

Pierre COLMEZ

ÉLÉMENTS D'ANALYSE ET
D'ALGÈBRE

Pierre COLMEZ

C.M.L.S., École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.

ÉLÉMENTS D'ANALYSE ET D'ALGÈBRE

Pierre COLMEZ

TABLE DES MATIÈRES

Prélude	ix
Notations standard	xx
I. Représentations des groupes finis	1
I.1. Représentations et caractères	1
1. Représentations de groupes, exemples	1
2. Caractère d'une représentation, exemples	3
2.1. Caractères linéaires	4
2.2. Sommes directes	4
2.3. Représentations de permutation, représentation régulière	5
3. Morphismes de représentations	5
3.1. La représentation $\text{Hom}(V_1, V_2)$	5
3.2. Opérateurs d'entrelacement, représentations isomorphes	6
I.2. Décomposition des représentations	7
1. Décomposition en somme directe de représentations irréductibles	7
2. Le lemme de Schur et ses conséquences immédiates	10
3. Orthogonalité des caractères	11
4. Applications du théorème principal	12
4.1. Nombre des représentations irréductibles	12
4.2. La décomposition canonique d'une représentation	13
4.3. Un critère d'irréductibilité	14
4.4. La décomposition de la représentation régulière	14
5. Le cas des groupes commutatifs	14
6. Table des caractères d'un groupe fini	15
I.3. Construction de représentations	20
1. Constructions tensorielles de représentations	20
1.1. Produit tensoriel d'espaces vectoriels de dimension finie	20
1.2. Produit tensoriel de représentations	21
1.3. Carré symétrique et carré extérieur d'une représentation	22
2. Représentations induites	23
2.1. Caractère d'une représentation induite	23
2.2. La formule de réciprocity de Frobenius	24

II. Espaces de Banach	27
II.1. Espaces de Banach	27
1. Convergence normale, séries sommables	27
2. Espaces de suites	28
3. Espaces de fonctions continues	29
II.2. Espaces de Hilbert	30
1. Espaces de Hilbert	30
1.1. Bases hilbertiennes	30
1.2. Projection orthogonale sur un sous-espace fermé	31
III. Intégration	33
III.1. Intégrale de Lebesgue	33
1. Dallages et fonctions en escalier	33
2. Ensembles de mesure nulle	35
3. Fonctions mesurables, ensembles mesurables	36
3.1. Fonctions mesurables	36
3.2. La tribu des ensembles mesurables	37
3.3. Fonctions mesurables et ensembles mesurables	39
4. Définition de l'intégrale de Lebesgue	39
4.1. Intégration des fonctions positives	40
4.2. Mesure de Lebesgue d'un ensemble	40
4.3. Intégration des fonctions sommables	41
5. Les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée	42
6. Premières applications	43
III.2. Quelques espaces fonctionnels	44
1. L'espace $L^1(X)$	44
2. L'espace $L^2(X)$	45
3. Convergence dans L^1 et L^2	46
III.3. Intégrales multiples	48
1. Le théorème de Fubini	48
2. La formule du changement de variable	50
3. L'intégrale de la gaussienne	52
IV. Transformée de Fourier	53
IV.1. Intégrales dépendant d'un paramètre	53
IV.2. Transformée de Fourier dans L^1	55
1. Caractères linéaires de \mathbf{R} et \mathbf{R}^m	55
2. Définition et premières propriétés	56
3. Le théorème de Riemann-Lebesgue	56
4. Transformée de Fourier et dérivation	57
IV.3. Formules d'inversion	59
1. Séries de Fourier	59
2. Séries de Fourier multidimensionnelles	62
3. La formule de Poisson	64
4. La formule d'inversion de Fourier dans \mathcal{S}	65
5. Formules d'inversion dans L^1	66

V. Fonctions holomorphes	67
V.1. Fonctions holomorphes et fonctions analytiques complexes	67
1. Séries entières	67
2. Rayon de convergence d'une série entière	69
3. Premières propriétés des fonctions holomorphes	70
3.1. Définition	70
3.2. Théorème des zéros isolés et unicité du prolongement analytique	71
3.3. Principe du maximum	72
V.2. La formule intégrale de Cauchy et ses conséquences	73
1. Généralités sur les chemins	73
2. Intégration le long d'un chemin	74
3. Holomorphie des fonctions dérivables au sens complexe	75
4. Construction de fonctions holomorphes	78
4.1. Séries de fonctions holomorphes	78
4.2. Produits infinis de fonctions holomorphes	79
4.3. Fonctions holomorphes définies par une intégrale	80
V.3. Structure locale des fonctions holomorphes	81
1. Le théorème d'inversion locale holomorphe	81
2. Logarithme et fonctions puissances	83
VI. La formule de Cauchy et celle des résidus (de Cauchy)	85
VI.1. Homotopie de lacets et formule de Cauchy	85
1. Vocabulaire de topologie algébrique	85
2. Un cas particulier de la formule de Stokes	86
3. Seconde démonstration de la formule de Cauchy	89
VI.2. Indice d'un lacet par rapport à un point	91
1. Primitives	91
2. Nombre de tours d'un lacet autour d'un point	92
2.1. Définition	92
2.2. Détermination visuelle de l'indice d'un lacet par rapport à un point	93
VI.3. La formule des résidus de Cauchy	95
1. Fonctions holomorphes sur une couronne	95
2. Fonctions holomorphes sur un disque épointé; résidus	98
3. La formule des résidus	100
VII. Séries de Dirichlet	101
VII.1. Séries de Dirichlet	101
1. Abscisse de convergence absolue	101
VII.2. Séries de Dirichlet et transformée de Mellin	103
1. La fonction Γ dans le plan complexe	103
2. Une formule intégrale pour les séries de Dirichlet	104
3. Prolongement analytique de séries de Dirichlet	105
VII.3. La fonction zêta de Riemann	106
1. Séries de Dirichlet attachées à des fonctions multiplicatives	106
2. Prolongement analytique de la fonction ζ	107
3. Équation fonctionnelle de la fonction zêta	109
4. Les zéros de la fonction ζ	110

VII.4. Fonctions L de Dirichlet	110
1. Caractères de Dirichlet et Fonctions L de Dirichlet	110
2. Le théorème de la progression arithmétique	111
A. Le théorème des nombres premiers	115
A.1. Introduction	115
A.2. Les fonctions ψ et ψ_1	118
1. Théorème des nombres premiers et comportement de ψ_1 en $+\infty$	118
2. Une formule intégrale pour ψ_1	119
A.3. Formules explicites	120
1. Énoncé du résultat	121
2. La formule de Stirling	122
3. Les fonctions L et $\frac{L'}{L}$ en dehors de la bande critique	124
4. La fonction L dans la bande critique	126
5. La fonction $\frac{L'}{L}$ dans la bande critique	127
6. Conclusion	128
A.4. Démonstration du théorème des nombres premiers	130
1. Non annulation sur la droite $\text{Re}(s) = 1$	130
2. Conclusion	132
B. Exercices	133
B.1. Représentations des groupes finis	133
1. Actions de groupes	133
2. Classes de conjugaison	133
3. Représentations irréductibles	134
4. Tables de caractères	134
5. Exercices plus théoriques	135
B.2. Analyse réelle	137
1. Intégration	137
2. Fonctions définies par des intégrales	138
3. Transformée de Fourier	139
4. Espaces de Hilbert	139
B.3. Fonctions holomorphes	141
1. Généralités	141
2. La fonction Γ dans le plan complexe	142
3. Fonctions méromorphes	142
4. Applications de la formule des résidus	143
5. formes modulaires et séries de Dirichlet	144
C. Examens et corrigés	149
D. Transparents de l'an dernier	157
Index	187
Index terminologique	188
Énoncés mathématiques	191

PRÉLUDE

Présentation du cours

Il s'agit d'un cours généraliste dont le but est multiple :

- fournir des outils et des concepts utilisables dans les autres sciences,
- élargir le socle de concepts sur lequel s'appuyer et préparer le terrain pour les cours de seconde année,
- faire sentir que les mathématiques ne sont pas une collection de théories déconnectées, établies de toute éternité, mais qu'elles constituent une science bien vivante régie par une profonde unité.

Contenu du cours

Les théories abordées dans le cours s'articulent autour des deux thèmes "transformation de Fourier" et "fonctions holomorphes". La transformation de Fourier, de par ses diverses incarnations, est une excellente illustration de l'unité des mathématiques, et le cours essaye de souligner la continuité existant entre le fini (théorie des caractères des groupes finis), le discret (séries de Fourier) et le continu (transformée de Fourier dans $L^1(\mathbf{R}^m)$). Ces théories sont utilisées, à des degrés divers, dans toutes les autres sciences, ce qui peut être une motivation suffisante pour essayer d'en comprendre les tenants et les aboutissants, même si on n'a pas l'âme d'un mathématicien et pas le temps ni l'envie d'en saisir toutes les finesses. Elles possèdent aussi une beauté intrinsèque, au niveau des énoncés et des méthodes, qui devrait séduire quiconque veut bien faire l'effort de passer la barrière des définitions initiales. De plus, elles se combinent harmonieusement pour aboutir à des résultats proprement magnifiques.

La théorie des caractères des groupes finis, à laquelle le début du cours est consacré, qui est objectivement la plus facile, est probablement celle qui vous déroutera le plus, compte-tenu de votre formation. Elle permet d'illustrer un certain nombre de concepts fondamentaux dont on ne peut que déplorer la disparition du programme des classes antérieures : les groupes sont faits pour agir et les symétries d'un système forment un groupe dont il est bon de comprendre l'action pour étudier le système (ce principe de

symétrie est à la base d'une partie non négligeable de la physique théorique moderne). Cela permet aussi de sensibiliser aux problèmes de classification en mathématiques : il est possible de décrire complètement les représentations irréductibles d'un groupe fini donné, ce qui est un petit peu surprenant au vu de la définition, mais présente des similarités certaines (pas totalement fortuites comme vous le constaterez peut-être plus tard) avec la classification périodique des éléments en chimie ou celle des particules élémentaires en physique.

La suite du cours a pour but une introduction à la transformée et l'inversion de Fourier dans \mathbf{R}^n , l'objectif étant d'initier au va et vient entre une fonction et sa transformée de Fourier (problématique que vous pourrez apprécier avec la démonstration du théorème central limite du cours MAP 311, et aurez l'occasion de revoir à l'œuvre dans les cours MAT 431 et MAT 432, pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles issues de la physique). La transformée de Fourier dans L^1 reposant sur l'intégrale de Lebesgue, le cours comporte un chapitre consacré aux principaux théorèmes d'intégration (dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue sur \mathbf{R}^n , mais pas dans le cadre d'une théorie générale de la mesure). Cette partie du cours est dans la droite ligne de ce que vous connaissez déjà.

Enfin, une petite moitié du cours a pour objet l'étude des fonctions holomorphes telle qu'elle a été développée par Cauchy dans les années 1820-1840. Comparée à celle des fonctions d'une variable réelle, cette théorie marche tellement bien que cela en devient un peu déstabilisant quand on a pris l'habitude de voir des pièges potentiels partout. Le cours se termine par la démonstration des théorèmes de la progression arithmétique et des nombres premiers (deux sommets des mathématiques du 19-ième siècle), ce qui est l'occasion de voir fonctionner les principaux résultats de base de la théorie des fonctions holomorphes, tout en illustrant l'unité des mathématiques et en faisant prendre conscience qu'une démonstration d'un résultat ne tient pas forcément sur un tableau, et que la solution d'un problème demande parfois de concevoir une stratégie en plusieurs étapes mêlant des techniques variées⁽¹⁾.

Le poly et EAATN

Le poly des années précédentes est devenu un livre « Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres) » (EAATN pour faire court) publié aux Éditions de l'École Polytechnique. J'en ai profité pour recentrer le poly sur ce que je raconte en amphi et sur les aspects scolaires du cours. Par rapport au poly, EAATN contient un certain nombre de choses susceptibles de vous intéresser :

- le « Vocabulaire mathématique » que vous avez, pour la plupart, reçu sous forme électronique,
- la démonstration de certains des théorèmes du poly,

⁽¹⁾Excellente gymnastique intellectuelle pour un futur dirigeant.

- des développements naturels et d'autres points de vue sur les notions du poly (comme la transformée de Fourier dans L^2 , indispensable pour les applications à la physique, ou la théorie des espaces de Banach qui n'est abordée que très superficiellement dans le poly),
- beaucoup d'exercices,
- des problèmes corrigés dont six ont été conçus pour passer en revue le programme (problèmes G1, G2, G5, G6, G7 et G8),
- une partie culturelle, faite pour être lue par petits bouts, en prenant son temps, selon son envie et ses besoins. Cet aspect culturel, plutôt inhabituel dans un cours de ce niveau, a pour but est de donner une petite idée du fonctionnement interne des mathématiques (comment la solution d'un problème impose l'apparition de nouveaux concepts qui par la suite se retrouvent animés d'une vie propre et donnent naissance à de nouvelles théories, comment la continuité des mathématiques suggère des raisonnements par analogie d'une théorie à l'autre, comment les théories interagissent entre elles pour donner naissance à de nouveaux problèmes...). Il intervient à plusieurs niveaux :

- La culture de base est développée dans le long chapitre « Vocabulaire mathématique », qui vise à fournir un document rassemblant des notions mathématiques d'usage constant⁽²⁾, ayant fait partie, il n'y a pas si longtemps, du programme des classes préparatoires, mais dont beaucoup sont actuellement présentées (au moins dans le programme officiel) sous une forme difficilement utilisable. Sa maîtrise procure un confort indéniable⁽³⁾.

- Le texte comporte un nombre assez conséquent de notes de bas de page ; celles-ci sont de deux types que vous ne devriez pas avoir de mal à différencier. Les premières apportent juste un éclairage au texte principal, les autres forment une espèce de blog mathématique proposant de petites excursions hors de l'autoroute des mathématiques « utiles ». Celles-ci peuvent être d'ordre historique, présenter un problème ouvert, énoncer un résultat récent⁽⁴⁾ ou encore indiquer des passerelles entre des mondes *a priori* sans rapport⁽⁵⁾.

- Six appendices permettent au lecteur curieux d'approfondir le contenu du cours.

- L'appendice A⁽⁶⁾, consacré au théorème des nombres premier, est une espèce de couronnement du cours de fonctions holomorphes (il est assez remarquable que cette théorie analytique permette d'attaquer le problème arithmétique de la répartition des

⁽²⁾Les deux derniers paragraphes de ce chapitre sont plus anecdotiques ; j'ai rassemblé dans le paragraphe « Tématologie » quelques monstres mathématiques que je trouve particulièrement sympathiques (certains ont un peu traumatisé les contemporains de leurs découvreurs), et j'ai développé les nombres p -adiques dans le dernier paragraphe parce que je les aime bien et qu'il est assez amusant de comparer les mondes p -adiques et réels, avec leurs différences et leurs similarités.

⁽³⁾Il est parfaitement possible de se débrouiller sans, de même que l'on peut se déplacer à quatre pattes, mais marcher debout est quand même plus agréable, moins fatigant, et permet de voir plus loin.

⁽⁴⁾Celui-ci peut être parfaitement futile comme celui de la note 1 de l'annexe A (qui a rapporté 100000 dollar à ses auteurs, le monde est injuste...), bien que la plupart soient assez profonds.

⁽⁵⁾Par exemple, la note de l'ex. 4.17 du Vocabulaire montre comment un joli exercice de colle se transforme, comme par magie, en une question naturelle fort difficile.

⁽⁶⁾Cet appendice est reproduit presque intégralement dans le poly.

nombres premiers, qui avait résisté aux assauts d'Euler, Gauss, Riemann etc.). Il est lisible par quelqu'un ayant bien assimilé les théorèmes de base de la théorie des fonctions holomorphes des chapitres V et VI, ainsi que les propriétés de base des fonction Γ et ζ du chapitre VII.

— L'appendice B est consacré à la démonstration d'une formule extrêmement profonde indiquant des liens encore mystérieux entre les mondes réels et p -adiques ; cette démonstration utilise de manière astucieuse la transformée de Fourier et la formule de Poisson.

— L'appendice C contient des exemples de représentations de groupes finis un peu plus sophistiqués que ceux que vous aurez le temps de voir en petites classes. Les représentations du groupe symétrique (indexées par des « diagrammes de Young ») jouent un rôle non négligeable dans certaines questions de physique théorique ; c'est pour cela que j'ai inclus les résultats (sans démonstration). Les représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ feraient un très bon problème de révision (un peu long et un brin répétitif) pour la théorie des représentations des groupes finis.

— L'appendice D poursuit la comparaison entre l'analyse réelle et la p -adique : la surprise est que les énoncés sont remarquablement similaires, alors que les deux mondes sont, à première vue, très différents.

— L'appendice E prend pour prétexte un problème très simple et très ancien (la première trace écrite de ce problème remonte à 948) pour introduire l'un des problèmes à un million de dollar du Clay Institute. Le début est lisible par n'importe qui, le reste le devient après le cours de fonctions holomorphes.

— L'appendice F est d'un niveau plus élevé, un peu sur le modèle des articles mathématiques de l'Encyclopaedia Universalis. C'est une introduction au programme de Langlands qui joue en mathématiques le rôle de la grande unification en physique (certains physiciens rêvent d'ailleurs d'unifier les deux programmes...), et dont une des retombées les plus spectaculaires est la démonstration du théorème de Fermat. J'ai essayé de l'écrire de manière compréhensible pour quelqu'un de motivé ayant bien assimilé le cours.

- Les problèmes de l'annexe G peuvent aussi être vus comme des compléments culturels. C'est aussi le cas de la série d'exercices du chap. VII sur les formes modulaires ⁽⁷⁾ dont une partie a été incluse dans les exercices du poly sur les fonctions holomorphes.

- Enfin, une chronologie allant de l'antiquité à 2009 permet de mesurer les progrès des mathématiques (dans les branches abordées dans l'ouvrage, ce qui en exclut beaucoup, à commencer par la géométrie).

⁽⁷⁾La théorie des formes modulaires est incroyablement séduisante. Si vous êtes plus « theory builder » que « problem solver », vous pouvez en apprendre les bases dans le *Cours d'arithmétique* de Serre où elle est fort joliment traitée, ou dans le volume IV de l'*Analyse mathématique* de Godement, qui lui consacre un chapitre intitulé : « le jardin des délices modulaires, ou l'opium du mathématicien ».

J'ai essayé, autant que faire se peut, de donner des démonstrations naturelles, sans trop de raccourcis astucieux ou de contraintes artificielles⁽⁸⁾. Le corollaire est que je n'ai pas hésité à avoir recours à des notions ayant disparu⁽⁹⁾ du programme officiel, mais que l'on peut trouver dans le chapitre « Vocabulaire mathématique ». Je n'ai pas totalement résisté à la tentation de « l'élémentaire », par exemple la construction de l'intégrale de Lebesgue que je propose n'échappe pas à ce péché⁽¹⁰⁾.

