in A_{\mathrm{inf},K}^{k}[[\pi^{-k} z_1, \ldots, \pi^{-k} z_d]]$,

et si $u = (u_1, \ldots, u_d) \in (A_{\mathrm{inf},K}^{k} \cap (\operatorname{Ker}\theta))^d$, alors $F(u) \in \pi^{-r(e)} A_{\mathrm{cris},K}^{k}$.

Si $x \in \mathbf{B}_{DR}^{+}$ vérifie $|\theta(x) - 1|_p < 1$, alors la série $\log_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$ converge dans $\mathbf{B}_{DR}^{+}$. On peut étendre $\log_p$ de manière unique en un homomorphisme de $(\mathbf{B}_{DR}^{+})^*$ dans $\mathbf{B}_{DR}^{+}$ vérifiant $\log_p(p) = 0$.

3 Périodes p-adiques des groupes formels

Avant de construire les périodes p-adiques des variétés abéliennes, nous allons considérer la théorie correspondante (plus simple) pour les groupes formels (voir [F 1] pour les résultats mentionnés sans démonstration dans ce paragraphe). Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, K_0 l'extension non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ maximale incluse dans K, σ le Frobenius absolu de K_0 et Γ un groupe formel commutatif défini sur $\mathcal{O}_K$, de dimension d et de hauteur finie h. Nous noterons $\oplus$ la loi de groupe formel et si $n \in \mathbf{N}$, nous noterons $[n]$ l'endomorphisme multiplication par n de Γ. Soit $\mathcal{O}_K[[X_1 \ldots, X_d]]$, l'algèbre affine de Γ. Si $\omega = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(X_1, \ldots, X_d) dX_i$ où $\alpha_i(X) \in K[[X_1, \ldots, X_d]]$ est une forme différentielle fermée, notons F_ω l'unique élément de $K[[X_1,\dots,X_d]]$ vérifiant $dF_\omega=\omega$ et $F_\omega(0)=0$ et soit $F_\omega^2\in K[[X_1,\dots,X_d,Y_1,\dots,Y_d]]$ la série formelle donnée par la formule $F_\omega^2(X,Y)=F_\omega(X\oplus Y)-F_\omega(X)-F_\omega(Y)$. Une forme différentielle fermée ω sera dite exacte s'il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que $\pi^r F_\omega\in\mathcal{O}_K[[X_1,\dots,X_d]]$, de seconde espèce s'il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que $\pi^r F_\omega^2\in\mathcal{O}_K[[X_1,\dots,X_d,Y_1,\dots,Y_d]]$ et invariante si $F_\omega^2=0$. Notons Ω_Γ le K-espace vectoriel des formes différentielles invariantes; c'est un K-espace vectoriel de dimension d. Notons $H^1_{DR}(\Gamma)$ le K-espace vectoriel quotient de l'espace des formes différentielles de seconde espèce par celui des formes différentielles exactes; c'est un K-espace vectoriel de dimension h muni de la filtration $\mathrm{Fil}^0(H^1_{DR}(\Gamma))=H^1_{DR}(\Gamma)$; $\mathrm{Fil}^1(H^1_{DR}(\Gamma))=\Omega_\Gamma$, $\mathrm{Fil}^2(H^1_{DR}(\Gamma))=0$. Soit $D(\Gamma)$ le module de Dieudonné de Γ, c'est-à-dire le sous-K_0-espace vectoriel de $H^1_{DR}(\Gamma)$ des formes différentielles à coefficients dans K_0. Alors, on a $H^1_{DR}(\Gamma)\cong K\otimes_{K_0}D(\Gamma)$ et $D(\Gamma)$ est muni d'une action σ-semi-linéaire donnée par la formule $\phi(\omega)=\omega^\sigma((X_1)^p,\dots,(X_d)^p)$. Soit finalement $T_p(\Gamma)$ le module de Tate de Γ; c'est un $\mathbf{Z}_p$-module de rang h muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$.

Proposition 3.1. *Soit ω une forme différentielle de seconde espèce, $u=(0,\dots,u_n,\dots)\in T_p(\Gamma)$ et $\hat{u}_n\in(A_{\mathrm{inf},K})^d$ tel que $\theta(\hat{u}_n)=u_n$. Alors*

(i) *la suite $-p^nF_\omega(\hat{u}_n)$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris},K}$ vers une limite qui ne dépend que de u et de l'image de ω dans $H^1_{DR}(\Gamma)$.*

(ii) *L'application périodes $(\omega,u)\to\int_u\omega$ de $H^1_{DR}(\Gamma)\times T_p(\Gamma)$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris},K}$ ainsi définie est bilinéaire, respecte les filtrations $\left(\text{i.e. } \int_u\omega\in\mathrm{Fil}^1(\mathbf{B}^+_{DR}) \text{ si } \omega\in\Omega_\Gamma\right)$ et commute à l'action de* $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ $\left[\text{i.e. } g\left(\int_u\omega\right)=\int_{g(u)}\omega \text{ si } g\in\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)\right]$.

(iii) *Si $\omega\in D(\Gamma)$, alors $\int_u\omega\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$ et $\varphi\left(\int_u\omega\right)=\int_u\phi(\omega)$.*

Remarque. Le signe définissant les périodes est l'opposé de celui auquel on penserait naturellement; on peut le justifier de la manière suivante. Si $u=(\dots,u_n,\dots)\in T_p(\mathbf{G}_m)$, on aimerait bien que $\exp\left(p^{-n}\int_u\frac{dx}{1+x}\right)$ qui est une série convergeant dans $\mathbf{B}^+_{DR}$, soit égal à la racine p^n-ième de l'unité $\varepsilon_n=1+u_n$. Ceci n'est pas possible, mais avec le signe que l'on a choisi, on a $\exp\left(p^{-n}\int_u\frac{dx}{1+x}\right)=\varepsilon_n[\varepsilon_n]^{-1}$, où $[\varepsilon_n]$ est le représentant de Teichmüller de $(\varepsilon_n,\dots,\varepsilon_{n+m},\dots)\in R$. De plus, si on utilise l'identification canonique de $\mathbf{C}_p(1)$ avec $K\otimes T_p(\Omega_{\mathcal{O}_{\bar{K}}/\mathcal{O}_K})$, l'image de $\int_u\frac{dx}{1+x}$ modulo I^2 est égale à $1\otimes\left(\dots,\frac{du_n}{1+u_n},\dots\right)$ (cf. par. 6).

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Par définition de seconde espèce, il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que $\pi^rF_\omega^2\in\mathcal{O}_K[[X_1,\dots,X_d,Y_1,\dots,Y_d]]$ et on vérifie facilement que ceci implique qu'il existe $s\geqq r$ tel que $\pi^s\omega$ soit à coefficients entiers et donc, F_ω converge dans $\mathbf{B}^+_{DR}$ pour tout $x=(x_1,\dots,x_d)\in(\mathbf{B}^+_{DR})^d$ tel que $|\theta(x_i)|_p<1$ si $1\leqq i\leqq d$. En particulier, $F_\omega(\hat{u}_n)$ converge dans $\mathbf{B}^+_{DR}$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.2. (i) *Si $x=(x_1,\dots,x_d)\in(A_{\mathrm{inf},K})^d$ est tel que $|\theta(x_i)|_p<1$ pour $1\leqq i\leqq d$, alors $F_\omega([p]x)-pF_\omega(x)\in\pi^{-s}A_{\mathrm{inf},K}$.*

(ii) *Soit $r(e)$ l'entier introduit au lemme 2.1. Si $y=(y_1,\dots,y_d)$ avec $y_i-x_i\in A_{\mathrm{inf},K}\cap\mathrm{Ker}\,\theta$, alors $F_\omega(y)-F_\omega(x)\in\pi^{-s-r(e)}A_{\mathrm{cris},K}$.*

Démonstration. (i) Utilisant le fait que $\pi^s F_\omega^2$ est à coefficients entiers, on montre par récurrence que

$$\pi^s(F_\omega([k]x)-kF_\omega(x))=\pi^s F_\omega^2([k-1]x,x)+\pi^s(F_\omega([k-1]x)-(k-1)F_\omega(x))$$

est à coefficients entiers; ce qui pour $k=p$ nous donne le résultat.

