CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE ET CHANGEMENT DE POIDS

par

Pierre Colmez

Résumé. — Si f est une forme modulaire de poids ≥ 2, la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui lui est associée par la correspondance de Langlands locale p-adique encode celle qui lui est associée par la correspondance classique. Nous introduisons une technique de changement de poids qui permet d'étendre le résultat aux formes de poids 1. Nous déterminons aussi complètement les composantes de Jordan-Hölder des représentations localement analytiques apparaissant dans la correspondance.

Abstract. — If f is a modular form of weight ≥ 2, the representation of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ attached to it by the p-adic local Langlands correspondence encodes the representation attached by the classical correspondence. We introduce weight shifting techniques that allow to extend the result to weight 1. We also give a full description of the Jordan-Hölder components of the locally analytic representations appearing in the correspondence.

Table des matières

Introduction

0.1. Correspondances de Langlands locales p-adique et classique. — Soit $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. On note $\mathrm{Rep}\, G$ (resp. $\mathrm{Rep}^{\mathrm{an}} G$) la catégorie des L-représentations unitaires (resp. localement analytiques) admissibles de G. Si $\Pi \in \mathrm{Rep}\, G$, on note Π^{an} le sous-espace de ses vecteurs localement analytiques ; c'est un objet de $\mathrm{Rep}^{\mathrm{an}} G$ (cf. **[25]**) et, si Π est de longueur finie, on récupère Π à partir de Π^{an} en prenant son complété unitaire universel **[9]**.

La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associe, à toute représentation V de dimension 2 du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$, une représention $\Pi(V) \in \mathrm{Rep}\, G$. Tout objet irréductible W de $\mathrm{Rep}\, G$ apparaît **[21, 10]** comme composante de Jordan-Hölder d'un $\Pi(V)$ (et la semi-simplifiée V^{ss} de V est alors complètement déterminée par W).

Cette correspondance encode la correspondance classique au sens suivant : si V est de Rham, à poids de Hodge-Tate $a < b$ distincts, on peut retrouver **[6, 14, 10]**, à partir de $\Pi(V)$, la représentation lisse $\mathrm{LL}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V))$ associée à la représentation de Weil-Deligne déduite du $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$. Cela se fait en considérant l'espace $\Pi(V)^{\mathrm{alg}}$ des vecteurs localement algébriques de $\Pi(V)$, et la recette est alors

$$\Pi(V)^{\mathrm{alg}} \cong \mathrm{LL}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1} \otimes \det{}^a,$$

où Sym^{b-a-1} est la puissance symétrique de la représentation de dimension 2 évidente de G.

Il est naturel de se demander si un résultat analogue est encore vrai si les poids de Hodge-Tate sont égaux (quitte à tordre par une puissance du caractère cyclotomique, on peut supposer, ce que nous ferons, qu'ils sont nuls ; cela équivaut à ce que l'inertie agisse à travers un quotient fini [**26**]) ; l'un des buts de cet article est de montrer que « oui » (l'autre est de comprendre les composantes de Jordan-Hölder des $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$). Dans le cas où $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ n'est pas absolument irréductible, en tant que représentation du groupe de Weil, il y a une recette simple :

• Si V est scindée, il existe deux caractères δ_1, δ_2 de $\mathbf{Q}_p^*$, unitaires, localement constants, tels que $V = L(\delta_1) \oplus L(\delta_2)$.

• Si V n'est pas scindée, il existe un caractère δ de $\mathbf{Q}_p^*$, unitaire, localement constant, tel que V soit l'extension non ramifiée de $L(\delta)$ par elle-même.

Dans le cas scindé,

$$\Pi(V) = \mathrm{Ind}\big(\delta_2 \otimes (x|x|)^{-1}\delta_1\big) \oplus \mathrm{Ind}\big(\delta_1 \otimes (x|x|)^{-1}\delta_2\big),$$

où $\mathrm{Ind}\,\eta_1 \otimes \eta_2$ désigne l'induite continue du caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \eta_1(a)\eta_2(d)$ du borel B. Dans ce cas, $\mathrm{LL}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}\big(\delta_2 \otimes |x|^{-1}\delta_1\big) \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}\big(\delta_1 \otimes |x|^{-1}\delta_2\big)$. Pour retrouver $\mathrm{LL}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V))$ à partir de $\Pi(V)$, il suffit donc de prendre son module de Jacquet (isomorphe à $\big(\delta_2 \otimes (x|x|)^{-1}\delta_1\big) \oplus \big(\delta_1 \otimes (x|x|)^{-1}\delta_2\big)$) comme représentation de B, tordre par $1 \otimes x$, et prendre une composante de Jordan-Hölder de l'induite lisse.

La recette est la même dans le cas non scindé : dans ce cas $\Pi(V)$ est une extension de $\mathrm{Ind}\big(\delta \otimes (x|x|)^{-1}\delta\big)$ par elle-même et $\mathrm{LL}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}\big(\delta \otimes |x|^{-1}\delta\big)$.

Dans le cas où $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ est absolument irréductible, le module de Jacquet de $\Pi(V)$ est nul et la représentation $\Pi(V)$ n'a pas de vecteurs algébriques. La recette que nous proposons (rem. 0.9) utilise une technique de « changement de poids » qui permet de passer de poids de Hodge-Tate égaux à des poids de Hodge-Tate distincts, ce qui permet de faire apparaître des vecteurs localement algébriques. Cette technique semble à première vue totalement abracadabrante, mais elle s'interprète bien en termes d'une généralisation d'une conjecture de Breuil et Strauch.

0.2. Les composantes de Jordan-Hölder des $\Pi(\Delta)$. — L'équivalence de catégories de Fontaine et ses raffinements permettent de remplacer les représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par des (φ, Γ)-modules étales sur l'anneau de Robba $\mathscr{R}$. Depuis les travaux de Berger [**1**], on a pris conscience de l'intérêt de considérer tous les (φ, Γ)-modules de rang fini sur $\mathscr{R}$ et pas seulement les (φ, Γ)-modules étales. Partant de ce principe, la correspondance de Langlands locale p-adique est étendue dans [**8**] sous la forme de la prop. 0.1 ci-dessous.

Rappelons qu'un (φ,Γ)-module Δ sur $\mathscr{R}$ donne naissance à un faisceau P^+-équivariant sur $\mathbf{Z}_p$, où $P^+ = \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in P^+$ agit sur $x \in \mathbf{Z}_p$ par $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x = ax+b$. La correspondance de Langlands locale p-adique s'établit en prolongeant le faisceau P^+-équivariant précédent en un faisceau $U \mapsto \Delta \boxtimes U$ (où U décrit les ouverts compacts) G-équivariant sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$.

Soit Δ un (φ,Γ)-module, de rang 2 sur $\mathscr{R}$. Notons ω le caractère

$$\omega = \omega_\Delta = (x|x|)^{-1}\det\Delta.$$

Proposition 0.1. — (i) *Il existe un unique prolongement de Δ en un faisceau G-équivariant $U \mapsto \Delta\boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1$, de type analytique* (1)*, tel que le centre de G agisse par ω.*

(ii) *Il existe* (2) $\Pi(\Delta) \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{an}} G$ *telle que l'on ait une suite exacte :*

$$0 \to \Pi(\Delta)^* \otimes \omega \to \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(\Delta) \to 0.$$

Remarque 0.2. — (i) Si Δ est étale, et si V est la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond (i.e. si $\Delta = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$), on a $\Pi(\Delta) = \Pi(V)^{\mathrm{an}}$.

(ii) Si V est absolument irréductible, il en est de même de $\Pi(V)$. Par contre, $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ n'est pas toujours irréductible. Plus généralement (et plus précisément), on a les résultats suivants :

• Si Δ est triangulin (i.e. si Δ est une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$, où δ_1,δ_2 sont des caractères localement analytiques de $\mathbf{Q}_p^*$), alors [**7, 20**] :

$$\Pi(\Delta)^{\mathrm{ss}} = \big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}\big(\delta_2\otimes(x|x|)^{-1}\delta_1\big)\big)^{\mathrm{ss}} \oplus \big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}\big(\delta_1\otimes(x|x|)^{-1}\delta_2\big)\big)^{\mathrm{ss}}.$$

• Si Δ est de Rham, non triangulin, à poids de Hodge-Tate 0 et $k\geq 1$, et si δ est un caractère localement analytique de $\mathbf{Q}_p^*$, alors $\Pi(\Delta\otimes\delta) = \Pi(\Delta)\otimes\delta$ et $\Pi(\Delta)$ est une extension de $\Pi(M,-k)$ par $\mathrm{LL}_p(M)\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}$, où $\mathrm{LL}_p(M) \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{lisse}}G$ et $\Pi(M,-k) \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{an}}G$ ne dépendent que du $(\varphi,N,\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $M = \Delta_{\mathrm{pst}}$ (par contre l'extension de $\Pi(M,-k)$ par $\mathrm{LL}_p(M)\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}$ encode la filtration sur Δ_{pst}), cf. th. 0.6 ci-dessous (cela résulte aussi de la conjonction de [**6**, th. VI.6.43] et [**9**]).

On connaît bien les composantes de Jordan-Hölder des séries principales [**23**] et des représentations lisses [**16**]. Le résultat suivant achève donc (cor. 0.4 ci-dessous) la classification des composantes de Jordan-Hölder des $\Pi(\Delta)$, et donc a fortiori des $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$.

---

1. Cela signifie que $\Delta\boxtimes U$ est de type LF (limite inductive de fréchets) et que, si K est un sous-groupe ouvert compact de G stabilisant U, l'action de K sur $\Delta\boxtimes U$ s'étend en une action continue de l'algèbre $\mathscr{D}(K)$ des distributions sur K.

2. Cette décomposition détermine $\Pi(\Delta)$ uniquement si Δ est indécomposable, ainsi que dans presque tous les cas où Δ est décomposable.

Théorème 0.3. — (i) *Si Δ n'est ni triangulin ni (à torsion près) de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, alors $\Pi(\Delta)$ est irréductible.*

(ii) *Si M est absolument irréductible en tant que $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, alors $\Pi(M, -k)$ est irréductible pour tout $k \geq 1$.*

Corollaire 0.4. — (i) *Les composantes de Jordan-Hölder des $\Pi(\Delta)$ sont de l'un des types suivants :*

- $\mathrm{Sym}^k \otimes \delta$, *avec $k \in \mathbf{N}$ et δ un caractère.*
- $\pi \otimes \mathrm{Sym}^k \otimes \delta$, *avec $\pi \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{lisse}} G$, irréductible, $k \in \mathbf{N}$, et δ un caractère.*
- $\mathrm{Ind}^{\mathrm{an}}\big(\delta_2 \otimes \delta_1(x|x|)^{-1}\big)$, *avec*[3] $\kappa(\delta_1\delta_2(x|x|)^{-1}) \notin \mathbf{N}$.
- $\Pi(\Delta)$, *avec Δ ni triangulin, ni de Rham.*
- $\Pi(M, -k) \otimes \delta$, *avec $k \in \mathbf{N}$, M un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module irréductible, et δ un caractère.*

(ii) *$\Pi(\Delta)$ est de longueur finie. Plus précisément, $\Pi(\Delta)$ est de longueur :*

- 1 *si Δ n'est ni triangulin, ni de Rham à poids de Hodge-Tate distincts (à torsion près),*
- 2 *si Δ est triangulin et $\kappa(\delta_1\delta_2^{-1}) \notin \mathbf{Z}-\{0\}$, ou bien si Δ n'est pas triangulin mais est (à torsion près) de Rham à poids de Hodge-Tate distincts,*
- 3 *si Δ est triangulin et $\kappa(\delta_1\delta_2^{-1}) \in \mathbf{Z} - \{0\}$, mais $\delta_1 \neq |x|^{\pm 1}x^{\pm k}\delta_2$* (4 possibilités), *avec k entier ≥ 1,*
- 4 *si $\delta_1 = |x|^{\pm 1}x^{\pm k}\delta_2$, avec k entier ≥ 1.*

Remarque 0.5. — (i) On peut raisonnablement penser que la liste du (i) du corollaire épuise les objets absolument irréductibles de $\mathrm{Rep}^{\mathrm{an}} G$. L'énoncé analogue pour $\mathrm{Rep}\, G$ est vrai (cf. **[21]** pour $p \geq 5$ et **[10]** pour le cas général).

(ii) Une conséquence du (ii) du cor. 0.4 et de **[21, 10]** est que, si $\Pi \in \mathrm{Rep}\, G$ est de longueur finie, alors Π^{an} est aussi de longueur finie.

0.3. Le cas de Rham, non triangulin. — Nous allons nous intéresser aux représentations de G associées aux (φ, Γ)-modules de Rham, non triangulins, de poids 0 et $k \geq 0$ (quitte à tordre par x^a, on peut toujours se ramener à ce cas). Ces (φ, Γ)-modules sont obtenus en choisissant :

- un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module M, absolument irréductible, de dimension 2,
- si $k \geq 1$, une droite $\mathscr{L}$ du L-espace vectoriel $M_{\mathrm{dR}} = (\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$.

On note $\Delta = \Delta(M)$ le (φ, Γ)-module de poids $(0, 0)$ qui lui est associé et, si $k \geq 1$, on note $\Delta_{k,\mathscr{L}}$ le (φ, Γ)-module de Rham, à poids de Hodge-Tate 0 et k, qui correspond à $\mathscr{L}$. On a :

$$t^k\Delta \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \subset \Delta \quad \text{et} \quad \Delta/\Delta_{k,\mathscr{L}} \cong \Delta_{k,\mathscr{L}}/t^k\Delta \cong \mathscr{R}/t^k\mathscr{R} \text{ (comme } \mathscr{R}\text{-modules).}$$

3. Si δ est un caractère localement analytique de $\mathbf{Q}_p^*$, on note $\kappa(\delta)$ son poids : $\kappa(\delta) = \delta'(1)$.

Théorème 0.6. — *Soit* $\omega = (x|x|)^{-1}\det\Delta$.

(i) *Si* $k \in \mathbf{Z}$, *il existe un unique prolongement de* Δ *en un faisceau* G*-équivariant sur* $\mathbf{P}^1$, *de type analytique, tel que :*

- *le centre de* G *agit par* $x^k\omega$,
- *le casimir agit par multiplication par* $\frac{1}{2}\big(k^2-1\big)$.

(ii) *Il existe des représentations* $\Pi(M,k) \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{an}}G$, *pour* $k \in \mathbf{Z}$, *et une représentation lisse* $\mathrm{LL}_p(M)$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

- *Si* $k \in \mathbf{Z}$, *on a une suite exacte*

$$0 \to \Pi(M,k)^* \otimes x^k\omega \to \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \to \Pi(M,-k)\otimes x^k \to 0.$$

- *Si* $k \geq 1$,

$$\Pi(M,k)^{\mathrm{alg}} = M_{\mathrm{dR}} \otimes \big(\mathrm{LL}_p(M)\otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\big).$$

(iii) *Si* $k \geq 1$, *les injections* $t^k\Delta \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \subset \Delta$ *se prolongent en des injections* G*-équivariantes*

$$t^k\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \subset \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$$

et induisent les suites exactes :

$$\begin{aligned}
&0 \to \Pi(M,k)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(M,k) \to \Pi(M,-k)\otimes x^k \to 0,\\
&0 \to \mathscr{L} \otimes \big(\mathrm{LL}_p(M)\otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\big) \to \Pi(M,k) \to \Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}}) \to 0,\\
&0 \to \Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} \to \Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}}) \to \Pi(M,-k)\otimes x^k \to 0,
\end{aligned}$$

et l'isomorphisme :

$$\Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} \cong (M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L}) \otimes \big(\mathrm{LL}_p(M)\otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\big).$$

Remarque 0.7. — (i) Le (iii) de ce théorème améliore les résultats [4] du n° VI.6.9 de [**6**] (voir, en particulier, le th. VI.6.43) puisque la représentation $\mathrm{LL}_p(M)$ est non seulement indépendante de la filtration $\mathscr{L}$ (comme dans [**6**]), mais aussi du poids k. (Bien sûr, si on sait que $\mathrm{LL}_p(M)$ est la représentation $\mathrm{LL}(M)$ fournie par la correspondance classique, cette indépendance est une évidence, mais, dans l'état actuel de nos connaissances, la preuve de cette égalité utilise l'indépendance par rapport à la filtration ainsi que des arguments globaux [**14, 13**].)

(ii) Le G-module $\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ ci-dessus correspond au G-module $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ de [**6**]. La différence est que, dans [**6**], il faut transpirer beaucoup pour étendre l'action de G sur $\Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ à $N_{\mathrm{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ et encore plus pour prouver que ce qu'on obtient est indépendant de $\mathscr{L}$, alors qu'ici on construit $\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ « en tordant l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in G$ sur $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ par $(a-cx)^k$ » (cf. th. 0.8 ci-dessous pour la signification à donner à cet énoncé).

4. Le (φ,Γ)-module Δ ci-dessus correspond au N_{rig} de [**6**], tandis que le D_{rig} de [**6**] est l'un des $\Delta_{k,\mathscr{L}}$ ci-dessus.

La torsion par $(a-cx)^k$ repose sur la construction d'un isomorphisme
$$\partial : \Delta\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \Delta\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1,$$
jouant le rôle de la multiplication par x, et défini en utilisant l'action infinitésimale de G et, en particulier, la formule de Dospinescu **[11]**. La recette permet de décrire $\Pi(M,k)$ directement à partir de $\Pi(\Delta)$.

On note $u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, la base naturelle de $\mathfrak{gl}_2$.

Théorème 0.8. — (i) *Il existe un unique isomorphisme* [5] $\partial : \Pi(\Delta)\to\Pi(\Delta)$, *tel que*
$$a^+ = u^+\partial,\quad u^- = -\partial u^+\partial \quad \text{et} \quad w\circ\partial = \partial^{-1}\circ w.$$

(ii) *Si* $(a,c)\in\mathbf{Q}_p^2-\{(0,0)\}$, *alors* $a-c\partial$ *est un isomorphisme de* $\Pi(\Delta)$.

(iii) *Si* $k\in\mathbf{Z}$, *on peut munir* $\Pi(\Delta)$ *d'une action de* G *en posant*
$$\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\cdot_k v = (-c\partial+a)^k\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\cdot v\big)\,;$$
la représentation ainsi obtenue est $\Pi(M,k)$.

Remarque 0.9. — (i) Comme $\Pi(M,k)^{\rm alg}$ encode $\mathrm{LL}_p(M)$ si $k\geq 1$, le théorème fournit une recette pour retrouver $\mathrm{LL}_p(M)$ à partir de $\Pi(\Delta)$.

(ii) Les constructions de ∂ et $\Pi(M,k)$ ont été inspirées par les formules de la série principale [6] : dans ce cas, les représentations se réalisent comme des espaces de fonctions sur $\mathbf{Q}_p$ (avec une condition en ∞), avec action de G donnée par
$$\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\phi\big)(x) = \alpha(ad-bc)\frac{\beta(a-cx)}{a-cx}\phi\big(\frac{d-bx}{a-cx}\big)\,,$$
où α,β sont des caractères localement constants, et pour faire apparaître des vecteurs localement constants, il suffit de multiplier l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ par $a-cx$; or le dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique montre que la multiplication par $a-cx$ correspond à l'action de $a-c\partial$ sur $\mathscr{R}$, où $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ (cf. **[8**, prop. 2.6**]** par exemple). La connexion ci-dessous avec les fonctions analytiques sur les revêtements du demi-plan de Drinfeld n'a été réalisée que bien plus tard.