Le déroulement du cours

L'enseignement dispensé à l'École polytechnique constitue un choc culturel assez sévère pour quelqu'un sortant d'une classe préparatoire, habitué à ce que chaque notion introduite soit traitée dans les moindres détails⁽¹¹⁾. De plus, les résultats ont tendance à avoir des démonstrations nettement plus sophistiquées, et il faut s'habituer à utiliser un résultat

⁽⁸⁾Une démonstration dans laquelle on s'interdit certains outils peut parfois être impressionnante de virtuosité, mais est très difficile à retenir et quasiment impossible à réutiliser, et demande, pour être vraiment appréciée, de pouvoir faire la comparaison avec une démonstration naturelle comme pour le texte ci-dessous dont vous pourrez lire la suite à l'adresse <http://www.graner.net/nicolas/OULIPO/affabulations.html> :

Un loup fond sur un mouton.

Un propos du plus fort sort toujours plus promu :

Nous montrons tout d'un coup son but.

Un jour un doux Mouton poupon

But du flot pur d'un bon cours d'or.

Lors donc un Loup goulou voulut un coup du sort,

Mû pour son lunch d'un goût surtout glouton.

Butor, tu bus mon flot sous mon croc, sous mon front !

Sort d'un ton dur mon Loup bougon :

Nous rompons donc ton cou pour ton trop gros culot.

⁽⁹⁾Je pense principalement à celle de passage au quotient par une relation d'équivalence (n° 2.2) qui est, certes, un peu traumatisante la première fois qu'on la rencontre mais, en définitive, travailler dans $\mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$ revient à travailler dans \mathbf{Z} en rajoutant la relation $15 = 0$ (et donc $16 = 1$, $6 \cdot 5 = 0 \dots$). Vous avez fait des passages au quotient nettement plus compliqués lors de votre petite enfance, par exemple pour définir un chien ou une couleur (les passages au quotient mathématiques se font sur des objets nettement mieux définis : « *If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is* », dixit von Neumann).

⁽¹⁰⁾Ça m'a permis de comprendre le plaisir un peu pervers que peut ressentir un professeur de classe préparatoire quand il réussit à fabriquer une démonstration d'un résultat profond en n'utilisant que les notions que les réformes successives lui ont laissées.

⁽¹¹⁾J'ai tendance à penser qu'un vrai cours de maths se rapproche plus du format offert en prépa que de celui que je propose, et se fait devant un auditoire limité qui permet une interaction avec la salle, à la craie, en alternant théorèmes et exercices d'application, ce qui permet d'avancer à un rythme permettant une absorption au fur et à mesure, avec au moins deux séances par semaine pour ne pas tout oublier d'une fois sur l'autre. Le problème d'un cours de ce format est que l'on peut difficilement espérer couvrir plus de 4 pages du poly par séance, ce qui ne permettrait pas d'aller très loin, vu le temps dont on dispose.

sans en maîtriser toutes les subtilités. Le cours ne proposera donc qu'une introduction aux trois théories qui le composent. Celle-ci est amplement suffisante pour donner une idée fidèle des tenants et aboutissants de la théorie ; elle suffit aussi pour beaucoup d'applications, et le poly apporte les compléments nécessaires à ceux qui veulent aller plus loin. Compte-tenu de l'abondance et de la variété du matériel, il est difficile (voire impossible) d'espérer le maîtriser aussi bien que ce dont vous avez l'habitude, concours obligeant. D'un autre côté, une maîtrise aussi totale est en général parfaitement inutile, même pour un mathématicien⁽¹²⁾.

Pour comprendre où je veux en venir avec ce cours, la comparaison avec l'apprentissage d'une langue étrangère fournit des points de repère utiles. Dans un tel apprentissage, on peut distinguer plusieurs paliers intéressants :

- niveau 1 : pouvoir demander son chemin et comprendre la réponse,
- niveau 2 : être capable de suivre des bribes de conversation,
- niveau 3 : pouvoir participer à une discussion,
- niveau 4 : parler couramment et apprécier la littérature classique.
- niveau 5 : pouvoir enseigner la langue dans son pays.
- niveau 6 : pouvoir enseigner la langue dans le pays d'origine.
- niveau 7 : écrire des romans dans la langue.

Ne pas pouvoir participer à une discussion est assez frustrant, mais pouvoir demander son chemin et comprendre la réponse est déjà assez utile... Compte-tenu des conditions d'enseignement et de l'atmosphère de l'école⁽¹³⁾, je pense que tout le monde peut atteindre, avec un peu de travail personnel, un niveau intermédiaire⁽¹⁴⁾ entre les niveaux 2 et 3 en ce qui concerne les sujets abordés dans ce cours (qui, je le souligne, concernent des notions de base, utilisées amplement en dehors des maths). Mon ambition est qu'une partie non

⁽¹²⁾J'ai amplement utilisé, au cours de ma carrière, les résultats qui suivent sans forcément en avoir vu de démonstration ; je n'ai jamais vraiment étudié de construction de la mesure de Lebesgue (par contre, quand j'ai pris connaissance du théorème de convergence dominée, je me suis demandé pourquoi on avait trouvé nécessaire de me le cacher jusque-là...) ou les démonstrations du théorème de Fubini, de la formule des résidus..., jusqu'à ce que je doive les rédiger pour le poly. De même, quand on m'a dit qu'une série de fonctions holomorphes était holomorphe et se dérivait terme à terme, j'ai été fort satisfait de la simplicité de cet énoncé, mais je me suis bien gardé d'aller voir la démonstration (en l'occurrence, ce n'était pas forcément très malin car la démonstration repose sur une jolie idée que l'on peut réutiliser avec profit, et ne comporte pas vraiment de détails sordides à oublier le plus vite possible).

⁽¹³⁾Nous ne sommes pas dans une École Normale (ni dans une école tout-à-fait normale), où le but de l'enseignement est de former des gens arrivant à terme aux niveaux 6 ou 7, ce qui exige d'arriver au niveau 4 à l'issue d'un cours et demande un rythme autre que celui de l'X ; pour donner un point de comparaison, à Cambridge dont la logique est plus proche de celle d'une École Normale que de celle de l'X, et qui n'est pas particulièrement réputée pour sa lenteur, la théorie des fonctions holomorphes repose sur un cours magistral de 16h.

⁽¹⁴⁾Le niveau 2 est amplement suffisant pour l'utilisation extra-mathématique (et même pour beaucoup d'utilisations mathématiques dont le but n'est pas de généraliser une des notions).

négligeable de la promotion atteigne le niveau 3, ce qui demande un investissement un peu plus poussé, et de fournir les outils permettant à ceux qui le souhaitent de parvenir au niveau 4.

Les amphis

Compte-tenu des conditions d'enseignement, je peux difficilement faire plus en amphi que présenter les résultats, revenir sur les plus importants, essayer de montrer comment on s'en sert en faisant quelques démonstrations (ce qui a aussi l'avantage de couper le rythme), faire quelques commentaires culturels pour signaler des points surprenants ou des progrès récents, et renvoyer l'auditoire au poly pour les détails. Les petites classes sont nettement plus propices à l'assimilation du matériel du cours, même si l'amphi permet de mettre les choses en perspective.

Avant l'amphi.— Profiter à plein du cours demande un peu de préparation⁽¹⁵⁾ et un travail personnel régulier. Il faut préparer les amphis en jetant un coup d'oeil aux transparents de l'année dernière regroupés dans l'annexe D pour repérer les objets dont vous ne connaissez pas la définition afin d'aller la consulter dans le poly⁽¹⁶⁾ ou dans le Vocabulaire. C'est particulièrement vrai du *premier amphi où un vocabulaire important concernant les actions de groupes est introduit et utilisé dans la foulée*. De manière précise, voici ce qu'il me semble important d'avoir regardé avant les différents amphis (les références sans chiffres romains renvoient au Vocabulaire) :

Amphi 1 : Revoir les espaces préhilbertiens (n° 10.6), vocabulaire d'action de groupe sur un ensemble (définition d'une action à gauche, orbites, conjugaison, classes de conjugaison, en bref tout le n° 2.6), définition d'une représentation de groupe et équivalence avec le point de vue morphisme de groupes dans $GL(V)$ (le tout début du n° 1 du § I.1). Pour profiter des exercices de la première petite classe, aller voir ce qui concerne le groupe symétrique (alinéas 3.5.1 et 3.5.2) serait très utile vu que c'est l'exemple de groupe le plus concret dont on dispose, se familiariser avec les notions de groupe cyclique et d'ordre d'un élément (alinéas 3.2.1 et 3.2.2) et regarder le théorème de Lagrange et ses variantes (n° 3.4) serait aussi une bonne idée.

Amphi 3 : Définition d'un ensemble de mesure nulle.

⁽¹⁵⁾Vous aurez probablement l'impression de visiter l'Europe en 7 jours. Si le voyage est bien préparé, cela laisse le temps de voir de jolies choses, mais pas celui de se laisser imprégner par les lieux que l'on visite ; sinon il y a un fort risque de partager son temps entre les voyages en avion et les chambres d'hôtel, ce qui est un peu frustrant.

⁽¹⁶⁾En une heure et demi, on n'a pas le temps de s'apesantir autant qu'il le faudrait sur les définitions, et l'expérience montre que l'on peut perdre pied très vite pour des problèmes de pur vocabulaire. De plus, apprendre quelque chose de totalement nouveau est une véritable torture (je présume que le cerveau doit faire un effort gigantesque pour comprendre comment stocker cette nouvelle information et l'organiser en créant de nouveaux circuits), alors que revenir en terrain (pas trop) connu est souvent franchement agréable.

Amphi 4 : Définition d'un espace de Banach (tout début du n° 1 du § II.1), notion de densité (n° 5.6), convergence uniforme (n° 9.2)⁽¹⁷⁾.

Amphi 6 : Définition d'un connexe (n° 7.1), d'un compact (n° 6.1, 6.2), définition de l'anneau $K[[T]]$ des séries formelles et définition d'une fonction holomorphe (en bref, jeter un coup d'oeil au début du chap. V).

Pendant l'amphi.— Des copies des transparents sont distribuées au début de l'amphi. Elles représentent un bon résumé du cours. Par ailleurs, une moitié de la page est laissée en blanc, ce qui permet de prendre des notes, mais il est totalement inutile (c'est même nuisible car ça empêche de se concentrer sur les idées de la démonstration) de noter in extenso les démonstrations que je fais (sauf peut-être si je signale qu'il s'agit d'un exercice du poly) ; elles sont nettement mieux rédigées dans le poly.

Après l'amphi.— Les petites classes se déroulent juste après l'amphi. Cela permet de voir tout de suite comment on utilise les théorèmes du cours, mais ne laisse pas le temps d'en assimiler vraiment le contenu. Il vaut donc probablement la peine de les regarder à tête reposée entre deux amphes, en essayant de faire certains des exercices de la feuille qui n'auront pas été traités, faute de temps. Si vous n'y arrivez pas, cela vous fournira des questions à poser à vos enseignants de PC.

Les deux derniers amphes.— L'amphi 8 est consacré à la fonction zêta de Riemann et aux fonctions L de Dirichlet. Il s'agit d'illustrer la puissance du prolongement analytique et de la formule des résidus pour attaquer certaines questions (c'est un peu magique), tout en utilisant de manière répétée les principaux théorèmes de fonctions holomorphes. Le dernier amphi est consacré au théorème des nombres premiers (je présenterai le plan de la démonstration⁽¹⁸⁾, et les passages les plus frappants, en lien avec le cours de fonctions holomorphes).

⁽¹⁷⁾Dans certaines filières, au lieu de dire que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur un intervalle pour la norme de la convergence uniforme, on dit que toute fonction continue sur un intervalle peut être approchée uniformément par des polynômes, ce qui est rigoureusement la même chose, mais il est quand même assez grotesque d'éviter le vocabulaire « dense », « par densité », « converge uniformément »... utilisé par le reste du monde.

⁽¹⁸⁾Il n'est absolument pas question de vous demander de connaître par coeur cette démonstration (je ne suis pas sûr qu'il y ait vraiment de mathématiciens professionnels capables de la reproduire intégralement, sans préparation ou sans l'avoir déjà enseignée suffisamment). Il me semble que l'on peut ressentir une certaine fierté à l'idée de pouvoir comprendre la solution d'un problème ayant résisté à Euler, Gauss et Riemann (parmi tant d'autres). On peut aussi prendre un certain plaisir à une vue d'ensemble de la démonstration (qui est franchement magnifique), même si on n'en maîtrise pas tous les détails (un peu comme devant un paysage de montagne que l'on découvre à la sortie d'un téléphérique). Un adepte de l'escalade sera peut-être plus attiré par certaines des subtilités ponctuelles de la preuve (comme le théorème de Borel-Carathéodory).

Les petites classes

Les exercices traités en petites classes sont regroupés dans l'annexe B du poly (il y en a à peu près deux fois plus que ce qui peut être physiquement traité pendant le temps de la petite classe). Mon idée est qu'il vaut la peine de les regarder avant la petite classe pour avoir des questions à poser à l'enseignant⁽¹⁹⁾. Réfléchir 10 minutes à un exercice et aller demander la solution est incomparablement plus efficace, pour apprendre quelque chose, que d'avaler tout cru la solution d'un exercice auquel on n'a pas réfléchi : je présume que le cerveau a besoin de préparation pour savoir comment encoder la solution, et qu'une réflexion préalable ne lui demande que de connecter certaines informations au lieu de partir de zéro.

De manière générale, je pense que si on doit faire un choix, il vaut mieux essayer de résoudre les exercices proposés dans les feuilles que s'acharner à comprendre les démonstrations des théorèmes fondamentaux (les lire peut toutefois donner des idées⁽²⁰⁾).

Le soutien

Le début du cours risque d'être un peu rude pour les élèves des filières dont les groupes sont presque absents. Pour vous aider, un soutien (ouvert à tous les élèves) sera mis en place tous les mercredis de 18h-20h à compter du mercredi 12 mai. Pour toute participation, il faut vous inscrire auprès du bureau Tutorat : linda.guevel@polytechnique.edu.

Performances escomptées

Voici la liste des concepts et résultats dont la maîtrise⁽²¹⁾ me semble un objectif minimum et sur lesquels les exercices en petites classes se concentreront.

- Représentations des groupes finis :
 - définition d'une représentation d'un groupe et de son caractère,
 - décomposition d'une représentation en somme directe de représentations irréductibles,

⁽¹⁹⁾Les séances d'exercices sont un peu une spécialité française : par exemple, à Cambridge les étudiants travaillent leurs feuilles d'exercices tous seuls et les passent en revue, par groupe de 2, avec un tuteur, pour faire le point de ce qui pose problème.

⁽²⁰⁾La bonne manière de comprendre la démonstration d'un théorème est d'essayer de la retrouver sans la lire ; si on réussit c'est parfait, si on n'y arrive pas (ce qui n'est nullement honteux vu la complexité de beaucoup ; une démonstration de plus de 10 lignes est difficilement reconstituable sauf s'il s'agit juste d'adapter une démonstration que l'on connaît déjà), le terrain est préparé pour que la lecture serve vraiment à quelque chose. Évidemment, ce procédé prend du temps et, comme je l'ai déjà dit, n'est pas vraiment indispensable pour apprendre à se servir du théorème.

⁽²¹⁾Par maîtrise, j'entends : savoir utiliser, mais pas forcément connaître la démonstration. Une théorie mathématique se résume souvent, pour ses utilisateurs, à quelques définitions et un petit nombre de théorèmes fondamentaux que l'on peut utiliser comme une boîte noire. Ce n'est pas très éloigné de l'utilisation d'un logiciel et la maîtrise de la démonstration d'un théorème est à peu près aussi nécessaire à son utilisation que la lecture des lignes de code pour un logiciel (même si les démonstrations contiennent souvent des idées utilisables dans un autre contexte).

— les caractères forment une base orthonormée des fonctions centrales (version finie de la formule d'inversion de Fourier aux conséquences miraculeuses : finitude du nombre de représentations irréductibles, détermination d'une représentation par son caractère, formule de Burnside...),

— établissement de la table des caractères d'un petit groupe en étant guidé.

• Intégration et Fourier :

— théorèmes de base d'intégration (convergence dominée, Fubini, changement de variable, continuité et dérivation sous le signe somme)⁽²²⁾,

— complétude de L^1 et L^2 ,

— utilisation de la densité de sous-espaces sympathiques (fonctions en escaliers, fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact...) pour démontrer des résultats sur L^1 ou L^2 par continuité,

— propriétés élémentaires de la transformée de Fourier dans L^1 : formules pour les dilatations-translations, échange de la dérivation et de la multiplication par un polynôme, échange de la régularité et de la décroissance à l'infini (en incluant le théorème de Riemann-Lebesgue), formule d'inversion de Fourier (dans l'espace de Schwartz et L^1),

— formule de Poisson.

• Fonctions holomorphes :

— existence d'un développement de Taylor sur un disque de rayon maximal,

— inégalités de Cauchy permettant de majorer les dérivées d'une fonction holomorphe,

— principe du maximum,

— théorème des zéros isolés et unicité du prolongement analytique,

— construction de fonctions holomorphes par séries, produits infinis et intégrales,

— multivaluation du logarithme,

— formule des résidus pour calculer des intégrales ou localiser les zéros d'une fonction holomorphe,

— quelques techniques de prolongement analytique (fonctions Γ et ζ).

Pour donner une idée de ce que j'attends, je considère que vous avez suffisamment bien compris le cours si vous êtes capable, sans consulter le poly, d'obtenir une note ≥ 20 en moins⁽²³⁾ de 4 heures aux examens des années précédentes que vous trouverez à l'annexe C avec leurs corrections. Pour faciliter l'acquisition de ces concepts, je distribuerai deux problèmes de révision (facultatifs).

⁽²²⁾Ils ont déjà été vus (sous une forme limitée) jusqu'à plus-soif dans les années précédentes, et donc je m'attends à ce qu'ils ne posent pas de problème spécial. En particulier, je ne compte pas m'apesantir sur les problèmes d'interversions de limites et d'intégrales ; il y a des choses nettement plus exaltantes en mathématiques...

⁽²³⁾Arriver à le faire dans les 2 heures imparties dénote une rapidité certaine : en 2007, cela a été le cas de 5 élèves (dont un PC et un étranger), et en 2008, cela a été le cas de 13 élèves (dont 2 PC et 2 étrangers).

L'examen

Personnellement, je pense qu'un examen est parfaitement superflu et plutôt contre-productif, mais d'aucuns semblent d'avis qu'il est impossible d'obtenir que les gens travaillent si on ne brandit pas un grand fouet au-dessus de leurs têtes (méthode de gestion des « ressources humaines » à la mode en ce moment). Il y aura donc un examen du même type que ceux de 2007 et 2008, mais qui durera 3 heures au lieu de 2, pour éviter de le transformer en course contre la montre.

Notations standard

On note \mathbf{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbf{Z} l'anneau des entiers relatifs, \mathbf{Q} le corps des nombres rationnels, \mathbf{R} le corps des nombres réels et \mathbf{C} le corps des nombres complexes. On note \mathbf{Q}^* , \mathbf{R}^* et \mathbf{C}^* les groupes multiplicatifs de \mathbf{Q} , \mathbf{R} et \mathbf{C} .