(ii) C'est une conséquence immédiate du lemme 2.1.

Ecrivons alors

$$p^{n+1}F_\omega(\hat{u}_{n+1})-p^nF_\omega(\hat{u}_n)=p^n(pF_\omega(\hat{u}_{n+1})-F_\omega([p]\hat{u}_{n+1}))+p^n(F([p]\hat{u}_{n+1})-F_\omega(\hat{u}_n)),$$

on voit, en utilisant les (i) et (ii) du lemme 3.2, que $p^{n+1}F_w(\hat{u}_{n+1})-p^nF_\omega(\hat{u}_n)\in\pi^{en-s-r(e)}A_{\mathrm{cris},K}$ et donc que la suite $-p^nF_\omega(\hat{u}_n)$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris},K}$. L'indépendance par rapport au choix de $\hat{u}_n$ est alors immédiate, ainsi que le fait que la limite ne dépend que de l'image de ω dans $H^1_{DR}(\Gamma)$.

(ii) La linéarité par rapport à ω est immédiate et celle par rapport à u vient de ce que $p^nF_\omega(\hat{u}_n)+p^nF_\omega(\hat{u}'_n)-p^nF_\omega(\hat{u}_n\oplus\hat{u}'_n)=-p^nF^2_\omega(\hat{u}_n,\hat{u}'_n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Si $g\in\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et $\hat{u}_n\in(A_{\mathrm{inf},K})^d$ vérifie $\theta(\hat{u}_n)=u_n$ alors, $g(\hat{u}_n)\in(A_{\mathrm{inf},K})^d$ et vérifie $\theta(g(\hat{u}_n))=g(u_n)$. Comme F_ω est à coefficients dans K, on a $F_\omega(g(\hat{u}_n))=g(F_\omega(\hat{u}_n))$ et donc $g\left(\int_u\omega\right)=\int_{g(u)}\omega$. Finalement, si $\omega\in\mathrm{Fil}^1(H^1_{DR}(\Gamma))$, on a $F_\omega(u_n)=p^{-n}F_\omega([p^n]u_n)=0$ et donc $F_\omega(\hat{u}_n)\in\mathrm{Fil}^1(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris},K})$; on en déduit que l'application périodes respecte les filtrations.

(iii) Si $u_n=(x_{n,1},\dots,x_{n,d})$, soit $y_{n,i}\in R$ tel que $y^{(0)}_{n,i}=x_{n,i}$. Posons $\hat{u}_n=([y_{n,1}],\dots,[y_{n,d}])$. Il est alors clair que si $\omega\in D(\Gamma)$, alors $F_\omega(\hat{u}_n)\in\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$ et $\varphi(F_\omega(\hat{u}_n))=F_{\phi(\omega)}(\hat{u}_n)$ et donc, par passage à la limite, que $\int_u\omega$ est dans le sous-anneau fermé $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}}$ de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris},K}$ et que l'on a $\varphi\left(\int_u\omega\right)=\int_u\phi(\omega)$.

4 Intégration p-adique sur les variétés abéliennes

Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et X une variété algébrique de dimension d propre et lisse sur K. Une application de $X(\mathbf{B}^+_{DR})$ à valeurs dans $\mathbf{B}^+_{DR}$ sera dite localement analytique si pour tout $x\in X(\mathbf{B}^+_{DR})$ et pour un choix (donc pour tout choix) de paramètres locaux $z_1,\dots,z_d$, il existe $F_x\in\mathbf{B}^+_{DR}[[z_1,\dots,z_d]]$ et $r\in\mathbf{R}$ tels que $F_x(z_1,\dots,z_d)$ converge si $|\theta(z_i)|_p<r$ et coïncide avec F sur ce voisinage de x. Une fonction F de $X(\mathbf{B}^+_{DR})$ dans $\mathbf{B}_{DR}$ sera dite localement méromorphe si elle peut s'écrire comme quotient de deux applications localement analytiques; elle sera dite à singularité logarithmique si il existe des applications localement analytiques $G_1,\dots,G_n$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbf{B}^+_{DR}$, tels que F soit localement méromorphe sur $X(\mathbf{B}^+_{DR})-\bigcup_{i=1}^n\{x\mid\theta(G_i(x))=0\}$ et telle que $F-\sum_{i=1}^n\lambda_i\log_p(G_i)$ se prolonge en une fonction localement méromorphe sur tout $X(\mathbf{B}^+_{DR})$. Par exemple, une fonction rationnelle sur X est localement méromorphe, et si ω est une 1-forme différentielle rationnelle fermée, on peut trouver une fonction à singularité logarithmique (et même localement méromorphe si ω est de seconde espèce) F_ω telle que $dF_\omega=\omega$; l'existence d'une telle F_ω est assurée par le fait que la topologie p-adique est totalement discontinue, mais bien sûr, ceci implique que F_ω n'est déterminée qu'à addition d'une fonction localement constante près.

Dans le reste de cette section, X sera une variété abélienne.

Proposition 4.1. *Soient ω une différentielle de seconde espèce sur X et F^3_ω la fonction rationnelle sur X^3 introduite au par. 1; il existe alors une fonction F_ω localement* *méromorphe sur $X(\mathbf{B}_{DR}^+)$, unique à addition d'une constante près telle que*

(i) $dF_\omega=\omega$;

(ii) $F_\omega(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2)-F_\omega(x_0 \oplus x_1)-F_\omega(x_0 \oplus x_2)+F_\omega(x_0)=F_\omega^3(x_0, x_1, x_2)$.

De plus, cette intégration possède les propriétés de fonctorialité suivantes.

(iii) *Si $\omega=dF$ est fermée, alors $F_\omega=F$ et si $f: X_1 \rightarrow X_2$ est un morphisme de variétés abéliennes et ω est une forme différentielle de seconde espèce sur X_2, alors $F_{f^*\omega}=f^* F_\omega$.*

Remarque. (i) Si $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$, alors F_ω^3 est identiquement nulle et il y a un choix de F_ω meilleur que les autres: c'est celui obtenu en posant $F_\omega(0)=0$. Dans ce cas, F_ω n'est autre qu'un logarithme de X et en particulier, on a $F_\omega(x)=0$ si x est un point d'ordre fini. Dans la suite de cet article, nous prendrons systématiquement ce choix de F_ω, pour $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$.

(ii) Si X a bonne réduction, Coleman [C 2] a donné une autre construction de F_ω, mais on vérifie facilement en utilisant la fonctorialité de sa théorie de l'intégration p-adique que sa construction de F_ω vérifie la propriété (ii) de la proposition 4.1 et donc coïncide avec la notre.