0.4. Lien avec la conjecture de Breuil-Strauch. — Soit Ω le demi-plan de Drinfeld, et soit Σ_n le n-ième étage de la tour de Drinfeld : c'est un revêtement de Ω, de groupe de Galois $H_n = H^*/(1+\varpi^n\mathscr{O}_H)$, où H est l'algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}_p$ et ϖ une uniformisante de $\mathscr{O}_H$. On a une action de G sur Ω (par $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$) et sur chacun des Σ_n, et donc aussi sur l'anneau $\mathscr{O}_n$ des fonctions analytiques sur Σ_n. Par ailleurs, l'action de H^* sur ces espaces commute à celle de G. Il est donc naturel d'essayer de décrire les espaces $\mathscr{O}_n$ en tant que représentations de $G\times H^*$. C'est le but de la conjecture de Breuil et Strauch (dans le cas $n=1$).

5. D'espaces vectoriels topologiques, pas de G-modules.

6. Je les ai présentées lors de la conférence en l'honneur de H. Hida, en juin 2012, et je m'excuse du temps mis pour écrire les détails...

On peut généraliser leur conjecture de la manière suivante. Si $z \in \Sigma_n$, on note $\pi(z)$ son image dans $\Omega = \mathbf{C}_p - \mathbf{Q}_p$, ce qui permet de définir, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, une représentation $\mathscr{O}_n(k)$, de $G \times H^*$, en tordant l'action naturelle sur $\mathscr{O}_n$ par :

$$\big(f_{|k}(\gamma \times h)\big)(z) = (c\pi(z) + d)^{-k} f((\gamma \times h) \cdot z),$$

si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ et $h \in H^*$. Alors $\frac{d^k}{d\pi(z)^k} : \mathscr{O}_n(-k) \otimes x^{-1-k} \to \mathscr{O}_n(k+2)$ est $G \times H^*$-équivariant si $k \geq 0$. On note $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, k)$ le conoyau. L'application $f \mapsto f\, d\pi(z)$ induit un morphisme $G \times H^*$-équivariant de $\mathscr{O}_n(2)$ sur $\Omega^1_{\Sigma_n}$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, 0)$ est la cohomologie de de Rham de Σ_n.

Si M est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module, absolument irréductible, de dimension 2, on note $\mathrm{JL}(M)$ la représentation de H^* qui lui est associée par la correspondance de Jacquet-Langlands [**16**]. C'est une représentation irréductible, de dimension finie.

Conjecture 0.10. — *Soient M comme ci-dessus et n assez grand* (dépendant de M).

(i) *Si $k \in \mathbf{Z}$, alors $\mathrm{Hom}_{H^*}(\mathrm{JL}(M)^*, \mathscr{O}_n(k))$ est une représentation coadmissible de G, isomorphe à $\Pi(M, k-1)^* \otimes x^{-2}$.*

(ii) *Si $k \geq 0$, alors*

$$\mathrm{Hom}_{H^*}(\mathrm{JL}(M)^*, H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma_n, k)) = M_{\mathrm{dR}} \otimes (\mathrm{LL}_p(M)^* \otimes \mathrm{Sym}^k).$$

Remarque 0.11. — (i) L'action de $\frac{d^k}{d\pi(z)^k}$ coïncide avec celle de u^+, et le (ii) de la conjecture est une conséquence du (i) et de th. 0.6 (iii).

(ii) L'isomorphisme ∂ de $\Pi(M, 0)^*$ correspond à la multiplication par $\pi(z)$ sur $\mathscr{O}_n(1)$; ses propriétés ne sont donc *a posteriori* pas très surprenantes.

(iii) Cette conjecture a été prouvée (pour $k = 0$) par Dospinescu et Le Bras [**13**] : la preuve utilise des arguments globaux pour construire une application de $\Pi(M, k-1)^*$ dans $\mathscr{O}_n(k)$, ainsi que l'opérateur ∂ sur $\Pi(M, 0)$. Les th. 0.6 et 0.8 permettent d'en déduire le cas $k \geq 0$ général.

0.5. Notations. — On regroupe ici les notations concernant le groupe G ; beaucoup sont déjà apparues dans l'introduction.

- $B = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & \mathbf{Q}_p^* \end{smallmatrix}\right)$ est le borel (supérieur).
- P^+ est le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- $u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est la base naturelle de $\mathfrak{gl}_2$.
- L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de P^+ admet pour base a^+, u^+.
- $C = u^+u^- + u^-u^+ + \frac{1}{2}(a^+ - a^-)^2 = 2u^+u^- + \frac{1}{2}(a^+ - a^-)(a^+ - a^- - 2)$ est *le casimir*, générateur du centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{sl}_2)$ de $\mathfrak{sl}_2$.

Si K est un groupe compact, on note $\mathscr{D}(K)$ la L-algèbre des distributions sur K.

1. (φ,Γ)-modules

1.1. L'anneau de Robba

1.1.1. Un diagramme d'anneaux. — Soit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}=\mathscr{O}_L[[T]]$.

Si $h\geq 1$, on pose $r_h=v_p(\zeta_{p^h}-1)=\frac{1}{(p-1)p^{h-1}}$ (resp. $r_h=\frac{1}{2^h}$, si $p=2$), et $n_h=\frac{1}{r_h}$.

- Si $a\geq b\geq 1$, on note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}$ le complété de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{+}[\frac{T^{n_a}}{p},\frac{p}{T^{n_b}}]$ pour la topologie p-adique, et $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ l'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{[r_a,r_b]}[\frac{1}{p}]$.
- Si $b\geq 1$, on note $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$ l'intersection des $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$, pour $a\geq b$.
- Enfin, on note $\mathscr{R}$ l'*anneau de Robba*, réunion croissante des $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$, pour $b\geq 1$, et on note $\mathscr{R}^{+}$ l'intersection de $\mathscr{R}$ et $L[[T]]$.

Soit $t=\log(1+T)$. C'est un élément de $\mathscr{R}^{+}$ ayant un zéro simple en $\zeta_{p^n}-1$, pour tout n. Si $n\geq 1$, on pose $L_n=L\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^n})$, et on note ι_n l'injection de $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ dans $L_n[[t]]$ envoyant f sur $f(\zeta_{p^n}e^{t/p^n}-1)$. Enfin, on note $\theta: L_n[[t]]\to L_n$ la réduction modulo t.

On obtient alors le diagramme suivant dans lequel les flèches sont des morphismes d'anneaux qui sont injectifs sauf θ.

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{R}^{+} \arrow[r] & \mathscr{E}^{]0,r_n]} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_n"] & \mathscr{R} \\
& L_n[[t]] \arrow[r, "\theta"] & L_n
\end{tikzcd}$$

Ces anneaux s'interprètent en termes de fonctions analytiques sur des couronnes : $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ est l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $r_a\leq v_p(T)\leq r_b$ et $\mathscr{E}^{]0,r_b]}$ (resp. $\mathscr{R}^{+}$) est l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $0<v_p(T)\leq r_b$ (resp. sur le disque unité $v_p(T)>0$). L'application ι_n correspond à la localisation en $\zeta_{p^n}-1$ et $\theta\circ\iota_n$ à l'évaluation en $\zeta_{p^n}-1$.

1.1.2. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique. — Soit $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans L, et soit $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ son L-dual topologique, espace des L-distributions sur $\mathbf{Z}_p$.

Si $\mu\in\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$, on définit sa transformée d'Amice

$$A_\mu(T)=\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\,\mu(x),$$

et si $f\in\mathscr{R}$, on définit la fonction $\phi_f:\mathbf{Z}_p\to L$, par :

$$\phi_f(x)=\mathrm{rés}_0\big((1+T)^{-x}f\,\tfrac{dT}{1+T}\big).$$

Le résultat suivant (cf. [**4**] par exemple) est une traduction de la description d'Amice de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ en termes de développements de Mahler.

Proposition 1.1. — (i) $\mu\mapsto A_\mu$ *induit un isomorphisme* $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)\cong\mathscr{R}^{+}$ *d'anneaux de Fréchet.*

(ii) $f \mapsto \phi_f$ *induit un isomorphisme* $\mathscr{R}/\mathscr{R}^+ \cong \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ *d'espaces de type compact.*

La remarque suivante peut aider à comprendre ce qui se passe dans le (iii) du th. 0.6.

Remarque 1.2. — On a $\phi_{t^k f}(x) = (-\frac{d}{dx})^k \phi_f(x)$. Comme le noyau de $(-\frac{d}{dx})^k$ est l'espace $\mathrm{LP}^{[0,k-1]}(\mathbf{Z}_p)$ des fonctions localement polynomiales de degré $\leq k-1$, cela nous fournit le diagramme commutatif suivant dans lequel les lignes sont exactes et les colonnes sont obtenues en ajoutant les noyau et conoyau de la multiplication par t^k (la première colonne est obtenue en dualisant la dernière) :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \mathrm{LP}^{[0,k-1]} \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{R}^+ \arrow[r] \arrow[d, "t^k"] & \mathscr{R} \arrow[r] \arrow[d, "t^k"] & \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d, "(-\frac{d}{dx})^k"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{R}^+ \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{R} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & (\mathrm{LP}^{[0,k-1]})^* & \mathscr{R}/t^k\mathscr{R} & 0 & \end{tikzcd}$$

et donc une suite exacte

$$0 \to \mathrm{LP}^{[0,k-1]} \to (\mathrm{LP}^{[0,k-1]})^* \to \mathscr{R}/t^k\mathscr{R} \to 0.$$

1.2. Extensions finies de l'anneau de Robba

1.2.1. La théorie du corps des normes. — On note $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ la limite projective des $\mathscr{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}/p$ pour les applications $x \mapsto x^p$; c'est un anneau intègre de caractéristique p sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit naturellement (par son action sur $\mathscr{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}/p$). On note $\widetilde{\mathbf{E}}$ son corps des fractions ; c'est un corps algébriquement clos de caractéristique p, qui est complet pour la valuation v_E définie par $v_E((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \lim_{n\to+\infty} p^n v_p(\hat{x}_n)$, où $\hat{x}_n$ est un relèvement de x_n dans $\mathscr{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$.

Notre système compatible de racines de l'unité définit un élément $\zeta = (\zeta_{p^n})_{n\in\mathbf{N}}$ de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, sur lequel $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers Γ, et on a $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Il s'ensuit que l'on peut voir $\mathbf{F}_p((T))$, muni de l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agissant à travers Γ, comme un sous-corps $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$, en envoyant T sur $\zeta - 1$.

On note $H = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$ le noyau du morphisme $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \Gamma$. L'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ laisse stable la clôture séparable $\mathbf{E}$ de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ et la théorie du corps des normes **[27]** ou celle des algèbres perfectoïdes **[22, 18]** permet de montrer que cette action induit un isomorphisme $H \cong \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p})$.

Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on note H_K le sous-groupe de H fixant K et $\mathbf{E}_K$ le sous-corps de $\mathbf{E}$ fixé par H_K. Alors $\mathbf{E}_K$ est une extension finie séparable de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ et donc de la forme $\mathbf{F}_q((\pi_K))$.

1.2.2. De la caractéristique p à la caractéristique 0. — On note F_K l'extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbf{F}_q$; c'est l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p^{H_K}$. On note L_K l'anneau $L \otimes F_K$.

Si $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}[X]$ est le polynôme minimal de π_K, et si $\hat{a}_i$ est un relèvement de a_i dans $\mathbf{Z}_p[[T]]$, alors $\hat{P} = X^d + \hat{a}_{d-1}X^{d-1} + \cdots + \hat{a}_0$ a une unique racine T_K dans $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$ ayant pour image $1 \otimes \pi_K$ dans $k_L \otimes \mathbf{E}_K$. En remplaçant L par L_K et T par T_K dans la construction des anneaux $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ et $\mathscr{R}$, on obtient des extensions étales $\mathscr{E}^{]0,r_n]}(\mathbf{E}_K)/\mathscr{E}^{]0,r_n]}$, pour $n \geq m(K)$, et $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)/\mathscr{R}$.

1.2.3. Les actions de φ, $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et les dérivations ∇ et ∂. — On note φ l'endomorphisme de $\mathscr{R}$ envoyant $f(T)$ sur $f((1+T)^p - 1)$. On fait agir $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathscr{R}$ à travers Γ, l'action de σ_a envoyant $f(T)$ sur $f((1+T)^a - 1)$. Il est clair sur les formules que les actions de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutent.

On note ∂ la dérivation $(1+T)\frac{d}{dT}$ de $\mathscr{R}$ et $\nabla = \lim_{a\to 1} \frac{\sigma_a - 1}{a-1}$ l'action du générateur naturel de l'algèbre de Lie de Γ. On a

$$\nabla = t\partial.$$

Si $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ est galoisienne, les actions de φ, $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et ∇ s'étendent de manière unique à $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$, et vérifient les propriétés de commutation précédentes. De plus, les actions de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sont L_K-semi-linéaires.

Si $n \geq 1$, on note K_n le corps $K(\zeta_{p^n})$. Il existe alors $m(K)$ tel que, si $n \geq m(K)$, l'application ι_n s'étend en une application $\iota_n : \mathscr{E}^{]0,r_n]}(\mathbf{E}_K) \to L \otimes K_n[[t]]$, qui commute à l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

L'action de $\partial = t^{-1}\nabla$ s'étend en une dérivation des anneaux ci-dessus et on a

$$\partial \circ g = \chi(g)\, g \circ \partial, \quad \text{si } g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \quad \text{et} \quad \partial \circ \varphi = p\varphi \circ \partial.$$

Cette dérivation est encore $(1+T)\frac{d}{dT}$, mais elle s'exprime en termes de la variable T_K sur $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$: il existe $Q_K \in \mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$, non nul, tel que $\partial = Q_K \frac{d}{dT_K}$. Le lemme suivant, qui est immédiat, montre que $\partial : \mathscr{R}(\mathbf{E}_K) \to \mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$ n'est pas loin d'être un isomorphisme.

Lemme 1.3. — Ker $\partial = L_K$ *et* $f \mapsto$ *rés*$_0(f\frac{dT_K}{Q_K})$ *induit un isomorphisme* Coker $\partial \xrightarrow{\sim} L_K$.

Remarque 1.4. — On peut décomposer $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$ sous la forme

$$\mathscr{R}(\mathbf{E}_K) = \big(L_K \otimes_L \mathscr{R}\big) \bigoplus \big(\bigoplus_\rho \mathscr{R}(\mathbf{E}_K)^\rho\big),$$

où ρ décrit les représentations non triviales du sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p})$. Cette décomposition est stable par ∂ car ∂ commute à l'action de $H = \operatorname{Ker}\chi$. Comme ses noyau et conoyau sur $L_K \otimes_L \mathscr{R}$ sont de dimension 1 (sur L_K) sur $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$ et sur $L_K \otimes_L \mathscr{R}$ (qui correspond au cas $K = \mathbf{Q}_q$), on en déduit que ∂ est un isomorphisme de $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)^\rho$.

1.3. (φ,Γ)**-modules et faisceaux** P^+**-équivariants sur** $\mathbf{Z}_p$**.** — Un (φ,Γ)-*module* Δ sur $\mathscr{R}$ est un $\mathscr{R}$-module libre, de rang fini, muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ commutant entre elles, telles que l'application naturelle $\mathscr{R}\otimes_{\varphi(\mathscr{R})}\varphi(\Delta)\to\Delta$ soit un isomorphisme.

Si Δ est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, on définit une connexion ∇ sur Δ par

$$\nabla=\lim_{a\to 1}\frac{\sigma_a-1}{a-1}.$$

Si Δ est un (φ,Γ)-module, tout élément x de Δ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x=\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)$. On définit un opérateur $\mathscr{O}_L$-linéaire $\psi:\Delta\to\Delta$, par la formule

$$\psi\big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)\big)=x_0.$$

Cet opérateur commute à l'action de Γ et est un inverse à gauche de φ. De plus,

$$\psi(\varphi(a)x)=a\psi(x)\ \text{ et }\ \psi(a\varphi(x))=\psi(a)x,\quad \text{ si } a\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \text{ et } x\in\Delta.$$

Par ailleurs, la formule $\left(\begin{smallmatrix}p^ka & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z=(1+T)^b\varphi^k\circ\sigma_a(z)$, si $k\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{Z}_p^*$ et $b\in\mathbf{Z}_p$, munit Δ d'une action de P^+. L'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de P^+ est alors donnée par les formules :

$$u^+\cdot z=tz\quad\text{ et }\quad a^+\cdot z=\nabla z,\quad \text{pour tout } z\in\Delta.$$

On utilise cette action de P^+ et l'opérateur ψ pour associer à Δ un faisceau $U\mapsto\Delta\boxtimes U$ sur $\mathbf{Z}_p$ (où U décrit les ouverts compacts de $\mathbf{Z}_p$), équivariant sous l'action de P^+, où P^+ agit sur $\mathbf{Z}_p$ par la formule $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot x=ax+b$ habituelle. De manière précise :

- $\Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p=\Delta$, $\Delta\boxtimes\emptyset=0$, et $\Delta\boxtimes(i+p^k\mathbf{Z}_p)=\left(\begin{smallmatrix}p^k & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\Delta\subset\Delta$
- $\mathrm{Res}_{i+p^k\mathbf{Z}_p}=\left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^k\circ\psi^k\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & -i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Un exemple de (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$ si $K/\mathbf{Q}_p$ est galoisienne. Nous aurons besoin du résultat de commutation suivant (pour ce cas particulier : ∂ n'est pas défini pour un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ quelconque car $\nabla(\Delta)$ n'est pas inclus dans $t\Delta$ en général).

Lemme 1.5. — *Si U est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, alors $\partial\circ\mathrm{Res}_U=\mathrm{Res}_U\circ\partial$.*

Démonstration. — Par linéarité, il suffit de le vérifier pour $U=i+p^k\mathbf{Z}_p$. Cela résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned}\partial\big(\mathrm{Res}_{i+p^k\mathbf{Z}_p}z\big)&=\partial\big((1+T)^i\varphi^k\psi^k((1+T)^{-i}z)\big)\\ &=i(1+T)^i\varphi^k\psi^k((1+T)^{-i}z)+(1+T)^i\varphi^k\psi^k(-i(1+T)^{-i}z+(1+T)^{-i}\partial z)\\ &=(1+T)^i\varphi^k\psi^k((1+T)^{-i}\partial z)=\mathrm{Res}_{i+p^k\mathbf{Z}_p}(\partial z).\end{aligned}$$

1.4. Un diagramme de modules. — Soit Δ un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, de rang d. Il existe un entier $m(\Delta)$ et une base $e_1,\dots,e_d$ de Δ sur $\mathscr{R}$ tels que, si on pose $\Delta^{]0,r_n]}=\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{]0,r_n]}e_i$, alors :

- $\Delta^{]0,r_n]}$ est stable par Γ pour tout $n\geq m(\Delta)$;
- $\varphi(\Delta^{]0,r_n]})\subset\Delta^{]0,r_{n+1}]}$ et $\psi(\Delta^{]0,r_{n+1}]})\subset\Delta^{]0,r_n]}$, pour tout $n\geq m(\Delta)$.