On note \mathbf{R}_+ (resp. \mathbf{R}_+^*) l'ensemble des nombres réels positifs (resp. strictement positifs) et \mathbf{R}_- (resp. \mathbf{R}_-^*) l'ensemble des nombres réels négatifs (resp. strictement négatifs).

On note $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ la droite réelle achevée, et $\overline{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ la demi-droite réelle achevée.

Si $t \in \mathbf{R}$, on note $[t]$ sa partie entière, et $\{t\} = t - [t]$, sa partie fractionnaire.

Si X est un ensemble, on note $|X|$ son cardinal.

Si A est un anneau, et si $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, on note $\mathbf{M}_n(A)$ l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficients dans A , $\mathbf{GL}_n(A) \subset \mathbf{M}_n(A)$ le groupe des matrices inversibles (celles dont le déterminant est inversible dans A), et $\mathbf{SL}_n(A)$ le sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(A)$ des matrices de déterminant 1.

CHAPITRE I

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

La théorie des représentations présente deux aspects. Le premier de ces aspects (décomposition d'une représentation en représentations irréductibles) est une généralisation de la théorie de la réduction des endomorphismes (valeurs propres, espaces propres, diagonalisation), qui correspond, modulo un petit exercice de traduction (ex. I.1.2 et I.2.2, rem. I.2.3), au cas du groupe \mathbf{Z} . Le second aspect (théorie des caractères) est une première approche de l'analyse de Fourier dans un cadre non commutatif (ou commutatif, cf. n° 5). À part le cas de \mathbf{Z} qui permet de faire le lien avec l'algèbre linéaire classique, nous ne considérerons essentiellement que les représentations complexes des groupes finis dans ce cours. Ce cas présente l'avantage d'être à la fois simple (il n'y a pas à se battre avec les problèmes de convergence ou autres subtilités analytiques que l'on rencontre par exemple dans l'étude des séries de Fourier qui correspondent au groupe \mathbf{R}/\mathbf{Z}), et tout à fait représentatif du genre d'énoncés que l'on peut espérer dans d'autres situations.

I.1. Représentations et caractères

1. Représentations de groupes, exemples

Le lecteur est renvoyé au Vocabulaire, n° 2.6.1, § 3 et n° 4.1, pour le vocabulaire et les résultats de base d'algèbre linéaire et de théorie des groupes.

Soit G un groupe, de loi de groupe $(g, h) \mapsto gh$. Une *représentation* V de G est un \mathbf{C} -espace vectoriel muni d'une action (à gauche) de G agissant de manière linéaire. Une telle représentation est équivalente à la donnée d'un morphisme de groupes ρ_V de G dans $\mathbf{GL}(V)$: si $g \in G$, l'application $v \mapsto g \cdot v$ est linéaire bijective et donc nous définit un élément $\rho_V(g)$ de $\mathbf{GL}(V)$, et l'identité $g \cdot (h \cdot v) = gh \cdot v$, valable quels que soient $g, h \in G$ et $v \in V$, se traduit par l'identité $\rho_V(gh) = \rho_V(g)\rho_V(h)$. Dans la suite on parlera indifféremment de la représentation V de G ou de la représentation ρ_V de G , suivant qu'on veut mettre l'accent sur l'espace vectoriel de la représentation ou sur le morphisme de G dans $\mathbf{GL}(V)$. On notera aussi parfois $\rho_{V,g}$ l'élément $\rho_V(g)$ de $\mathbf{GL}(V)$, de manière à pouvoir écrire $\rho_{V,g}(v)$ au lieu de $\rho_V(g)(v)$ l'image $g \cdot v$ de $v \in V$ sous l'action de $g \in G$.

Remarque I.1.1. — (i) L'exemple le plus banal de représentation est celui d'un sous-groupe G de $\mathbf{GL}(V)$ agissant sur V . Par exemple, l'inclusion du groupe orthogonal $\mathbf{O}(d)$ dans $\mathbf{GL}_d(\mathbf{R})$ fait de \mathbf{R}^d une représentation de $\mathbf{O}(d)$.

(ii) Si ρ_V est injectif, on dit que V est une représentation *fidèle* de G , auquel cas ρ_V permet de représenter le groupe abstrait G , de manière concrète (d'où la terminologie), comme un sous-groupe de $\mathbf{GL}(V)$. Si V est dimension finie, le choix d'une base fournit une représentation encore plus concrète comme groupe de matrices.

Exemple I.1.2. — (Représentations de \mathbf{Z})

(i) Si $\lambda \in \mathbf{C}^*$, alors $n \mapsto \lambda^n$ est un morphisme de groupes de \mathbf{Z} dans \mathbf{C}^* , ce qui nous fabrique une représentation de \mathbf{Z} que nous noterons $\mathbf{C}(\lambda)$; l'action de $n \in \mathbf{Z}$ sur $z \in \mathbf{C}$ étant donnée par $\rho_{\mathbf{C}(\lambda),n}(z) = \lambda^n z$ (ce qu'on peut aussi écrire sous la forme $n \cdot z = \lambda^n z$).

(ii) Si V est un \mathbf{C} -espace vectoriel, et si $u : V \rightarrow V$ est un isomorphisme linéaire, l'application $n \mapsto u^n$ est un morphisme de groupes de \mathbf{Z} dans $\mathbf{GL}(V)$, ce qui fait de V une représentation du groupe additif \mathbf{Z} , l'action de $n \in \mathbf{Z}$ sur $v \in V$ étant donnée par $n \cdot v = u^n(v)$. Réciproquement, si V est une représentation de \mathbf{Z} , alors $u = \rho_V(1) \in \mathbf{GL}(V)$, et on a $\rho_V(n) = u^n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et donc $n \cdot v = u^n(v)$, si $n \in \mathbf{Z}$ et $v \in V$. En d'autres termes, une représentation de \mathbf{Z} n'est rien d'autre que la donnée d'un \mathbf{C} -espace vectoriel V et d'un élément u de $\mathbf{GL}(V)$.

Exemple I.1.3. — (Représentations de $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$)

Si V est un \mathbf{C} -espace vectoriel muni d'un isomorphisme linéaire u vérifiant $u^D = 1$, l'application $n \mapsto u^n$ est un morphisme de groupes de \mathbf{Z} dans $\mathbf{GL}(V)$ dont le noyau contient $D\mathbf{Z}$; il induit donc un morphisme de $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{GL}(V)$, ce qui fait de V une représentation de $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$, l'action de $n \in \mathbf{Z}$ sur $v \in V$ étant donnée par $n \cdot v = u^n(v)$. Réciproquement, si V est une représentation de $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$, et si $u = \rho_V(1) \in \mathbf{GL}(V)$, alors $u^D = \rho_V(D) = \rho_V(0) = 1$, car $D = 0$ dans $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$. En d'autres termes, une représentation de $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$ n'est rien d'autre que la donnée d'un \mathbf{C} -espace vectoriel V et d'un élément u de $\mathbf{GL}(V)$ vérifiant $u^D = 1$.

La *dimension* $\dim V$ d'une représentation V est juste la dimension du \mathbf{C} -espace vectoriel V . Par exemple, $\dim \mathbf{C}(\lambda) = 1$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

Dans tout ce qui suit, les représentations sont implicitement supposées de dimension finie. Si $\dim V = d$ et si (e_1, \dots, e_d) est une base de V , on note $R_V(g)$ ou $R_{V,g}$ la matrice de $\rho_V(g)$ dans la base (e_1, \dots, e_d) (qui dépend du choix de la base bien que ça n'apparaisse pas dans la notation). Alors $R_V : G \rightarrow \mathbf{GL}_d(\mathbf{C})$ est un morphisme de groupes.

Exemple I.1.4. — (Construction d'une représentation de dimension 2 de S_3)

Soient $A = (1, 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Les points A, B, C sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre de gravité $O = (0, 0)$. Les isométries du plan laissant stable ce triangle fixent O et

donc sont linéaires ; elles forment donc un sous-groupe⁽¹⁾ D_3 de $\mathbf{O}(2) \subset \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$. L'injection de D_3 dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$ fait de \mathbf{C}^2 une représentation du groupe D_3 , et nous allons montrer que ce groupe est isomorphe à S_3 pour construire notre représentation de S_3 . Un élément de D_3 laisse stable l'ensemble $\{A, B, C\}$, et fournit un morphisme de groupes f de D_3 dans le groupe des permutations $S_{\{A, B, C\}}$ de $\{A, B, C\}$. Comme A, B et C ne sont pas alignés, un élément de D_3 est uniquement déterminé par les images de A, B et C , ce qui signifie que f est injectif. Par ailleurs, f est surjectif car D_3 contient les symétries par rapport aux droites $(OA), (OB)$ et (OC) qui s'envoient respectivement sur les transpositions $(B, C), (A, C)$ et (A, B) , et les rotations d'angles $0, \frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$ dont les images respectives sont l'identité et les cycles (A, B, C) et (A, C, B) . En résumé, $f : D_3 \rightarrow S_{\{A, B, C\}}$ est un isomorphisme de groupes. La bijection $1 \mapsto A, 2 \mapsto B, 3 \mapsto C$ de $\{1, 2, 3\}$ sur $\{A, B, C\}$ fournit un isomorphisme $g : S_3 \cong S_{\{A, B, C\}}$. On obtient un morphisme de groupes de S_3 dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$ en composant $f^{-1} \circ g : S_3 \rightarrow D_3$ avec l'injection de D_3 dans $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$. Ce morphisme fait de \mathbf{C}^2 une représentation de S_3 .

Remarque I.1.5. — Soit G un groupe fini ; tout élément de G est alors d'ordre fini. Soit V une représentation de G . Si $g \in G$ est d'ordre n , on a $\rho_V(g)^n = \rho_V(g^n) = 1$. Comme le polynôme $X^n - 1$ n'a que des racines simples, cela prouve que $\rho_V(g)$ est diagonalisable, et comme les valeurs propres de $\rho_V(g)$ sont des racines de $X^n - 1$, ce sont des racines de l'unité.

2. Caractère d'une représentation, exemples

Le caractère χ_V de V est l'application de G dans \mathbf{C} définie par $\chi_V(g) = \text{Tr}(\rho_V(g))$, où $\text{Tr}(\rho_V(g))$ désigne la trace de l'endomorphisme $\rho_V(g)$; c'est aussi la trace de la matrice $R_V(g)$ dans n'importe quelle base de V , et c'est aussi la somme des valeurs propres de $\rho_V(g)$ comptées avec multiplicité.

On a en particulier $\chi_V(1) = \text{Tr}(1) = \dim V$; la valeur de χ_V en l'élément neutre est donc un entier ; cet entier est appelé le *degré* du caractère χ_V ; d'après ce qui précède, c'est aussi la dimension de la représentation V ; cette observation est d'usage constant. De plus, comme $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, si A et B sont deux éléments de $\mathbf{M}_d(\mathbf{C})$, on a

$$\text{Tr}(\rho_V(hgh^{-1})) = \text{Tr}(\rho_V(h)\rho_V(g)\rho_V(h)^{-1}) = \text{Tr}(\rho_V(g)),$$

ce qui montre que χ_V est une *fonction centrale* sur G (i.e. χ_V est constante sur chacune des classes de conjugaison de G : on a $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$ quels que soient $h, g \in G$).

Remarque I.1.6. — Si G est fini, et si $g \in G$, les valeurs propres de $\rho_V(g)$ sont des racines de l'unité. En particulier, elles sont de module 1, et donc $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$, si λ est une valeur propre de $\rho_V(g)$. Comme les valeurs propres de $\rho_V(g^{-1}) = \rho_V(g)^{-1}$ sont les inverses de celles de $\rho_V(g)$, et comme la trace est la somme des valeurs propres, on en déduit que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, quel que soit $g \in G$.

⁽¹⁾Plus généralement, on note D_n le groupe des isométries du plan fixant un polygone régulier à n côtés.

2.1. Caractères linéaires

Si V est de dimension 1, les endomorphismes de V sont les homothéties, et l'application qui à une homothétie associe son rapport induit un isomorphisme de $\mathbf{GL}(V)$ sur \mathbf{C}^* . Une représentation de dimension 1 n'est donc rien d'autre qu'un morphisme de groupes $\chi : G \rightarrow \mathbf{C}^*$; un tel morphisme est aussi souvent appelé un *caractère linéaire* de G . On note \widehat{G} l'ensemble de ces caractères linéaires.

Si V est une représentation de dimension 1 correspondant au caractère linéaire χ , on a $\chi_V = \chi$ de manière évidente. Autrement dit, *le caractère d'une représentation de dimension 1 est le caractère linéaire lui-même*.

La *représentation triviale*, notée $\mathbf{1}$, est la représentation de dimension 1 correspondant au *caractère trivial* $\chi : G \rightarrow \mathbf{C}^*$, défini par $\chi(g) = 1$, pour tout $g \in G$.

Exercice I.1.7. — On définit le produit $\chi_1\chi_2$ de deux caractères linéaires par $(\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$. Montrer que \widehat{G} , muni de ce produit, est un groupe commutatif.

Si V est une représentation de G , et si $\chi \in \widehat{G}$, on note $V(\chi)$ ou $V \otimes \chi$ la *tordue de V par le caractère linéaire χ* : c'est la représentation définie par $\rho_{V(\chi)}(g) = \chi(g)\rho_V(g)$ (l'espace vectoriel de $V(\chi)$ est V , mais l'action est tordue par χ ; la matrice $R_{V(\chi)}(g)$ est le produit de $R_V(g)$ par $\chi(g)$). On a $\chi_{V(\chi)}(g) = \chi(g)\chi_V(g)$, si $g \in G$.

2.2. Sommes directes

Si V_1 et V_2 sont deux représentations de G , on peut munir $V_1 \oplus V_2$, somme directe des espaces vectoriels V_1 et V_2 , d'une action de G . Rappelons que $V_1 \oplus V_2$ est un espace vectoriel dont V_1 et V_2 sont des sous-espaces vectoriels qui sont en somme directe dans $V_1 \oplus V_2$. Comme on fait la somme directe d'un nombre fini d'espaces, on a une identification naturelle de $V_1 \oplus V_2$ avec le produit $V_1 \times V_2$, où $v_1 \in V_1$ s'identifie à $(v_1, 0) \in V_1 \times V_2$ et $v_2 \in V_2$ à $(0, v_2) \in V_1 \times V_2$. En utilisant cette identification, l'action de $g \in G$ sur $(v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2$ est donnée par $g \cdot (v_1, v_2) = (g \cdot v_1, g \cdot v_2)$. La représentation de G ainsi obtenue est encore notée $V_1 \oplus V_2$, et appelée *somme directe de V_1 et V_2* . Si on choisit une base e_1, \dots, e_m de V_1 et une base f_1, \dots, f_n de V_2 , alors $(e_1, 0), \dots, (e_m, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_n)$ est une base de V , et la matrice $R_V(g)$ dans cette base est la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} R_{V_1}(g) & 0 \\ 0 & R_{V_2}(g) \end{pmatrix}$, dont la trace est la somme des traces de $R_{V_1}(g)$ et $R_{V_2}(g)$. On a donc

$$\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}.$$

Le cas $V_1 = V_2$ n'est pas exclu, et $V \oplus V$ est une représentation de G contenant deux copies de V d'intersection nulle et dont la somme est tout. Par exemple, la représentation $\mathbf{C}(\lambda) \oplus \mathbf{C}(\lambda)$ de \mathbf{Z} est \mathbf{C}^2 muni de l'homothétie λ , les deux copies de $\mathbf{C}(\lambda)$ obtenue en identifiant la somme au produit étant $\mathbf{C} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbf{C}$ (il y a beaucoup d'autres copies de $\mathbf{C}(\lambda)$ dans $\mathbf{C}(\lambda) \oplus \mathbf{C}(\lambda)$ puisque toute droite en est une). Plus généralement, si $m \in \mathbf{N}$, on note mV la somme directe de m copies de V (pour $m = 0$, on obtient l'espace vectoriel 0). Si les V_i , pour $i \in I$ fini, sont des représentations de G , et si $m_i \in \mathbf{N}$, pour

tout $i \in I$, alors $\bigoplus_{i \in I} m_i V_i$ est une représentation de G de caractère

$$\chi_{\bigoplus_{i \in I} m_i V_i} = \sum_{i \in I} m_i \chi_{V_i}.$$

2.3. Représentations de permutation, représentation régulière

Si X est un ensemble fini muni d'une action (à gauche) de G donnée par $(g, x) \mapsto g \cdot x$, on définit la *représentation de permutation* V_X , associée à X , comme l'espace vectoriel V_X de dimension $|X|$, de base $(e_x)_{x \in X}$, muni de l'action linéaire de G donnée, sur les vecteurs de la base, par $g \cdot e_x = e_{g \cdot x}$. Si $g_1, g_2 \in G$, et si $x \in X$, on a $g_1 \cdot (g_2 \cdot e_x) = g_1 \cdot e_{g_2 \cdot x} = e_{g_1 g_2 \cdot x} = g_1 g_2 \cdot e_x$, ce qui prouve que la formule précédente définit bien une action de G sur V_X . Dans la base $(e_x)_{x \in X}$, la matrice de g est une *matrice de permutation* (i.e. a exactement un 1 par ligne et par colonne, et tous les autres coefficients sont nuls), et le terme diagonal $a_{x,x}$ est égal à 1 si et seulement si $g \cdot x = x$ (i.e. si x est un point fixe de g), sinon, il vaut 0. On en déduit que la trace de la matrice de g est le nombre de points fixes de g agissant sur X . Autrement dit, on a

$$\chi_{V_X}(g) = |\{x \in X, g \cdot x = x\}|.$$

Un cas particulier intéressant est celui où G est fini, $X = G$, et l'action de G est donnée par la multiplication à gauche (i.e. $g \cdot h = gh$). La représentation V_G ainsi obtenue est la *représentation régulière* de G . Comme $gh = h$ implique $g = 1$, on voit que le caractère de la représentation régulière est donné par la formule

$$\chi_{V_G}(1) = |G|, \quad \text{et} \quad \chi_{V_G}(g) = 0, \quad \text{si } g \in G - \{1\}.$$

3. Morphismes de représentations

3.1. La représentation $\text{Hom}(V_1, V_2)$

Soient V_1 et V_2 deux représentations de G , et soit $u : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire. Si $g \in G$, on définit $g \cdot u : V_1 \rightarrow V_2$ par la formule $(g \cdot u)(v) = g \cdot u(g^{-1} \cdot v)$, quel que soit $v \in V_1$. Si $g_1, g_2 \in G$, et si $v \in V_1$, on a

$$\begin{aligned} (g_1 \cdot (g_2 \cdot u))(v) &= g_1 \cdot ((g_2 \cdot u)(g_1^{-1} \cdot v)) \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot u(g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot v)) = g_1 g_2 \cdot u((g_1 g_2)^{-1} \cdot v) = (g_1 g_2 \cdot u)(v), \end{aligned}$$

et donc $g_1 \cdot (g_2 \cdot u) = g_1 g_2 \cdot u$, ce qui prouve que l'on a défini de la sorte une action de G sur l'espace $\text{Hom}(V_1, V_2)$ des applications linéaires de V_1 dans V_2 .