Proposition 4.2. *Soit D un diviseur de X, $\omega_{1, D}, \ldots, \omega_{d, D}$ les différentielles de seconde espèce introduites au par. 1 et si $1 \leqq i \leqq d$, soit $F_{i, D}$ une primitive de $\omega_{i, D}$ dont l'existence est assurée par la proposition précédente et $\omega_D=\sum_{i=1}^d F_{i, D} \omega_i$. Il existe alors une fonction l_D, unique à addition d'une constante près, localement analytique sur $X-\{x \mid \theta(x) \in D(\mathbf{C}_p)\}$ et à singularité logarithmique le long de D vérifiant*

(i) $d l_D=\omega_D$,

(ii) $l_D(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)-l_D(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2)-l_D(x_0 \oplus x_1 \oplus x_3)-l_D(x_0 \oplus x_2 \oplus x_3)$
$+l_D(x_0 \oplus x_1)+l_D(x_0 \oplus x_2)+l_D(x_0 \oplus x_3)-l_D(x_0)=\log_p(F_D(x_0, x_1, x_2, x_3))$.

Lemme 4.3. *Soit V un voisinage de l'origine dans $X(\mathbf{B}_{DR}^+)$.*

(i) *On peut trouver un ouvert U de $X(\mathbf{B}_{DR}^+)$ contenu dans V qui est un sous-groupe de $X(\mathbf{B}_{DR}^+)$.*

(ii) *Et alors, $X(\mathbf{B}_{DR}^+)/U$ est un groupe de torsion.*

Démonstration. (i) Utilisant la loi de groupe formelle, on montre facilement que l'on peut trouver $r>0$ et un voisinage de l'origine isomorphe en tant que groupe topologique au sous groupe de $(\mathbf{B}_{DR}^+)^d$ constitué des $(x_1, \ldots, x_d)$ verifiant $|\theta(x_i)|_p<r$ pour $1 \leqq i \leqq d$, ce qui implique le résultat.

(ii) Par compacité, on montre que $X(L)/U$ est de torsion pour toute extension finie L de K, ce qui implique que $X(\overline{\mathbf{Q}}_p)/U$ est de torsion et le résultat suit de la densité de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ dans $\mathbf{B}_{DR}^+$. En fait les voisinages que nous considérons dans la suite sont de la forme $V=\theta^{-1}(V')$, où V' est un voisinage de l'origine dans $X(\mathbf{C}_p)$ et on peut prendre U de la forme $\theta^{-1}(U')$, où U' est un sous-groupe ouvert de $X(\mathbf{C}_p)$; dans ce cas, on a $X(\mathbf{B}_{DR}^+)/U \cong X(\mathbf{C}_p)/U'$ et le (ii) suit de la densité de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ dans $\mathbf{C}_p$.

Remarque. Ce lemme est particulier à la topologie p-adique. Un tel U n'existe pas sur les complexes et c'est ce qui explique que F_ω [resp. $l_D=\log(\theta_D)$] soit multivalué, d'où l'apparition des périodes complexes de ω (resp. de la forme de Riemann $E_{D, \infty}$). A l'autre bout de l'échelle, si on regarde la topologie formelle, (ii) n'est pas vérifié et dans ce cas on n'a pas d'unicité de la primitive. Remarquons aussi que l'on utilisé les morphismes de X fournis par la loi de groupe pour harmoniser les constantes d'intégration. Si X n'est pas une variété abélienne on ne dispose plus d'assez de morphismes algébriques (en général il n'y en a pas du tout) et pour garantir une unicité de la primitive, on peut utiliser la géométrie rigide pour laquelle on dispose de morphismes de Frobenius (du moins dans le cas de bonne réduction); c'est l'approche choisie par Coleman [C 2].

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 4.1. Choisissons un point $a \in X(\mathbf{B}_{DR}^+)$ tel que $\theta(a)$ ne soit pas un pôle de ω, une primitive formelle F_0 de ω en a et un voisinage V_0 de 0, formant un sous-groupe de $X(\mathbf{B}_{DR}^+)$ tel que F_0 définisse une fonction analytique sur $a \oplus V_0$. Alors F_0 est uniquement déterminée à l'addition d'une constante près et de plus, on a $F_0(x_0 \oplus x_1 \oplus x_2) - F_0(x_0 \oplus x_1) - F_0(x_0 \oplus x_2) + F_0(x_0) = F_\omega^3(x_0, x_1, x_2)$ pour tout $(x_0, x_1, x_2) \in (a \oplus V_0) \times V_0 \times V_0$ car les deux membres de l'égalité sont des fonctions analytiques sur V_0^3 ayant même différentielle et coincidant en $(a, 0, 0)$. Si $m \in \mathbf{N}$, définissons par récurrence des fonctions f_m rationnelles sur X par $f_1(x) = 0$ et $f_{m+1}(x) = F_\omega^3(a, [m]x, x) + f_m(x)$. Si $x \in a \oplus V_0$, alors $f_m(x) = F_0(a \oplus [m]x) - mF_0(a \oplus x) + (m-1)F_0(a)$. On en déduit les égalités valables pour tout $x, y \in X(\mathbf{B}_{DR}^+)$:

$$f_{nm}(x) = f_m(nx) + mf_n(x), \tag{4.1}$$

$$f_m(x \oplus y) - f_m(x) - f_m(y) = F_\omega^3(a, [m]x, [m]y) - mF_\omega^3(a, x, y). \tag{4.2}$$

Si $x \in X(\mathbf{B}_{DR}^+)$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $[m](x \ominus a) \in V_0$ et si on veut que F_ω satisfasse la condition (ii), on doit poser $F_\omega(x) = (F_0(a \oplus [m](x \ominus a)) - f_m(x))/m$. On utilise l'identité (4.1) pour vérifier que cette définition ne dépend pas du choix de $m \in \mathbf{N}$ tel que $[m](x \ominus a) \in V_0$ [F_ω est alors bien définie et satisfait la condition (i)] et on utilise l'identité (4.2) pour vérifier que F_ω satisfait bien la condition (ii). Le (iii) est une conséquence immédiate de l'unicité de F_ω.

La démonstration de la proposition 4.2 est basée sur le même principe. Remarquons tout d'abord que ω_D est fermée. En effet, on a $d\left(\sum_{i=1}^{d} F_{i,D}\omega_i\right) = \sum_{i=1}^{d} \omega_{i,D} \wedge \omega_i = 0$ (cf. par. 1). Choisissons un point $a \in X(\mathbf{B}_{DR}^+)$ tel que $\theta(a)$ ne soit pas un pôle de ω_D, une primitive formelle l_0 de ω_D en a et un voisinage V_0 de 0, formant un sous-groupe de $X(\mathbf{B}_{DR}^+)$ tel que l_0 définisse une fonction analytique sur $a \oplus V_0$. Alors l_0 est uniquement déterminée à addition d'une constante près et vérifie l'équation fonctionnelle (ii) pour $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in (a \oplus V_0) \times (V_0)^3$. Si $P(X) = \sum a_k X^k \in \mathbf{Z}[X]$ a un zéro d'ordre au moins 3 en $X = 1$, soient $\sum b_k X^k$ le quotient de P_m par $(X-1)^3$ et $F_{D,P}(x) = \prod F_D(a \oplus [k]x, x, x, x)^{b_k}$. Comme l_0 vérifie l'équation fonctionnelle (ii) sur $(a \oplus V_0) \times (V_0)^3$, on a, pour tout $x \in V_0$, $\log_p(F_{D,P}(x)) = \sum a_k l_0(a \oplus [k]x)$. Maintenant, si $x \in X(\mathbf{B}_{DR}^+)$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $[m](x \ominus a) \in V_0$. Soit alors $P_m = \sum a_k X^k \in \mathbf{Z}[\mathbf{X}]$ ayant un zéro d'ordre au moins 3 en $X = 1$ et vérifiant en plus $a_1 \neq 0$ et $a_k = 0$ si $k \neq 1$ ou si $k \not\equiv 0 \bmod m$. Il est clair que si on veut que l_D coincide avec l_0 sur $a \oplus V_0$ et vérifie l'équation fonctionnelle (ii) sur X^4, on doit poser

$$l_D(x) = \frac{1}{a_1}\left(\log_p(F_{D,P_m}(x \ominus a)) - \sum_{k \neq 1} a_k l_0(a \oplus [k](x \ominus a))\right).$$

On vérifie alors que l_D est bien définie et satisfait les conditions demandées dans la proposition 4.2 en utilisant l'équation fonctionnelle sur $(a \oplus V_0) \times (V_0)^3$.