De plus, $\Delta^{]0,r_n]}\subset\Delta^{]0,r_{n+1}]}$ (car $\mathscr{E}^{]0,r_n]}\subset\mathscr{E}^{]0,r_{n+1}]}$) et Δ est la limite inductive des $\Delta^{]0,r_n]}$ pour ces inclusions, pour $n\geq m(\Delta)$; chacun des $\Delta^{]0,r_n]}$ est un fréchet, en tant que $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$-module de type fini.

Si $a\geq b\geq m(\Delta)$, on pose $\Delta^{[r_a,r_b]}=\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}\otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_b]}}\Delta^{]0,r_b]}$. On a alors $\Delta^{]0,r_b]}=\cap_{a\geq b}\Delta^{[r_a,r_b]}$.

A partir de Δ, on construit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{]0,r_n]} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_n"] & \Delta \\
\Delta^+_{\mathrm{dif},n} \arrow[r, "\theta"] & \Delta_{\mathrm{Sen},n}
\end{tikzcd}$$

dans lequel on a posé :

$$\Delta^+_{\mathrm{dif},n}=L_n[[t]]\otimes\Delta^{]0,r_n]}\quad\text{et}\quad\Delta_{\mathrm{Sen},n}=L_n\otimes\Delta^{]0,r_n]}=\Delta^+_{\mathrm{dif},n}/t\Delta^+_{\mathrm{dif},n},$$

où l'on voit $L_n[[t]]$ et L_n, pour $n\geq m(\Delta)$, comme des $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$-algèbres via le morphisme $\iota_n:\mathscr{E}^{]0,r_n]}\to L_n[[t]]$.

- Toutes les flèches sont injectives, sauf θ qui ne l'est pas mais est surjective.
- Γ et ∇ opèrent sur tout le diagramme et ∇ définit une connexion.

On note Δ_{Sen} la limite inductive des $\Delta_{\mathrm{Sen},n}$ pour les inclusions naturelles (induites par les inclusions $L_n\subset L_{n+1}$, $\mathscr{E}^{]0,r_n]}\subset\mathscr{E}^{]0,r_{n+1}]}$ et $\Delta^{]0,r_n]}\subset\Delta^{]0,r_{n+1}]}$). C'est un L_∞-module libre de rang d sur lequel ∇ agit linéairement. On note Θ_{Sen} l'endomorphisme de Δ_{Sen} ainsi défini : c'est l'*opérateur de Sen* et ses valeurs propres sont les *poids de Hodge-Tate* de Δ.

On note $L_\infty[[t]]$ la limite inductive des $L_n[[t]]$ et Δ^+_{dif} la limite inductive des $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}$. Alors Δ^+_{dif} est un $L_\infty[[t]]$-module libre de rang d sur lequel ∇ définit une connexion. De plus, $\Delta_{\mathrm{Sen}}=\Delta^+_{\mathrm{dif}}/t\Delta^+_{\mathrm{dif}}$. La connexion ∇ s'étend à $\Delta_{\mathrm{dif}}=\Delta^+_{\mathrm{dif}}[\frac{1}{t}]$; on dit que Δ est *de Rham* si cette connexion est triviale. En dimension 2, elle est non semi-simple si et seulement si Δ est (à torsion près) presque Hodge-Tate (poids de Hode-Tate entiers) mais pas de Rham [**15**]. L'opérateur Θ_{Sen} est scalaire si et seulement si Δ est un tordu d'un (φ,Γ)-module de Rham, à poids de Hodge-Tate tous nuls.

On définit $\Delta^-_{\mathrm{dif}}=\Delta^+_{\mathrm{dif}}[\frac{1}{t}]/\Delta^+_{\mathrm{dif}}$. Alors Δ^-_{dif} est un $L_\infty[t]$-module de torsion, muni d'une action localement analytique de Γ (limite inductive de représentations de dimension finie).

Lemme 1.6. — *Si $P\in L[X]$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $P(\nabla)\cdot\Delta\subset t\Delta$,

(ii) $P(\nabla)\cdot\Delta^+_{\mathrm{dif}}\subset t\Delta^+_{\mathrm{dif}}$,

(iii) $P(\Theta_{\rm Sen})=0$.

Démonstration. — L'équivalence des (ii) et (iii) est une évidence, et celle des (i) et (ii) résulte de techniques standard en théorie des (φ,Γ)-modules : il suffit d'utiliser le fait que ι_n et ∇ commutent et le résultat suivant **[1]** :

Lemme 1.7. — *L'application $N\mapsto N_{\rm dif}^+$ induit une bijection entre les sous-(φ,Γ)-modules N de Δ, commensurables à Δ, et les $L_\infty[[t]]$-réseaux $\Delta_{\rm dif}^+$ stables par ∇ : on retrouve N à partir de $N_{\rm dif}^+$ comme l'ensemble des $z\in\Delta$ tels que $\iota_n(z)\in N_{\rm dif}^+$ pour $n\gg 0$. Plus précisément, si $a\geq b\geq m(\Delta)$, alors*

$$N^{[r_a,r_b]}=\{z\in\Delta^{[r_a,r_b]},\ \iota_n(z)\in N_{\rm dif}^+ \text{ pour } a\geq n\geq b\}.$$

2. La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Nous allons nous intéresser aux composantes de Jordan-Hölder de la représentation $\Pi(\Delta)$ de la prop. 0.1. Le cas Δ triangulin est étudié en détail dans **[7, 8]** : tout se décrit précisément en termes de séries principales. *Nous supposerons* donc Δ *irréductible*, et nous allons montrer que $\Pi(\Delta)$ est irréductible sauf si Δ est (à torsion près) de Rham à poids de Hodge-Tate distincts auquel cas $\Pi(\Delta)^{\rm alg}\neq 0$, et donc $\Pi(\Delta)^{\rm alg}$ est une composante non triviale. (Nous prouverons plus tard (prop. 3.25 et th. 3.31) que $\Pi(\Delta)/\Pi(\Delta)^{\rm alg}$ est irréductible.)

La non nullité de $\Pi(\Delta)^{\rm alg}$ si Δ est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts est un ingrédient important de la preuve de la conjecture de Fontaine-Mazur **[14, 19]**. On dispose déjà de deux preuves (**[6**, chap. VI.6] et **[11]**) de cette non nullité. Celle ci-dessous [7] (cf. th. 2.15) utilise l'un des ingrédients principaux de la preuve de Dospinescu, à savoir l'existence et le calcul du caractère infinitésimal, couplé avec une technique de « microlocalisation » qui permet d'exploiter le modèle de Kirillov du $(B,\mathfrak{g})$-module des vecteurs localement algébriques pour l'unipotent supérieur $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Q}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

2.1. La représentation $\Pi(\Delta)$. — L'hypothèse Δ irréductible implique en particulier que Δ est isocline. Quitte à le tordre par un caractère non ramifié de $\mathbf{Q}_p^*$, ce qui tord $\Pi(\Delta)$ par le même caractère, on peut donc le supposer étale, non triangulin.

La prop. 0.1 affirme qu'il existe un unique prolongement de Δ en un faisceau G-équivariant sur $\mathbf{P}^1$ de caractère central ω_Δ, et que l'on a une suite exacte de G-représentations :

$$0\to\Pi(\Delta)^*\otimes\omega_\Delta\to\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1\to\Pi(\Delta)\to 0.$$

Rappelons brièvement comment on construit un tel prolongement avant de prouver son unicité (prop. 2.2). En fait, la preuve de l'unicité fournit une construction, mais il

7. On trouvera une autre preuve, moins directe mais plus précise, au chapitre suivant (th. 3.31).

semble difficile de vérifier directement que ce que l'on obtient est bien G-équivariant et, encore plus, que les sections globales se décomposent comme ci-dessus.

La construction du prolongement à $\mathbf{P}^1$ se fait de la manière suivante : on note $\mathscr{E}^\dagger$ l'ensemble des éléments bornés de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{E}$ son complété (alors $\mathscr{E}^\dagger$ est aussi l'ensemble des éléments surconvergents de $\mathscr{E}$) ; on note $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ le (φ, Γ)-module correspondant à Δ (et donc $\Delta = D_{\mathrm{rig}}$ dans les notations habituelles) et $D^\dagger$ l'ensemble de ses éléments surconvergents (on a alors $D = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$ et $\Delta = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$).

• On prolonge [**6**, § II.1] D en un faisceau G-équivariant sur $\mathbf{P}^1$, de caractère central ω_Δ, en utilisant des formules explicites, inspirées [**5**, chap. V] de l'analyse fonctionnelle sur $\mathbf{P}^1$.

• On prouve [**6**, § II.2], par prolongement analytique à partir du cas triangulin, que $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ vit dans une suite exacte $0 \to \Pi(D)^* \otimes \omega_\Delta \to D \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi(D) \to 0$, avec $\Pi(D) \in \mathrm{Rep}\, G$.

• On prouve (cf. [**6**, chap. V] ou [**9**]) que l'image inverse de $\Pi(D)^{\mathrm{an}}$ dans $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ est $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$, on étend l'action de G sur $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ à $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ par continuité, et on obtient la suite exacte voulue avec $\Pi(\Delta) = \Pi(D)^{\mathrm{an}}$.

Un grand rôle est joué par un accouplement parfait $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$ sur $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$, qui est G-équivariant au sens que :

$$[g \cdot x, g \cdot y]_{\mathbf{P}^1} = \omega_\Delta(\det g)\, [x, y]_{\mathbf{P}^1}, \quad \text{pour tous } g \in G \text{ et } x, y \in D \boxtimes \mathbf{P}^1 \text{ ou } \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1.$$

Cet accouplement est défini en fixant un isomorphisme

$$\wedge^2 \Delta \cong (\mathscr{R} \tfrac{dT}{1+T}) \otimes \omega_\Delta$$

de (φ, Γ)-modules [8]. On pose [9] alors $[x, y] = \mathrm{rés}_0\big((\sigma_{-1}(x) \wedge y) \otimes \omega_\Delta^{-1}\big)$, si $x, y \in \Delta$, et

$$\begin{aligned} [x, y]_{\mathbf{P}^1} &= [\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} x, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} y] + \omega_\Delta(-1)[\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w \cdot x, \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w \cdot y] \\ &= [\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} x, \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} y] + \omega_\Delta(-1)[\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot x, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot y]. \end{aligned}$$

La décomposition de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ sous la forme ci-dessus est une conséquence de la perfection et de la G-équivariance de $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$, et de ce que $\Pi(D)^* \otimes \omega_\Delta$ et $\Pi(\Delta)^* \otimes \omega_\Delta$ sont leurs propres orthogonaux.

2.2. Unicité. — *On suppose*, dans ce qui suit, *que* $\mathrm{End}\, \Delta = L$. C'est le cas sauf si Δ est une somme directe $\mathscr{R}(\delta_1) \oplus \mathscr{R}(\delta_2)$ ou bien une extension de $\mathscr{R}(x^k \delta)$ par $\mathscr{R}(\delta)$, avec $\delta_1, \delta_2, \delta$ caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ et $k \in \mathbf{N}$.

On suppose que l'on dispose d'un prolongement de Δ en un faisceau G-équivariant $U \mapsto \Delta \boxtimes_\omega U$ sur $\mathbf{P}^1$, de caractère central ω.

---

8. $\sigma_a(\frac{dT}{1+T}) = a \frac{dT}{1+T}$ et $\varphi(\frac{dT}{1+T}) = \frac{dT}{1+T}$.
9. Avec $\mathrm{rés}_0\, \omega = a_{-1}$, si $\omega = f\, dT$ et $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$.

Lemme 2.1. — *Il existe $m'(\Delta) \geq m(\Delta)$ tel que :*

- *w laisse stable $\Delta^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et s'étend par continuité à $\Delta^{[r_a,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ pour tous $a \geq b \geq m'(\Delta)$.*
- *Si $X = \Delta^{]0,r_b]}, \Delta^{[r_a,r_b]}$ et $X \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in X,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_2 = w \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_1\}$, alors $\Delta^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ s'étend par continuité à $\Delta^{[r_a,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1$.*
- *La restriction de l'action de $K_a = 1 + p^a \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ à $\Delta^{[r_a,r_b]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est analytique.*

Démonstration. — La preuve utilise un certain nombre de faits démontrés dans les n[os] 3 et 4 de [**6**, § V.1]. Le groupe Γ est essentiellement procyclique, ce qui permet de définir l'anneau $\mathscr{R}(\Gamma)$ et ses sous-anneaux $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(\Gamma)$ et $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}(\Gamma)$ en remplaçant la variable T par $\gamma - 1$, où γ est un générateur de Γ. Alors $\Delta \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est un $\mathscr{R}(\Gamma)$-module libre de rang 2 et, si e_1, e_2 en est une base, alors c'est aussi une base de $\Delta^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(\Gamma)$ et de $\Delta^{[r_a,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}(\Gamma)$, si $a \geq b$, et si b est assez grand.

Maintenant, la relation $w\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) w$ se traduit par l'identité $w \circ \sigma_a = \omega(a)\sigma_{a^{-1}} \circ w$ sur $\Delta \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Il s'ensuit que w est $\mathscr{R}(\Gamma)$-semi-linéaire (pour l'involution ι_ω de $\mathscr{R}(\Gamma)$ envoyant σ_a sur $\omega(a)\sigma_{a^{-1}}$). Il en résulte que $w \cdot e_1, w \cdot e_2$ est une base de $\Delta \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{R}(\Gamma)$, et donc aussi de $\Delta^{]0,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(\Gamma)$ et de $\Delta^{[r_a,r_b]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sur $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}(\Gamma)$, si $a \geq b$, et si b est assez grand. Comme ι_ω laisse stable $\mathscr{E}^{]0,r_b]}(\Gamma)$ si b est assez grand, elle s'étend (par continuité ou par semi-linéarité) en une involution de $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}(\Gamma)$. On en déduit le premier point (en étendant w par semi-linéarité).

Le second s'en déduit en utilisant le lemme II.1.10 de [**6**].

Pour le troisième, il suffit de vérifier que l'action de K_a sur $\Delta^{[r_a,r_b]} \boxtimes (1 + p\mathbf{Z}_p)$ est analytique (car $\mathbf{P}^1$ est une réunion de translatés de $1 + p\mathbf{Z}_p$ par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et K_a est distingué dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$). Pour cela, il suffit de vérifier que les actions des sous-groupes à un paramètre $\left(\begin{smallmatrix} 1 & p^a\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1+p^a\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^a\mathbf{Z}_p & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^a\mathbf{Z}_p \end{smallmatrix}\right)$ sont analytiques. Pour le premier, cela résulte de ce que la multiplication par $(1+T)^x$ sur $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ est analytique en x sur $p^a\mathbf{Z}_p$ (car $v_p(p^a \log(1+T)) \geq \frac{p}{p-1} > \frac{1}{p-1}$ sur la couronne $r_a \leq v_p(T) \leq r_b$). Pour le second, c'est le même argument mais dans $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}(\Gamma)$. Le résultat pour les deux derniers se déduit de celui pour les deux premiers par conjugaison par w.

Ceci permet de conclure.

Proposition 2.2. — *Si ω est un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ (et $\kappa(\omega) = \omega'(1)$), il existe au plus un prolongement de Δ en un faisceau G-équivariant $U \mapsto \Delta \boxtimes_\omega U$ sur $\mathbf{P}^1$, de type analytique et de caractère central ω.*

De plus, si un tel prolongement existe, il existe α, β, bien déterminés à l'ordre près, tels que

$$\kappa(\omega) = \alpha + \beta - 1 \quad \text{et} \quad (\nabla - \alpha)(\nabla - \beta) \cdot \Delta \subset t\Delta,$$

et alors

$$C = \tfrac{1}{2}\big((\alpha - \beta)^2 - 1\big) \quad \text{et} \quad u^- = \tfrac{1}{t}(\nabla - \alpha)(\beta - \nabla) \ \textit{sur}\ \Delta.$$

(On a aussi $u^+ = t$, $a^+ = \nabla$ et $a^+ + a^- = \kappa(\omega)$ sur Δ.)

Démonstration. — On commence par prouver la seconde partie de l'énoncé en reprenant les arguments de Dospinescu [**11**]. Le casimir C commute à l'action de G, et donc a fortiori à celle de P^+, ainsi qu'à $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ (ou plus généralement Res_U, pour tout U). C'est donc un endomorphisme $\mathscr{R}^+$-linéaire (et donc $\mathscr{R}$-linéaire par densité de $\mathscr{R}^+[\frac{1}{T}]$ dans $\mathscr{R}$) de Δ, commutant aux actions de φ et Γ. Autrement dit, c'est un endomorphisme du (φ,Γ)-module Δ, et donc un scalaire puisque $\mathrm{End}\,\Delta = L$.

Par ailleurs, $a^+ + a^- = \kappa(\omega)$, puisque le centre agit par ω, et $a^+ = \nabla$ sur Δ. On en déduit que

$$C = 2u^+u^- + \tfrac{1}{2}(2\nabla - \kappa(\omega))(2\nabla - \kappa(\omega) - 2).$$

Il s'ensuit que $\frac{1}{2}(2\nabla - \kappa(\omega))(2\nabla - \kappa(\omega) - 2) - C$ est divisible par t sur Δ puisque u^+ y est la multiplication par t ; cela équivaut (lemme 1.6) à ce que

$$(2\Theta_{\mathrm{Sen}} - \kappa(\omega))(2\Theta_{\mathrm{Sen}} - \kappa(\omega) - 2) - 2C = 0.$$

il y a deux cas :

• Θ_{Sen} n'est pas scalaire. Alors $\frac{1}{4}\big((2X - \kappa(\omega))(2X - \kappa(\omega) - 2) - 2C\big)$ est le polynôme minimal de Θ_{Sen}, et donc, si α,β sont les poids de Hodge-Tate de Δ, on a $\frac{1}{4}\big((2X - \kappa(\omega))(2X - \kappa(\omega) - 2) - 2C\big) = (X-\alpha)(X-\beta)$.

• Θ_{Sen} est scalaire. Si on note α ce scalaire et si on pose $\beta = \kappa(\omega) + 1 - \alpha$, alors $\frac{1}{4}\big((2X - \kappa(\omega))(2X - \kappa(\omega) - 2) - 2C\big) - (X-\alpha)(X-\beta)$ est constant et annule Θ_{Sen} ; il est donc nul.

On a donc

$$\frac{1}{4}\big((2X - \kappa(\omega))(2X - \kappa(\omega) - 2) - 2C\big) = (X-\alpha)(X-\beta)$$

dans les deux cas, et donc $\kappa(\omega) = \alpha + \beta - 1$ et $C = \frac{1}{2}\big((\alpha-\beta)^2 - 1\big)$. La formule ci-dessus pour C devient $u^+u^- + (\nabla - \alpha)(\nabla - \beta) = 0$; on en déduit la formule pour u^- sur Δ (ne pas oublier que $u^+ = t$ sur Δ).