Si $g \in G$, l'endomorphisme $\rho_{\text{Hom}(V_1, V_2), g}$ de $\text{Hom}(V_1, V_2)$ est alors donné par la formule :

$$\rho_{\text{Hom}(V_1, V_2), g}(u) = \rho_{V_2, g} \circ u \circ \rho_{V_1, g}^{-1}, \quad \text{si } u \in \text{Hom}(V_1, V_2).$$

Proposition I.1.8. — *Si G est fini, et si $g \in G$, alors*

$$\chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)}(g) = \overline{\chi_{V_1}(g)} \chi_{V_2}(g).$$

Démonstration. — Si g est fixé, on peut choisir une base $(e_i)_{i \in I}$ de V_1 et une base $(f_j)_{j \in J}$ de V_2 dans lesquelles les actions de g sont diagonales. Il existe donc des racines de l'unité α_i , pour $i \in I$, et β_j , pour $j \in J$, tels que $g \cdot e_i = \alpha_i e_i$, si $i \in I$, et $g \cdot f_j = \beta_j f_j$, si $j \in J$. On a alors $\chi_{V_1}(g) = \sum_{i \in I} \alpha_i$ et $\chi_{V_2}(g) = \sum_{j \in J} \beta_j$.

Si $(i, j) \in I \times J$, soit $u_{i,j} : V_1 \rightarrow V_2$ l'application linéaire définie par $u_{i,j}(e_i) = f_j$, et $u_{i,j}(e_{i'}) = 0$, si $i' \neq i$. Les $u_{i,j}$, pour $(i, j) \in I \times J$ forment une base de $\text{Hom}(V_1, V_2)$, et on a $g \cdot u_{i,j} = \alpha_i^{-1} \beta_j u_{i,j} = \overline{\alpha_i} \beta_j u_{i,j}$. On a donc

$$\chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)}(g) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \overline{\alpha_i} \beta_j = \left(\sum_{i \in I} \overline{\alpha_i} \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j \right) = \overline{\chi_{V_1}(g)} \chi_{V_2}(g).$$

Ceci permet de conclure.

Remarque I.1.9. — Si $V_1 = V$ et si V_2 est la représentation triviale, la représentation $\text{Hom}(V_1, V_2) = \text{Hom}(V, \mathbf{C})$ est la *représentation duale* V^* de V . On a $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$, d'après la prop. I.1.8.

3.2. Opérateurs d'entrelacement, représentations isomorphes

Notons $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ l'ensemble des applications linéaires de V_1 dans V_2 commutant à l'action de G . C'est un sous-espace vectoriel de $\text{Hom}(V_1, V_2)$ et un élément u de $\text{Hom}(V_1, V_2)$ est dans $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$, si et seulement si on a $g \cdot u(v) = u(g \cdot v)$, quel que soit $v \in V_1$. Appliqué à $g^{-1} \cdot v$, ceci peut aussi se réécrire sous la forme $g \cdot u(g^{-1} \cdot v) = u(v)$, quel que soit $v \in V_1$, ou encore, sous la forme $g \cdot u = u$. Autrement dit, $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ est le sous-espace vectoriel de $\text{Hom}(V_1, V_2)$ des éléments fixes sous l'action de G . Les éléments de $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ sont souvent appelés des *opérateurs d'entrelacement*.

Exemple I.1.10. — Si V est une représentation de G , l'ensemble V^G des éléments de V fixes sous l'action de G est un sous-espace vectoriel de V (c'est l'intersection des noyaux des $g - 1$, pour $g \in G$) qui est stable sous l'action de G , et sur lequel G agit trivialement par construction ; c'est donc une représentation de G . Maintenant, si G est fini, on peut considérer l'*opérateur de moyenne* $M : V \rightarrow V$ défini par $M(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v$. Alors M est un opérateur d'entrelacement entre V et V^G . En effet, si $h \in G$, et si $v \in V$, on a

$$\begin{aligned} h \cdot M(v) &= h \cdot \left(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot v \right) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} h \cdot (g \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hg \cdot v \\ M(h \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot (h \cdot v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gh \cdot v \end{aligned}$$

et comme $g \mapsto hg$ et $g \mapsto gh$ sont des bijections de G dans G , les deux quantités sont égales à $M(v)$. Cela prouve à la fois que $M(v) \in V^G$ et que $M : V \rightarrow V^G$ commute à l'action de G .

Remarque I.1.11. — L'idée, selon laquelle il suffit de faire la moyenne sous l'action du groupe pour obtenir quelque chose de fixe par tout le groupe, joue un rôle très important dans la théorie.

On dit que deux représentations V_1 et V_2 de G sont *isomorphes*, s'il existe un isomorphisme linéaire $u : V_1 \rightarrow V_2$ commutant à l'action de G , (autrement dit, s'il existe $u \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$ bijectif, ce qui implique, en particulier, que V_1 et V_2 ont la même dimension). Traduit en termes des morphismes $\rho_{V_1} : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_1)$ et $\rho_{V_2} : G \rightarrow \mathbf{GL}(V_2)$ attachés à V_1 et V_2 , cette relation devient $u \circ \rho_{V_1}(g) = \rho_{V_2}(g) \circ u$, quel que soit $g \in G$. Traduit en termes matriciels (après avoir choisi des bases de V_1 et V_2), cela se traduit par l'existence de $T \in \mathbf{GL}_d(\mathbf{C})$, tel que $T R_{V_1}(g) = R_{V_2}(g) T$, quel que soit $g \in G$, ce qui peut encore se mettre sous la forme $R_{V_2}(g) = T R_{V_1}(g) T^{-1}$. En particulier, $\chi_{V_1}(g) = \chi_{V_2}(g)$ quel que soit $g \in G$.

Remarque I.1.12. — (i) On verra plus loin que, si G est fini, la réciproque est vraie : si V_1 et V_2 ont mêmes caractères, alors elles sont isomorphes, ce qui peut sembler un peu surprenant, le caractère ne permettant, a priori, que de calculer la trace des endomorphismes.

(ii) Dans le cas de \mathbf{Z} , en notant R_i , pour $i = 1, 2$, la matrice de $\rho_{V_i}(1)$, on voit que V_1 et V_2 sont isomorphes si et seulement s'il existe T inversible telle que $R_2 = T R_1 T^{-1}$ (i.e. si et seulement si R_2 et R_1 sont des matrices semblables). Il en résulte que la classification des représentations de \mathbf{Z} à isomorphisme près est équivalente à celle des matrices à similitude près, ce qui se fait en utilisant la forme de Jordan. Si on impose à $R = R_V(1)$ d'être diagonalisable, alors V est donnée, à isomorphisme près, par les valeurs propres de R avec leurs multiplicités.

I.2. Décomposition des représentations

Quand on essaye de classifier les objets d'un certain type (par exemple les groupes finis, les représentations d'un groupe fini...), on est amené à comprendre quels sont les objets que l'on ne peut pas casser en morceaux (les groupes simples, si on s'intéresse aux groupes, les représentations irréductibles dans le cas des représentations d'un groupe fini...), et comment on peut assembler les morceaux pour décrire tous les objets qui nous intéressent. Dans le cas des représentations d'un groupe fini, le th. de Maschke (th. I.2.5) montre que cette seconde étape ne pose aucun problème ; le cor. I.2.12, quant à lui, montre que faire la liste des objets irréductibles n'est pas une entreprise vouée à l'échec.

1. Décomposition en somme directe de représentations irréductibles

Soient G un groupe et V une représentation de G . Une *sous-représentation* de V est un sous-espace vectoriel de V stable par G . Par exemple, si $v \in V - \{0\}$, le sous-espace vectoriel de V engendré par les $g \cdot v$, pour $g \in G$, est une sous-représentation de V ; c'est

la sous-représentation de V engendrée par v (i.e. la plus petite sous-représentation de V contenant v). On dit que V est *irréductible* si V ne possède pas de sous-représentation autre que 0 ou V . De manière équivalente, V est irréductible si, quel que soit $v \in V - \{0\}$, le sous-espace vectoriel de V engendré par les $g \cdot v$, pour $g \in G$, est égal à V .

Exemple I.2.1. — La représentation de S_3 sur \mathbf{C}^2 de l'ex. I.1.4 est irréductible. En effet, comme elle est de dimension 2, une sous-représentation autre que 0 ou \mathbf{C}^2 serait une droite de \mathbf{C}^2 . Une telle droite serait en particulier stable par les symétries orthogonales s_{OA} et s_{OB} par rapport aux droites (OA) et (OB), ce qui est impossible vu que les droites stables par s_{OA} sont les axes de coordonnées, et que ces axes ne sont pas stables par s_{OB} .

Exemple I.2.2. — Soit V une représentation de \mathbf{Z} , et soit $u = \rho_V(1)$. Comme \mathbf{C} est algébriquement clos, u admet une valeur propre λ , non nulle car u est inversible. Soit $e_\lambda \in V$ un vecteur propre pour la valeur propre λ . On a alors $n \cdot e_\lambda = u^n(e_\lambda) = \lambda^n e_\lambda$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, ce qui prouve que la droite $\mathbf{C}e_\lambda$ est stable sous l'action de \mathbf{Z} et est une sous-représentation de \mathbf{Z} isomorphe à la représentation $\mathbf{C}(\lambda)$ de l'ex. I.1.2. En particulier, si V est de dimension ≥ 2 , alors V n'est pas irréductible, et donc toute représentation irréductible de \mathbf{Z} est de dimension 1, isomorphe à $\mathbf{C}(\lambda)$, pour un $\lambda \in \mathbf{C}^*$ uniquement déterminé.

Supposons maintenant que u est diagonalisable. Soit v_1, \dots, v_d une base de V constituée de vecteurs propres de u , et soit λ_i la valeur propre associée à e_i . Alors V est la somme directe $\bigoplus_{i=1}^d \mathbf{C}e_i$ des droites $\mathbf{C}e_i$ qui sont des sous-représentations de V , chaque $\mathbf{C}e_i$ étant isomorphe à $\mathbf{C}(\lambda_i)$ en tant que représentation de \mathbf{Z} . On en déduit que V est, en tant que représentation de \mathbf{Z} , isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^d \mathbf{C}(\lambda_i)$.

Remarque I.2.3. — (i) Dire que V est isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^d \mathbf{C}(\lambda_i)$ signifie juste que $u = \rho_V(1)$ est diagonalisable, et que son polynôme caractéristique est $\prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$, ce qui est nettement moins précis que d'exhiber une base de vecteurs propres, et donc un isomorphisme de $\bigoplus_{i=1}^d \mathbf{C}(\lambda_i)$ sur V entre représentations de \mathbf{Z} .

(ii) Si u est diagonalisable, si les valeurs propres de u sont $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et si la multiplicité de λ_i est m_i , alors $V \cong \bigoplus_{i=1}^r m_i \mathbf{C}(\lambda_i)$.

(iii) Si u n'est pas diagonalisable, la représentation V ne se décompose pas comme une somme directe de représentations irréductibles.

Nous allons prouver que, si G est fini, toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles. Cela revient, en choisissant une base de chacune de ces représentations irréductibles, à exhiber une base de V dans laquelle les $\rho_V(g)$, pour $g \in G$, se mettent simultanément sous une forme diagonale par blocs⁽²⁾, la taille des blocs étant la

⁽²⁾C'est assez particulier aux représentations des groupes finis sur un corps de caractéristique 0. Même dans le cas des groupes finis, si on considère des représentations sur un corps de caractéristique > 0 , le mieux que l'on puisse espérer est une mise sous forme triangulaire supérieure par blocs. Par exemple, si V est la représentation de dimension 2 de $G = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur le corps $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, la matrice de $n \in \mathbf{Z}$ dans

plus petite possible. (C'est un peu analogue à la forme minimale d'une matrice de rotation dans \mathbf{R}^n .) Nous aurons besoin du résultat suivant.

Théorème I.2.4. — *Soit V une représentation de G . Il existe sur V un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ invariant sous l'action de G .*

Démonstration. — Partons d'un produit scalaire hermitien quelconque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V , et définissons $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ comme la moyenne des transformés de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sous l'action de G . Autrement dit, on a

$$\langle v_1, v_2 \rangle_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot v_1, g \cdot v_2 \rangle.$$

L'action de G étant linéaire, le résultat est bien linéaire par rapport à v_2 et sesquilinéaire par rapport à v_1 . De plus, $\langle v, v \rangle_V \geq \frac{1}{|G|} \langle v, v \rangle$, ce qui prouve que $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est défini positif. Finalement, si $h \in G$, on a

$$\langle h \cdot v_1, h \cdot v_2 \rangle_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot (h \cdot v_1), g \cdot (h \cdot v_2) \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle gh \cdot v_1, gh \cdot v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle_V,$$

car $g \mapsto gh$ induit une bijection de G sur lui-même. Ceci permet de conclure.

Théorème I.2.5. — (Maschke, 1899) *Toute représentation de G est somme directe de représentations irréductibles.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur la dimension. Si V est de dimension 1 ou est irréductible, il n'y a rien à faire. Si V est de dimension ≥ 2 et n'est pas irréductible, alors V possède une sous-représentation V_1 distincte de 0 et V . Si $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ est un produit scalaire hermitien sur V , invariant sous l'action de G , le supplémentaire orthogonal V_2 de V_1 est lui-aussi stable par G puisque que « v orthogonal à V_1 » équivaut à « $g \cdot v$ orthogonal à $g \cdot V_1 = V_1$ » par invariance du produit scalaire. On a alors $V = V_1 \oplus V_2$, et V_1 et V_2 sont de dimensions strictement inférieures à celle de V . L'hypothèse de récurrence permet de les décomposer comme des sommes directes de représentations irréductibles, ce qui prouve qu'on peut en faire autant de V .

Remarque I.2.6. — Si G est cyclique engendré par g , la décomposition de V en somme de représentations irréductibles est équivalente à une décomposition de V en droites invariantes sous l'action de g . On sait bien que si g a une valeur propre de multiplicité > 1 , cette décomposition n'est pas unique. Par contre, la décomposition en sous-espaces propres est, elle, parfaitement canonique. On verra plus loin (cor. I.2.16) que la situation est la même en ce qui concerne la décomposition en somme de représentations irréductibles d'une représentation d'un groupe fini quelconque.

une base (e_1, e_2) étant $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors le sous-espace V_1 , engendré par e_1 , est stable (et même fixe) par G , mais il est facile de voir que c'est le seul sous-espace propre de V ayant cette propriété. La représentation V n'est donc pas irréductible, mais n'est pas somme directe de représentations irréductibles.

2. Le lemme de Schur et ses conséquences immédiates

Théorème I.2.7. — (Lemme de Schur, 1905) *Soient G un groupe et V_1, V_2 des représentations irréductibles de G .*

- (i) *Si V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes, alors $\text{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$.*
- (ii) *Si $V_1 = V_2$, alors $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ est la droite des homothéties.*

Démonstration. — Soit $u \in \text{Hom}_G(V_1, V_2)$. Le fait que u commute à l'action de G , montre que $\text{Ker}(u) \subset V_1$ et $\text{Im}(u) \subset V_2$ sont stables par G . Comme par hypothèse, V_1 et V_2 sont irréductibles, on a soit $\text{Ker}(u) = V_1$, auquel cas $u = 0$, soit $\text{Ker}(u) = 0$, auquel cas $\text{Im}(u) \neq 0$ et donc $\text{Im}(u) = V_2$. On en déduit que, si $u \neq 0$, alors u est à la fois injective (puisque $\text{Ker}(u) = 0$) et surjective, et donc est un isomorphisme. Cela démontre le (i).

Passons au (ii). Comme on travaille avec des \mathbf{C} -espaces vectoriels, u admet une valeur propre λ . Donc $u - \lambda$, qui commute à l'action de G puisque u le fait et qu'une homothétie commute à tout, a un noyau non nul. Le même raisonnement qu'au (i) montre que ce noyau doit donc être égal à V_1 , ce qui se traduit par le fait que u est une homothétie de rapport λ . Ceci permet de conclure.

Remarque I.2.8. — Si V_1 et V_2 sont seulement isomorphes et pas égales, et si $u : V_1 \rightarrow V_2$ est un isomorphisme de représentations, on déduit du (ii) du lemme de Schur que tout élément de $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ est de la forme λu , avec $\lambda \in \mathbf{C}$.

Proposition I.2.9. — *Soient G un groupe fini et V_1, V_2 des représentations de G .*

- (i) *Si V_1 et V_2 sont irréductibles, non isomorphes, et si $u \in \text{Hom}(V_1, V_2)$, alors $M(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot u = 0$.*
- (ii) *Si V est irréductible, et si $u \in \text{Hom}(V, V)$, alors $M(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot u$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\dim V} \text{Tr}(u)$.*
- (iii) *Si V est irréductible, et si ϕ est une fonction centrale sur G , alors $\sum_{g \in G} \phi(g) \rho_V(g)$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} \phi(g) \chi(g)$.*

Démonstration. — Si V_1 et V_2 sont deux représentations de G , si $u \in \text{Hom}(V_1, V_2)$, et si $h \in G$, on a $h \cdot (\sum_{g \in G} g \cdot u) = \sum_{g \in G} hg \cdot u$. Comme $g \mapsto hg$ est une bijection de G sur lui-même, cette dernière quantité est aussi égale à $\sum_{g \in G} g \cdot u$. On en déduit que $M(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot u$ appartient à $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$.

Le (i) est donc une conséquence du (i) du lemme de Schur. Le (ii) du lemme de Schur montre, quant à lui, que $M(u)$ est une homothétie, si $u \in \text{Hom}(V, V)$ et V est irréductible. Pour déterminer le rapport de cette homothétie, il suffit d'en calculer la trace et de diviser par $\dim V$. Or on a $M(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_V(g) u \rho_V(g)^{-1}$, et donc $M(u)$ est la moyenne de $|G|$ termes dont chacun a pour trace $\text{Tr}(u)$, puisque la trace est invariante par conjugaison. On a donc $\text{Tr}(M(u)) = \text{Tr}(u)$, ce qui permet d'en déduire le (ii).

Enfin, si ϕ est une fonction centrale (i.e., si $\phi(hgh^{-1}) = \phi(g)$ pour tous $h, g \in G$), si $u_\phi = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho_V(g) \in \text{Hom}(V, V)$, et si $h \in G$, on a

$$\begin{aligned} h \cdot u_\phi &= \rho_V(h) \left(\sum_{g \in G} \phi(g) \rho_V(g) \right) \rho_V(h)^{-1} = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho_V(hgh^{-1}) \\ &= \sum_{g \in G} \phi(hgh^{-1}) \rho_V(hgh^{-1}) = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho_V(g) = u_\phi. \end{aligned}$$

On conclut comme ci-dessus que u_ϕ est l'homothétie de rapport

$$\frac{1}{\dim V} \text{Tr}(u_\phi) = \frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} \phi(g) \text{Tr}(\rho_V(g)) = \frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} \phi(g) \chi_V(g),$$

ce qui permet de conclure.