5 Périodes p-adiques des variétés abéliennes

Soit X une variété algébrique propre et lisse définie sur K. Soit $\mathscr{X}$ un modèle propre de X sur $\mathcal{O}_K$. Soit $U=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n]/J)$ un ouvert affine de $\mathscr{X}$. Si, $f_1,\dots,f_{n-d}\in J$ et I est une partie à $n-d$ éléments de $[1,n]$, soit $\Delta_I(f_1,\dots,f_{n-d}) = \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial X_i}\right)_{1\leqq j\leqq n-d,\, i\in I}$. Comme X est lisse sur K, il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que π^k apartienne à l'idéal de $\mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n]$ engendré par J et les $\Delta_I(f_1,\dots,f_{n-d})$, I décrivant les parties à $n-d$ éléments de $[1,n]$ et $(f_1,\dots,f_{n-d})$ les parties à $n-d$ éléments de J. Notons df_U le plus petit $k\in\mathbf{N}$ vérifiant la propriété précédente et si $\mathscr{U}$ est un recouvrement fini de $\mathscr{X}$ par des ouverts affines, posons $df_{\mathscr{U}}=\sup_{U\in\mathscr{U}} df_U$. Finalement, définissons le défaut de lissité $df_{\mathscr{X}}$ de $\mathscr{X}$ comme la borne inférieure des $df_{\mathscr{U}}$, où $\mathscr{U}$ décrit les recouvrements finis de $\mathscr{X}$ par des ouverts affines. En particulier, si $\mathscr{X}$ est lisse sur $\mathcal{O}_K$, alors $df_{\mathscr{X}}=0$.

Proposition 5.1. $\forall k\in\mathbf{N}$ *vérifiant* $k\geqq df_{\mathscr{X}}$,

(i) *l'application canonique de* $\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ *dans* $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ *est surjective.*

(ii) *si* $x\in\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$, *il existe des paramètres locaux* $z_1,\dots,z_d$, *définis sur les entiers tels que* $\mathcal{O}_{\mathscr{X},x}\subset A^k_{\mathrm{inf},K}[[\pi^{-k}z_1,\dots,\pi^{-k}z_d]]$.

Démonstration. Si $x\in\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$, il existe un ouvert affine $U=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n]/J)$ de J contenant x, une partie I à $n-d$ éléments de $[1,n]$ et $f_1,\dots,f_{n-d}\in J$ tels que $v_\pi(\Delta_I(f_1,\dots,f_{n-d})(x)\geqq k$. Renumérotons les X_i de telle sorte que $I=\{d+1,\dots,n\}$ et notons F (resp. F_0), l'application

$$(X_1,\dots,X_n)\to(X_1,\dots,X_d,f_1(X_1,\dots,X_n),\dots,f_{n-d}(X_1,\dots,X_n))$$
$$[\text{resp. } (X_1,\dots,X_n)\to(0,\dots,0,f_1(X_1,\dots,X_n),\dots,f_{n-d}(X_1,\dots,X_n))].$$

Choisissons $\hat{x}_{1,0},\dots,\hat{x}_{n,0}\in A_{\mathrm{inf},K}$ et $\hat{P}\in\pi^{-k}M_n(A_{\mathrm{inf},K})$ vérifiant $\theta(\hat{x}_i)=x_i$ et $\theta(\hat{P})=dF(x)^{-1}$ et définissons pour $m\geqq 1$ une suite d'éléments $y_m=(\hat{x}_{1,m},\dots,\hat{x}_{n,m})$ de $(\pi^{-mk}A_{\mathrm{inf},K})^n$ par la formule de récurrence

$$y_m\equiv y_{m-1}-\hat{P}(F_0(y_{m-1}))\ \mathrm{mod}(\mathrm{Ker}\,\theta)^m.$$

Il est alors clair [car $F_0(y_m)\in(\pi^{-mk}A_{\mathrm{inf},K}\cap(\mathrm{Ker}\,\theta)^{m+1})^n$] que la suite y_m converge vers un élément $\hat{x}$ de $\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ vérifiant $\theta(\hat{x})=x$, ce qui permet de démontrer le (i).

Soit maintenant $\hat{x}\in\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ et $U=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[X_1,\dots,X_n]/J)$ un voisinage affine de $\hat{x}$ tel que $df_U\leqq k$. Quitte à renuméroter les X_i, on peut supposer qu'il existe $f_1,\dots,f_{n-d}\in J$ tels que $v_\pi(\Delta_{\{d+1,\dots,n\}}(f_1,\dots,f_{n-d})(\theta(\hat{x})))\leqq k$. Soient F, F_0 et $\hat{P}$ comme ci-dessus. Posons $z_i=X_i-\hat{x}_i$ pour $1\leqq i\leqq d$. Soit $Y_m=(y_{1,m},\dots,y_{n,m})\in(\pi^{-mk}A_{\mathrm{inf},K}[[z_1,\dots,z_d]])^n$ défini par $Y_0=(z_1,\dots,z_d,0,\dots,0)$ et $Y_m\equiv Y_{m-1}-\hat{P}(F_0(Y_{m-1}))$ modulo la puissance $m+1$-ième de l'idéal d'augmentation de $K\otimes A_{\mathrm{inf},K}[[z_1,\dots,z_d]]$. La démonstration précédente montre alors que la suite Y_m converge dans $A^k_{\mathrm{inf},K}[[\pi^{-k}z_1,\dots,\pi^{-k}z_d]]$ vers $(z_1,\dots,z_d,y_{d+1},\dots,y_n)$ et donc $X_i=y_i+\hat{x}_i\in A^k_{\mathrm{inf},K}[[\pi^{-k}z_1,\dots,\pi^{-k}z_d]]$, ce qui implique $\mathcal{O}_U\subset A^k_{\mathrm{inf},K}[[\pi^{-k}z_1,\dots,\pi^{-k}z_d]]$. On en déduit le résultat.

Dans la suite de cette section, X sera une variété abélienne, $\mathscr{X}$ un modèle propre de X sur $\mathcal{O}_K$. Soit k un entier supérieur ou égal à $df_{\mathscr{X}}$. Par construction, $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ s'identifie à $X(\mathbf{C}_p)$ et $\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ s'identifie à $X(K\otimes A^k_{\mathrm{inf},K})$, ce qui fait que $\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$

est muni d'une structure de groupe abélien. Nous noterons $\oplus$ la loi de groupe sur $\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$. Soit ω une différentielle de seconde espèce sur X et soit Δ le diviseur polaire de ω. Si $y\in\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$, notons $U_{\omega,y}$ (resp. U_ω) l'intérieur (au sens de la topologie de Zariski) de $\mathscr{X}-(\Delta\cup\Delta\ominus y)$ (resp. $\mathscr{X}-\Delta$) de telle sorte que la fonction $x\to F_\omega(x)-F_\omega(y\oplus x)$ est élément de $\mathcal{O}_{U_{\omega,y}}\otimes K$. Soit $u=(\ldots,u_n,\ldots)$, où $u_n\in\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$, un élément du module de Tate $T_p(X)$ de X. Soient finalement $\hat{u}_n\in\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ vérifiant $\theta(\hat{u}_n)=u_n$ et $a_n\in U_{\omega,\hat{u}_n}(A^k_{\mathrm{inf},K})$.