Maintenant, l'action de $\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^{a+1}\mathbf{Z}_p & 1 \end{smallmatrix}\big)$ sur le sous-module $\Delta^{[r_{a+1}, r_a]}$ de $\Delta^{[r_{a+1}, r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est analytique d'après le lemme 2.1 et donc, si $n \geq a+1$, l'action de $\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^n & 1 \end{smallmatrix}\big)$ est donnée par l'exponentielle de l'action de $p^n u^- \in \mathfrak{gl}_2$. Comme

$$\big(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ p^n & 1 \end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) = w,$$

on en déduit que w est complètement déterminé sur $\Delta^{[r_{a+n+1}, r_{a+n}]} \boxtimes (1 + p^n\mathbf{Z}_p)$ par Δ (et l'action de P^+) et ω. En conjugant par $\big(\begin{smallmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$, on voit que, pour tout n, w est complètement déterminé sur $\Delta^{[r_{a+n+1}, r_{a+n}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, et donc a fortiori sur $\Delta^{]0, r_{a+n}]} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$, et donc aussi sur $\Delta \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

Comme le faisceau $U \mapsto \Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est complètement déterminé par sa restriction à $\mathbf{Z}_p$ avec l'action de P^+, et l'action de w sur sa restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ (car $\mathbf{P}^1$ est obtenu en recollant deux copies de $\mathbf{Z}_p$ le long de $\mathbf{Z}_p^*$, via w, et que G est engendré par P^+, w, et le centre), cela prouve l'unicité et termine la preuve de la proposition.

Remarque 2.3. — (i) Il résulte de la preuve de la proposition que α et β sont les poids de Hodge-Tate de Δ sauf si l'opérateur de Sen est scalaire auquel cas l'un de α et β est ce scalaire et l'autre est déterminé par la relation $\alpha+\beta=\kappa(\omega)+1$.

(ii) Dans le cas $\mathrm{End}\,\Delta\neq L$, il y a encore unicité [**8**, th. 6.8], mais la preuve est nettement plus indirecte.

Proposition 2.4. — *On suppose que $\Delta\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ existe*[10]. *Alors, si N est un sous-(φ,Γ)-module de Δ, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- $(\nabla-\alpha)(\nabla-\beta)\cdot N\subset tN$,
- $(\nabla-\alpha)(\nabla-\beta)\cdot N_{\mathrm{dif}}^+\subset tN_{\mathrm{dif}}^+$,
- $N\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ *existe.*

Démonstration. — L'équivalence des deux premiers points résulte du lemme 1.6 appliqué à N.

Le troisième point implique le premier grâce à la formule pour u^- de la prop. 2.2. Réciproquement, il suffit de prouver que $N\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est stable par l'action de w agissant sur $\Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ (car Δ est stable par P^+). Pour cela, il suffit de remarquer que le second point implique (grâce au lemme 1.7) que $N^{[r_a,r_b]}$ est stable par u^-, et donc par $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ p^n\mathbf{Z}_p & 1\end{smallmatrix}\right)$ si $n\gg 0$, si $a\geq b\geq m(\Delta)$. Les arguments prouvant l'unicité de w si ω est donné (preuve de la prop. 2.2) montrent alors que $N^{[r_{a+n+1},r_{a+n}]}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$ est stable par w. On conclut en utilisant le fait que $N^{]0,r_b]}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*=\cap_{n=b-a}^{+\infty}N^{[r_{a+n+1},r_{a+n}]}\boxtimes\mathbf{Z}_p^*$.

Remarque 2.5. — (i) $N\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ s'identifie à

$$\{z\in\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z\in N,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}w\cdot z\in N\}.$$

(ii) On peut déduire de cette proposition que, si Δ est triangulin, extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$, et si $\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ existe, alors $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ existe et, en passsant au quotient, que $\mathscr{R}(\delta_2)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ existe, et que l'on a une suite exacte

$$0\to\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1\to\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1\to\mathscr{R}(\delta_2)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1\to 0.$$

Cette suite exacte [**7, 11, 20**] est l'ingrédient principal dans la description de $\Pi(\Delta)$, si Δ est triangulin.

2.3. Micro-localisation. — On suppose que $\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ existe, ce qui nous fournit $\alpha,\beta\in L$ vérifiant les conclusions de la prop. 2.2.

On munit Δ_{dif} d'une action de $U(\mathfrak{g})$ en posant

$$u^+\cdot x=tx,\ \ a^+\cdot x=\nabla x,\ \ u^-\cdot x=-\frac{1}{t}(\nabla-\alpha)(\nabla-\beta)\cdot x,\ \ a^++a^-=(\alpha+\beta-1).$$

Le casimir agit alors par multiplication par $\frac{1}{2}((\alpha-\beta)^2-1)$.

10. On dit que $\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ existe si Δ se prolonge en un faisceau G-équivariant sur $\mathbf{P}^1$, de caractère central ω.

Lemme 2.6. — *Si $\lambda \in U(\mathfrak{g})$, et si $n \geq m(\Delta)$, alors*

$$\lambda \circ \iota_n = \iota_n \circ \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\lambda\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \textit{sur } \Delta^{]0,r_n]}.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier l'énoncé pour une base de $\mathfrak{g}$. La formule est évidente pour u^+ (qui agit par multiplication par t) car

$$\iota_n(tz) = p^{-n}t\,\iota_n(z) \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)u^+\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = p^n u^+.$$

Elle l'est aussi pour a^+ qui commute à ι_n et $\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et pour a^- puisque $a^+ + a^- = \kappa(\omega)$. Enfin, la formule pour u^- se déduit de celle pour le casimir (qui fournit ce que l'on veut pour u^+u^- puisque l'on sait ce qui se passe pour $(a^+ - a^-)^2$), de celle pour u^+, et de l'injectivité de u^+ (multiplication par t).

L'hypothèse d'existence de $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$, implique que $\Delta_{\rm dif}^+$ est stable par $U(\mathfrak{g})$ (prop. 2.4, seule la stabilité par u^- pose problème) ; on peut donc munir $\Delta_{\rm dif}^- = \Delta_{\rm dif}/\Delta_{\rm dif}^+$ d'une action de $U(\mathfrak{g})$. On note $(\Delta_{\rm dif}^-)^{U(\mathfrak{g})-\rm fini}$ l'espace des $v \in \Delta_{\rm dif}^-$ dont l'orbite sous $U(\mathfrak{g})$ est de dimension finie sur L (cela équivaut à ce que l'image inverse de cette orbite dans $\Delta_{\rm dif}$ soit un $L_\infty[[t]]$-réseau stable par $U(\mathfrak{g})$).

Proposition 2.7. — (i) *Si $\alpha - \beta \notin \mathbf{Z}$, ou si $\alpha = \beta$, ou si $\alpha - \beta \in \mathbf{Z}$ mais ∇ n'est pas semi-simple, $\Delta_{\rm dif}^+$ est le seul réseau de $\Delta_{\rm dif}$ stable par $U(\mathfrak{g})$, et $(\Delta_{\rm dif}^-)^{U(\mathfrak{g})-\rm fini} = 0$.*

(ii) *Si $\alpha - \beta = k \in \mathbf{N} - \{0\}$, et si ∇ est semi-simple, on est dans un des cas suivants :*

- *$\Delta_{\rm dif}^+$ admet une base e_1, e_2 vérifiant $\nabla e_1 = \alpha e_1$, $\nabla e_2 = \beta e_2$. Dans ce cas, le seul réseau de $\Delta_{\rm dif}$ stable par $U(\mathfrak{g})$ et strictement inclus dans $\Delta_{\rm dif}^+$ est $\langle e_1, t^k e_2\rangle$ et $(\Delta_{\rm dif}^-)^{U(\mathfrak{g})-\rm fini} = (L_\infty[t]/t^k)\cdot t^{-k}e_1$.*
- *$\Delta_{\rm dif}^+$ admet une base e_1, e_2 vérifiant $\nabla e_1 = \alpha e_1$, $\nabla e_2 = \alpha e_2$. Alors $\Delta_{\rm dif}^+$ n'a pas de sous-réseau strict stable par $U(\mathfrak{g})$ et $(\Delta_{\rm dif}^-)^{U(\mathfrak{g})-\rm fini} = (L_\infty[t]/t^k)\cdot\langle t^{-k}e_1, t^{-k}e_2\rangle$*
- *$\Delta_{\rm dif}^+$ admet une base e_1, e_2 vérifiant $\nabla e_1 = \beta e_1$, $\nabla e_2 = \beta e_2$. Alors les sous-réseaux stricts de $\Delta_{\rm dif}^+$ stables par $U(\mathfrak{g})$ sont $t^k\Delta_{\rm dif}^+$ et les $t^k\Delta_{\rm dif}^+ + L_\infty[[t]]\otimes\mathscr{L}$, où $\mathscr{L}$ est une droite de $Le_1 \oplus Le_2$, et $(\Delta_{\rm dif}^-)^{U(\mathfrak{g})-\rm fini} = 0$.*

Démonstration. — Si $e \in \Delta_{\rm dif}^+$ vérifie $\nabla e = \lambda e$, alors

$$a^+(t^j e) = (\lambda + j)e, \quad u^+(t^j e) = t^{j+1}e, \quad u^-(t^j e) = -(\lambda + j - \alpha)(\lambda + j - \beta)t^{j-1}e,$$

pour tout $j \in \mathbf{Z}$. Ceci permet de traiter tous les cas où ∇ est semi-simple car, alors $\Delta_{\rm dif}^+$ admet une base e_1, e_2 sur $L_\infty[[t]]$ vérifiant $\nabla e_i = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \in \{\alpha, \beta\}$. Les formules ci-dessus montrent que l'existence de sous-réseaux stables par $U(\mathfrak{g})$ est liée à l'annulation éventuelle du facteur $(\lambda_i + j - \alpha)(\lambda_i + j - \beta)$ (qui se passe pour $j = 0$ et au plus une autre valeur de j si $\alpha - \beta \in \mathbf{Z}$).

Si ∇ n'est pas semi-simple, il existe $k \in \mathbf{N}$, tel que $\alpha = \beta + k$ (quitte à permuter α et β) et une base e_1, e_2 de $\Delta_{\rm dif}^+$ sur $L_\infty[[t]]$ vérifiant $\nabla e_1 = \alpha e_1 + t^k e_2$, $\nabla e_2 = \beta e_2$. Le sous-$L_\infty((t))$-module engendré par e_2 est stable par $U(\mathfrak{g})$ et ses seuls sous-réseaux stables sont $\langle e_2\rangle$ et $\langle t^k e_2\rangle$. Les seuls réseaux stables du quotient sont $\langle e_1\rangle$ et $\langle t^{-k}e_1\rangle$. Or on a

$$u^- \cdot e_1 = -\tfrac{1}{t}(\nabla-\beta)(\nabla-\alpha)\cdot e_1 = -\tfrac{1}{t}(\nabla-\beta)\cdot t^k e_2 = -kt^{k-1}e_2\,,$$
$$u^- \cdot t^{-k}e_1 = -\tfrac{1}{t}(\nabla-\alpha)(\nabla-\beta)\cdot e_1 = -\tfrac{1}{t}(\nabla-\alpha)\cdot e_2 = kt^{-1}e_2\,.$$

On en déduit qu'un réseau N stable par $U(\mathfrak{g})$ ne peut pas avoir une intersection avec $L_\infty((t))\cdot e_2$ réduite à $\langle t^k e_2\rangle$, et donc N contient $\Delta^+_{\rm dif}$. De même, l'image de N modulo $L_\infty((t))\cdot e_2$ ne peut pas être égale à $\langle t^{-k}e_1\rangle$, et donc $N\subset\Delta^+_{\rm dif}$.

Remarque 2.8. — (i) La condition ∇ non semi-simple signifie que Δ est (à torsion près) presque Hodge-Tate mais pas de Rham.

(ii) Les trois cas où $\alpha-\beta=k\in\mathbf{N}-\{0\}$ et ∇ semi-simple correspondent (à torsion près) aux cas de Rham et, respectivement et plus précisément, aux cas :
- Δ de Rham à poids de Hodge-Tate 0 et k, tordu par δ, avec $\kappa(\delta)=\beta$,
- $\Theta_{\rm Sen}=\alpha$ et $\kappa(\omega)=2\alpha-k-1$,
- $\Theta_{\rm Sen}=\beta$ et $\kappa(\omega)=2\beta+k-1$.

2.4. Vecteurs Localement algébriques. — Nous allons déterminer dans quels cas $\Pi(\Delta)$ possède des vecteurs localement algébriques. Un ingrédient important est l'existence d'un modèle de Kirillov pour le $(B,\mathfrak{g})$-module des vecteurs u^+-finis.

2.4.1. Modèle de Kirillov. — Si Y est un B-module de caractère central ω, un modèle de Kirillov pour Y est la donnée de :
- un $L_\infty[[t]]$-module $\overline{Y}$ muni d'une action de $\mathscr{D}(\Gamma)$,
- une injection B-équivariante de Y dans l'espace $\mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*,\overline{Y})^\Gamma$ des $\phi:\mathbf{Q}_p^*\to\overline{Y}$
  - — localement analytiques,
  - — à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ (c'est la signification du « rc »),
  - — vérifiant $\sigma_a(\phi(x))=\phi(ax)$, pour tout $a\in\mathbf{Z}_p^*$ (invariance par Γ),

  muni de l'action suivante de B :
$$\big(\big(\begin{smallmatrix}a&b\\0&d\end{smallmatrix}\big)\cdot\phi\big)(x)=\omega(d)[\varepsilon^{bx/d}]\phi\big(\frac{ax}{d}\big).$$

Si Y possède un modèle de Kirillov dans $\mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*,\overline{Y})^\Gamma$, on note Y_c l'image inverse du sous-espace $\mathrm{LA}_{\rm c}(\mathbf{Q}_p^*,\overline{Y})^\Gamma$ des fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$.

Par exemple, si Y est une représentation lisse de G, on peut prendre $\overline{Y}=L_\infty$ (vu comme $L_\infty[[t]]/(t)$). On retombe alors sur la notion classique de modèle de Kirillov, et Y/Y_c est le module de Jacquet de Y.

Plus généralement, si $Y=Y_0\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}$, où Y_0 est une représentation lisse de G, on peut prendre $\overline{Y}=L_\infty[[t]]/(t^k)$, et on retombe sur le modèle de Kirillov pour les représentations localement algébriques étudié dans [**6**, §VI.2].

Proposition 2.9. — *Si* Π *est une représentation de* G*, localement algébrique, de longueur finie, et si* Π *possède un modèle de Kirillov, alors :*
- Π *est admissible,*

• Π *n'admet pas de sous-représentation de dimension finie.*

• Π_c *est de codimension finie dans* Π*, avec égalité si et seulement si les composantes de Jordan-Hölder de* Π *sont de la forme* $\Pi_0 \otimes W$*, avec* W *algébrique et* Π_0 *lisse, supercuspidale.*

2.4.2. Vecteurs u^+-finis. — Notons $\Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$ l'ensemble des $v \in \Pi$ tués par une puissance de u^+. C'est un sous-B-module de Π. Soit $v \in \Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$ et soit $\tilde{v}$ un relèvement de v dans $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$. Le fait que v soit tué par une puissance de u^+ se traduit par l'existence de $N \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que $\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & p^N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) - 1\big)^k \cdot \tilde{v} \in \Pi(\Delta)^*$.

Maintenant, l'image de Π^* par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ est incluse dans $\Delta^{]0,r_{m(\Delta)}]}$. (Cela peut se voir de plusieurs manières ; par exemple en remarquant que Π^* est un fréchet et donc son image dans $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ est inclus dans un des $\Delta^{]0,r_a]} \boxtimes \mathbf{P}^1$ puisque $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ est la limite inductive de ces fréchets ; il existe donc $a \geq m(\Delta)$ tel que l'image de Π^* par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ est incluse dans $\Delta^{]0,r_a]}$, et on conclut en utilisant le fait que ψ est surjectif sur cette image car $\big(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$ l'est sur Π^*.)

Si $z \in \Pi^*$, alors $\big(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot z \in \Pi^*$ pour tous $j \in \mathbf{Z}$ et $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et donc

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot z\big) \in \Delta^{]0,r_{m(\Delta)}]}.$$

Il s'ensuit que, si $n \geq m(\Delta)$, on peut poser

$$\iota_n\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\cdot\tilde{v}\big)\big) = \tfrac{1}{\varphi^{N+j-n}(\sigma_a(T))^k}\,\iota_n\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\cdot\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & p^N \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)-1\big)^k\tilde{v}\big)\big) \in t^{-k}\Delta^+_{\mathrm{dif},n}.$$

Si $\alpha = \varphi^{N+j-n}(\sigma_a(T))^k$, on a aussi

$$\iota_n\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \tilde{v}\big)\big) = \tfrac{1}{\alpha}\,\iota_n\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\varphi^n(\alpha)\big(\begin{smallmatrix} p^j a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \tilde{v}\big)\big).$$

On vérifie que, si $x \in \mathbf{Q}_p^*$, l'image de $\iota_n\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^n x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\cdot\tilde{v}\big)\big)$ dans Δ^-_{dif} est indépendante du choix de $\tilde{v}$ et, en utilisant le fait que v est localement analytique pour l'action de Γ, qu'elle est aussi indépendante de n, si n est assez grand (cf. [**6**, § VI.5]). La fonction $x \mapsto \mathscr{K}_v(x)$ ainsi définie appartient à $\mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^*, \Delta^-_{\mathrm{dif}})^\Gamma$.

Proposition 2.10. — (i) $v \mapsto \mathscr{K}_v$ *est un modèle de Kirillov pour* $\Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$.

(ii) $U(\mathfrak{g})$ *stabilise* $\Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$ *et, si* $\lambda \in U(\mathfrak{g})$*, alors*

$$\mathscr{K}_{\lambda\cdot v}(x) = \big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\lambda\big(\begin{smallmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \mathscr{K}_v(x).$$

Démonstration. — Pour le (i), cf. [**6**, § VI.5] : il y a un point non trivial, à savoir l'injectivité de $v \mapsto \mathscr{K}_v$ (lemmes [11] VI.5.2 et VI.5.4 de [**6**]).

Pour prouver le (ii), il suffit de traiter le cas d'une base de $\mathfrak{g}$, et comme $a^+ + a^-$ agit par un scalaire, il suffit de traiter les cas $\lambda = u^+, a^+, u^-$. La stabilité de $\Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$ (et même, pour tout $k \in \mathbf{N}$, celle du noyau de $(u^+)^k$) par u^+ et a^+ est immédiate. Celle par u^- est une conséquence de l'existence d'un caractère infinitésimal et de la

11. Il faut remplacer « $m \in \mathbf{N}$ » par « $m \geq -n$ » dans le lemme VI.5.2 pour qu'il soit correct.

stabilité par a^+ : on en déduit la stabilité du noyau de $(u^+)^k$ par u^+u^-, ce qui prouve que u^- envoie ce noyau dans celui de $(u^+)^{k+1}$.