3. Orthogonalité des caractères

Soit G un groupe fini. On note $R_{\mathbf{C}}(G)$ l'espace vectoriel des fonctions centrales. Cet espace contient l'ensemble $R^+(G)$ des caractères des représentations de G qui lui-même, contient l'ensemble $\text{Irr}(G)$ des *caractères irréductibles* de G (i.e. les caractères des représentations irréductibles de G). Finalement, on note $R_{\mathbf{Z}}(G)$ le groupe des *caractères virtuels* de G ; c'est le sous-groupe (additif) de $R_{\mathbf{C}}(G)$ engendré par $R^+(G)$.

On munit $R_{\mathbf{C}}(G)$ du produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi_1(g)} \phi_2(g).$$

Théorème I.2.10. — (Frobenius, 1897) *Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales.*

Démonstration. — Soient χ_1 et χ_2 deux caractères, et soient V_1 et V_2 des représentations de G dont les caractères sont χ_1 et χ_2 . En utilisant la prop. I.1.8, on peut réécrire $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ sous la forme

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \chi_2(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)}(g).$$

Comme $\chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)}(g)$ est, par définition, la trace de g agissant sur $\text{Hom}(V_1, V_2)$, cela permet de voir $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle$ comme la trace de l'application linéaire $u \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot u = M(u)$ définie dans la prop. I.2.9. On déduit alors des (i) et (ii) de cette proposition les faits suivants.

- Si χ_1 et χ_2 sont irréductibles et distincts, alors M est identiquement nul, et donc $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \text{Tr}(M) = 0$.
- Si χ est irréductible, et si V est une représentation de caractère χ , alors M est l'application associant à $u \in \text{Hom}(V, V)$ l'homothétie de rapport $\frac{1}{\dim V} \text{Tr}(u)$. On en déduit que M admet comme valeurs propres 1 avec multiplicité 1, l'espace propre correspondant

étant la droite des homothéties, et 0 avec multiplicité $(\dim V)^2 - 1$, le noyau de M étant l'hyperplan des endomorphismes de trace nulle. La trace de M est donc 1, ce qui se traduit par $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Il résulte des deux points ci-dessus que les caractères irréductibles forment une famille orthonormale. Il reste à vérifier qu'ils forment une base de $R_{\mathbf{C}}(G)$, et pour cela, il suffit de vérifier qu'une fonction centrale ϕ , qui est orthogonale à tous les éléments de $\text{Irr}(G)$, est nulle. Pour cela, considérons la représentation régulière V_G de G , que l'on décompose en somme directe $V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ de représentations irréductibles. Si ϕ est une fonction centrale orthogonale à χ_{V_i} , il résulte du (iii) de la prop. I.2.9, que l'endomorphisme $\sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \rho_{V_i}(g)$ de V_i est nul. Donc, si ϕ est orthogonale à tous les caractères irréductibles, l'endomorphisme $\sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \rho_{V_G}(g)$ de V_G est nul. En faisant agir cet endomorphisme sur $e_1 \in V_G$, on en déduit que $0 = \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} g \cdot e_1 = \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} e_g$. Or les e_g , pour $g \in G$, forment une base de V_G ; la nullité de $\sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} e_g$ implique donc celle de $\overline{\phi(g)}$, quel que soit $g \in G$, et donc aussi celle de ϕ . Ceci permet de conclure.

Remarque I.2.11. — Si V_1 et V_2 sont irréductibles et non isomorphes, l'application M est identiquement nulle et donc $\text{Tr}(M) = 0$. Or il résulte de la démonstration du th. I.2.10 que $\text{Tr}(M) = \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle$. On en déduit en particulier que $\chi_{V_1} \neq \chi_{V_2}$. Autrement dit, l'application $W \mapsto \chi_W$ est une injection de l'ensemble des représentations irréductibles de G (à isomorphisme près) dans $\text{Irr}(G)$. Comme, par définition de $\text{Irr}(G)$, cette application est surjective, c'est une bijection, ce qui permet de voir $\text{Irr}(G)$ aussi comme l'ensemble des représentations irréductibles de G . C'est cette interprétation de $\text{Irr}(G)$ qui est utilisée dans la suite.

4. Applications du théorème principal

Le théorème I.2.10 a des tas de conséquences agréables.

4.1. Nombre des représentations irréductibles

Corollaire I.2.12. — *Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre $|\text{Conj}(G)|$ de classes de conjugaison dans G . En particulier, il est fini.*

Démonstration. — D'après le th. I.2.10, le nombre de représentations irréductibles de G est égal à la dimension de l'espace $R_{\mathbf{C}}(G)$ des fonctions centrales. Or une fonction est centrale si et seulement si elle est constante sur chaque classe de conjugaison; une fonction centrale ϕ peut donc s'écrire de manière unique sous la forme $\phi = \sum_{C \in \text{Conj}(G)} \lambda_C \mathbf{1}_C$, où $\mathbf{1}_C$ est la fonction indicatrice de C , et $\lambda_C \in \mathbf{C}$ (on a $\lambda_C = \phi(g)$, où g est n'importe quel élément de C). Les $\mathbf{1}_C$, pour $C \in \text{Conj}(G)$ forment donc une base de $R_{\mathbf{C}}(G)$ qui, de ce fait, est de dimension $|\text{Conj}(G)|$. Ceci permet de conclure.

Remarque I.2.13. — L'ensemble des représentations irréductibles de G et celui des classes de conjugaison dans G ont le même cardinal mais il n'y a, en général, aucune bijection naturelle entre ces deux ensembles.

4.2. La décomposition canonique d'une représentation

Le résultat suivant est un peu magique et très utile (par exemple pour décomposer une représentation obtenue par des procédés tensoriels comme au n° 1 du § I.3, ce qui sert beaucoup en physique des particules) ; on peut le voir comme une généralisation du calcul des valeurs propres d'un endomorphisme à partir du polynôme caractéristique. Dans les deux cas, on n'a pas besoin d'exhiber des vecteurs ayant le bon comportement ; on se contente de prouver qu'ils existent.

Corollaire I.2.14. — *Si V est une représentation de G , si $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ est une décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles, et si $W \in \text{Irr}(G)$, alors le nombre m_W de W_i qui sont isomorphes à W est égal à $\langle \chi_W, \chi_V \rangle$. En particulier, il ne dépend pas de la décomposition, et $V \cong \bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi_V \rangle W$.*

Démonstration. — On a $\chi_V = \chi_{W_1} + \cdots + \chi_{W_k}$, et donc

$$\langle \chi_W, \chi_V \rangle = \langle \chi_W, \chi_{W_1} \rangle + \cdots + \langle \chi_W, \chi_{W_k} \rangle.$$

Or $\langle \chi_W, \chi_{W_i} \rangle$ est égal à 1 ou 0 suivant que W_i est ou n'est pas isomorphe à W ; on a donc $\langle \chi_W, \chi_V \rangle = m_W$. Ceci permet de conclure.

Corollaire I.2.15. — *Deux représentations V_1 et V_2 de G ayant même caractère χ sont isomorphes.*

Démonstration. — Elles sont toutes les deux isomorphes à $\bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi \rangle W$, d'après le cor. I.2.14.

Corollaire I.2.16. — (Décomposition d'une représentation en composantes isotypiques) *Si V est une représentation de G , et si $W \in \text{Irr}(G)$, alors*

$$p_W = \frac{\dim W}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \rho_V(g),$$

est un projecteur commutant à l'action de G . De plus, toutes les représentations irréductibles de G apparaissant dans la décomposition de $p_W(V)$ sont isomorphes à W , et V est la somme directe des $p_W(V)$, pour $W \in \text{Irr}(G)$.

Démonstration. — Soit $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ une décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles. D'après le (iii) de la proposition I.2.9, la restriction de p_W à W_i est l'homothétie de rapport

$$\frac{\dim W}{|G| \dim W_i} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \chi_{W_i}(g) = \frac{\dim W}{\dim W_i} \langle \chi_W, \chi_{W_i} \rangle.$$

D'après les relations d'orthogonalité des caractères, cela implique que p_W est l'identité sur W_i , si $W_i \cong W$, et est nulle dans le cas contraire. Le résultat s'en déduit.

4.3. Un critère d'irréductibilité

Corollaire I.2.17. — Une représentation V de G est irréductible, si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$

Démonstration. — Si $V \cong \bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} m_W W$, alors

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \left\langle \sum_{W \in \text{Irr}(G)} m_W \chi_W, \sum_{W \in \text{Irr}(G)} m_W \chi_W \right\rangle = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} m_W^2.$$

Comme les m_W sont des entiers naturels, on en déduit que $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$ si et seulement si tous les m_W sont égaux à 0, sauf un qui est égal à 1. Ceci permet de conclure.

4.4. La décomposition de la représentation régulière

Corollaire I.2.18. — (i) Si W est irréductible, alors W apparaît dans la représentation régulière avec la multiplicité $\dim W$.

(ii) On a $\sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$ (formule de Burnside).

(iii) Si $g \neq 1$, alors $\sum_{W \in \text{Irr}(G)} \dim W \chi_W(g) = 0$.

Démonstration. — Le caractère χ_{V_G} de la représentation régulière est donné (alinéa 2.3 du § I.1) par $\chi_{V_G}(1) = |G|$ et $\chi_{V_G}(g) = 0$, si $g \neq 1$. Or la multiplicité de W dans V_G est, d'après le cor. I.2.14, égale à

$$\langle \chi_W, \chi_{V_G} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_W(g)} \chi_{V_G}(g) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi_W(1)} |G| = \overline{\chi_W(1)} = \dim W,$$

ce qui démontre le (i). On en déduit que $\chi_{V_G} = \sum_{W \in \text{Irr}(G)} \dim W \chi_W$. En appliquant cette identité à $g = 1$, on en déduit le (ii), et à $g \neq 1$, on en déduit le (iii).

5. Le cas des groupes commutatifs

Théorème I.2.19. — Si G est commutatif, toute représentation irréductible de G est de dimension 1. Autrement dit $\text{Irr}(G)$ coïncide avec l'ensemble \widehat{G} des caractères linéaires de G .

Démonstration. — Si G est commutatif, les classes de conjugaison sont réduites à un élément, et donc $|\text{Conj}(G)| = |G|$. Comme $|\text{Irr}(G)| = |\text{Conj}(G)|$ d'après le cor. I.2.12, comme $\sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$, d'après le (ii) du cor. I.2.18, et comme $\dim W \geq 1$, quel que soit $W \in \text{Irr}(G)$, on en déduit que $\dim W = 1$, quel que soit $W \in \text{Irr}(G)$, ce que l'on voulait démontrer⁽³⁾.

Corollaire I.2.20. — Si G est commutatif, toute fonction de G dans \mathbf{C} est combinaison linéaire de caractères linéaires.

⁽³⁾Une démonstration plus terre-à-terre est proposée dans l'ex. B.1.20.

Démonstration. — D'après le th. I.2.10, toute fonction centrale (et donc toute fonction puisque G est commutatif) est combinaison linéaire de caractères irréductibles. Le th. I.2.19 permet de conclure.

Comme les caractères linéaires d'un groupe commutatif G forment une base orthonormale des fonctions de G dans \mathbf{C} , il est très facile de décomposer une fonction quelconque comme une combinaison linéaire de caractères linéaires. Si ϕ est une fonction sur G , on définit la *transformée de Fourier* $\hat{\phi}$ comme la fonction définie sur \hat{G} par

$$\hat{\phi}(\chi) = \langle \chi, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \phi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)^{-1} \phi(g).$$

La *formule d'inversion de Fourier* s'exprime alors sous la forme

$$\phi = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{\phi}(\chi) \chi;$$

c'est une conséquence immédiate du fait que les χ , pour $\chi \in \hat{G}$, forment une famille orthonormale. Par exemple, si on applique ce qui précède à la fonction $\phi_a : G \rightarrow \mathbf{C}$ valant 1 en a et 0 ailleurs, on a $\hat{\phi}_a(\chi) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi(a)}$, et on obtient :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \overline{\chi(a)} \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un caractère linéaire de $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$ est appelé un *caractère de Dirichlet modulo D* . On note $\text{Dir}(D)$ l'ensemble de ces caractères. Le résultat suivant est un des ingrédients de la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique (cf. th. VII.4.5).

Proposition I.2.21. — *Si a est premier à D , alors*

$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \in \text{Dir}(D)} \overline{\chi(a)} \chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv a \pmod{D}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer ce qui précède au groupe $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$, dont le cardinal est $\varphi(D)$, et à la fonction $\phi_a : (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}$ valant 1 en a et 0 ailleurs.

6. Table des caractères d'un groupe fini

Soit G un groupe fini, et soit $c = |\text{Conj}(G)|$. La *table des caractères* de G est un tableau $c \times c$ dont les entrées sont les valeurs des caractères irréductibles sur les classes de conjugaison de G , le coefficient à l'intersection de la colonne correspondant au caractère χ et de la ligne correspondant à la classe de conjugaison C , étant $\chi(C)$. C'est en quelque sorte la carte du groupe G .

Remarque I.2.22. — Notons T_G la matrice $c \times c$ définie par la table des caractères. Notons aussi K la matrice diagonale dont la coordonnée diagonale sur la ligne correspondant à une classe de conjugaison C est $\frac{|C|}{|G|}$. Alors les relations d'orthogonalité des caractères s'expriment de manière compacte par la relation $T_G^* K T_G = I$. On en déduit que $K = (T_G^*)^{-1} T_G^{-1}$ et $K^{-1} = T_G T_G^*$. En particulier, les lignes de T_G forment une famille orthogonale, ce qui permet de remplir la table des caractères en n'en connaissant qu'une partie.

Par exemple, le groupe $\{\pm 1\}$ a deux classes de conjugaison 1 et -1 , et deux caractères irréductibles 1 et χ (de dimension 1 puisque $\{\pm 1\}$ est commutatif) ; sa table des caractères est très facile à établir :

	1	χ
1	1	1
-1	1	-1

FIG. 1. Table des caractères de $\{\pm 1\}$

L'exemple du groupe $\{\pm 1\}$ est un peu trop trivial pour donner une idée de la manière dont on peut construire la table des caractères d'un groupe. L'exemple de A_4 , traité ci-dessous, est nettement plus riche. Le lecteur trouvera dans les exercices d'autres techniques pour établir des tables de caractères de petits groupes. Le contraste entre la simplicité et la puissance de la théorie générale et le côté artisanal du traitement des cas particuliers est assez saisissant.

Rappelons que A_4 est le sous-groupe des permutations de S_4 de signature 1. Comme S_4 a 24 éléments, on a $|A_4| = 12$, et les éléments de A_4 sont :

- l'élément neutre id ,
- les trois produits de deux transpositions $s_2 = (12)(34)$, $s_3 = (13)(24)$ et $s_4 = (14)(23)$, qui sont d'ordre 2,
- les huit 3-cycles (123) , (234) , (341) , (412) et (132) , (243) , (314) , (421) , qui sont d'ordre 3.

Nous nous proposons d'établir la table des caractères de A_4 . Il y a plusieurs manières d'arriver au résultat. La manière la plus systématique consiste à déterminer les classes de conjugaison de A_4 , construire toutes les représentations irréductibles de A_4 , et calculer la valeur de leurs caractères sur les classes de conjugaison. C'est celle que nous explorons en

premier⁽⁴⁾ ; ensuite nous montrons un certain nombre de raccourcis possibles qui utilisent les théorèmes du cours.

(a) Soit t le 3-cycle (123) . On a $t^2 = (132)$, et comme t est d'ordre 3, le sous-groupe $T = \{1, t, t^2\}$ de A_4 engendré par t est d'ordre 3.

(b) $H = \{\text{id}, s_2, s_3, s_4\}$ est un sous-groupe commutatif distingué de A_4 .

Cela peut se vérifier par un calcul un peu fastidieux. On peut aussi remarquer qu'un 2-Sylow de A_4 est de cardinal 4, et comme H est de cardinal 4 et contient tous les éléments de A_4 d'ordre divisant 4, cela prouve qu'il n'y a qu'un seul 2-Sylow (qui est donc distingué puisque la conjugaison transforme un 2-Sylow en un 2-Sylow), et que ce 2-Sylow est H . De plus, tous les éléments de H sont d'ordre divisant 2, et un groupe ayant cette propriété est commutatif car $(xy)^2 = 1 = x^2y^2$ implique $xy = yx$.

(c) Tout élément de A_4 peut s'écrire sous la forme $t^a h$, avec $a \in \{0, 1, 2\}$ et $h \in H$, et ceci, de manière unique.

Les sous-groupes T et H de A_4 ont une intersection réduite à $\{\text{id}\}$. On en déduit que $(c, h) \mapsto ch$ est une injection de $T \times H$ dans A_4 ; en effet, si $c_1 h_1 = c_2 h_2$, alors $c_2^{-1} c_1 = h_2 h_1^{-1}$, et comme $c_2^{-1} c_1 \in T$ et $h_2 h_1^{-1} \in H$, on a $c_2 = c_1$ et $h_2 = h_1$. Comme $T \times H$ et A_4 ont le même cardinal, une injection est une bijection, ce qui permet de conclure.

(d) t et t^2 ne commutent à aucun élément de $H - \{\text{id}\}$.

Cela peut se vérifier par un calcul un peu pénible. On peut aussi remarquer que si t et $s \in H - \{\text{id}\}$ commutent, le sous-groupe G de A_4 engendré par s et t est commutatif et isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, car les sous-groupes $\{\text{id}, s\}$ et T engendrés par s et t sont en somme directe. Ceci n'est pas possible car A_4 ne contient pas d'élément d'ordre 6. L'argument est le même pour n'importe quel 3-cycle, et donc en particulier pour t^2 .

(e) Les classes de conjugaison de A_4 sont $B_1 = \{\text{id}\}$, $B_2 = H - \{\text{id}\}$, $B_3 = tH$ et $B_4 = t^2H$.

Un calcul particulièrement ennuyeux mènerait au résultat...

- Comme dans tout groupe, la classe de conjugaison de l'élément neutre n'a qu'un élément, et donc $B_1 \in \text{Conj}(A_4)$.

- Si $s \in B_2$, et si $t^a h$, avec $a \in \{0, 1, 2\}$ et $h \in H$ commute à s , on a $t^a h s = s t^a h$, et donc $t^a h s h = s t^a h^2$, et comme H est commutatif et $h^2 = \text{id}$, on obtient $t^a s = s t^a$, ce qui implique $a = 0$. Le centralisateur de s est donc H , et le cardinal de la classe de conjugaison de s est égal à $\frac{|A_4|}{|H|} = 3$. Comme un conjugué de s est d'ordre 2, cette classe de conjugaison est incluse dans B_2 , et donc lui est égale pour des raisons de cardinal.

- Enfin, le centralisateur de t et t^2 est T (si $t^a h t = t t^a h$, on a $h t = t h$, et donc $h = \text{id}$), ce qui fait que le cardinal de la classe de conjugaison de t est $\frac{|A_4|}{|T|} = 4$. Or on a $(t^a h) t (t^a h)^{-1} = t^a h t h^{-1} t^{-a} = t(t^{a-1} h t^{1-a})(t^a h^{-1} t^{-a}) \in tH$, car H est distingué et donc $t^{a-1} h t^{1-a} \in H$ et $t^a h^{-1} t^{-a} \in H$. La classe de conjugaison de t est donc incluse dans B_3 et lui est égale pour des raisons de cardinal. De même, la classe de conjugaison de t^2 est B_4 .