Théorème 5.2. (i) *Si F_ω est une des primitives de ω définie à la proposition 4.1, alors la suite $p^n(F_\omega(a_n)-F_\omega(a_n\oplus\hat{u}_n))$ tend vers une limite dans $\mathbf{B}^+_{DR}$ qui ne dépend que de u et de la classe de ω dans $H^1_{DR}(X)$.*

(ii) *L'application périodes p-adique $(\omega,u)\to\int_u\omega$ de $H^1_{DR}(X)\times T_p(X)$ dans $\mathbf{B}^+_{DR}$ ainsi définie est bilinéaire, commute à l'action de Galois $\left[\text{i.e. } g\left(\int_u\omega\right)=\int_{g(u)}\omega \text{ si } g\in\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)\right]$, respecte les filtrations $\left(\text{i.e. } \int_u\omega\in\mathrm{Fil}^1(\mathbf{B}^+_{DR}) \text{ si } \omega\in H^0(X,\Omega^1_X)\right)$ et est non-dégénérée quand on étend les scalaires à $\mathbf{B}_{DR}$.*

(iii) *Si D est un diviseur de X, et $u_1,u_2\in T_p(X)$, alors $\varepsilon_D(u_1,u_2)=(1,\ldots,e_{p^n,D}(u_{n,1},u_{n,2}),\ldots)$ est élément de R. Posons $E_{D,p}(u_1,u_2)=-\log_p([\varepsilon_D(u_1,u_2)])$; on a la relation de Riemann p-adique*

$$E_{D,p}(u_1,u_2)=\sum_{i=1}^{d}\left(\int_{u_1}\omega_{i,D}\int_{u_2}\omega_i-\int_{u_2}\omega_{i,D}\int_{u_1}\omega_i\right).$$

Remarque. (i) Supposons que $\mathscr{X}$ est semi-stable et que l'origine est lisse sur $\mathcal{O}_K$. La loi de groupe sur X nous définit alors une loi de groupe formel sur le complété formel de $\mathcal{O}_{\mathscr{X},0}$. Ce groupe formel $\hat{X}$ est défini sur $\mathcal{O}_K$ et est de hauteur finie. De plus, si U est un ouvert de $\mathscr{X}$ contenant 0 et ω est une forme différentielle de seconde espèce (resp. fermée) sur X, élément de $H^0(U,\Omega_U)\otimes K$, alors ω définit une forme différentielle de seconde espèce (resp. fermée) sur $\hat{X}$ et on obtient donc un morphisme (surjectif) de $H^1_{DR}(X)$ dans $H^1_{DR}(\hat{X})$. Comme $T_p(\hat{X})$ est un sous-module de $T_p(X)$, on a à priori deux applications périodes de $H^1_{DR}(\hat{X})\times T_p(\hat{X})$, mais on montre facilement qu'elles coïncident.

(ii) Supposons que X est définie sur K et que l'on a fixé des applications de $\bar{K}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_p$. L'application qui à $u\in H_1(X(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$ associe $(0,\ldots,pr(p^{-n}i(u)),\ldots)\in T_p(X)$ induit un isomorphisme entre $T_p(X)$ et $H_1(X(\mathbf{C}),\mathbf{Z})\otimes\mathbf{Z}_p$. De même, $\mathbf{Z}_p(1)$ a un générateur canonique, à savoir $-\log_p\left(\left[\left(1,\ldots,\exp\left(\frac{2i\pi}{p^n}\right),\ldots\right)\right]\right)$ et on vérifie, en utilisant la formule (2.3) que l'on obtient $E_{D,p}$ à partir de $E_{D,\infty}$ en étendant les scalaires à $\mathbf{Z}_p$.

Revenons à la démonstration du théorème; nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3. *Il existe $r\in\mathbf{Z}$ tel que*

(i) *si $b\in\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ et $a_1,a_2\in U_{\omega,b}(A^k_{\mathrm{inf},K})$, alors $(F_\omega(a_1)-F_\omega(a_1\oplus b))-(F_\omega(a_2)-F_\omega(a_2\oplus b))\in\pi^r A^k_{\mathrm{inf},K}$.*

(ii) *Si $u\in V_\omega(A^k_{\mathrm{inf},K})$, où V_ω est l'intérieur dans $\mathscr{X}$ du complémentaire de $\Delta\cup[p]^*\Delta$, alors $F_\omega([p]u)-pF_\omega(u)\in\pi^r A^k_{\mathrm{inf},K}$.*

(iii) *Si $a,b\in U_\omega(A^k_{\mathrm{inf},K})$ ont la même réduction modulo $\mathrm{Ker}\,\theta$, alors $F_\omega(a)-F_\omega(b)\in\pi^r A^k_{\mathrm{cris},K}$.*

Démonstration. Il suffit, pour chaque propriété de trouver un $r \in \mathbf{Z}$ qui la satisfait

(i) soit U_Δ l'intérieur dans $\mathscr{X}^3$ du complémentaire de la réunion des images inverses de Δ par les applications qui à $(x_1, x_2, x_3) \in X^3$ associent $x_1, x_2, x_1 \oplus x_3$ ou $x_2 \oplus x_3$. Alors l'application $(a_1, a_2, b) \to F^3_\omega(a_1, a_2 \ominus a_1, b)$ est élément de $\mathcal{O}_{U_\Delta} \otimes K$ et donc il existe $s \in \mathbf{Z}$ tel qu'elle soit élément de $\pi^s \mathcal{O}_{U_\Delta}$. Comme de plus, si $a_1, a_2 \in U_{\omega, b}(A^k_{\mathrm{inf}, K})$, alors $(a_1, a_2, b) \in U_\Delta(A^k_{\mathrm{inf}, K})$, on obtient:

$$(F_\omega(a_1) - F_\omega(a_1 \oplus b)) - (F_\omega(a_2) - F_\omega(a_2 \oplus b)) = F^3_\omega(a_1, a_2 \ominus a_1, b) \in \pi^r A^k_{\mathrm{inf}, K}.$$

(ii) L'application $x \to F_\omega([p]x) - pF_\omega(x)$ est élément de $\mathcal{O}_{V_\omega} \otimes K$.

(iii) D'après la proposition 5.1 (ii), il existe $s \in \mathbf{Z}$ tel que ω s'écrive au voisinage de a sous la forme $\sum_{i=1}^{d} f_i(z_1, \ldots, z_d) dz_i$ où les z_i sont des paramètres locaux en a définis sur les entiers et $f_i \in \pi^s A^k_{\mathrm{inf}, K}[[\pi^{-k} z_1, \ldots, \pi^{-k} z_d]]$. On conclut en utilisant le lemme 2.1 et en posant $r = s - r(e)$.