Il reste à prouver la formule, ce qui se fait par les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 2.6, et peut se vérifier directement dans $\Delta_{\rm dif}$ sans passer au quotient par $\Delta_{\rm dif}^+$. Cela revient, en posant $z = \big(\begin{smallmatrix} p^n x & 0 \\ 1 & 1\end{smallmatrix}\big)\tilde v$, à vérifier que

$$\frac{1}{\alpha}\iota_n\big(\varphi^n(\alpha)\big(\begin{smallmatrix} p^n x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\lambda\big(\begin{smallmatrix} p^n x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)^{-1}\cdot z\big) = \big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\lambda\big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)^{-1}\cdot\big(\frac{1}{\alpha}\iota_n\big(\varphi^n(\alpha)z\big)\big).$$

Si $\lambda = u^+$, cela résulte de ce que $\big(\begin{smallmatrix} p^n x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)u^+\big(\begin{smallmatrix} p^n x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)^{-1} = p^n x u^+$ agit par $p^n xt$ alors que $\big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\lambda\big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)^{-1}$ agit par xt, et $\iota_n(ty) = p^{-n}t\,\iota_n(y)$.

Si $\lambda = a^+$, on est ramené à vérifier que $\frac{1}{\alpha}\iota_n\big(\varphi^n(\alpha)\nabla\cdot z\big) = \nabla\big(\frac{1}{\alpha}\iota_n\big(\varphi^n(\alpha)z\big)\big)$. En appliquant la règle de Leibniz dans le second membre, on est ramené à vérifier que $\nabla(\frac{1}{\alpha})\iota_n(\varphi^n(\alpha)z) + \frac{1}{\alpha}\iota_n(\nabla(\varphi^n(\alpha))z) = 0$, ce qui se fait en multipliant par α^2 pour faire disparaître les dénominateurs, et en utilisant le fait que ∇ commute à ι_n et φ^n, ainsi que la formule $\alpha\iota_n(y) = \iota_n(\varphi^n(\alpha)y)$.

Pour u^-, on utilise le fait que la formule est valable pour u^+u^- grâce au casimir et aux cas de a^+ et a^-, et qu'elle est vraie aussi pour u^+ : on obtient

$$\mathscr{K}_{u^+u^-\cdot v}(x) = xt\mathscr{K}_{u^-\cdot v}(x)$$

en utilisant la formule pour u^+, et

$$\mathscr{K}_{u^+u^-\cdot v}(x) = \big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)u^+u^-\big(\begin{smallmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mathscr{K}_v(x) = xt\,\big(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)u^-\big(\begin{smallmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mathscr{K}_v(x),$$

en utilisant la formule pour u^+u^-. D'où le résultat.

Remarque 2.11. — On peut interpréter le (ii) comme l'existence d'un modèle de Kirillov pour $\Pi^{u^+-\rm fini}$ vu comme $(B,\mathfrak{g})$-module et pas seulement comme B-module.

2.4.3. Vecteurs u^+-finis à support compact. — Notre choix d'un isomorphisme $\wedge^2\Delta = (\mathscr{R}\frac{dT}{1+T})\otimes\omega_\Delta$ induit un isomorphisme

$$\wedge^2\Delta_{\rm dif} = (L_\infty((t))dt)\otimes\omega_\Delta$$

de $L_\infty((t))$-modules munis d'une action de Γ. On note $[\ ,\ ]_{\rm dif}$ l'accouplement bilinéaire sur $\Delta_{\rm dif}$ défini par

$$[x,y]_{\rm dif} = \text{rés}_L((\sigma_{-1}(x)\wedge y)\otimes\omega_\Delta^{-1}),$$

où $\text{rés}_L : L_\infty((t))dt \to L$ est la composée de l'application résidu $L_\infty((t))dt \to L_\infty$ avec la trace normalisée $\lim_{n\to+\infty} p^{-n}\mathrm{Tr}_{L_n/L} : L_\infty \to L$. L'accouplement $[x,y]_{\rm dif}$ est identiquement nul sur $\Delta_{\rm dif}^+$ et donc induit un accouplement $[\ ,\ ]_{\rm dif} : \Delta_{\rm dif}^+\times\Delta_{\rm dif}^- \to L$. Si $\phi\in \mathrm{LA}_c(\mathbf{Q}_p^*, \Delta_{\rm dif}^-)^\Gamma$, et si $\mu\in\Pi(\Delta)^*\otimes\omega_\Delta$, alors

$$[\mu,\phi] = \sum_{i\in\mathbf{Z}}\omega_\Delta(p^{-i})\big[\iota_N\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^{i+N} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\mu\big)\big),\phi(p^i)\big]_{\rm dif}, \tag{2.12}$$

qui a un sens pour $\geq m(\Delta)$ car $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\Pi^* \subset \Delta^{]0,m(\Delta)]}$, ne dépend pas du choix de N, si N est assez grand, et définit une forme linéaire continue sur $\Pi(\Delta)^*$, ce qui fournit un plongement $\iota : \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^*, \Delta_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma \to \Pi(\Delta)$ caractérisé par

$$[\mu, \iota(\phi)]_{\mathbf{P}^1} = [\mu, \phi],$$

pour tout $\mu \in \Pi(\Delta)^*$.

Proposition 2.13. — (i) *L'image de* ι *est incluse dans* $\Pi(\Delta)^{u^+-\mathrm{fini}}$.

(ii) $\mathscr{K} \circ \iota : \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^*, \Delta_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma \to \mathrm{LA}_{\mathrm{rc}}(\mathbf{Q}_p^*, \Delta_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma$ *est l'inclusion naturelle.*

Démonstration. — Pour prouver le (i), il suffit de vérifier que $u^+ \cdot \iota(\phi) = \iota(u^+ \cdot \phi)$, si on fait agir $U(\mathfrak{g})$ sur $\mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^*, \Delta_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma$ par la formule de la prop. 2.10 (en effet, comme ϕ est invariante par Γ, elle est déterminé par les $\phi(p^i)$, et comme elle est à support compact, il n'y a qu'un nombre fini de $\phi(p^i)$ non nuls, et donc il existe k tel que $t^k\phi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{Q}_p^*$; cela implique $(u^+)^k \cdot \phi = 0$ et donc $(u^+)^k \cdot \iota(\phi) = 0$). Or,

$$\begin{aligned}[\mu, u^+ \cdot \iota(\phi)]_{\mathbf{P}^1} &= -[u^+ \cdot \mu, \iota(\phi)]_{\mathbf{P}^1} \\ &= -\sum_{i\in\mathbf{Z}} \omega_\Delta(p^{-i})\big[\iota_N\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^{i+N} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)u^+ \cdot \mu\big)\big), \phi(p^i)\big]_{\mathrm{dif}}\end{aligned}$$

On utilise alors les formules : $[tx, y]_{\mathrm{dif}} = -[x, ty]_{\mathrm{dif}}$, et :

$$\big(\begin{smallmatrix} p^{i+N} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)u^+ \cdot \mu = p^{i+N}t\big(\begin{smallmatrix} p^{i+N} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\mu, \quad \iota_N(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(tz)) = p^{-N}t\,\iota_N(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}z),$$

et on obtient

$$[\mu, u^+ \cdot \iota(\phi)]_{\mathbf{P}^1} = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \omega_\Delta(p^{-i})\big[\iota_N\big(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\big(\begin{smallmatrix} p^{i+N} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\mu\big)\big), p^i t\,\phi(p^i)\big]_{\mathrm{dif}}.$$

On conclut en remarquant que $p^i t\,\phi(p^i) = (u^+ \cdot \phi)(p^i)$. (La même technique permettrait de prouver que ι est B-équivariant.)

Le (ii) se démontre comme la prop. VI.5.12 de [**6**].

Remarque 2.14. — On peut raisonnablement penser que, si Δ n'est pas triangulin, alors $\Pi(\Delta)^{u^+-\mathrm{fini}} = \mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^*, \Delta_{\mathrm{dif}}^-)^\Gamma$. C'est le cas si Δ est de Rham (rem. 3.32).

2.4.4. Vecteurs localement algébriques

Théorème 2.15. — $\Pi(\Delta)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ *si et seulement si* Δ *est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts. Dans ce dernier cas,* $\Pi(\Delta)^{\mathrm{alg}}$ *contient* $\mathrm{LA}_{\mathrm{c}}(\mathbf{Q}_p^*, (\Delta_{\mathrm{dif}}^-)^{U(\mathfrak{g})-\mathrm{fini}})^\Gamma$ *et ce sous-espace est de codimension finie.*

Démonstration. — Pour que $\Pi(\Delta)^{\mathrm{alg}}$ soit non nul, il faut que le caractère central soit localement algébrique ; si c'est le cas, un vecteur est localement algébrique si et seulement si il est $U(\mathfrak{g})$-fini [**24**], où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

En particulier, un vecteur localement algébrique v est u^+-fini. On peut donc plonger $\Pi(\Delta)^{\mathrm{alg}}$ dans le modèle de Kirillov de $\Pi(\Delta)^{u^+-\mathrm{fini}}$. Maintenant, si $\lambda \in U(\mathfrak{g})$, on a

$\mathscr{K}_{\lambda\cdot v}(x) = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\lambda\left(\begin{smallmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mathscr{K}_v(x)$, d'après la prop. 2.10. Il s'ensuit que, si v est tué par un idéal I de codimension finie de $U(\mathfrak{g})$, alors $\mathscr{K}_v(x)$ est tué par l'idéal $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)I\left(\begin{smallmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ qui est, lui aussi, de codimension finie ; en d'autres termes, $\mathscr{K}_v$ est à valeurs dans $Y = (\Delta_{\rm dif}^-)^{U(\mathfrak{g})-\rm fini}$.

Pour que $\Pi(\Delta)^{\rm alg} \neq 0$, il faut donc que $Y \neq 0$, ce qui implique que Δ soit de Rham à poids de Hodge-Tate distincts (cf. prop. 2.7 et rem. 2.8 ; ne pas oublier que $\omega = \omega_\Delta$).

Réciproquement, si Δ est de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, Y est non nul et est une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Une telle représentation peut s'exponentier en une représentation de $\mathbf{SL}_2$; on en déduit que l'idéal annulateur I de Y est stable par conjugaison par $\mathbf{SL}_2$, et comme le stabilisateur de I est un sous-groupe algébrique de $\mathbf{GL}_2$ qui contient le centre, on voit que I est stable par conjugaison par G. Il s'ensuit que, si $\mathscr{K}_v$ est à valeurs dans Y, et si $\lambda \in I$, alors $\mathscr{K}_{\lambda\cdot v}$ est identiquement nulle, et donc $\lambda\cdot v = 0$. On en déduit l'inclusion de ${\rm LA}_{\rm c}(\mathbf{Q}_p^*, Y)^\Gamma$ dans $\Pi(\Delta)^{\rm alg}$. Que le quotient soit de codimension finie est une conséquence de la théorie du modèle de Kirillov pour les représentations localement algébriques (prop. 2.9).

Ceci conclut la preuve du théorème.

2.5. Irréductibilité.

— Le but de ce paragraphe est de prouver que $\Pi(\Delta)$ est irréductible s'il n'y a pas d'obstruction évidente à ce qu'elle le soit.

Théorème 2.16. — *Si Δ n'est ni triangulin ni* (à torsion près) *de Rham à poids de Hodge-Tate distincts, alors $\Pi(\Delta)$ est irréductible.*

Démonstration. — La démonstration va demander un peu de préparation. Commençons par remarquer que la condition « Δ non triangulin » implique que Δ est isocline car on est en rang 2. On peut donc, quitte à le tordre par un caractère, le supposer étale.

Il existe alors $D \in \Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, de rang 2, tel que, si on note $D^\dagger$ le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger$-module de ses éléments surconvergents, alors $\Delta = \mathscr{R}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger} D^\dagger$.

Rappelons que D contient des sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-modules compacts $D^+, D^\natural, D^\sharp$, vérifiant les propriétés suivantes :

• $D^+ \subset D^\natural \subset D^\sharp \subset D^\dagger \subset \Delta$

• D^+ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module compact stable par φ,

• $D^\sharp$ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module compact stable par ψ, sur lequel ψ est surjectif,

• $D^\natural$ est le plus petit sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module compact stable par ψ, contenant une base de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.

De plus, comme on suppose D non triangulin et que l'on est en rang 2, on a $D^+ = 0$ (sinon D serait de hauteur finie, ce qui serait en contradiction avec le fait qu'il n'est pas triangulin **[2]**), et $D^\sharp/D^\natural$ est de torsion.

Notons simplement Π la représentation $\Pi(\Delta)$. Le choix de D définit une valuation G-invariante sur Π et, si on note $\widehat{\Pi}$ le complété de Π pour cette valuation et $\widehat{\Pi}_0$ la boule unité de $\widehat{\Pi}$, alors :

- $D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{z \in \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in D^\sharp,\ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z \in D^\sharp\} \cong \widehat{\Pi}_0^* := \mathrm{Hom}(\widehat{\Pi}_0, \mathscr{O}_L)$,
- L'image de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Delta$ contient $D^\natural$,
- $\widehat{\Pi}^* = (D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1)[\frac{1}{p}]$ est dense dans Π^*,
- On a une suite exacte $0 \to \widehat{\Pi}_0^* \otimes \omega_\Delta \to D \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \widehat{\Pi}_0 \to 0$ de G-modules.

2.5.1. Factorisation de matrices. — Nous aurons besoin du résultat de factorisation suivant [**17**, Prop. 6.5].

Proposition 2.17. — (Kedlaya) *Si $A \in \mathbf{GL}_d(\mathscr{R})$, il existe $B, B' \in \mathbf{GL}_d(\mathscr{R}^+)$ et $C, C' \in \mathbf{GL}_d(\mathscr{E}^\dagger)$ telles que $A = BC = C'B'$.*

Corollaire 2.18. — *Soient Δ un $\mathscr{R}$-module libre de rang fini, Δ_0 un sous-$\mathscr{E}^\dagger$-module de Δ de contenant une base de Δ sur $\mathscr{R}$, et M un sous $\mathscr{R}^+$-module de Δ contenant une base de Δ sur $\mathscr{R}$. Alors $M \cap \Delta_0$ contient une base de Δ sur $\mathscr{R}$.*

Démonstration. — Soit $e_1, \dots, e_d$ (resp. $f_1, \dots, f_d$) une base de Δ constituée d'éléments de M (resp. Δ_0). On a donc $e_j = \sum_{i=1}^d a_{j,i} f_i$, et la matrice $A = (a_{j,i})$ appartient à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{R})$. Par le résultat de Kedlaya, on peut la factoriser sous la forme $A = C^{-1}B$, avec $C = (c_{k,j}) \in \mathbf{GL}_d(\mathscr{R}^+)$ et $B = (b_{k,i}) \in \mathbf{GL}_d(\mathscr{E}^\dagger)$. Alors

$$g_k = \sum_{j=1}^d c_{k,j} e_j = \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d c_{k,j} a_{j,i} f_i = \sum_{i=1}^d b_{k,i} f_i$$

appartient à $M \cap \Delta_0$, et $g_1, \dots, g_k$ forment une base de Δ sur $\mathscr{R}$ ayant les propriétés demandées.

2.5.2. Actions de Γ et u^-. — Soit ω tel que $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ existe [12]. Alors $\mathfrak{g}$ agit sur Δ et respecte $\Delta^{]0,r_n]}$ pour $n \geq m(\Delta)$, et on dispose de $\alpha, \beta \in L$ tels que l'action de $\mathfrak{g}$ soit donnée par les formules de la prop. 2.2. On utilise ces formules pour étendre l'action de $\mathfrak{g}$ sur Δ_{dif}^+ comme dans le § 2.3. On a alors $\lambda \cdot \iota_n(z) = \iota_n\big(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \lambda \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\big)$, si $z \in \Delta^{]0,r_n]}$ et $\lambda \in U(\mathfrak{g})$. En particulier, $u^- \circ \iota_n = p^{-n} \iota_n \circ u^-$ sur $\Delta^{]0,r_n]}$ (cf. lemme 2.6).

Lemme 2.19. — *On suppose que Δ_{dif}^+ n'admet pas de réseau $\mathfrak{g}$-stable. Soit M un $\mathscr{R}^+$-module de Fréchet, muni d'actions de Γ et $\mathfrak{g}$, et soit $\iota : M \to \Delta$ un morphisme continu de $\mathscr{R}^+$-modules commutant aux actions de Γ et $\mathfrak{g}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\iota(M)$ contient deux éléments indépendants sur $\mathscr{R}$.*
(ii) *$\iota(M)$ contient une base de Δ sur $\mathscr{R}$.*
(iii) *$\iota(M)$ contient une base de $D^\dagger$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger$.*

12. Pour le th. 2.16, on a juste besoin du cas $\omega = \omega_\Delta$, mais le cas général nous sera utile pour prouver l'irréductibilité de $\Pi(M, -k)$.

Démonstration. — Les implications (iii)⇒(ii)⇒(i) sont immédiates, et (ii)⇒(iii) est une conséquence du cor. 2.18. Il suffit donc de prouver que (i)⇒(ii).

Soient donc $f_1, f_2 \in \iota(M)$ formant une famille libre sur $\mathscr{R}$, et soit $h \geq m(D)$ tel que $f_1, f_2 \in \Delta^{]0,r_h]}$. Comme $\mathscr{E}^{]0,r_h]}$ est de Bézout, et comme $\Delta = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^{]0,r_h]}} \Delta^{]0,r_h]}$, il suffit de prouver que $\iota(M)$ contient une famille génératrice finie de $\Delta^{]0,r_h]}$ sur $\mathscr{E}^{]0,r_h]}$.

Pour a générique, le support du $\mathscr{E}^{]0,r_h]}$-module $\Delta^{]0,r_h]}/(f_1, f_2, \sigma_a(f_1), \sigma_a(f_2))$ est concentré en les idéaux fixes par Γ, c'est-à-dire les $\Phi_n = \frac{\varphi^n(T)}{\varphi^{n-1}(T)}$, pour $n \geq a$. Comme $\mathscr{E}^{]0,r_h]}$ est le complété d'un localisé de $\mathscr{R}^+$, qui est de Bézout, on peut trouver g_1, g_2, combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathscr{R}^+$ de $f_1, f_2, \sigma_a(f_1), \sigma_a(f_2)$ (et donc éléments de $\iota(M)$) tels que

$$\Delta^{]0,r_h]}/(g_1, g_2) = \prod_{n \geq h} \big((\Delta^{]0,r_h]}/\Phi_n^{k_n}) \oplus (\Delta^{]0,r_h]}/\Phi_n^{k'_n})\big).$$

Par ailleurs, localiser en Φ_n revient à étendre les scalaires de $\mathscr{E}^{]0,r_h]}$ à $L_n[[t]]$, et donc à passer dans $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}$. L'hypothèse sur l'action de $\mathfrak{g}$ implique alors que les $(u^-)^k g_i$, pour $i = 1, 2$ et $k \in \mathbf{N}$, engendrent $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}/t^{k_n}$, pour tout $n \geq a$. Soit $\tilde{g}_i \in M$ ayant pour image g_i par ι. En prenant des $\lambda_{k,i} \in L$ suffisamment petits, la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} \lambda_{k,i}(u^-)^k \tilde{g}_i$, pour $i = 1, 2$, converge dans le fréchet M, et si on note h_i sa somme, les images de h_1, h_2 dans $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}/t^{k_n}$ engendrent ce $L_n[[t]]$-module. On en déduit que $\Delta^{]0,r_h]}$ est engendré par $g_1, g_2, \iota(h_1), \iota(h_2)$ sur $\mathscr{E}^{]0,r_h]}$.

Ceci permet de conclure.