⁽⁴⁾Nous n'avons pas cherché la solution la plus courte ; au contraire, nous avons essayé d'employer un maximum de techniques de base de la théorie des groupes finis. On pourrait aller plus vite en utilisant ce qu'on sait des classes de conjugaison de S_4 (n° 3.5 du Vocabulaire).

Ceci permet de conclure.

(f) Soit $\rho = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ une racine primitive 3-ième de l'unité. Si $i \in \{0, 1, 2\}$, on définit $\eta^i : A_4 \rightarrow \mu_3$ par $\eta^i(t^a h) = \rho^{ia}$, si $a \in \{0, 1, 2\}$ et si $h \in H$. Alors $\eta^0 = 1$, η et η^2 sont des caractères linéaires distincts de A_4 .

Si $a, b \in \{0, 1, 2\}$, et si $h, g \in H$, alors $t^a h t^b g = t^{a+b}(t^{-b} h t^b)g$, et comme H est distingué, on a $t^{-b} h t^b \in H$, et donc $(t^{-b} h t^b)g \in H$ et $\eta^i(t^a h t^b g) = \rho^{i(a+b)} = \rho^{ia} \rho^{ib} = \eta^i(t^a h) \eta^i(t^b g)$.

(g) Soit V la représentation de permutation associée à l'action naturelle de A_4 sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Rappelons que cette représentation est \mathbf{C}^4 muni de l'action de A_4 définie, dans la base canonique e_1, \dots, e_4 , par $g(e_i) = e_{g(i)}$. L'hyperplan W d'équation $x_1 + \dots + x_4 = 0$ est stable par A_4 , et la représentation que l'on obtient est irréductible de caractère donné par $\chi_W(\text{id}) = 3$, $\chi_W(g) = -1$, si $g \in H - \{\text{id}\}$, et $\chi_W(g) = 0$, si $g \notin H$.

La représentation V se décompose sous la forme $V' \oplus W$, où V' est la droite engendré par $e_1 + \dots + e_4$ (isomorphe à $\mathbf{1}$ car $e_1 + \dots + e_4$ est fixe par A_4). Comme V est une représentation de permutation, $\chi_V(g)$ est le nombre de points fixes de g agissant sur $\{1, 2, 3, 4\}$. On a donc $\chi_V(\text{id}) = 4$, $\chi_V(g) = 0$, si $g \in H - \{\text{id}\}$ et $\chi_V(g) = 1$, si $g \notin H$. On en déduit le caractère de W , car on a $\chi_V = \chi_{V'} + \chi_W$, et $\chi_{V'}(g) = 1$ pour tout $g \in A_4$, puisque $V' \cong \mathbf{1}$. On a donc $\chi_W(\text{id}) = 3$, $\chi_W(g) = -1$, si $g \in H - \{\text{id}\}$, et $\chi_W(g) = 0$, si $g \notin H$.

Il reste à vérifier que W est irréductible. Commençons par constater que, si $g \in A_4$ et si $v = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbf{C}^4$, alors $g \cdot v = x_1 e_{g(1)} + \dots + x_4 e_{g(4)} = (x_{g^{-1}(1)}, \dots, x_{g^{-1}(4)})$. Maintenant, supposons $v \in W - \{0\}$ et soit W' le sous-espace de W engendré par les $g \cdot v$, pour $g \in A_4$ (il s'agit de prouver que $W' = W$, quel que soit v). Il existe donc $i \neq j$ tel que $x_i \neq x_j$ et, sans nuire à la généralité, on peut supposer que $x_1 \neq x_2$. L'image de v par le 3-cycle $t = (1, 2, 3)$ est alors (x_3, x_1, x_2, x_4) ; il en résulte que W' , qui contient $t \cdot v$ et v , contient $w = t \cdot v - v = (x_3 - x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, 0)$ (on a donc fait apparaître un 0). Le sous-espace W' contient aussi $w + g \cdot w$, si $g = (13)(24)$, et comme $w + g \cdot w = (x_1 - x_2)(e_2 + e_4 - e_1 - e_3)$ et $x_1 - x_2 \neq 0$, il contient le vecteur $f_1 = e_1 - e_2 + e_3 - e_4$. Il contient donc aussi les images $f_2 = e_1 + e_2 - e_3 - e_4$ et $f_3 = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ de ce vecteur par les 3-cycles (243) et (234) , et comme f_1, f_2, f_3 forment une base de W , on a $W' = W$, ce qui permet de conclure.

(h) La table des caractères de A_4 est celle de la figure 2.

	$\mathbf{1}$	η	η^2	χ_W
B_1	1	1	1	3
B_2	1	1	1	-1
B_3	1	ρ	ρ^2	0
B_4	1	ρ^2	ρ	0

FIG. 2. Table des caractères de A_4

En effet, A_4 ayant 4 classes de conjugaison, il a aussi 4 représentations irréductibles à isomorphisme près, qui sont donc les 3 caractères linéaires 1 , η et η^2 , et la représentation W

de dimension 3. Les valeurs des caractères de ces représentations ont été calculées ci-dessus ; ce sont les valeurs reportées dans la table. Ceci permet de conclure.

- *Premier raccourci.* On peut utiliser le cor. I.2.17 pour démontrer l'irréductibilité de W : on a $\langle \chi_W, \chi_W \rangle = \frac{1}{12}(3^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot 0) = 1$, ce qui prouve que W est irréductible.

- *Second raccourci.* Imaginons que l'on ait construit des représentations $1, \eta, \eta^2$ et W dont les caractères prennent les valeurs de la table sur B_1, B_2, B_3 et B_4 , mais qu'on ne sache pas quelles sont les classes de conjugaison de A_4 . Alors on peut en déduire que ces classes sont exactement B_1, B_2, B_3 et B_4 , ce qui permet de se passer des points (d) et (e) ci-dessus. En effet, comme $1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12$, la formule de Burnside ((ii) du cor. I.2.18) montre que $1, \eta, \eta^2$ et χ_W sont les éléments de $\text{Irr}(A_4)$, et donc (cor. I.2.12) que A_4 a 4 classes de conjugaison. Or on remarque que, si $i \neq j$, il existe $\chi \in \text{Irr}(A_4)$ prenant des valeurs distinctes sur B_i et B_j . Comme un élément de $\text{Irr}(A_4)$ est constant sur une classe de conjugaison, on en déduit que si $C \in \text{Conj}(A_4)$, il existe $i(C) \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $C \subset B_{i(C)}$. Les éléments de C formant une partition de A_4 , l'application $C \mapsto i(C)$ est surjective, et comme les deux ensembles ont le même nombre d'éléments, elle est bijective ; de plus, on a $B_{i(C)} = C$, sinon un élément de $B_{i(C)} - C$ ne serait pas dans la réunion des classes de conjugaison. En résumé, les classes de conjugaison de A_4 sont les B_i .

- *Troisième raccourci.* Supposons W construite. La formule de Burnside ((ii) du cor. I.2.18) nous fournit alors l'identité $12 = |A_4| = 9 + \sum_{W' \in \text{Irr}(A_4) - \{W\}} (\dim W')^2$, et comme il y a une seule manière d'écrire 3 comme une somme de carrés, on en déduit que A_4 a trois caractères linéaires distincts. Autrement dit, le groupe \widehat{A}_4 (cf. ex. I.1.7) est de cardinal 3 et donc isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$; en particulier, il est cyclique et si on note η un générateur, les éléments de \widehat{A}_4 sont η, η^2 et le caractère trivial qui est aussi égal à η^3 . Comme η est d'ordre 3, il est à valeurs dans le groupe μ_3 des racines 3-ièmes de l'unité, et son image étant un sous-groupe de μ_3 non réduit à 1, c'est μ_3 tout entier. En particulier, l'image de η est de cardinal 3, et donc le noyau est de cardinal $|A_4|/3 = 4$. Par ailleurs, on a $H \subset \text{Ker } \chi$ car le seul élément de μ_3 d'ordre divisant 2 est 1. On en déduit que $\text{Ker } \chi = H$, ce qui permet de redémontrer le point (b). Enfin, on a $\eta(t) \neq 1$ puisque $t \notin H$, et donc $\eta(t) = \rho$ ou $\eta(t) = \rho^2$; quitte à remplacer η par η^2 , on peut supposer que $\eta(t) = \rho$. On a alors $\eta(g) = 1$ si $g \in H = B_1 \cup B_2$, $\eta(g) = \rho$ si $g \in B_3 = tH$, et $\eta(g) = \rho^2$ si $g \in B_4 = t^2H$. Ceci permet, en utilisant le second raccourci, de compléter la table des caractères de A_4 sans avoir utilisé un seul des points (a)-(e) au sujet de la structure de A_4 ni le point (f).

- *Quatrième raccourci.* On suppose ce coup-ci que l'on a construit η , ce qui utilise les points (a)-(c) et (f), mais pas les (d), (e) et (g). La formule de Burnside montre alors, qu'il y a a priori quatre possibilités pour les caractères irréductibles distincts des caractères linéaires $1, \eta$ et η^2 :

- un unique caractère χ_W de degré 3,
- deux caractères de degré 2 et un de degré 1, ou un de degré 2 et cinq de degré 1,
- neuf caractères de degré 1.

Si on est dans le premier cas, on a gagné car $1 + \eta + \eta^2 + 3\chi_W$ est le caractère de la représentation régulière, ce qui permet de calculer χ_W , et donc de compléter la table en utilisant le second raccourci. Il suffit donc d'éliminer les autres possibilités.

★ La dernière implique que $|\text{Irr}(A_4)| = 12$, ce qui implique que A_4 a 12 classes de conjugaison (cor. I.2.12), et donc que celles-ci sont des singletons, et que A_4 est commutatif, ce qui n'est pas.

★ Si A_4 a au moins une représentation irréductible V de dimension 2, alors $\chi_V, \chi_V\eta$ et $\chi_V\eta^2$ sont des caractères irréductibles de degré 2 (cf. alinéa 2.1), et comme il y a au plus deux tels caractères, il existe $\eta_1 \neq \eta_2 \in \{1, \eta, \eta^2\}$ tels que $\chi_V\eta_1 = \chi_V\eta_2$. Or la condition $\eta_1 \neq \eta_2$ implique que $\eta_1(t) \neq \eta_2(t)$, et la relation $\chi_V\eta_1 = \chi_V\eta_2$ entraîne donc $\chi_V(t) = 0$. Ceci n'est pas possible, car t est d'ordre 3, ce qui fait que les deux valeurs propres de $\rho_V(t)$ sont des racines 3-ièmes de l'unité, et la somme de deux racines

3-ièmes n'est jamais nulle. L'existence d'une représentation irréductible de dimension 2 est donc exclue, ce qui permet de conclure.

I.3. Construction de représentations

1. Constructions tensorielles de représentations

1.1. Produit tensoriel d'espaces vectoriels de dimension finie

Soient V_1, V_2 deux espaces vectoriels de dimension finie, et soient (e_1, \dots, e_n) une base de V_1 et (f_1, \dots, f_m) une base de V_2 . Soit $V_1 \otimes V_2$ le *produit tensoriel de V_1 et V_2* : c'est l'espace vectoriel de base⁽⁵⁾ les $e_i \otimes f_j$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. Si $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in V_1$ et $y = \sum_{j=1}^m \mu_j f_j \in V_2$, on note $x \otimes y$ l'élément de $V_1 \otimes V_2$ défini par la formule

$$x \otimes y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j e_i \otimes f_j.$$

Le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ est en général un objet nouveau, mais il arrive qu'il puisse se décrire de manière plus explicite.

Exemple I.3.1. — (i) Si X est un ensemble fini, on note \mathbf{C}^X l'ensemble des fonctions $\phi : X \rightarrow \mathbf{C}$. C'est un espace vectoriel dont une base est l'ensemble des ϕ_x , pour $x \in X$, où $\phi_x(y) = 1$, si $y = x$ et $\phi_x(y) = 0$, si $y \neq x$. Il est facile de vérifier que, si I et J sont deux ensembles finis, alors $\phi_i \otimes \phi_j \mapsto \phi_{(i,j)}$, pour $i \in I$ et $j \in J$, induit un isomorphisme de $\mathbf{C}^I \otimes \mathbf{C}^J$ sur $\mathbf{C}^{I \times J}$.

(ii) Si V_1, V_2 sont deux espaces vectoriels, et si V_1^* et V_2^* sont leur duals (V_i^* est l'espace des formes linéaires sur V_i), alors $V_1^* \otimes V_2^*$ est l'espace des formes bilinéaires sur $V_1 \times V_2$. Si $\lambda_1 \in V_1^*$ et $\lambda_2 \in V_2^*$, alors $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ est la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \lambda_1(x)\lambda_2(y)$.

Par construction, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ est une application bilinéaire de $V_1 \times V_2$ dans $V_1 \otimes V_2$. Le lemme suivant montre que $V_1 \otimes V_2$ est *universel* pour les applications bilinéaires sur $V_1 \times V_2$.

Lemme I.3.2. — *Si W est un espace vectoriel, et si $u : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ est bilinéaire, alors il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W$, telle que $\tilde{u}(x \otimes y) = u(x, y)$, quels que soient $x \in V_1$ et $y \in V_2$.*

Démonstration. — On définit \tilde{u} par ses valeurs sur les éléments de la base des $e_i \otimes f_j$, en posant $\tilde{u}(e_i \otimes f_j) = u(e_i, f_j)$. Un calcul immédiat montre alors que la bilinéarité de u est équivalente à la relation $\tilde{u}(x \otimes y) = u(x, y)$, quels que soient $x \in V_1$ et $y \in V_2$. Ceci permet de conclure⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾On aurait pu noter $g_{i,j}$ la base de $V_1 \otimes V_2$, mais la notation $e_i \otimes f_j$ est plus parlante pour la suite.

⁽⁶⁾Cette caractérisation de $V_1 \otimes V_2$ comme solution d'un problème universel permet de montrer son indépendance par rapport aux bases de V_1 et V_2 choisies pour sa construction. En effet, si X est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire $B : V_1 \times V_2 \rightarrow X$ tel que pour toute application bilinéaire

Maintenant, si $u_1 \in \text{End}(V_1)$ et $u_2 \in \text{End}(V_2)$, alors $(x, y) \mapsto u_1(x) \otimes u_2(y)$ est bilinéaire de $V_1 \times V_2$ dans $V_1 \otimes V_2$. D'après le lemme I.3.2, il existe $u_1 \otimes u_2 \in \text{End}(V_1 \otimes V_2)$ unique, tel que $(u_1 \otimes u_2)(x \otimes y) = u_1(x) \otimes u_2(y)$, quels que soient $x \in V_1$ et $y \in V_2$. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ est la matrice de u_1 , et $B = (b_{i',j'})_{1 \leq i',j' \leq m} \in \mathbf{M}_m(\mathbf{C})$ est la matrice de u_2 , alors la matrice $A \otimes B \in \mathbf{M}_{nm}(\mathbf{C})$ de $u_1 \otimes u_2$, dans la base des $e_i \otimes f_{i'} = g_{(i-1)m+i', (j-1)m+j'}$, est la matrice des $c_{(i-1)m+i', (j-1)m+j'}$, avec $1 \leq i, j \leq n$ et $1 \leq i', j' \leq m$ et $c_{(i-1)m+i', (j-1)m+j'} = a_{i,j} b_{i',j'}$. En particulier, on a

$$\text{Tr}(u_1 \otimes u_2) = \sum_{1 \leq k \leq nm} c_{k,k} = \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^m a_{i,i} b_{i',i'} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) \left(\sum_{i'=1}^m b_{i',i'} \right) = \text{Tr}(u_1) \text{Tr}(u_2).$$

Enfin, on déduit du lemme I.3.2 que, si $u'_1, u''_1 \in \text{End}(V_1)$, et si $u'_2, u''_2 \in \text{End}(V_2)$, alors

$$(u'_1 \circ u''_1) \otimes (u'_2 \circ u''_2) = (u'_1 \otimes u'_2) \circ (u''_1 \otimes u''_2).$$

(Il suffit de comparer l'image de $x \otimes y$ par les endomorphismes dans les deux membres.)

1.2. Produit tensoriel de représentations

Soient G un groupe fini, et V_1, V_2 deux représentations de G . D'après ce qui précède, si on définit une action de G sur $V_1 \otimes V_2$ par $g \cdot (x \otimes y) = (g \cdot x) \otimes (g \cdot y)$, on obtient une représentation de G . La formule ci-dessus pour la trace de $u_1 \otimes u_2$ montre que

$$\chi_{V_1 \otimes V_2}(g) = \chi_1(g) \chi_2(g).$$

Si V_2 est de dimension 1, on retrouve la construction de la torsion d'une représentation par un caractère linéaire (alinéa 2.1 du § I.1).

Remarque I.3.3. — (i) Si G_1 et G_2 sont deux groupes finis, et si V_1 et V_2 sont des représentations de G_1 et G_2 respectivement, on peut définir de la même manière une représentation $V_1 \boxtimes V_2$ de $G_1 \times G_2$, en faisant agir $g = (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ sur l'espace vectoriel $V_1 \otimes V_2$ par $g \cdot (x \otimes y) = (g_1 \cdot x) \otimes (g_2 \cdot y)$.

(ii) Si $G_1 = G_2 = G$, la représentation $V_1 \otimes V_2$ de G définie précédemment est la restriction à G , vu comme ensemble des couples (g, g) de $G \times G$, de la représentation

$u : V_1 \times V_2 \rightarrow W$, il existe une unique application linéaire $\tilde{u} : X \rightarrow W$, telle que $\tilde{u}(B(x, y)) = u(x, y)$, quels que soient $x \in V_1$ et $y \in V_2$, alors il existe une unique application linéaire $f : V_1 \otimes V_2 \rightarrow X$ vérifiant $f(x \otimes y) = B(x, y)$, pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_2$ et une unique application linéaire $g : X \rightarrow V_1 \otimes V_2$ vérifiant $g(B(x, y)) = x \otimes y$, pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_2$. Comme l'identité est l'unique application linéaire h de $V_1 \otimes V_2$ (resp. X) dans lui-même telle que $h(x \otimes y) = x \otimes y$ (resp. $h(B(x, y)) = B(x, y)$), pour tout $(x, y) \in V_1 \times V_2$, on a $f \circ g = \text{id}_X$ et $g \circ f = \text{id}_{V_1 \otimes V_2}$, ce qui montre que X et $V_1 \otimes V_2$ sont isomorphes, à isomorphisme unique près respectant les formes bilinéaires sur $V_1 \times V_2$. Une construction générale, sans choix de base, consiste à prendre le quotient de l'espace de base les $e_{x,y}$, pour $(x, y) \in V_1 \times V_2$, par les relations $e_{x, y_1 + y_2} = e_{x, y_1} + e_{x, y_2}$, $e_{x_1 + x_2, y} = e_{x_1, y} + e_{x_2, y}$ et $e_{\lambda x, y} = e_{x, \lambda y} = \lambda e_{x, y}$. Alors $x \otimes y$ est l'image de $e_{x,y}$ dans le quotient. La construction du texte est moins canonique mais plus concrète... La construction générale a l'avantage de marcher aussi en dimension infinie où une base n'est pas toujours facile à exhiber.