Revenons à la démonstration du théorème. Soient W_n l'intérieur dans $\mathscr{X}$ du complémentaire de $D \cup D \ominus \hat{u}_{n+1} \cup [p]^* D \cup [p]^* D \ominus \hat{u}_n$ et $b_{n+1} \in W_n(A^k_{\mathrm{inf}, K})$. Ecrivons alors $p^{n+1}(F_\omega(a_{n+1}) - F_\omega(a_{n+1} \oplus \hat{u}_{n+1})) - p^n(F_\omega(a_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n))$ sous la forme

$$\begin{aligned} p^{n+1}&((F_\omega(a_{n+1}) - F_\omega(a_{n+1} \oplus \hat{u}_{n+1})) - (F_\omega(b_{n+1}) - F_\omega(b_{n+1} \oplus \hat{u}_{n+1}))) \\ &- p^n((F_\omega(a_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n)) - (F_\omega([p] b_{n+1}) - F_\omega([p] b_{n+1} \oplus \hat{u}_n))) \\ &+ p^n(p(F_\omega(b_{n+1}) - F_\omega(b_{n+1} \oplus \hat{u}_{n+1})) - (F_\omega([p] b_{n+1}) - F_\omega([p] b_{n+1} \oplus [p] \hat{u}_{n+1}))) \\ &- p^n(F_\omega([p] b_{n+1} \oplus \hat{u}_n) - F_\omega([p] b_{n+1} \oplus [p] \hat{u}_{n+1})), \end{aligned}$$

on obtient, utilisant le lemme 5.3:

$$p^{n+1}(F_\omega(a_{n+1}) - F_\omega(a_{n+1} \oplus \hat{u}_{n+1})) - p^n(F_\omega(a_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n)) \in \pi^{en - r - r(e)} A^k_{\mathrm{cris}, K}.$$

Ceci permet de montrer que la suite $p^n(F_\omega(a_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n))$ converge dans $\mathbf{B}^+_{DR}$ et même dans $A^k_{\mathrm{cris}, K} \otimes K$ vers une limite qui est donc indépendante des choix de a_n et de $\hat{u}_n$.

– La linéarité par rapport à ω est immédiate et d'autre part il est immédiat que si ω est exacte, c'est-à-dire si $F_\omega \in \pi^{-r} \mathcal{O}_U$, alors la limite est nulle, et donc la limite ne dépend que de l'image de ω dans $H^1_{DR}(X)$.

– La linéarité par rapport à u se démontre en utilisant le lemme 5.3 (i) et en écrivant

$$\begin{aligned} p^n(F_\omega(a_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n \oplus \hat{v}_n)) = {} & p^n(F_\omega(a_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n)) \\ & + p^n(F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n) - F_\omega(a_n \oplus \hat{u}_n \oplus \hat{v}_n)). \end{aligned}$$

– L'application «périodes p-adique» commute à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et respecte les filtrations pour exactement les mêmes raisons que dans le cas des groupes formels (cf. la remarque suivant la proposition 4.1).

– L'indépendance par rapport à $\mathscr{X}$ et la fonctorialité se démontrent en utilisant la fonctorialité de l'intégration ainsi que l'argument utilisé par Fontaine [F 3, p. 390].

– Si D est non-dégénéré la forme de Riemann $E_{D,p}$ est non-dégénérée et la non-dégénérescence de l'application «périodes p-adiques» est une conséquence de (iii) qui est donc le dernier point à prouver pour compléter la démonstration du théorème. Soit U_n l'intérieur dans $\mathscr{X}^3$ du complémentaire de la réunion des images réciproques de D par les applications qui, à $(X, \alpha, \beta) \in \mathscr{X}^3$, associent $x \oplus \alpha$, $x \oplus \beta$,

$x\oplus p^n\alpha$, $x\oplus p^n\beta$, $x\oplus\alpha\oplus p^n\beta$ et $x\oplus\beta\oplus p^n\alpha$. Soit $F_{p^n,D}$ la fonction rationnelle sur X^3 définie au par 1. On a alors $F_{p^n,D}\in\mathcal{O}_{U_n}^*$ car $F_{p^n,D}$ et $F_{p^n,D}^{-1}$ appartiennent à $\mathcal{O}_{U_n}\otimes K$ et de plus $F_{p^n,D}(x,0,\beta)=F_{p^n,D}(x,\alpha,0)=1$. Soient $u_j=(\ldots,u_{n,j},\ldots)$ pour $j=1,2$, deux éléments de $T_p(X)$. Finalement soient $\hat{u}_{n,j}\in\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ tel que $\theta(\hat{u}_{n,j})=u_{n,j}$ et $\hat{x}_n\in\mathscr{X}(A^k_{\mathrm{inf},K})$ tel que $(\hat{x}_n,\hat{u}_{n,1},\hat{u}_{n,2})\in U_n(A^k_{\mathrm{inf},K})$.

Lemme 5.4. *On a*

$$E_{D,p}(u_1,u_2)=\lim_{n\to\infty}-p^n\log_p(F_{p^n,D}(\hat{x}_n,\hat{u}_{n,1},\hat{u}_{n,2}))\,.$$

Démonstration. On a $F_{p^n,D}(\hat{x}_n,\hat{u}_{n,1},\hat{u}_{n,2})\in A^k_{\mathrm{inf},K}$. D'autre part, utilisant la formule (1.3), on obtient:

$$\theta(F_{p^n,D}(\hat{x}_n,\hat{u}_{n,1},\hat{u}_{n,2}))=e_{p^n,D}(u_{n,1},u_{n,2})$$

et le lemme découle de la théorie des périodes pour les groupes formels appliquée au cas particulier de $\mathbf{G}_m$.

Maintenant, utilisant la formule (1.2) et l'équation fonctionnelle satisfaite par l_D, on obtient: $E_{D,p}(u_1,u_2)=\lim_{n\to\infty}y_n$, avec

$$\begin{aligned}y_n=p^n(&l_D(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,1}\oplus[p^n]\hat{u}_{n,2})-l_D(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,1})-l_D(\hat{x}_n\oplus[p^n]\hat{u}_{n,2})+l_D(\hat{x}_n))\\&-p^n(l_D(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,2}\oplus[p^n]\hat{u}_{n,1})-l_D(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,2})-l_D(\hat{x}_n\oplus[p^n]\hat{u}_{n,1})+l_D(\hat{x}_n))\,.\end{aligned}$$

Lemme 5.5. *Soit U_D l'intérieur dans $\mathscr{X}$ du complémentaire de D et soient $x,y\in U_D(A^k_{\mathrm{inf},K})$ vérifiant $\theta(x)=\theta(y)$. Si $1\leqq i\leqq d$, soit $z_i=F_{\omega_i}(y\ominus x)=F_{\omega_i}(y)-F_{\omega_i}(x)$. Alors, on a*

$$l_D(y)=l_D(x)+\sum_{i=1}^{d}F_{i,D}(x)z_i+\sum_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}(x)z_1^{k_1}\ldots z_d^{k_d}\,,$$

où $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_d)$ avec $k_1+\ldots+k_d\geqq 2$ et $a_{\mathbf{k}}\in\mathcal{O}_{U_D}\otimes K$.

Démonstration. $\mathcal{O}_{U_D}\otimes K$ est stable sous l'action de $\partial_1,\ldots,\partial_d$. D'autre part, on a $\partial_i\partial_j l_D=\partial_i F_{j,D}\in\mathcal{O}_{U_D}\otimes K$ pour tout $1\leqq i,j\leqq d$. Utilisant ces deux remarques ainsi que la formule de Taylor, on obtient

$$a_{\mathbf{k}}=\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{k_i!}\partial_i^{k_i}l_D\in\mathcal{O}_{U_D}\otimes K\,,$$

ce qui permet de conclure.