2.5.3. Injectivité de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$

Proposition 2.20. — *Si D n'est pas triangulin,* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^* \otimes \omega \to \Delta$ *est injective.*

Démonstration. — Il revient au même de prouver que $\mathrm{Res}_{\mathbf{P}^1 - p\mathbf{Z}_p}$ est injective (précomposer avec $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{smallmatrix}\right)$). Soit donc M le noyau de $\mathrm{Res}_{\mathbf{P}^1 - p\mathbf{Z}_p}$. Alors M est un fréchet et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ identifie M à un sous-$\mathscr{R}^+$-module de Δ, stable par φ, Γ et $\mathfrak{g}$.

Supposons $M \neq 0$. Comme Δ n'est pas triangulin, cela implique que, pour tout élément $f \neq 0$ de Δ, les $\varphi^n(f)$ et les $\sigma_a(f)$ ne sont pas tous liés sur $\mathscr{R}$ avec f. Il s'ensuit que M contient deux éléments formant une famille libre sur $\mathscr{R}$. Le lemme 2.19 permet donc d'en déduire que M contient une base de $D^\dagger$ sur $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{E}}$. Maintenant, $M \cap D^\dagger$ est contenu dans $D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$ car contenu dans $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ et orthogonal à Π^* ; il donc formé d'éléments dont l'orbite sous $\left(\begin{smallmatrix} p^{\mathbf{N}} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est bornée et donc inclus dans D^+ puisque inclus dans $D^\dagger$ sur lequel $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ agit par φ. On conclut en utilisant la nullité de D^+.

2.5.4. Irréductibilité de B-modules

Lemme 2.21. — *Si $z \in \Pi^*$ est tel que* $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in D^\dagger$*, les* $\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathscr{O}_L\big[\big[\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\big]\big] z$, *pour $n \in \mathbf{N}$, sont contenus dans un borné de* Π^*.

Démonstration. — Il suffit de prouver que, si z vérifie les conditions du lemme, et si $v \in \Pi$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\big[\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) z, v\big] \in p^{-N}\mathscr{O}_L$, pour tous $b \in \mathbf{Z}_p$ et

$n \in \mathbf{N}$. Quitte à multiplier v par p^M, on peut supposer que v a un relèvement $\tilde{v}$ dans $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$. On a $\big[\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)z, v\big] = \big[\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)z, \tilde{v}\big]$, pour tous $b \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$.

Or, $\big[\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)y, \tilde{v}\big] = \omega(p)^{-n}\big[z, \big(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)y\big]$, où $\omega(p) \in \mathscr{O}_L^*$,

$$\big[y, \big(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\tilde{v}\big] = \big[\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p} y, \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}\big(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\tilde{v}\big] + \omega(-1)\big[\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} wy, \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w\big(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\tilde{v}\big].$$

Si $y = \big(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)z$, le premier terme appartient à $\mathscr{O}_L$ par l'hypothèse $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in D^\dagger$ et la stabilité de $D^\dagger \boxtimes \mathbf{P}^1$ par $\big(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$. Pour évaluer le second, on utilise la formule

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w\big(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\tilde{v} = \omega(p)^n \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)w \cdot \tilde{v} = \omega(p)^n \psi^n(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot \tilde{v}).$$

On conclut en remarquant que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot \big(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)z$ varie dans un compact et qu'il en est de même de $\psi^n(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot \tilde{v})$ d'après [**5**, cor. II.4.3].

Lemme 2.22. — *L'adhérence dans Π^* d'un ensemble borné est compacte.*

Démonstration. — Comme Π^* est un fréchet, sa topologie est définissable par une distance et il suffit de prouver que, de toute suite d'éléments de W, on peut extraire une sous-suite convergeant dans Π^*. Or une suite de Π^* converge si et seulement si elle converge dans $(\Pi^{(a)})^*$ (muni de la topologie faible), pour tout a (si Π est la limite inductive compacte des $\Pi^{(a)}$). Comme les boules fermées de $(\Pi^{(a)})^*$ sont compactes, un argument d'extraction diagonale permet de conclure.

Lemme 2.23. — *Si M est sous-B-module fermé de Π^*, et si $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} M$ contient une base de $D^\dagger$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger$, alors $M = \Pi^*$.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe $z_1, z_2 \in M$ tels que les $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z_i$, pour $i = 1, 2$, forment une base de $D^\dagger$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger$. Soit W le sous-$\mathscr{O}_L$-module de Π^* engendré par les $\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) \cdot \mathscr{O}_L\big[\big[\big(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big]\big] \cdot z_i$, pour $n \in \mathbf{N}$ et $i = 1, 2$. Il résulte du lemme 2.21 que W est borné dans Π^*, et donc (lemme 2.22) son adhérence $\overline{W}$ est compacte.

Or, par construction, W est stable par $\big(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$ et $\mathscr{O}_L\big[\big[\big(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big]\big]$, et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\overline{W}$ est un sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module compact de $D^\dagger$ stable par ψ. Comme il contient une base de $D^\dagger$, il contient $D^\natural$ et $p^M D^\sharp$ si p^M tue $D^\sharp/D^\natural$.

On en déduit, grâce à la prop. 2.20, que M contient $p^M(D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1)$, et comme $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1)[\frac{1}{p}]$ est dense dans Π^*, cela implique $M = \Pi^*$, ce qui permet de conclure.

2.5.5. Preuve du th. 2.16. — Il s'agit de prouver que, si $\Pi = \Pi(\Delta)$, et si $M \neq 0$ est un sous-G-module fermé de Π^* alors $M = \Pi^*$. Comme $M \subset \Pi^* \subset \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$, on dispose de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} : M \to \Delta$ qui est $\mathscr{R}^+$-linéaire (où $\mathscr{R}^+$ agit sur Π^* en tant qu'algèbre des distributions de $\big(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)$), commute aux actions de Γ et $\mathfrak{g}$, et vérifie $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \big(\begin{smallmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) = \psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$. L'image est donc un sous-$\mathscr{R}^+$-module de Δ stable par ψ et Γ. Par ailleurs, cette image est non nulle car sinon $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ serait identiquement nul sur M, ce qui, puisque $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ est injective (prop. 2.20), contredit l'hypothèse $M \neq 0$.

Le fait que Δ n'est pas triangulin implique alors que cette image contient deux éléments indépendants sur $\mathscr{R}$.

Maintenant, $\Delta_{\rm dif}^+$ n'admet pas de réseau $\mathfrak{g}$-stable grâce à l'hypothèse selon laquelle Δ n'est pas (à torsion près) de Rham à poids de Hodge-Tate distincts (prop. 2.7 et rem. 2.8). On est donc dans les conditions d'application du lemme 2.19 ; on en déduit que cette image contient une base de $D^\dagger$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\dagger$.

On conclut en utilisant le lemme 2.23.

Remarque 2.24. — On a en fait prouvé que $\Pi(\Delta)$ est déjà irréductible comme B-module.

3. Construction de G-faisceaux sur $\mathbf{P}^1$

Ce chapitre est consacré à la démonstration du th. 0.6 de l'introduction. La construction de $\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ fait l'objet de la rem. 3.12, celle de $\Pi(M,k)$ de la rem. 3.20, et celle de $\mathrm{LL}_p(M)$ du th. 3.31.

3.1. (φ,Γ)-modules de Rham de rang 2. — Nous allons avoir besoin de décrire les (φ,Γ)-*modules de rang* 2 *sur* $\mathscr{R}$, qui sont *de Rham*, et *non triangulins*. Quitte à tordre par une puissance du caractère cyclotomique, ce qui est innocent pour ce que nous avons en vue, on peut supposer que les poids de Hodge-Tate sont 0 et $k\geq 0$.

Un tel objet devient cristallin sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$. On l'obtient, suivant [**1**], en choisissant :

• un $(\varphi,\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module M irréductible, c'est-à-dire un $L\otimes K_0$-module libre de rang 2 (où $K_0=K\cap\mathbf{Q}_p^{\rm nr}$) muni d'actions de φ et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (qui agit à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{G}_K$), semi-linéaires par rapport à l'action de K_0, commutant entre elles, l'action du sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ étant absolument irréductible (car on ne s'intéresse qu'au cas non triangulin),

• une droite $\mathscr{L}$ du L-espace vectoriel $M_{\rm dR}=(K\otimes_{K_0}M)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$.

On définit alors :
$$\Delta(M)=(\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)\otimes_{K_0}M)^H\,;$$
c'est un (φ,Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$, de Rham, à poids de Hodge-Tate 0 et 0. De plus, $\Delta(M)_{{\rm dif},n}^+=L_n[[t]]\otimes M_{\rm dR}$, pour tout n assez grand.

Si $k\geq 1$ et si $\mathscr{L}$ est une droite de $M_{\rm dR}$, on définit :
$$\Delta(M)_{k,\mathscr{L}}=\{z\in\Delta,\ \iota_n(z)\in\big(L_n[[t]]\otimes\mathscr{L}\big)+\big(t^kL_n[[t]]\otimes M_{\rm dR}\big),\ \text{pour tout } n\gg 0\}.$$
C'est un (φ,Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$, de Rham, à poids de Hodge-Tate 0 et k. On a
$$t^k\Delta(M)\subset\Delta(M)_{k,\mathscr{L}}\subset\Delta(M)$$
$$\Delta(M)/\Delta(M)_{k,\mathscr{L}}\cong\Delta(M)_{k,\mathscr{L}}/t^k\Delta(M)\cong\mathscr{R}/t^k\mathscr{R}.$$

Tout (φ,Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$, de Rham et pas triangulin, est, à torsion près par une puissance du caractère cyclotomique, de la forme $\Delta(M)$ (si ses poids de

Hodge-Tate sont égaux) pour un unique choix de M ou $\Delta(M)_{k,\mathscr{L}}$ pour un unique choix de M, k et $\mathscr{L}$ (si ses poids de Hodge-Tate sont distincts).

Dans la suite de ce chapitre, on fixe un $(\varphi, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$*-module irréductible* M*, de rang* 2*, et on pose* $\Delta = \Delta(M)$ *et* $\Delta_{k,\mathscr{L}} = \Delta(M)_{k,\mathscr{L}}$*. On note* ω *le caractère* $\omega_\Delta = (x|x|)^{-1} \det \Delta$.

On va expliquer comment tordre l'action de G sur le G-module $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ de la prop. 0.1.

3.2. L'opérateur ∂ sur $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$. — Comme $\Delta = (\mathscr{R}(\mathbf{E}_K) \otimes M)^H$, et comme l'action de l'inertie de H est irréductible sur M, l'opérateur $\partial = \partial \otimes 1$ est bijectif sur Δ (cf. rem. 1.4). De plus, ∂ vérifie les relations

$$u^+\partial = a^+ \quad \text{et} \quad \partial u^+ = u^+\partial + 1\,, \tag{3.1}$$

car $u^+ = t$, $a^+ = t\frac{d}{dt}$ et $\partial = \frac{d}{dt}$ sur $\mathscr{R}$, et donc aussi sur $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)$ puisque l'extension $\mathscr{R}(\mathbf{E}_K)/\mathscr{R}$ est finie étale.

Lemme 3.2. — *On a* $u^- = -\partial u^+ \partial$ *et* $u^-\partial^{-1} = a^-$ *sur* Δ.

Démonstration. — Comme les deux poids de Hodge-Tate de Δ sont 0, il résulte de la prop. 2.2 (et de la rem. 2.3) que

$$u^+u^- = -(a^+)^2 = -u^+\partial u^+\partial.$$

L'injectivité de u^+ sur Δ (c'est la multiplication par t) permet donc de conclure pour la première formule.

Pour la seconde, on a

$$u^-\partial^{-1} = -\partial u^+ = -u^+\partial - 1 = -1 - a^+ = a^-$$

car $a^+ + a^- = \kappa(\omega_\Delta) = -1$.

Lemme 3.3. — (i) *Si* $z = (z_1, z_2) \in \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$*, alors* $\partial z = (\partial z_1, \partial^{-1} z_2) \in \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$.

(ii) *On a* $u^+ \cdot \partial = a^+$*,* $\partial \cdot u^+ = -a^-$.

Démonstration. — Pour démontrer le (i), il s'agit de vérifier que $w \circ \partial = \partial^{-1} \circ w$ ou encore que $w\partial w\partial = 1$ sur $M = \Delta \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. Remarquons que

$$wu^\pm w = u^\mp \quad \text{et} \quad wa^\pm w = a^\mp.$$

(Cela résulte de ce que, si $g \in G$ et $u \in \mathfrak{g}$, et si M est un G-module analytique, l'action de $g \circ u \circ g^{-1}$ sur M coïncide avec celle de $gug^{-1} \in \mathfrak{g}$.) On a

$$u^- w\partial w\partial u^+ = w(u^+\partial)w(-a^-) = -(a^-)^2.$$

Comme $u^+u^- = -(a^+)^2$, et donc $u^-u^+ = (wu^+w)(wu^-w) = -(a^-)^2$, il s'ensuit que $u^-w\partial w\partial u^+ = u^-u^+$. Maintenant, u^+ est injectif sur M (c'est la multiplication par t) et $u^- = wu^+w$ aussi. Par dualité (M est son propre dual pour $[\ ,\ ]_{\mathbf{P}^1}$), cela implique que les images de u^+ et u^- sont denses dans M ; on en déduit le résultat voulu.

Le (ii) résulte des calculs suivants qui utilisent le lemme 3.2 et les formules 3.1.

$$u^+\circ\partial(z_1,z_2)=u^+(\partial z_1,\partial^{-1}z_2)=(u^+\partial z_1,u^-\partial^{-1}z_2)=(a^+\cdot z_1,a^-z_2)=a^+\cdot(z_1,z_2)$$
$$\begin{aligned}\partial\cdot u^+(z_1,z_2)&=(\partial\cdot u^+\cdot z_1,\partial^{-1}\cdot u^-z_2)\\&=(-a^-\cdot z_1,-u^+\cdot\partial\cdot z_2)=(-a^-\cdot z_1,-a^+\cdot z_2)=-a^-\cdot(z_1,z_2)\end{aligned}$$

Lemme 3.4. — *Si $b\in\mathbf{Q}_p$, alors $\left(\begin{smallmatrix}1&-b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot\partial\cdot\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\partial+b$.*

Démonstration. — On utilise la formule $g\circ u\circ g^{-1}=gug^{-1}$ mentionnée dans la preuve du lemme 3.3, pour $g=\left(\begin{smallmatrix}1&-b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $u=a^-$ (on a donc $gug^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}0&-b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$). On obtient, en utilisant deux fois la formule $\partial\cdot u^+=-a^-$,

$$-g\cdot\partial\cdot u^+\cdot g^{-1}=a^--bu^+=-(\partial+b)\cdot u^+.$$

On conclut en utilisant le fait que u^+ et g^{-1} commutent, et la densité de l'image de u^+ sur $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ (par dualité, cette densité équivaut à l'injectivité de u^+ sur $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$, qui résulte de ce que Δ n'est pas triangulin [**7, 12**]).

Remarque 3.5. — Il résulte du lemme 3.4 et de la bijectivité de ∂ que $\alpha\partial+\beta$ est bijectif si $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}_p$ ne sont pas tous les deux nuls. Par ailleurs, $\alpha\partial+\beta$ et $\gamma\partial+\delta$ commutent ; il s'ensuit que l'on peut définir un automorphisme $g(\partial)$ de $\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$, si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in G$, en posant $g(\partial)=(c\partial+d)^{-1}\cdot(a\partial+b)$, et que l'on a aussi $g(\partial)=(a\partial+b)\cdot(c\partial+d)^{-1}$.

Proposition 3.6. — *Si $g\in G$, alors $g^{-1}\cdot\partial\cdot g=g(\partial)$.*

Démonstration. — On commence par vérifier formellement que, si $Q\in\mathbf{Q}_p(X)$ a un dénominateur qui se factorise dans $\mathbf{Q}_p$ (ce qui permet de définir $Q(\partial)$), et si $g^{-1}\cdot\partial\cdot g=g(\partial)$, alors $g^{-1}\cdot Q(\partial)\cdot g=Q(g(\partial))$. Cela permet de se contenter de vérifier la formule pour $g=w$, $g=\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $g=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, car ces matrices engendrent G et $h(g(\partial))=hg(\partial)$, si $h,g\in G$. Or

$$w\cdot\partial\cdot w(z_1,z_2)=w\cdot\partial(z_2,z_1)=w\cdot(\partial z_2,\partial^{-1}z_1)=(\partial^{-1}z_1,\partial z_2)=\partial^{-1}\cdot(z_1,z_2),$$

ce qui prouve la formule pour $g=w$. Celle pour $g=\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ a déjà été démontrée (lemme 3.4) ; celle pour $g=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ résulte du calcul suivant :

$$\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\partial\circ u^+=-\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ a^-=-a^-\circ\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=\partial\circ u^+\circ\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=a^{-1}\partial\circ\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ u^+.$$

Lemme 3.7. — (i) $u^-=-\partial u^+\partial$.

(ii) *Plus généralement, si $k\in\mathbf{N}$, $(u^-)^k=(-\partial)^k(u^+)^k\partial^k$.*

Démonstration. — On sait déjà que $u^-=-\partial u^+\partial$ sur $\Delta=\Delta\boxtimes\mathbf{Z}_p$; il suffit donc, pour démontrer le (i), de vérifier que c'est aussi le cas sur $w\cdot\Delta$. Cela résulte du calcul suivant, sur Δ :

$$u^-w=wu^+=w(-\partial^{-1}u^-\partial^{-1})=-(w\partial^{-1}w)u^+(w\partial^{-1}w)w,$$

et de ce que $w\partial^{-1}w=\partial$ d'après la prop. 3.6.

Comme $u^+\partial - \partial u^+ = a^+ + a^- = -1$, on déduit le (ii) du lemme suivant appliqué à $v = \partial$ et $u = u^+$.

Lemme 3.8. — *Soient A un anneau et $u, v \in A$ vérifiant $vu = uv+1$. Alors $(vuv)^k = v^k u^k v^k$, pour tout $k \geq 1$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur k, le cas $k = 1$ étant immédiat. Pour passer de $k-1$ à k, on commence par vérifier, par récurrence sur i, que $vu^i = u^i v + iu^{i-1}$ et $uv^i = v^i u - iv^{i-1}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}(vuv)^k &= vuv\, v^{k-1}u^{k-1}v^{k-1} = v(v^{k-1}u - (k-1)v^{k-2})(u^{k-1}v + (k-1)u^{k-2})v^{k-1} \\ &= v^k u^k v^k + (k-1)(-v^{k-1}u^{k-1}v^k + v^k u^{k-1}v^{k-1} - (k-1)v^{k-1}u^{k-2}v^{k-1})\end{aligned}$$

Le terme en facteur de $k-1$ est nul car

$$v^{k-1}u^{k-1}v^k = v^{k-1}(u^{k-1}v)v^{k-1} = v^{k-1}(vu^{k-1} - (k-1)u^{k-1})v^{k-1}.$$

On en déduit le résultat.