$V_1 \boxtimes V_2$ de $G \times G$ (c'est pour pouvoir faire la distinction que $V_1 \boxtimes V_2$ n'est pas notée $V_1 \otimes V_2$).

1.3. Carré symétrique et carré extérieur d'une représentation

Si V est une représentation d'un groupe fini G , la représentation $V \otimes V$ n'est pas irréductible. En effet, les *tenseurs symétriques* (i.e. les expressions de la forme $xy = \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x)$, avec $x, y \in V$, et donc $xy = yx$, si $x, y \in V$) et les *tenseurs alternés* (les $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$, et donc $x \wedge y = -y \wedge x$, si $x, y \in V$) sont stables sous l'action de G ; il en est donc de même des sous-espaces de $V \otimes V$ qu'ils engendrent.

On note $\text{Sym}^2 V$ le *carré symétrique* de V ; c'est le sous-espace de $V \otimes V$ engendré par les tenseurs symétriques. Si V est de dimension d , de base (e_1, \dots, e_d) , alors $\text{Sym}^2 V$ est un espace de dimension $\frac{d(d+1)}{2}$ dont une base est constituée des $e_i e_j$, pour $1 \leq i \leq j \leq d$.

On note $\wedge^2 V$ le *carré extérieur* de V ; c'est le sous-espace de $V \otimes V$ engendré par les tenseurs alternés. C'est un espace de dimension $\frac{d(d-1)}{2}$ dont une base est constituée des $e_i \wedge e_j$, pour $1 \leq i < j \leq d$.

De plus, on a $V \otimes V = \text{Sym}^2 V \oplus \wedge^2 V$.

Exemple I.3.4. — Si V^* est le dual de V , alors $\text{Sym}^2 V^*$ est l'espace des formes bilinéaires symétriques sur V et $\wedge^2 V^*$ est celui des formes bilinéaires alternées.

Proposition I.3.5. — *Si V est une représentation de G , et si $g \in G$, alors*

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)) \quad \text{et} \quad \chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)).$$

Démonstration. — Choisissons une base (e_1, \dots, e_d) de V formée de vecteurs propres de g . On a alors $g \cdot e_i = \lambda_i e_i$, $g^2 \cdot e_i = \lambda_i^2 e_i$, et $g \cdot e_i e_j = \lambda_i \lambda_j e_i e_j$, $g \cdot e_i \wedge e_j = \lambda_i \lambda_j e_i \wedge e_j$. On en déduit que

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \sum_{i \leq j} \lambda_i \lambda_j \quad \text{et} \quad \chi_{\wedge^2 V}(g) = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j,$$

et comme

$$\chi_V(g^2) = \sum_i \lambda_i^2 \quad \text{et} \quad \chi_V(g)^2 = \left(\sum_i \lambda_i \right)^2 = \sum_i \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j,$$

le résultat s'en déduit.

Remarque I.3.6. — Ce que l'on a fait avec deux copies de la même représentation V de G peut se généraliser à n copies de V . On note $\otimes^n V$ le produit tensoriel de n copies de V (avec une définition évidente). On note S_n le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$, et $\text{sign} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ la signature. Un tenseur symétrique est un tenseur de la forme

$$x_1 \cdots x_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

et un tenseur alterné est un tenseur de la forme

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_n = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

La *puissance symétrique n-ième* de V est le sous-espace $\text{Sym}^n V$ de $\otimes^n V$ engendré par les tenseurs symétriques, et la *puissance extérieure n-ième* de V est le sous-espace $\wedge^n V$ de $\otimes^n V$ engendré par les tenseurs alternés. Alors $\text{Sym}^n V$ et $\wedge^n V$ sont des représentations de G de dimensions respectives $\binom{d+n-1}{n}$ et $\binom{d}{n}$. ($\text{Sym}^n V \oplus \wedge^n V$ est un sous-espace strict de $\otimes^n V$, dès que $n \geq 3$.)

En particulier, $\wedge^n V = 0$ si $n > d$, et $\wedge^d V$ est de dimension 1 ; cette représentation est souvent notée $\det V$, l'action de g sur $\det V$ étant la multiplication par $\det \rho_V(g)$. C'est d'ailleurs comme cela que l'on définit le déterminant d'un endomorphisme et que l'on montre la multiplicativité du déterminant.

2. Représentations induites

2.1. Caractère d'une représentation induite

Soit H un sous-groupe de G , et soit V une représentation de H . On définit l'espace vectoriel $\text{Ind}_H^G V$ par

$$\text{Ind}_H^G V = \{ \varphi : G \rightarrow V, \varphi(hx) = h \cdot \varphi(x), \text{ quels que soient } h \in H \text{ et } x \in G \}.$$

Soit $S \subset G$ un système de représentants de $H \backslash G$. Si $x \in G$, il existe alors un unique $h_x \in H$ tel que $h_x^{-1}x \in S$. Ceci permet d'établir un isomorphisme de $\text{Ind}_H^G V$ sur l'espace V^S des applications de S dans V , en envoyant φ sur $(\varphi(s))_{s \in S}$; la bijection réciproque envoie $(v_s)_{s \in S} \in V^S$ sur l'application $\varphi : G \rightarrow V$ définie par $\varphi(x) = h_x \cdot v_{h_x^{-1}x}$. Pour vérifier que φ est bien un élément de $\text{Ind}_H^G V$, il suffit de constater que, si $h \in H$, alors $h_{hx} = hh_x$, et donc

$$\varphi(hx) = hh_x \cdot v_{(hh_x)^{-1}hx} = hh_x \cdot v_{h_x^{-1}x} = h \cdot (h_x \cdot v_{h_x^{-1}x}) = h \cdot \varphi(x).$$

On munit $\text{Ind}_H^G V$ d'une action de G en définissant $g \cdot \varphi$ comme la fonction $x \mapsto \varphi(xg)$. Si $h \in H$, on a

$$(g \cdot \varphi)(hx) = \varphi(hxg) = h \cdot \varphi(xg) = h \cdot ((g \cdot \varphi)(x)),$$

ce qui prouve que $g \cdot \varphi$ est bien élément de $\text{Ind}_H^G V$. De plus, si $g_1, g_2 \in G$, alors

$$(g_1 \cdot (g_2 \cdot \varphi))(x) = (g_2 \cdot \varphi)(xg_1) = \varphi(xg_1g_2) = (g_1g_2 \cdot \varphi)(x),$$

ce qui prouve que l'on a bien défini une action de groupe de G sur $\text{Ind}_H^G V$. La représentation de G ainsi obtenue est la *représentation induite de H à G de la représentation V* . L'isomorphisme de $\text{Ind}_H^G V$ sur V^S montre que la dimension de $\text{Ind}_H^G V$ est $|S| \cdot \dim V = \frac{|G|}{|H|} \dim V$.

Par exemple, si $H = 1$, et $V = \mathbf{1}$ est la représentation triviale, la représentation $\text{Ind}_H^G V$ est l'espace des fonctions $\varphi : G \rightarrow \mathbf{C}$. Il admet comme base les fonctions φ_h , pour $h \in G$, définies par $\varphi_h(x) = 1$, si $xh = 1$, et $\varphi_h(x) = 0$, si $xh \neq 1$. Si $g \in G$, on a alors $(g \cdot \varphi_h)(x) = \varphi_h(xg) = \varphi_{gh}(x)$. On en déduit que $\text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbf{1}$ est la *représentation régulière de G* .

Remarque I.3.7. — Les représentations induites à partir de représentations de sous-groupes sont la principale source de représentations d'un groupe G . L'un de leurs intérêts est que leur caractère se calcule très facilement.

Théorème I.3.8. — Soient $H \subset G$ deux groupes finis, $S \subset G$ un système de représentants de $H \backslash G$, V une représentation de H , et $W = \text{Ind}_H^G V$. Alors, pour tout $g \in G$:

$$\chi_W(g) = \sum_{\substack{s \in S \\ sgs^{-1} \in H}} \chi_V(sgs^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ sgs^{-1} \in H}} \chi_V(sgs^{-1}).$$

Démonstration. — On utilise l'isomorphisme de W avec $V^S = \bigoplus_{s \in S} V_s$. Dans cet isomorphisme, si φ est l'image de $(v_s)_{s \in S}$, on a $\varphi(x) = h_x \cdot v_{h_x^{-1}x}$, et $g \cdot \varphi$ est l'image de $((g \cdot \varphi)(s))_{s \in S} = (\varphi(sg))_{s \in S}$, ce qui fait que l'on obtient

$$g \cdot (v_s)_{s \in S} = (h_{sg} \cdot v_{h_{sg}^{-1}sg})_{s \in S}.$$

Choisissons une base $(e_i)_{i \in I}$ de V , et notons $e_{i,s}$ l'élément $(v_t)_{t \in S}$ de V^S défini par $v_s = e_i$, et $v_t = 0$, si $t \neq s$. Les $e_{i,s}$, pour $i \in I$, forment une base de V_s , et les $e_{i,s}$, pour $(i,s) \in I \times S$, forment une base de V^S . La matrice de g dans cette base est constituée de blocs indexés par $(s, s') \in S \times S$, le bloc correspondant à (s, s') étant nul sauf si $s' = h_{sg}^{-1}sg$. En particulier, les seuls blocs qui vont contribuer à la trace sont ceux pour lesquels $s = h_{sg}^{-1}sg$, ce qui peut se réécrire sous la forme $h_{sg} = sgs^{-1}$. L'action de g sur le V_s correspondant coïncide alors avec celle de $h_{sg} = sgs^{-1}$, et sa contribution à la trace est donc $\chi_V(sgs^{-1})$. On en déduit la première égalité du théorème. La seconde s'en déduit en remarquant que $\chi_V(hsg(hs)^{-1}) = \chi_V(h(sgs^{-1})h^{-1}) = \chi_V(sgs^{-1})$, si $h \in H$ et $sgs^{-1} \in H$, et en écrivant $s \in G$ sous la forme $h_s^{-1}s$.

2.2. La formule de réciprocité de Frobenius

Soient $H \subset G$ deux groupes finis. On définit des applications linéaires

$$\text{Res}_G^H : \mathbf{R}_C(G) \rightarrow \mathbf{R}_C(H) \quad \text{et} \quad \text{Ind}_H^G : \mathbf{R}_C(H) \rightarrow \mathbf{R}_C(G),$$

de la manière suivante. Si $\phi \in \mathbf{R}_C(G)$, alors $\text{Res}_G^H \phi$ est juste la fonction centrale sur H , restriction de ϕ à H , et si $\phi \in \mathbf{R}_C(H)$, alors $\text{Ind}_H^G \phi$ est la fonction centrale sur G donnée par la formule

$$(\text{Ind}_H^G \phi)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ sgs^{-1} \in H}} \phi(sgs^{-1}).$$

Il est immédiat que, si W est une représentation de G , alors $\text{Res}_G^H \chi_W$ est le caractère de la représentation de H obtenue en ne considérant que l'action du sous-groupe H de G . Dans l'autre sens, si V est une représentation de H , alors $\text{Ind}_H^G \chi_V$ est, d'après le th. I.3.8, le caractère de la représentation induite $\text{Ind}_H^G V$.

Pour les distinguer, on note \langle , \rangle_H et \langle , \rangle_G les produits scalaires sur $\mathbf{R}_C(H)$ et $\mathbf{R}_C(G)$. On a alors le résultat suivant.

Théorème I.3.9. — (formule de réciprocité de Frobenius) Si ϕ_1 et ϕ_2 appartiennent à $\mathbf{R}_C(H)$ et $\mathbf{R}_C(G)$ respectivement, alors

$$\langle \phi_1, \text{Res}_G^H \phi_2 \rangle_H = \langle \text{Ind}_H^G \phi_1, \phi_2 \rangle_G.$$

Démonstration. — Par définition, on a

$$\begin{aligned} \langle \text{Ind}_H^G \phi_1, \phi_2 \rangle_G &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\text{Ind}_H^G \phi_1(g)} \phi_2(g) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left(\frac{1}{|H|} \sum_{\substack{s \in G \\ sgs^{-1} \in H}} \overline{\phi_1(sgs^{-1})} \right) \phi_2(g). \end{aligned}$$

En posant $h = sgs^{-1}$, et donc $g = s^{-1}hs$, on peut réécrire la somme ci-dessus sous la forme

$$\frac{1}{|G||H|} \sum_{h \in H, s \in G} \overline{\phi_1(h)} \phi_2(s^{-1}hs),$$

et comme ϕ_2 est une fonction centrale sur G , on a $\phi_2(s^{-1}hs) = \phi_2(h)$, quel que soit $s \in G$. On obtient donc

$$\langle \text{Ind}_H^G \phi_1, \phi_2 \rangle_G = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \overline{\phi_1(h)} \phi_2(h) = \langle \phi_1, \text{Res}_G^H \phi_2 \rangle_H,$$

ce qui permet de conclure.

Un cas particulier, extrêmement utile, de ce théorème, est le suivant.

Corollaire I.3.10. — *Si W (resp. V) est une représentation irréductible de G (resp. de H), la multiplicité de W dans $\text{Ind}_H^G V$ est égale à celle de V dans $\text{Res}_G^H W$.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la formule de réciprocité de Frobenius pour $\phi_1 = \chi_V$ et $\phi_2 = \chi_W$, combinée avec le cor. I.2.14.

CHAPITRE II

ESPACES DE BANACH

La théorie des espaces vectoriels normés complets (appelés « espaces de Banach » en raison du rôle joué par ce dernier dans sa mise en forme) est issue des travaux du 19-ième siècle sur les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles ou les équations intégrales du type $u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y) dy = f(x)$, où u est une fonction inconnue. Il s'est écoulé une vingtaine d'années entre l'introduction par D. Hilbert (1906) de l'espace qui porte son nom (l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable), la réalisation l'année suivante, par E. Fischer et F. Riesz, de ce que l'espace des fonctions de carré sommable lui était isomorphe, et la forme définitive de la théorie par l'école polonaise (S. Banach, H. Hahn, H. Steinhaus). En retour, cette théorie a permis de nombreuses avancées sur les problèmes qui l'ont motivée. Le problème de la classification des espaces de Banach est toujours d'actualité.

II.1. Espaces de Banach

Dans tout ce qui suit, \mathbf{K} désigne soit le corps \mathbf{R} des nombres réels, soit le corps \mathbf{C} des nombres complexes, et « espace vectoriel » est une abréviation pour « espace vectoriel sur \mathbf{K} ». Le lecteur est renvoyé au § 10 du Vocabulaire pour le vocabulaire et les propriétés élémentaires des espaces vectoriels normés.

1. Convergence normale, séries sommables

Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle que, si $x \in E$ et si $r \in \mathbf{R}_+$, on note $B(x, r)$ ou $B_E(x, r)$ (resp. $B(x, r^-)$ ou $B_E(x, r^-)$) la boule fermée (resp. ouverte) de centre x et de rayon r .

Une série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ d'éléments de E est *normalement convergente*, si $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\| < +\infty$.

Un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$, qui est complet (pour la distance associée à la norme), est appelé un *espace de Banach*. D'après le n° 8.1 du Vocabulaire, $(E, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente converge dans E . Comme un sous-espace fermé d'un espace complet est complet, un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est un espace de Banach.

Les exemples les plus simples d'espaces de Banach sont les espaces de dimension finie, mais ceux-ci ont des propriétés très spéciales. On a en particulier les résultats classiques suivants (cf. nos 10.3 et 10.4 du Vocabulaire).

Proposition II.1.1. — (i) Si V est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes et V est complet pour n'importe laquelle d'entre elles.

(ii) Soit E un espace de Banach. La boule unité fermée $B(0, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Remarque II.1.2. — Insistons sur le fait que le (i) de la prop. II.1.1 devient *totale*ment faux en dimension infinie : les normes sur un espace E de dimension infinie ne sont pas toutes équivalentes, et E peut être complet pour certaines d'entre elles, mais il y en a "beaucoup plus" pour lesquelles ce n'est pas le cas.

Soit E un espace de Banach. Une série $\sum_{i \in I} x_i$, avec I dénombrable, est dite *sommable* si elle vérifie le critère de Cauchy non ordonné suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I(\varepsilon) \subset I$ fini, tel que pour tout $J \subset I$ fini avec $J \cap I(\varepsilon) = \emptyset$, on ait $\|\sum_{i \in J} x_i\| \leq \varepsilon$.

- Si I est fini, toute série $\sum_{i \in I} x_i$ est sommable.
- Si I est infini, si $\sum_{i \in I} x_i$ est sommable, alors pour toute bijection $n \mapsto i(n)$ de \mathbf{N} sur I , les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{i(n)}$ vérifient le critère de Cauchy usuel, et comme E est complet, la série converge et la limite ne dépend pas du choix de la bijection $n \mapsto i(n)$; c'est la somme de la série $\sum_{i \in I} x_i$.

La sommabilité et la convergence normale sont des notions assez proches. L'exercice ci-dessous (dans lequel on s'intéresse aux séries $\sum_{i \in I} x_i$, où I est un ensemble dénombrable infini) explore leurs liens.

Exercice II.1.3. — (i) Montrer qu'une série normalement convergente est sommable.

(ii) Montrer que dans \mathbf{R} une série est sommable si et seulement si elle est absolument convergente.

(iii) En déduire que dans un espace vectoriel normé, de dimension finie sur \mathbf{R} ou \mathbf{C} , une série est sommable si et seulement si elle est normalement convergente.

(iv) Soit e_i la suite $(e_{i,j})_{j \in J}$ d'éléments de \mathbf{C} , définie par $e_{i,i} = 1$ et $e_{i,j} = 0$, si $i \neq j$.

(a) Montrer que $\sum_{i \in I} a_i e_i$ est sommable dans $\ell^\infty(I)$ si et seulement si la suite $(a_i)_{i \in I}$ tend vers 0 à l'infini (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I(\varepsilon) \subset I$ fini tel que $|a_i| \leq \varepsilon$, si $i \notin I(\varepsilon)$).

(b) Montrer que $\sum_{i \in I} a_i e_i$ est sommable dans $\ell^2(I)$ si et seulement si $\sum_{i \in I} |a_i|^2 < +\infty$.

(c) Quelle est la somme dans ces deux cas ?

2. Espaces de suites

Exemple II.1.4. — (i) On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|(x_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$, l'espace ℓ^∞ est un espace de Banach. L'espace ℓ_0^∞ , sous-espace de ℓ^∞ des suites tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$ est un sous-espace fermé de ℓ^∞ , et donc aussi un Banach.

(ii) On note ℓ^1 l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telles que $\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n| < +\infty$. Muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par $\|(x_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_1 = \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$, l'espace ℓ^1 est un espace de Banach.

(iii) On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, telles que $\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^2 < +\infty$. Muni de la norme $\| \cdot \|_2$ définie par $\|(x_n)_{n \in \mathbf{N}}\|_2 = (\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^2)^{1/2}$, l'espace ℓ^2 est un espace de Banach.