Soit $r_k\in\mathbf{Z}$ tel que $\pi^{r_k}a_{\mathbf{k}}\in\mathcal{O}_{U_D}$ pour tout $\mathbf{k}$ vérifiant $k_1+\ldots+k_d\leqq k$. Les suites $F_{\omega_i}([p^n]\hat{u}_{n,j})=p^nF_{\omega_i}(\hat{u}_{n,j})$ convergent dans $\mathbf{B}^+_{DR}$ vers $-\int_{u_j}\omega_i$. Il existe donc $s_k\in\mathbf{Z}$ tel que $\forall n\in\mathbf{N}$, $F_{\omega_i}([p^n]\hat{u}_{n,j})\in\pi^{s_k}A^k_{\mathrm{inf},K}+(\mathrm{Ker}\,\theta)^{k+1}$. On obtient alors, utilisant le lemme 5.5 avec $(x,y)=(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,1},\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,1}\oplus[p^n]\hat{u}_{n,2})$, $(\hat{x}_n,\hat{x}_n\oplus[p^n]\hat{u}_{n,2})$, $(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,2},\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,2}\oplus[p^n]\hat{u}_{n,1})$ et $(\hat{x}_n,\hat{x}_n\oplus[p^n]\hat{u}_{n,1})$:

$$\begin{aligned}y_n\equiv p^{2n}\sum_{i=1}^{d}&((F_{i,D}(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,1})-F_{i,D}(\hat{x}_n))F_{\omega_i}(\hat{u}_{n,2})-(F_{i,D}(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,2})-F_{i,D}(\hat{x}_n))F_{\omega_i}(\hat{u}_{n,1}))\\&\mathrm{mod}\,\pi^{en-r_k+ks_k}A^k_{\mathrm{inf},K}+(\mathrm{Ker}\,\theta)^{k+1}\,,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, compte-tenu du fait que $p^n(F_{i,D}(\hat{x}_n\oplus\hat{u}_{n,j})-F_{i,D}(\hat{x}_n))$ tend vers $-\int_{u_j}\omega_{i,D}$ dans $\mathbf{B}^+_{DR}$.

6 Comparaison avec les périodes de Hodge-Tate

Dans ce paragraphe, nous vérifions que l'application «périodes p-adique» construite au par. 5 est compatible avec l'accouplement $\langle\omega,u\rangle_{\mathrm{Fo}}$ de $H^0(X,\Omega_X^1)\times T_p(X)$ [resp. $\langle\omega,u\rangle_{\mathrm{Cn}}$ de $H^1(X,\mathcal{O}_X)\times T_p(X)$] à valeurs dans $\mathbf{C}_p(1)$ (resp. $\mathbf{C}_p$) construit par Fontaine [F 3] (resp. Coleman [C 1]).

Proposition 6.1. (i) *Si* $\omega\in H^0(X,\Omega_X^1)$, *alors* $\langle\omega,u\rangle_{\mathrm{Fo}}$ *est l'image de* $\int_u\omega$ *dans* $\mathrm{Fil}^1(\mathbf{B}_{DR}^+)/\mathrm{Fil}^2(\mathbf{B}_{DR}^+)\cong\mathbf{C}_p(1)$.

(ii) $\langle\omega,u\rangle_{\mathrm{Cn}}=\theta\left(\int_u\omega\right)$.

Démonstration. (i) Commençons par rappeler la construction de $\langle\ ,\ \rangle_{\mathrm{Fo}}$. Soit $\Omega_{\mathcal{O}_{\bar K}/\mathcal{O}_K}$ le module des $\mathcal{O}_K$-différentielles de Kähler de $\mathcal{O}_{\bar K}$; c'est un $\mathrm{Gal}(\bar K/K)$-module p-divisible de p-torsion canoniquement isomorphe à $\mathrm{Fil}^1(\mathbf{B}_{DR}^+)/(\mathrm{Fil}^1(A_{\mathrm{inf},K})+\mathrm{Fil}^2(\mathbf{B}_{DR}^+))$, l'isomorphisme étant donné par la formule suivante: si $x\in\mathcal{O}_{\bar K}$ et $\hat x\in A_{\mathrm{inf},K}+\mathrm{Fil}^2(\mathbf{B}_{DR}^+)$ vérifie $\theta(\hat x)=x$, alors dx s'envoit sur l'image de $x-\hat x$ modulo $\mathrm{Fil}^1(A_{\mathrm{inf},K})+\mathrm{Fil}^2(\mathbf{B}_{DR}^+)$. On déduit de l'isomorphisme précédent un isomorphisme canonique de $K\otimes T_p(\Omega_{\mathcal{O}_{\bar K}/\mathcal{O}_K})$ sur $\mathrm{Fil}^1(\mathbf{B}_{DR}^+)/\mathrm{Fil}^2(\mathbf{B}_{DR}^+)\cong\mathbf{C}_p(1)$. Soit $\omega\in H^0(X,\Omega_X^1)$; il existe $r\in\mathbf{N}$ tel que $p^r\omega\in H^0(\mathscr{X},\Omega_{\mathscr{X}}^1)$ et tel que pour tout couple de points x,y de $\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar K})$, on ait $(x\oplus y)^*(p^r\omega)=x^*(p^r\omega)+y^*(p^r\omega)$ dans $\Omega_{\mathcal{O}_{\bar K}/\mathcal{O}_K}$. On pose alors, si $u=(0,\dots,u_n,\dots)\in T_p(X)$, avec $u_n\in\mathscr{X}(\mathcal{O}_{\bar K})$:

$$\langle\omega,u\rangle_{\mathrm{Fo}}=p^{-r}\otimes(0,\dots,u_n^*(p^r\omega),\dots)\in K\otimes T_p(\Omega_{\mathcal{O}_{\bar K}/\mathcal{O}_K}).$$

Soit $U_n=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K[Y_1,\dots,Y_m]/J)$ un voisinage affine de u_n dans $\mathscr{X}$. Soit $s\in\mathbf{N}$ tel que $p^s\omega=\sum_{i=1}^m f_i(Y)\,dY_i$ avec $f_i\in\mathcal{O}_K[Y_1,\dots,Y_m]$. Soient $x_1,\dots,x_m\in\mathcal{O}_{\bar K}$ les coordonnées de u_n, $\hat u_n=(\hat x_1,\dots,\hat x_m)\in U_n(A^k_{\mathrm{inf},K})$ vérifiant $\theta(\hat u_n)=u_n$ et $r=s+k$. Effectuons un développement limité de F_ω au voisinage de u_n, en utilisant le fait que $F_\omega(u_n)=0$ et $dF_\omega=\omega$; on obtient:

$$\begin{aligned}-p^rF_\omega(\hat u_n)&=\sum_{i=1}^m f_i(u_n)(p^kx_n-p^k\hat x_n)\ \mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^2(\mathbf{B}_{DR}^+)\\&=p^ku_n^*(p^s\omega)\in\Omega_{\mathcal{O}_{\bar K}/\mathcal{O}_K}.\end{aligned}$$

On en tire le résultat car $\int_u\omega=\lim_{n\to\infty}-p^nF_\omega(\hat u_n)$.

(ii) L'accouplement de Coleman est défini de la manière suivante. Soit $\hat X$ la variété abélienne duale de X. Soit $u=(0,\dots,u_n,\dots)\in T_p(X)$ et D_n un diviseur de $\hat X$ représentant u_n. Soit $f_n\in\mathbf{C}_p(\hat X)$ ayant pour diviseur p^nD_n. On commence par construire une application que nous noterons λ_X (Coleman la note θ_X, mais θ a déjà deux significations dans cet article) de $T_p(X)$ dans $H^0(\hat X,\Omega_{\hat X}^1\otimes\mathbf{C}_p)$, en posant

$$\lambda_X(u)=\lim_{n\to\infty}\frac{df_n}{f_n}.$$

Puis on utilise l'isomorphisme canonique entre $H^1(X,\mathcal{O}_X)$ et l'espace tangent à l'origine de $\hat X$, lui même canoniquement dual de $H^0(\hat X,\Omega_{\hat X}^1)$ pour construire un accouplement $(\ ,\ )_X$ de $H^1(X,\mathcal{O}_X)\times H^0(\hat X,\Omega_{\hat X}^1\otimes\mathbf{C}_p)$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$. On pose alors,

$$\langle\omega,u\rangle_{\mathrm{Cn}}=(\omega,\lambda_X(u))_X.$$

Notons que pour donner un sens à cette formule, on n'a pas besoin de supposer que X a bonne réduction. L'égalité $\langle \omega, u\rangle_{\mathrm{Cn}} = \theta\left(\int_u \omega\right)$ se démontre comme le théorème 12 de [C 1]. La démonstration est d'ailleurs une variante de la démonstration des formules de Riemann p-adiques, mais dans laquelle on travaille avec dl_D au lieu de l_D, ce qui est un peu plus simple car on n'a pas besoin de prouver l'existence de l_D. Remarquons aussi que le théorème 12 de [C 1] comporte une erreur de signe (cf. [C 3]).