3.3. Le G-module $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$

3.3.1. Construction. — Soit $k \in \mathbf{Z}$.

Lemme 3.9. — *La formule*

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) *_k v = (-c\partial + a)^k \cdot \left[\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot v\right]$$

définit une action de G sur $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et $h = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$, alors $gh = \left(\begin{smallmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{smallmatrix}\right)$. Maintenant, $g *_k h *_k = (-c\partial + a)^k \cdot g \cdot (-c'\partial + a')^k \cdot h$, et la formule $g \cdot Q(\partial) \cdot g^{-1} = Q(g^{-1}(\partial))$ permet de réécrire $g *_k h *_k$ sous la forme $\big((-c\partial + a)(-c'g^{-1}(\partial) + a')\big)^k \cdot gh$. Or

$$(-c\partial + a)(-c'g^{-1}(\partial) + a') = (-c\partial + a)(-c'\frac{d\partial - b}{-c\partial + a} + a') = -(ca' + dc')\partial + (bc' + aa'),$$

ce qui permet de vérifier que $g *_k h *_k = (gh) *_k$ et termine la démonstration.

Remarque 3.10. — Comme $(a - c\partial)^k$ commute à Res_U, si U est un ouvert compact de $\mathbf{P}^1$ (cela résulte du lemme 1.5), $U \mapsto \Delta \boxtimes U$ définit un faisceau G-équivariant sur $\mathbf{P}^1$ pour l'action $*_k$.

On note $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$, le G-module $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ muni de l'action $*_k$. En particulier, $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[0] = \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Proposition 3.11. — (i) *Le caractère central de $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$ est $x^k\omega$.*

(ii) *Le G-module $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$ est de type analytique.*

(iii) *Le casimir agit par multiplication par $\frac{1}{2}(k^2 - 1)$.*

Démonstration. — Le (i) est évident sur les formules, compte-tenu du fait que le caractère central de $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ est ω.

Pour prouver le (ii), fixons $r < s$. Il existe alors n tel que l'action initiale de $K_n = 1 + p^n \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ soit analytique sur $\Delta^{[r,s]}$. Maintenant, $\partial : \Delta^{[r,s]} \to \Delta^{[r,s]}$ est continue, et comme $\Delta^{[r,s]}$ est un banach, il existe N tel que $p^N \partial$ soit contractante sur $\Delta^{[r,s]}$. Mais alors, si $n \geq N$, la fonction $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto (a - c\partial)^k$ est analytique sur K_n, vue comme fonction à valeurs dans les opérateurs sur $\Delta^{[r,s]}$: c'est trivial si $k \geq 0$ et, si $k \leq -1$, il suffit d'écrire $(a - c\partial)^k = a^k \sum_{i \in \mathbf{N}} \binom{k}{i} \left(\frac{-c\partial}{a}\right)^i$ (la série converge car $v_p(c) \geq n \geq N$). On en déduit que l'action $*_k$ de K_n sur $\Delta^{[r,s]}$ est analytique, et donc que Δ est de type analytique. Par conjugaison, il en est de même de $w *_k \Delta$, ce qui permet de conclure puisque $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k] = \Delta + w *_k \Delta$.

La formule pour le casimir est une application directe de la prop. 2.2 (et de la rem. 2.3).

Remarque 3.12. — Posons

$$\Delta \boxtimes_{x^k \omega} \mathbf{P}^1 = \big((\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[-k]\big) \otimes x^k.$$

Alors, en tant que P^+-faisceau, la restriction de $\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ est juste Δ (car les effets de la torsion par x^k annulent ceux de la multiplication par $(a - c\partial)^{-k}$ vu que $c = 0$ sur P^+). De plus :

- le caractère central est $(x^{-k}\omega) \cdot x^{2k} = x^k \omega$,
- le casimir agit par multiplication par $\frac{1}{2}(k^2 - 1)$ puisque c'est le cas sur $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[-k]$ et qu'il est invariant par torsion par un caractère vu qu'il ne dépend que de l'action de $\mathbf{SL}_2$.

On a donc construit l'objet annoncé dans le th. 0.6 de l'introduction.

3.3.2. Dualité

Proposition 3.13. — (i) $[\partial x, y] = [x, \partial y]$, *si* $x, y \in \Delta$.

(ii) $[\partial x, y]_{\mathbf{P}^1} = [x, \partial y]_{\mathbf{P}^1}$, *si* $x, y \in \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$.

(iii) *Si* $g \in G$ *et* $k \in \mathbf{Z}$, *alors* $[g *_k x, g *_{-k} y]_{\mathbf{P}^1} = [g \cdot x, g \cdot y]_{\mathbf{P}^1}$, *pour tous* $x, y \in \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — Si $x, y \in \Delta$, alors

$$\begin{aligned}[\partial x, y] - [x, \partial y] &= \mathrm{rés}_0\big((\partial x \wedge \sigma_{-1}(y) - x \wedge \sigma_{-1}(\partial y)) \otimes \omega^{-1}\big) \\ &= \mathrm{rés}_0\big(\partial(x \wedge \sigma_{-1}(y)) \otimes \omega^{-1}\big) = \mathrm{rés}_0(d(x \wedge \sigma_{-1}(y)) \otimes \omega^{-1}) = 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve le (i).

Le (ii) s'en déduit en écrivant $x = x_1 + w x_2$, $y = y_1 + w y_2$, avec $x_1, y_1 \in \Delta$ et $x_2, y_2 \in \Delta \boxtimes p\mathbf{Z}_p$. En utilisant la formule $\partial \circ w = w \circ \partial^{-1}$, on obtient

$$[\partial x, y]_{\mathbf{P}^1} - [x, \partial y]_{\mathbf{P}^1} = \big([\partial x_1, y_1] - [x_1, \partial y_1]\big) + \big([\partial^{-1} x_2, y_2] - [x_2, \partial^{-1} y_2]\big) = 0$$

d'après le (i).

Pour le (iii), on peut, par symétrie, supposer $k \geq 0$. Si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, on a

$$[g *_k x, g *_{-k} y]_{\mathbf{P}^1} = [(a - c\partial)^k \cdot g \cdot x, (a - c\partial)^{-k} \cdot g \cdot y]_{\mathbf{P}^1},$$

et le (ii) permet de faire passer les $a - c\partial$ du premier membre dans le second pour obtenir le résultat.

3.3.3. Sous-G-modules de $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$. — Soit $\mathscr{L}$ une L-droite de M_{dR}, et soit $\Delta_{k,\mathscr{L}}$ le sous-(φ, Γ)-module de Δ qui lui correspond.

Lemme 3.14. — *Les faisceaux* $t^k\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ *et* $\Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$*, pour toute droite* $\mathscr{L}$ *de* M_{dR}*, existent et sont des sous-faisceaux de* $\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — D'après la prop. 2.4, il suffit de vérifier que $\nabla(\nabla - k)M \subset tM$, si $M = t^k\Delta^+_{\mathrm{dif}}$ ou $(\Delta_{k,\mathscr{L}})^+_{\mathrm{dif}}$. Cela résulte de ce que :

$$t^k\Delta^+_{\mathrm{dif}} = t^kL_n[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}} \quad \text{et} \quad (\Delta_{k,\mathscr{L}})^+_{\mathrm{dif,n}} = (L_n[[t]] \otimes \mathscr{L}) + (t^kL_n[[t]] \otimes M_{\mathrm{dR}}),$$

et de ce que $\nabla = t\frac{d}{dt}$ sur $L_n[[t]]$ et est identiquement nulle sur M_{dR}.

Lemme 3.15. — (i) $(u^+)^k : \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ *induit un morphisme* G*-équivariant injectif de* $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$ *dans* $\big((\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[-k]\big) \otimes x^k$.

(ii) *L'image est* $t^k\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — (i) L'injectivité résulte du fait que Δ est non triangulin [**7, 12**]. Pour prouver la G-équivariance, il suffit de prouver que $(u^+)^k$ est équivariant pour l'action de P^+ sur Δ et pour celle de w sur $\Delta \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

Pour P^+, cela demande de vérifier que, si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in P^+$, alors

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) *_{-k} ((u^+)^k z \otimes x^k) = (u^+)^k\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) *_k z\big) \otimes x^k.$$

Or $(u^+)^k$ agit par multiplication par t^k sur tout et

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) *_{\pm k} z = a^{\pm k}\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot t^kz = a^kt^k\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot (z \otimes x^k) = a^k\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z.$$

Les deux membres sont égaux à $\big(a^kt^k\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot z\big) \otimes x^k$.

Pour w, il s'agit de vérifier que

$$w *_{-k} ((u^+)^k z \otimes x^k) = (u^+)^k(w *_k z) \otimes x^k.$$

Tordre par x^k multiplie l'action de w par $(-1)^k$, et on est ramené à vérifier que

$$(-1)^k\partial^{-k}w \cdot (u^+)^k = (u^+)^k\partial^kw$$

ou encore que $(-\partial)^{-k}(u^-)^k = (u^+)^k\partial^k$, ce qui résulte du (ii) du lemme 3.7.

Maintenant, l'image est un sous-faisceau G-équivariant de $\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$, dont les sections sur $\mathbf{Z}_p$ sont $(u^+)^k\Delta = t^k\Delta$. On en déduit le (ii), ce qui permet de conclure.

3.4. La représentation $\Pi[k]$

3.4.1. Construction. — Notons Π la représentation $\Pi(\Delta)$. On a donc une suite exacte

$$0 \to \Pi^* \otimes \omega \to \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1 \to \Pi \to 0.$$

Plus précisément, on dispose de l'accouplement parfait $(x, y) \mapsto [x, y] = [x, y]_{\mathbf{P}^1}$ sur $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$, tel que $[g \cdot x, g \cdot y] = \omega(g)[x, y]$ pour tous $g \in G$ et $x, y \in \Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$, et le sous-$G$-module $\Pi^* \otimes \omega$ est son propre orthogonal. De plus, il contient un sous-$\mathscr{O}_L$-module compact W, stable par G, tel que $W[\frac{1}{p}]$ soit dense dans $\Pi^* \otimes \omega$. En effet, Π est l'ensemble des vecteurs localement analytiques de son complété unitaire universel $\widehat{\Pi}$ (cf. **[9]** ; cela utilise la manière dont est obtenue Π via la correspondance de Langlands locale p-adique), et on peut prendre pour W la boule unité du dual de $\widehat{\Pi}$ (avec action de G tordue par ω).

Proposition 3.16. — *$g(\partial)$ est un automorphisme de $\Pi^* \otimes \omega$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que ∂ stabilise $\Pi^* \otimes \omega$. En effet, d'après la prop. 3.6, $\partial^{-1} = w \cdot \partial \cdot w$, et donc ∂^{-1} stabilise aussi $\Pi^* \otimes \omega$, ce qui fait que ∂ est un automorphisme de $\Pi^* \otimes \omega$; il en est donc de même de $g^{-1} \cdot \partial \cdot g = g(\partial)$, pour tout $g \in G$.

Maintenant, pour prouver que ∂ laisse stable $\Pi^* \otimes \omega$, il suffit de vérifier que, si $x \in \Pi^* \otimes \omega$, alors $[\partial x, y] = 0$ pour tout $y \in \Pi^* \otimes \omega$. Par linéarité et densité de $W[\frac{1}{p}]$, il suffit de le vérifier pour tout $y \in W$, et par continuité et linéarité, on peut se contenter de prouver le résultat pour $x \in W$.

L'image Y de $W \times W$ par $(x, y) \mapsto [\partial x, y]$ est compacte, car W l'est. Par ailleurs,

$$\big[\partial x, y\big] = \omega(p)^n \big[\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\partial x, \big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)y\big] = (p\omega(p))^n \big[\partial\big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)x, \big(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)y\big].$$

Comme $\omega(p) \in \mathscr{O}_L^*$, il s'ensuit que $[\partial x, y] \in p^n Y$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc $[\partial x, y] = 0$, ce que l'on voulait.

Corollaire 3.17. — *Le sous-module $\Pi^* \otimes \omega$ de $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable pour l'action $*_k$ de G.*

Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\Pi[k]$ le quotient de $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$ par $\Pi^* \otimes \omega$. Il résulte de ce qui précède que $\Pi[k]$ est une représentation de G, de type analytique. Par ailleurs, topologiquement, c'est un espace de type compact, puisque l'on a $\Pi[k] = \Pi$ en tant qu'espace vectoriel topologique (par contre l'action de G n'est pas la même sur les deux espaces, même à torsion près par un caractère).

Remarque 3.18. — On peut décrire $\Pi[k]$ directement à partir de Π :

(i) Il existe un unique isomorphisme continu $\partial : \Pi \to \Pi$, tel que $a^- = -\partial u^+$.

(ii) Si $k \geq 0$, la formule $\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big) \cdot_k v = (-c\partial + a)^k \big(\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big) \cdot v\big)$ munit Π d'une action de G.

L'unicité de ∂ est claire car u^+ est d'image dense dans Π. L'existence et le (ii) peuvent se démontrer en passant par $\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1$ (comme ci-dessus), mais on peut aussi l'établir directement [**13**].

Lemme 3.19. — *$\Pi^* \otimes \omega$, vu comme sous-G-module de $(\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k]$, est isomorphe à $\Pi[-k]^* \otimes \omega$; on a donc une suite exacte de G-modules*

$$0 \to \Pi[-k]^* \otimes \omega \to (\Delta \boxtimes \mathbf{P}^1)[k] \to \Pi[k] \to 0.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la prop. 3.13.

Remarque 3.20. — Posons

$$\Pi(M,k) = \Pi[k].$$

Si on tord par x^k la suite exacte du lemme 3.19 (pour $-k$ au lieu de k), on obtient la suite exacte

$$0 \to \Pi(M,k)^* \otimes x^k\omega \to \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \to \Pi(M,-k) \otimes x^k \to 0$$

du (ii) du th. 0.6.

3.4.2. Lien entre $\Pi[k]$ et $\Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})$. — On suppose dorénavant $k \geq 1$. On note $\Pi_{k,\mathscr{L}}$ la représentation $\Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})$, si $\mathscr{L}$ est une droite de M_{dR}.

Lemme 3.21. — *Les injections naturelles*

$$t^k \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \quad \text{et} \quad \Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \subset \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$$

envoient $\Pi[-k]^* \otimes \omega$ dans $\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$ et $\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$ dans $\Pi[k]^* \otimes x^k\omega$.

Démonstration. — Soit W le noyau de

$$\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega \to \Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \to \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \to \Pi[-k].$$

Alors W est un sous-G-module fermé de $\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$ puisque toutes les applications ci-dessus sont G-équivariantes continues.

Soit $X = (\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega)/W$. On cherche à prouver que $X = 0$. Par construction, X est un fréchet muni d'une action continue de G, et on a une suite exacte

$$0 \to W \to \Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega \to X \to 0$$

de G-fréchets. Par dualité, cela nous fournit une suite exacte

$$0 \to X^* \otimes x^{-k}\omega^{-1} \to \Pi_{k,\mathscr{L}} \to W^* \otimes x^{-k}\omega^{-1} \to 0$$

de G-espaces vectoriels topologiques de type compact.

Maintenant, X est isomorphe à l'image de l'application $f : \Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega \to \Pi[-k]$ considérée ci-dessus. Comme X est un fréchet et $\Pi[-k]$ est de type compact, son image est incluse dans un des termes de la limite, ce qui se traduit par l'existence de $n \in \mathbf{N}$ tel que tout $v \in f(X)$ soit K_n-analytique.

Par dualité, cela implique que X^* est formé de vecteurs K_n-analytiques, et donc, si $\Pi_{k,\mathscr{L}}$ est la limite compacte des $\Pi_{k,\mathscr{L}}^{(a)}$, que X^* est inclus dans un $\Pi_{k,\mathscr{L}}^{(a)}$ pour un certain a. Comme, par ailleurs, X^* est fermé dans $\Pi_{k,\mathscr{L}}$ qui est de type compact, l'injection $(X^*)^{(a)} \to (X^*)^{(a+1)}$ est compacte. Comme c'est l'identité puisque $X^* = (X^*)^{(b)}$ pour tout $b \geq a$, cela implique que X^* est de dimension finie (je dois cet argument à G. Dospinescu.) Comme $\Pi_{k,\mathscr{L}}$ ne contient pas de sous-G-représentation de dimension finie (une telle représentation serait incluse dans le noyau de $(u^+)^N$ pour un certain N, et donc aurait un modèle de Kirillov, ce qui est en contradiction (prop. 2.9) avec le fait qu'elle soit de dimension finie), on a $X^* = 0$ et donc $X = 0$.

Maintenant, $\Pi[-k]^* \otimes \omega$ est orthogonal à $\Pi[k]^* \otimes x^k\omega$ dans $\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$, et donc a fortiori à $\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$ dans $\Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$. On en déduit l'inclusion $\Pi[k]^* \otimes x^k\omega \subset \Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$, ce qui termine la preuve du lemme.

Lemme 3.22. — $\Pi[-k]^* \otimes \omega$ *est fermé dans* $\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$ *et* $\Pi[k]^* \otimes x^k\omega$, *et* $\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$ *est fermé dans* $\Pi[k]^* \otimes x^k\omega$.

Démonstration. — Si a est assez grand, $\Pi[-k]^* \otimes \omega$ est fermé dans $t^k\Delta^{]0,r_a]} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$, qui est lui-même fermé dans $\Delta_{k,\mathscr{L}}^{]0,r_a]} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ car $t^k\Delta^{]0,r_a]}$ est fermé dans $\Delta_{k,\mathscr{L}}^{]0,r_a]}$. Comme tous les espaces sont des fréchets, l'injection de $t^k\Delta^{]0,r_a]} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ dans $\Delta_{k,\mathscr{L}}^{]0,r_a]} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ est un homéomorphisme sur son image, et donc $\Pi[-k]^* \otimes \omega$ est fermé dans $\Delta_{k,\mathscr{L}}^{]0,r_a]} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ et donc aussi dans $\Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega$.

Les autres assertions se démontrent de la même manière.

Proposition 3.23. — *Les injections* $t^k\Delta \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \subset \Delta$ *induisent le diagramme commutatif suivant de* G*-représentations :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Pi[-k]^* \otimes \omega \arrow[r] \arrow[d] & t^k\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \Pi[k] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega \arrow[r] \arrow[d] & \Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_{k,\mathscr{L}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Pi[k]^* \otimes x^k\omega \arrow[r] & \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \arrow[r] & \Pi[-k] \otimes x^k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dans lequel les lignes sont exactes, et les applications $\Pi[k] \to \Pi_{k,\mathscr{L}} \to \Pi[-k] \otimes x^k$ *sont surjectives et transposées des applications* $\Pi[-k]^* \otimes \omega \to \Pi_{k,\mathscr{L}}^* \otimes x^k\omega \to \Pi[k]^* \otimes x^k\omega$ *à torsion près par* $x^k\omega$.

Démonstration. — C'est une conséquence des lemmes 3.19, 3.21 et 3.22 (et de la prop. 3.13).

3.4.3. Dévissage de la représentation $\Pi[k]$. — Soit $k \geq 1$.

Lemme 3.24. — $(u^+)^k : \Pi \to \Pi$ *induit la suite exacte suivante de* G*-modules*

$$0 \to \Pi[k]^{(u^+)^k = 0} \to \Pi[k] \to \Pi[-k] \otimes x^k \to 0.$$

Démonstration. — D'après la prop. 3.15, l'injection de $t^k\Delta\boxtimes_{x^k\omega}\mathbf{P}^1$ dans $\Delta\boxtimes_{x^k\omega}\mathbf{P}^1$ induit $(u^+)^k$ sur $\Pi[k]$. L'exactitude de la suite est triviale à part la surjectivité de $\Pi[k]\to\Pi[-k]\otimes x^k$, mais celle-ci a déjà été prouvée (prop. 3.23).

Proposition 3.25. — $\Pi[-k]$ *est irréductible.*

Démonstration. — Il s'agit de prouver que, si $Y\neq 0$ est un sous-G-module fermé de $\Pi(M,-k)^*$, alors $Y=\Pi(M,-k)^*$. La preuve est très semblable à celle du th. 2.16.

Quitte à tordre par un caractère, on peut supposer Δ étale. Soit D un élément de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ tel que $\Delta=D_{\mathrm{rig}}$ (D n'est déterminé par Δ qu'à isogénie près.)

La torsion par $(a-c\partial)^k$ préserve la suite exacte $0\to\Pi^*\to\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1\to\Pi\to 0$, et induit la suite exacte $0\to\Pi(M,-k)^*\to(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)[k]\to\Pi(M,k)\to 0$ de G-représentations, qui définit les représentations $\Pi(M,k)$. De plus, en tant que B-modules, on a $\Pi(M,-k)^*\cong\Pi^*$ et $(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)[k]\cong\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ à torsion près par un caractère. Il résulte donc de l'étude du cas de Δ que l'image de Y par $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}:Y\to\Delta$ contient deux éléments indépendants sur $\mathscr{R}$ (la preuve de ce fait n'utilise que l'action de B).

Par ailleurs, $\Delta^+_{\mathrm{dif}}[k]$ n'admet pas de sous-réseau $\mathfrak{g}$-stable strict car $k\geq 1$ (si $k\leq -1$, il y a un sous-réseau $\mathfrak{g}$-stable strict et, effectivement, dans ce cas, $\Pi(M,-k)$ n'est pas irréductible car $\Pi(M,-k)^{\mathrm{alg}}\neq 0$). On est donc dans les conditions d'application du lemme 2.19 ; on en déduit que cette image contient une base de $D^\dagger$ sur $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{E}}$.

On conclut en utilisant le lemme 2.23 et les isomorphismes (à torsion près par un caractère) de B-modules $\Pi(M,-k)^*\cong\Pi^*$ et $(\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1)[k]\cong\Delta\boxtimes\mathbf{P}^1$ signalés plus haut.

3.5. La représentation $\mathrm{LL}_p(M)$

3.5.1. Le G-module $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{Sym}^{k-1},\Pi[k])$. — On note W_k la représentation algébrique de G sur les polynômes de degré $\leq k$, l'action de G étant définie par

$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\cdot P(x)=(-cx+a)^kP\Big(\frac{dx-b}{-cx+a}\Big).$$

Alors W_k est isomorphe à la représentation Sym^k.

Lemme 3.26. — *L'action de $\mathfrak{g}$ dans la base $1,X,\cdots,X^k$ de W_k est donnée par les formules :*

- $u^+\cdot X^i=-iX^{i-1}$,
- $u^-\cdot X^i=-(k-i)X^{i+1}$,
- $a^+\cdot X^i=(k-i)X^i$,
- $a^-\cdot X^i=iX^i$.

En particulier, $a^++a^-=k$.

Démonstration. — Cela résulte d'un calcul immédiat à partir de la formule

$$\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\cdot X^i=(dX-b)^i(-cX+a)^{k-i}.$$

Lemme 3.27. — *L'action de* $\mathfrak{g}$ *sur* $\Pi[k]$ (identifié à Π) *est donnée par les formules :*

- $u^+ *_k v = u^+ \cdot v$,
- $u^- *_k v = u^- \cdot v - k\partial v$,
- $a^+ *_k v = a^+ \cdot v + kv$,
- $a^- *_k v = a^- \cdot v$.

Démonstration. — Cela résulte d'un calcul immédiat à partir de la formule

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) *_k v = (-c\partial + a)^k \cdot \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot v.$$

Si Π_1, Π_2 sont deux G-modules analytiques, on note $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Pi_1, \Pi_2)$ l'espace des applications L-linéaires $\phi : \Pi_1 \to \Pi_2$ qui commutent à l'action de $\mathfrak{g}$. C'est naturellement une représentation de G : si $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Pi_1, \Pi_2)$, un petit calcul montre que $g \cdot \phi$, défini par $(g \cdot \phi)(v) = g \cdot \phi(g^{-1} \cdot v)$, est encore un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\Pi_1, \Pi_2)$.

Proposition 3.28. — (i) *L'application qui à* v *associe l'application linéaire* ϕ_v *envoyant* P *sur* $P(\partial) \cdot v$*, induit un isomorphisme de* $\Pi^{u^+=0}$ *sur* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W_{k-1}, \Pi[k])$.

(ii) *L'action de* G *sur* $\Pi^{u^+=0}$ *déduite de l'isomorphisme précédent est localement constante et ne dépend pas du choix de* $k \geq 1$.

(iii) *L'application naturelle* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W_{k-1}, \Pi[k]) \otimes W_{k-1} \to \Pi[k]^{\mathrm{alg}}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Le (i) résulte de la formule $u^+ \cdot \partial^i = \partial^i \cdot u^+ - i\partial^{i-1}$, valable pour tout $i \in \mathbf{N}$. On en déduit, si $u^+ \cdot v = 0$, les formules :

- $u^+ *_k \partial^i v = -i\partial^{i-1} v$,
- $u^- *_k \partial^i v = -\partial u^+ \partial \cdot \partial^i v - k\partial \cdot \partial^i v = -(k-1-i)\partial^{i+1} v$,
- $a^+ *_k \partial^i v = u^+ \partial \cdot \partial^i v + k\partial^i v = (k-i)\partial^i v$,
- $a^- *_k \partial^i v = -\partial u^+ \cdot \partial^i v = i\partial^i v$.

Il en résulte que ϕ_v commute à l'action de $\mathfrak{g}$. La surjectivité de $v \mapsto \phi_v$ résulte de ce que $u^+ \cdot 1 = 0$, et donc, si $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W_{k-1}, \Pi[k])$, on a $u^+ \cdot \phi(1) = 0$; on en déduit que $\phi = \phi_v$, où $v = \phi(1)$. Son injectivité résulte de ce que $\phi_v(1) = v$.

Maintenant, si $k = 1$, l'action de $\mathfrak{g}$ est identiquement nulle sur W_{k-1}, et donc ϕ_v est à valeurs dans les vecteurs localement constants sous l'action de G. Il suffit donc de prouver que l'action de G sur $\Pi^{u^+=0}$ ne dépend pas de k ; cela résulte du calcul suivant, où $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et donc $g^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$:

$$(g *_k \phi_v)(P) = g *_k ((g^{-1} *_{k-1} P)(\partial) \cdot v) = (-c\partial + a)^k \cdot g \cdot \big(\frac{c\partial + d}{ad - bc}\big)^{k-1} P\big(\frac{a\partial + b}{c\partial + d}\big) \cdot v.$$

On utilise la formule $g \cdot F(g(\partial)) = F(\partial) \cdot g$, ce qui nous donne

$$g \cdot \big(\frac{c\partial + d}{ad - bc}\big)^{k-1} = \frac{1}{(-c\partial + a)^{k-1}} \cdot g \ \text{ et } \ g \cdot P\big(\frac{a\partial + b}{c\partial + d}\big) = P(\partial) \cdot g,$$

et (en utilisant la commutativité de $P(\partial)$ et $-c\partial + a$),

$$(g *_k \phi_v)(P) = P(\partial) \cdot (-c\partial + a) \cdot g \cdot v,$$

ce qui ne dépend effectivement pas de k.

Le (iii) est un résultat général : une représentation localement algébrique π se décompose sous la forme $\oplus_W \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W,\pi)\otimes W$, la somme portant sur les représentations algébriques irréductibles de G. Or une telle représentation est déterminée par son caractère infinitésimal.

Proposition 3.29. — $(u^+)^k : \Pi \to \Pi$ *induit la suite exacte suivante de G-modules*

$$0 \to \Pi[k]^{\mathrm{alg}} \to \Pi[k] \to \Pi[-k]\otimes x^k \to 0.$$

Démonstration. — C'est, compte-tenu de la prop. 3.28, une traduction de la prop. 3.24.

3.5.2. Admissibilité de $\Pi[k]$. — Notons $\Pi[k]^{u^+-\mathrm{fini}}$ l'ensemble de $v\in\Pi[k]$ tués par une puissance de u^+. Comme u^+ agit de la même manière sur Π pour les actions $\cdot$ et $*_k$, on a $\Pi[k]^{u^+-\mathrm{fini}} = \Pi^{u^+-\mathrm{fini}}$. De plus, comme Π et $\Pi[k]$ sont isomorphes, à torsion près par un caractère, en tant que B-représentations, l'application $v\mapsto \mathscr{K}_v$ de la prop. 2.10 fournit un modèle de Kirillov pour $\Pi[k]^{u^+-\mathrm{fini}}$ et donc aussi pour $\Pi[k]^{\mathrm{alg}} = \Pi[k]^{(u^+)^k=0}$.

Proposition 3.30. — $\Pi[k]$ *et* $\Pi[-k]$ *sont admissibles.*

Démonstration. — Comme $\Pi^*_{k,\mathscr{L}}\otimes x^k\omega$ est coadmissible et comme $\Pi[-k]^*\otimes\omega$ est fermé dans $\Pi^*_{k,\mathscr{L}}\otimes x^k\omega$ (lemme 3.22), cela implique que $\Pi[-k]^*\otimes\omega$ est coadmissible, et donc que $\Pi[-k]$ est admissible.

D'après la prop. 3.24, on a une suite exacte

$$0\to \Pi[k]^{(u^+)^k=0}\to\Pi[k]\to\Pi[-k]\otimes x^k\to 0.$$

Or $\Pi[-k]$ est admissible d'après ce qui précède et $\Pi[k]^{(u^+)^k=0}$ aussi puisque c'est une représentation localement algébrique admettant un modèle de Kirillov. Il en est donc de même de $\Pi[k]$.

Ceci permet de conclure.

3.5.3. Le G-module $\Pi[k]^{\mathrm{alg}}$

Théorème 3.31. — *Il existe une représentation lisse* $\mathrm{LL}_p(M)$, *de caractère central* $x\omega$, *possédant un modèle de Kirillov, telle que :*

- $\Pi[k]^{\mathrm{alg}} = M_{\mathrm{dR}}\otimes\big(\mathrm{LL}_p(M)\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}\big)$.
- $\Pi_{k,\mathscr{L}} = \Pi[k]/\big(\mathscr{L}\otimes\big(\mathrm{LL}_p(M)\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}\big)\big)$
- $\Pi^{\mathrm{alg}}_{k,\mathscr{L}} = (M_{\mathrm{dR}}/\mathscr{L})\otimes\big(\mathrm{LL}_p(M)\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}\big)$
- *la suite* $0\to\Pi^{\mathrm{alg}}_{k,\mathscr{L}}\to\Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})\to\Pi[-k]\otimes x^k\to 0$ *est excte.*

Démonstration. — Notons que

$$(t^k\Delta)^-_{\mathrm{dif}} = \Delta_{\mathrm{dif}}/t^k\Delta^+_{\mathrm{dif}} \quad\text{et}\quad (\Delta_{k,\mathscr{L}})^-_{\mathrm{dif}} = \Delta_{\mathrm{dif}}/(\Delta_{k,\mathscr{L}})^+_{\mathrm{dif}}.$$

Comme $(\Delta_{k,\mathscr{L}})^+_{\rm dif} = t^k\Delta^+_{\rm dif} + L_\infty[t]\otimes\mathscr{L}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\big((t^k\Delta)^-_{\rm dif}\to\Delta^-_{\rm dif}\big) &= \Delta^+_{\rm dif}/t^k\Delta^+_{\rm dif} = (L_\infty[t]/t^k)\otimes M_{\rm dR}\,,\\ \mathrm{Ker}\big((t^k\Delta)^-_{\rm dif}\to(\Delta_{k,\mathscr{L}})^-_{\rm dif}\big) &= (\Delta_{k,\mathscr{L}})^+_{\rm dif}/t^k\Delta^+_{\rm dif} = (L_\infty[t]/t^k)\otimes\mathscr{L}\,.\end{aligned}$$

Soit $W_{\mathscr{L}} = \mathrm{Ker}(\Pi[k]\to\Pi_{k,\mathscr{L}})$; c'est une représentation localement algébrique de G puisqu'elle est contenue dans $\mathrm{Ker}(\Pi[k]\to\Pi[-k]\otimes x^k) = \Pi[k]^{\rm alg}$. En particulier, $W_{\mathscr{L}}\subset\Pi[k]^{u^+-{\rm fini}}$, et la théorie du modèle de Kirillov nous fournit un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont injectives et les lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
W_{\mathscr{L}} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi[k]^{u^+-{\rm fini}} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi_{k,\mathscr{L}}^{u^+-{\rm fini}} \arrow[d] \\
\mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*, (L_\infty[t]/t^k)\otimes\mathscr{L})^\Gamma \arrow[r] & \mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*, (t^k\Delta)^-_{\rm dif})^\Gamma \arrow[r] & \mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*, (\Delta_{k,\mathscr{L}})^-_{\rm dif})^\Gamma
\end{tikzcd}$$

De même, on a le diagramme commutatif avec les mêmes propriétés :

$$\begin{tikzcd}
\Pi[k]^{\rm alg} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi[k]^{u^+-{\rm fini}} \arrow[r] \arrow[d] & \Pi[-k]^{u^+-{\rm fini}} \arrow[d] \\
\mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*, (L_\infty[t]/t^k)\otimes M_{\rm dR})^\Gamma \arrow[r] & \mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*, (t^k\Delta)^-_{\rm dif})^\Gamma \arrow[r] & \mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*, \Delta^-_{\rm dif})^\Gamma
\end{tikzcd}$$

Maintenant, si $\mathscr{L}_1,\mathscr{L}_2$ sont deux droites distinctes de $M_{\rm dR}$, on a $M_{\rm dR} = \mathscr{L}_1\oplus\mathscr{L}_2$. On en déduit que $\Pi[k]^{\rm alg} = W_{\mathscr{L}_1}\oplus W_{\mathscr{L}_2}$. De plus, si $\mathscr{L}_3$ est distinct de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$, décomposer un élément ℓ_3 de $\mathscr{L}_3$ sous la forme $\ell_1+\ell_2$, avec $\ell_1\in\mathscr{L}_1$ et $\ell_2\in\mathscr{L}_2$ fournit des isomorphismes G-équivariants $W_{\mathscr{L}_3}\cong W_{\mathscr{L}_1}$ et $W_{\mathscr{L}_3}\cong W_{\mathscr{L}_2}$. Il existe donc une représentation $\mathrm{LL}_p(M,k)$, munie d'une injection B-équivariante dans $\mathrm{LA}_{\rm rc}(\mathbf{Q}_p^*, (L_\infty[t]/t^k))$, telle que l'on ait $W_{\mathscr{L}} = \mathscr{L}\otimes\mathrm{LL}_p(M,k)$, pour tout $\mathscr{L}$. On a alors $\Pi[k]^{\rm alg} = M_{\rm dR}\otimes\mathrm{LL}_p(M,k)$. On définit $\mathrm{LL}_p(M)$ comme étant $\mathrm{LL}_p(M,1)$, et on a $\mathrm{LL}_p(M,k) = \mathrm{LL}_p(M,1)\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}$, pour tout $k\geq 1$, d'après le (iii) de la prop. 3.28. Comme

$$\Pi_{k,\mathscr{L}} = \Pi[k]/W_{\mathscr{L}},\quad \Pi^{\rm alg}_{k,\mathscr{L}} = \Pi[k]^{\rm alg}/W_{\mathscr{L}}\quad\text{et}\quad W_{\mathscr{L}} = \mathscr{L}\otimes\mathrm{LL}_p(M)\otimes\mathrm{Sym}^{k-1}\,,$$

il en résulte que $\mathrm{LL}_p(M)$ satisfait toutes les propriétés demandées pour le th. 3.31.

Remarque 3.32. — La représentation $\mathrm{LL}_p(M)$ est supercuspidale. On en déduit que, pour tout k, le modèle de Kirillov de $\Pi[k]^{(u^+)^k=0}$ est constitué de fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_p^*$. Comme $\Pi[k]\cong\Pi$ en tant que B-module, à torsion près par un caractère, on en déduit que l'injection $\mathrm{LA}_{\rm c}(\mathbf{Q}_p^*,\Delta^-_{\rm dif})^\Gamma\to\Pi^{u^+-{\rm fini}}$ de la prop. 2.13 est un isomorphisme. Il en est de même si on remplace Δ par $\Delta_{k,\mathscr{L}}$.

Remerciements. Je remercie Gabriel Dospinescu pour de fort utiles remarques. Recherche très partiellement financée par le projet PERCOLATOR de l'ANR (ANR-14-CE25-0002-01).

Références

[1] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque **319** (2008), 13–38.

[2] L. Berger, Construction de (φ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires, Algebra and Number Theory **2** (2008), 91–120.

[3] C. Breuil et M. Strauch, notes informelles, 2008.

[4] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique, Astérisque **330** (2010), 13–59.

[5] P. Colmez, (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 61–153.

[6] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[7] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, *Automorphic Forms and Galois Representations Vol.1*, London Math. Soc. Lect. Note Series **415** (2014), 286–358.

[8] P. Colmez, Représentations localement analytiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Representation Theory **20** (2016), 187–248.

[9] P. Colmez et G. Dospinescu, Complétions unitaires de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[10] P. Colmez, G. Dospinescu et V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge Math. J. **2** (2014), 1–47.

[11] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[12] G. Dospinescu, Équations différentielles p-adiques et modules de Jacquet analytiques, *Automorphic Forms and Galois Representations Vol.1*, London Math. Soc. Lect. Note Series **415** (2014), 359–374.

[13] G. Dospinescu et A.-C. Le Bras, Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands locale p-adique, Ann. of Math. **186** (2017), 321–411.

[14] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, preprint 2009 !

[15] J.-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque **295** (2004), 1–115.

[16] H. Jacquet et R. Langlands, Automorphic forms on $\mathbf{GL}(2)$, Lect. Notes in Math. **114**, Springer 1970.

[17] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[18] K. Kedlaya et R. Liu, Relative p-adic Hodge theory II : Imperfect period rings, arXiv :1602.06899.

[19] M. Kisin, The Fontaine-Mazur conjecture for $\mathbf{GL}_2$, J. A.M.S. **22** (2009), 641–690.

[20] R. Liu, B. Xie, Y. Zhang, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Ann. E.N.S. **45** (2012), 167–190.

[21] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor, Publ. IHES **118** (2013), 1–191.

[22] P. Scholze, Perfectoid spaces, Publ. IHES **116** (2012), 245–313.

[23] P. Schneider et J. Teitelbaum, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to $\mathbf{GL}_2$, J. A.M.S. **15** (2002), 443–468.

[24] P. Schneider et J. Teitelbaum, (with an appendix by D. Prasad), $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, Representation Theory **5** (2001), 111–128.

[25] P. Schneider et J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. math. **153** (2003), 145–196.

[26] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[27] J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. E.N.S. **16** (1983), 59–89.

Pierre Colmez, C.N.R.S., IMJ-PRG, Sorbonne Université, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : pierre.colmez@imj-prg.fr