7 Compléments dans le cas où X a bonne réduction

Nous nous proposons de montrer que l'action de Frobenius sur les périodes p-adiques provient de l'action de Frobenius sur $H^1_{DR}(X)$ que l'on obtient en utilisant la géométrie rigide.

Soit $\mathscr{X}$ un modèle de X lisse sur $\mathcal{O}_K$ que nous supposerons muni d'une structure de schéma en groupes sur $\mathcal{O}_K$ redonnant la loi de groupe sur X après extension des scalaires à K (on peut montrer qu'un tel $\mathscr{X}$ existe toujours). Nous noterons encore $\mathscr{X}$ la variété analytique rigide sous-jacente. Si Y est un affinoïde de $\mathscr{X}$ dont la réduction modulo π est stable par Frobenius, nous dirons qu'un morphisme analytique rigide de Y dans Y est un Frobenius si sa réduction modulo π coincide avec le morphisme de Frobenius géométrique de la réduction de Y.

Si ω est une forme différentielle de seconde espèce sur X, il existe une forme différentielle $\phi(\omega)$ de seconde espèce sur X telle que, pour tout affinoïde Y de $\mathscr{X}$ dont la réduction est stable par Frobenius et tout Frobenius ϕ_Y de Y, on ait $\phi_Y^*(\omega) - \phi(\omega) = df_Y$, où f_Y est une fonction méromorphe rigide sur Y. L'application $\omega \to \phi(\omega)$ passe au quotient et nous donne une action de Frobenius sur $H^1_{DR}(X)$ que nous noterons encore ϕ.

Proposition 7.1. *Si $\omega \in H^1_{DR}(X)$ et $u \in T_p(X)$, alors $\int_u \omega \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{cris},K}$ et $\varphi_K\left(\int_u \omega\right) = \int_u \phi(\omega)$.*

Démonstration. Nous savons déjà que $\int_u \omega \in \mathbf{B}^+_{\mathrm{cris},K}$ (cf. démonstration du théorème 5.2); pour démontrer le reste, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 7.2. *Soit Y un affinoïde défini sur $\mathcal{O}_K$ ayant bonne réduction modulo π. Soit ϕ_Y un Frobenius de Y. Alors, $\forall x \in Y(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$, il existe $\hat{x} \in Y(A_{\mathrm{inf},K})$ tel que $\theta(\hat{x}) = x$ et $\varphi_K(\hat{x}) = \phi_Y(\hat{x})$.*

Démonstration. L'application $\phi_Y\colon Y(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}) \to Y(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ est surjective et la bonne réduction de Y implique que l'application θ de $Y(A_{\mathrm{inf},K})$ dans $Y(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ est surjective (cf. par. 4). Soient donc $x_n \in Y(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ tels que $x_0 = x$, $\phi_Y(x_n) = x_{n-1}$ et $\hat{x}_n \in Y(A_{\mathrm{inf},K})$ vérifiant $\theta(\hat{x}_n) = x_n$. Utilisant le fait que $d\phi_Y \equiv 0$ modulo π et $\phi_Y(y) - \varphi_K(y) \equiv 0$ modulo π, on montre facilement que

(i) la suite $\phi_Y^n(\hat{x}_n)$ tend vers une limite $\hat{x} \in Y(A_{\mathrm{inf},K})$,

(ii) $\varphi_K(\hat{x}) = \lim_{n\to\infty} \varphi_K(\phi_Y^n(\hat{x}_n)) = \lim_{n\to\infty} \phi_Y^n(\varphi_K(\hat{x}_n)) = \lim_{n\to\infty} \phi_Y^n(\phi_Y(\hat{x}_n))$
$= \phi_Y\left(\lim_{n\to\infty} \phi_Y^n(\hat{x}_n)\right) = \phi_Y(\hat{x})$.

Revenons à la démonstration de la proposition. Soit U un $\mathcal{O}_K$-ouvert de $\mathscr{X}$ tel que ω et $\phi(\omega)$ appartiennent à $K \otimes \Omega^1_U$. Soit ϕ_U un Frobenius de U. On a alors

$\phi_U^*(\omega)-\phi(\omega)=df$, où f est une fonction analytique rigide sur U. Utilisant le fait que l'intégration de Coleman est fonctorielle, on obtient que $\phi_U^*(F_\omega)-F_{\phi(\omega)}=f+C^{te}$ est bornée sur U. Soit $u=(0,\dots,u_n,\dots)\in T_p(X)$, $\tilde{u}_n$ la réduction de u_n modulo π, $a_n\in U(A_{\text{inf},K})$ tel que $\varphi_K(a_n)=\phi_U(a_n)$ et dont la réduction modulo π n'appartient pas à $\bar{U}\ominus\tilde{u}_n$. On a alors $\theta(a_n)\oplus u_n\in U(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ et on peut trouver $\hat{u}_n\in\mathscr{X}(A_{\text{inf},K})$ tel que $\theta(\hat{u}_n)=u_n$ et $\varphi_K(a_n\oplus\hat{u}_n)=\phi_U(a_n\oplus\hat{u}_n)$. On obtient

$$\begin{aligned}\varphi_K\left(\int_u\omega\right)&=\lim_{n\to\infty}p^n(F_\omega(\varphi_K(a_n))-F_\omega(\varphi_K(a_n\oplus\hat{u}_n)))\\&=\lim_{n\to\infty}p^n(F_\omega(\phi_U(a_n))-F_\omega(\phi_U(a_n\oplus\hat{u}_n)))\\&=\lim_{n\to\infty}p^n(F_{\phi(\omega)}(a_n)-F_{\phi(\omega)}(a_n\oplus\hat{u}_n))=\int_u\phi(\omega)\,.\end{aligned}$$

Bibliographie

[C 1] Coleman, R.: Hodge-Tate periods and p-adic Abelian integrals. Invent. Math. **78**, 351–379 (1984)

[C 2] Coleman, R.: Torsion points on curves and p-adic Abelian integrals. Ann. Maths **121**, 111–168 (1985)

[C 3] Coleman, R.: The universal vectoriel bi-extension and p-adic heights. Invent. Math. **103**, 631–650 (1991)

[F 1] Fontaine, J.-M.: Groupes p-divisibles sur les corps locaux. (Astérisque, vols. 47–48) Paris: Soc. Math. Fr. 1977

[F 2] Fontaine, J.-M.: Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. Maths **115**, 529–577 (1982)

[F 3] Fontaine, J.-M.: Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux. Invent. Math. **65**, 379–409 (1982)

[F 4] Fontaine, J.-M.: Le corps des périodes p-adiques. Séminaire de Bures (à paraitre dans Astérisque)

[M] Mumford, D.: Abelian varieties. London: Oxford University Press 1970

[S] Swinnerton-Dyer, H.P.F.: Analytic theory of Abelian varieties. Cambridge: Cambridge University Press 1974

[W] Wintenberger, J.-P.: Théorème de comparaison p-adique pour les shémas abéliens. I: Construction de l'accouplement de périodes. Prépubl. Orsay **26** (1991); Dans: Séminaire de Bures (à paraitre)