(iv) Si I est un ensemble dénombrable infini, on définit de même les espaces $\ell^\infty(I)$, $\ell_0^\infty(I)$, $\ell^1(I)$ et $\ell^2(I)$; ce sont aussi des espaces de Banach.

Démonstration. — Le cas I dénombrable se déduit du cas de \mathbf{N} en choisissant une bijection entre I et \mathbf{N} ; il suffit donc de démontrer les (i), (ii) et (iii). Soit E un des espaces ℓ^∞ , ℓ^1 ou ℓ^2 , et soit $\| \cdot \|$ la norme correspondante. Pour prouver que E est un espace de Banach, il s'agit de vérifier que toute série normalement convergente d'éléments de E admet une limite dans E . Soit donc $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E vérifiant $\sum_{k \in \mathbf{N}} \|x^{(k)}\| < +\infty$. Chaque $x^{(k)}$ est une suite $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de \mathbf{K} , et dans les trois cas, on $|x_n^{(k)}| \leq \|x^{(k)}\|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui fait que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} x_n^{(k)}$ est normalement convergente dans \mathbf{K} , et donc converge dans \mathbf{K} (puisque \mathbf{K} est complet); nous noterons y_n la somme de cette série et y la suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Pour conclure, il suffit de vérifier que $\|y\| \leq \sum_{k \in \mathbf{N}} \|x^{(k)}\|$: en effet, ceci prouve que $y \in E$, que $\|y - \sum_{i \leq k} x^{(i)}\| \leq \sum_{i \geq k+1} \|x^{(i)}\|$ tend vers 0 quand $k \rightarrow +\infty$, puisque majoré par le reste d'une série convergente, et donc que y est somme de la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} x^{(k)}$ dans E .

- Si $E = \ell^\infty$, on a $|y_n| \leq \sum_{k \in \mathbf{N}} |x_n^{(k)}| \leq \sum_{k \in \mathbf{N}} \|x^{(k)}\|_\infty$, et donc $\|y\|_\infty \leq \sum_{k \in \mathbf{N}} \|x^{(k)}\|_\infty$. Pour la fermeture de ℓ_0^∞ dans ℓ^∞ , cf. Vocabulaire, ex. 9.2.

- Si $E = \ell^1$, on a $|y_n| \leq \sum_{k \in \mathbf{N}} |x_n^{(k)}|$, et donc

$$\|y\|_1 = \sum_{n \in \mathbf{N}} |y_n| \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k \in \mathbf{N}} |x_n^{(k)}| = \sum_{k \in \mathbf{N}} \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n^{(k)}| = \sum_{k \in \mathbf{N}} \|x^{(k)}\|_1.$$

- Si $E = \ell^2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{N}} |y_n|^2 &\leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \left(\sum_{k \in \mathbf{N}} |x_n^{(k)}| \right)^2 = \sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{N}} |x_n^{(k_1)}| |x_n^{(k_2)}| \\ &= \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{N}} \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n^{(k_1)}| |x_n^{(k_2)}| = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{N}} \langle |x^{(k_1)}|, |x^{(k_2)}| \rangle \\ &\leq \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{N}} \|x^{(k_1)}\|_2 \|x^{(k_2)}\|_2 = \left(\sum_{k \in \mathbf{N}} \|x^{(k)}\|_2 \right)^2 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que l'on pouvait réordonner les termes comme on le voulait dans une série à termes positifs, la notation $|x^{(k)}|$ pour désigner la suite $(|x_n^{(k)}|)_{n \in \mathbf{N}}$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. n° 10.6 du Vocabulaire). On en déduit que $\|y\|_2 \leq \sum_{k \in \mathbf{N}} \|x^{(k)}\|_2$.

Ceci permet de conclure.

3. Espaces de fonctions continues

Si X est un espace topologique, on note $\mathcal{C}(X)$ l'espace des fonctions continues de X dans \mathbf{C} .

Exemple II.1.5. — (i) Si X est un espace métrique (ou plus généralement un espace topologique), on peut munir l'espace $\mathcal{C}_b(X)$ des fonctions continues bornées de X dans \mathbf{C} de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la *convergence uniforme* définie par $\|\phi\|_\infty = \sup_{x \in X} |\phi(x)|$. Alors $(\mathcal{C}_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. En effet, la complétude de $\mathcal{C}_b(X)$ est une traduction de ce qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue (cf. n° 9.2 du Vocabulaire).

(ii) On note $\mathcal{C}_c(X)$ l'espace des fonctions continues sur X , nulles en dehors d'un compact (le « c » en indice signifie « à support compact »). Comme une fonction continue sur un compact a une image compacte et donc bornée, on a $\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{C}_b(X)$, et cette inclusion est stricte sauf si X est compact auquel cas $\mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}_b(X) = \mathcal{C}(X)$. On note $\mathcal{C}_0(X)$ l'adhérence de $\mathcal{C}_c(X)$ dans $\mathcal{C}_b(X)$; c'est l'espace des fonctions continues sur X *tendant vers 0 à l'infini*.

II.2. Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach aux propriétés mathématiques particulièrement agréables : l'existence de bases hilbertiennes montre que tous ceux qu'on rencontre en pratique sont isomorphes, et l'existence de projecteurs orthogonaux permet très souvent de se ramener à la dimension finie. La nature étant bien faite, ce sont précisément ces espaces qui interviennent naturellement dans beaucoup de questions physiques (par exemple en mécanique quantique).

1. Espaces de Hilbert

Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet ; c'est donc un cas particulier d'espace de Banach.

Exemple II.2.1. — (i) Un espace de dimension finie muni d'un produit scalaire est un espace de Hilbert.

(ii) Si E est un espace préhilbertien, son complété \widehat{E} est un espace de Hilbert (le produit scalaire s'étendant par continuité).

(iii) ℓ^2 et, plus généralement, $\ell^2(I)$ si I est dénombrable, sont des espaces de Hilbert.

(iv) L'espace $L^2(X)$ rencontré au n° 2 du § 1 est un espace de Hilbert.

1.1. Bases hilbertiennes

Soit E un espace de Hilbert *séparable*⁽¹⁾ (un espace est *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense⁽²⁾ (i.e. s'il est « pas trop gros »)) de dimension infinie. Une

⁽¹⁾La théorie qui suit s'étend au cas des espaces de Hilbert non séparables, mais ceux-ci ne se rencontrent pas en pratique. La seule différence est qu'une base hilbertienne n'est plus de cardinal dénombrable, si E n'est pas séparable.

⁽²⁾La plupart des espaces de Banach de l'analyse fonctionnelle sont séparables ; une exception notable étant l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbf{R})$ des fonctions continues bornées sur \mathbf{R} ou l'espace ℓ^∞ des suites bornées.

base hilbertienne⁽³⁾ de E est une famille orthonormale dénombrable $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de E telle que le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_i , pour $i \in I$, soit dense dans E .

Exemple II.2.2. — Si I est un ensemble dénombrable, alors $\ell^2(I)$ possède une base hilbertienne naturelle, à savoir celle constituée des e_i , pour $i \in I$, où e_i est la suite avec un 1 en i et des 0 partout ailleurs.

Démonstration. — Que les e_i forment une famille orthonormale est immédiat. Maintenant, si $x = (x_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$, et si $J \subset I$ est fini, alors $\|x - \sum_{j \in J} x_j e_j\|_2^2 = \sum_{j \in I-J} |x_j|^2$. Comme $\sum_{j \in I} |x_j|^2 < +\infty$, on peut rendre $\|x - \sum_{j \in J} x_j e_j\|_2$ aussi petit que l'on veut en augmentant J , ce qui prouve que le sous-espace engendré par les e_i , pour $i \in I$, est dense dans $\ell^2(I)$. On en déduit le (i).

Proposition II.2.3. — *Un espace de Hilbert séparable admet des bases hilbertiennes.*

Démonstration. — Soient E un espace de Hilbert séparable et $A \subset E$ un sous-ensemble dénombrable dense. Pour construire une base hilbertienne à partir de A , on numérote les éléments de A , on élimine ceux qui se trouvent dans l'espace vectoriel engendré par les éléments précédents, ce qui nous fournit une base $(b_i)_{i \in I}$, avec $I \subset \mathbf{N}$, de l'espace vectoriel E' engendré par A . Enfin, on utilise le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour construire une famille orthonormale d'éléments de E engendrant le sous-espace E' ; cette famille est une base hilbertienne de E puisque E' , qui contient A , est dense dans E .

1.2. Projection orthogonale sur un sous-espace fermé

Lemme II.2.4. — *Soit E un espace de Hilbert, et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale dénombrable d'éléments de E .*

(i) *Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de \mathbf{C} , alors la série $\sum_{i \in I} x_i e_i$ est sommable si et seulement si $(x_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$.*

(ii) *Si $(x_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$, et si $x \in E$ est la somme de la série $\sum_{i \in I} x_i e_i$, alors $\langle e_i, x \rangle = x_i$, pour tout $i \in I$, et $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |x_i|^2$.*

Démonstration. — On a $\|\sum_{i \in J} x_i e_i\| = (\sum_{i \in J} |x_i|^2)^{1/2}$, pour tout $J \subset I$ fini, par orthonormalité de la famille $(e_i)_{i \in I}$. La sommabilité de $\sum_{i \in J} x_i e_i$ est donc équivalente à la condition $\sum_{i \in I} |x_i|^2 < +\infty$. On en déduit le (i).

Le (ii) est évident si I est fini. On peut donc supposer $I = \mathbf{N}$. Alors x est la limite de la suite de terme général $y_n = \sum_{j=0}^n x_j e_j$, et comme on a $\langle e_i, y_n \rangle = x_i$, pour tout $n \geq i$, et $\|y_n\|^2 = \sum_{j=0}^n |x_j|^2$, le (ii) s'en déduit par un passage à la limite, en utilisant la continuité de la norme et du produit scalaire.

⁽³⁾Une base hilbertienne est aussi souvent appelée une *base orthonormale*. On fera attention au fait qu'une base hilbertienne n'est, en général, pas une base au sens algébrique. Plus précisément, une base hilbertienne est une base algébrique si et seulement si on est en dimension finie, ce qui est rarement le cas en analyse fonctionnelle.

Proposition II.2.5. — Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E muni d'une base hilbertienne $(e_i)_{i \in I}$.

- (i) Si $x \in E$, alors $(\langle e_i, x \rangle)_{i \in I} \in \ell^2(I)$.
- (ii) La série $\sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle e_i$ est sommable ; sa somme $p_F(x)$ appartient à F , et on a l'identité $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2$.
- (iii) $p_F : E \rightarrow F$ est un projecteur, et $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p_F(x)$ soit orthogonal à F tout entier. De plus, p_F est 1-lipschitzien.

Démonstration. — Si F est de dimension finie, le résultat est démontré dans le n° 10.6 du Vocabulaire. On peut donc supposer que $I = \mathbf{N}$. Notons F_i le sous-espace vectoriel de E engendré par les e_j , pour $j \leq i$. Alors $y_i = \sum_{j=0}^i \langle e_j, x \rangle e_j$ est la projection orthogonale de x sur F_i . En particulier, $\sum_{j=0}^i |\langle e_j, x \rangle|^2 = \|y_i\|^2 \leq \|x\|^2$, quel que soit $i \in \mathbf{N}$. On en déduit l'appartenance de $(\langle e_i, x \rangle)_{i \in \mathbf{N}} \in \ell^2$, ce qui démontre le (i).

Le (ii) est une conséquence directe du lemme II.2.4, dont on déduit aussi que $x - p_F(x)$ est orthogonal à tous les e_i , et donc à F tout entier par linéarité et densité. Le reste du (iii) suit de l'unicité de la projection orthogonale sur un sous-espace (pas forcément fermé, cf. Vocabulaire, n° 10.6). Ceci permet de conclure.

Théorème II.2.6. — Si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de E , l'application $x \mapsto (\langle e_i, x \rangle)_{i \in I}$ induit une isométrie de E sur $\ell^2(I)$. Autrement dit,

- (a) si $x \in E$, alors $(\langle e_i, x \rangle)_{i \in I} \in \ell^2(I)$ et $\sum_{i \in I} |\langle e_i, x \rangle|^2 = \|x\|^2$ (identité de Bessel-Parseval) ;
- (b) si $(x_i)_{i \in I} \in \ell^2(I)$, alors $\sum_{i \in I} x_i e_i$ converge dans E et sa somme x vérifie $\langle e_i, x \rangle = x_i$ quel que soit $i \in I$.

Démonstration. — Commençons par justifier le « Autrement dit » : le (a) peut se reformuler en disant que $x \mapsto (\langle e_i, x \rangle)_{i \in I}$ est une isométrie de E sur un sous-espace de $\ell^2(I)$, tandis que le (b) montre que $\ell^2(I)$ est dans l'image de $x \mapsto (\langle e_i, x \rangle)_{i \in I}$. Maintenant, le (a) suit des (i) et (ii) de la prop. II.2.5 utilisée pour $F = E$, et le (b) suit du lemme II.2.4.

Corollaire II.2.7. — (critère de totalité). Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormale dénombrable d'éléments de E , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de E ;
- (ii) l'ensemble des $x \in E$, orthogonaux à tous les e_i , est réduit à $\{0\}$.

Démonstration. — L'implication (i) \Rightarrow (ii) est une conséquence directe du (a) du th. II.2.6. Pour montrer (ii) \Rightarrow (i), introduisons l'espace vectoriel F , adhérence dans E de l'espace engendré par les e_i . Alors $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de F , et la condition (ii) implique que l'on a $p_F(x) = x$, pour tout $x \in E$, et donc que $F = E$. Ceci permet de conclure.

CHAPITRE III

INTÉGRATION

III.1. Intégrale de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue (1902-1904) est une extension (ou plutôt une complétion) de l'intégrale de Riemann⁽¹⁾ d'une extrême souplesse. Les espaces de fonctions intégrables deviennent complets⁽²⁾, ce qui simplifie grandement les problèmes d'existence ou de convergence d'intégrales, et on dispose, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue (th. III.1.20), d'un outil extrêmement puissant pour intervertir limites et intégrales. Tous les énoncés classiques de l'intégrale de Riemann (continuité et dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, théorème de Fubini) s'étendent avec des démonstrations souvent simplifiées. Il est toutefois toujours aussi difficile de calculer explicitement les intégrales dont on a montré l'existence, mais c'est un autre problème...

1. Dallages et fonctions en escalier

Soit $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ l'anneau des *nombre dyadiques* (i.e. des nombres rationnels dont le dénominateur est une puissance de 2). Une *dalle* de \mathbf{R}^m est un sous-ensemble de \mathbf{R}^m de la forme⁽³⁾ $\prod_{j=1}^m [r_j, s_j[$, où $r_j < s_j$, pour $1 \leq j \leq m$, sont des nombres dyadiques. Un *dallage* est une réunion *finie* de dalles. Une *dalle élémentaire* (de taille 2^{-r}) est un ensemble de la forme $D_{r,\mathbf{k}}$, où $r \in \mathbf{N}$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{Z}^m$, et $D_{r,\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^m [\frac{k_j}{2^r}, \frac{k_j+1}{2^r}[$.

Lemme III.1.1. — (i) Si D_1 et D_2 sont des dalles élémentaires (pas forcément de même taille), alors soit D_1 et D_2 sont disjointes, soit l'une est incluse dans l'autre⁽⁴⁾.

(ii) Si $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$, alors $D_{r,\mathbf{k}}$ est la réunion disjointe des $D_{r+1,2\mathbf{k}+\mathbf{a}}$, pour $\mathbf{a} \in \{0, 1\}^m$.

(iii) Tout dallage est une réunion finie disjointe de dalles élémentaires de même taille.

⁽¹⁾L'intégrale de Riemann date de 1854; elle généralise l'intégrale que Cauchy avait définie (cours à l'École Polytechnique de 1823) pour les fonctions (uniformément) continues.

⁽²⁾Et on peut même, quitte à se passer de l'axiome du choix, imposer que toute fonction pas trop grosse (par exemple bornée sur un ensemble borné) soit intégrable (cf. note 9).

⁽³⁾Le lecteur est invité à supposer $m = 1$ ou $m = 2$, et à faire des dessins; cela rend les énoncés qui suivent parfaitement évidents.

⁽⁴⁾Autrement dit, les dalles élémentaires se comportent comme des billes de mercure.

Démonstration. — Exercice.

On définit la *mesure* $\lambda(D_{r,\mathbf{k}})$ d'une dalle élémentaire $D_{r,\mathbf{k}}$ par la formule $\lambda(D_{r,\mathbf{k}}) = 2^{-mr}$. Si D est un dallage quelconque, réunion disjointes des D_{r,\mathbf{k}_i} , pour $i \in I$ ensemble fini, on définit $\lambda(D)$ par $\lambda(D) = \sum_{i \in I} \lambda(D_{r,\mathbf{k}_i})$. On vérifie que cela ne dépend pas du choix de la taille des dalles élémentaires choisies pour recouvrir D , en utilisant le (ii) du lemme précédent.

Si $r \in \mathbf{N}$, et si $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$, on note $e_{r,\mathbf{k}}$ la fonction caractéristique de $D_{r,\mathbf{k}}$. Si $r \in \mathbf{N}$, on note $\text{Esc}_r(\mathbf{R}^m)$, l'espace vectoriel des combinaisons linéaires des $e_{r,\mathbf{k}}$, pour $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$; c'est l'ensemble des *fonctions en escalier sur \mathbf{R}^m , constantes sur les dalles élémentaires de taille 2^{-r}* . Les $e_{r,\mathbf{k}}$, pour $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$, ayant des supports disjoints, forment en fait une base de $\text{Esc}_r(\mathbf{R}^m)$.

Comme $e_{r,\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{a} \in \{0,1\}^m} e_{r+1,2\mathbf{k}+\mathbf{a}}$, on a $\text{Esc}_r(\mathbf{R}^m) \subset \text{Esc}_{r+1}(\mathbf{R}^m)$, si $r \in \mathbf{N}$. La réunion $\text{Esc}(\mathbf{R}^m)$ des $\text{Esc}_r(\mathbf{R}^m)$, pour $r \in \mathbf{N}$, est donc un espace vectoriel; c'est l'espace vectoriel des *fonctions en escalier sur \mathbf{R}^m* . (On notera qu'une combinaison linéaire étant une somme finie, une fonction en escalier est à support compact.)

Si $X \subset \mathbf{R}^m$, on note $\text{Esc}(X)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur X ; il peut se voir comme l'ensemble des fonctions en escalier sur \mathbf{R}^m qui sont nulles en dehors de X . Plus généralement, si $X \subset \mathbf{R}^m$, et si $U \subset \mathbf{C}$, on note $\text{Esc}(X, U)$ l'ensemble des fonctions, en escalier sur X , prenant leurs valeurs dans U . On a donc $\text{Esc}(X) = \text{Esc}(X, \mathbf{C})$.

Si $\phi \in \text{Esc}(\mathbf{R}^m)$, il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que l'on puisse écrire ϕ sous la forme $\phi = \sum_{i \in I} \alpha_i e_{r,\mathbf{k}_i}$, et on définit son intégrale $\int \phi$ par $\int \phi = \sum_{i \in I} \alpha_i \lambda(D_{r,\mathbf{k}_i}) = 2^{-rm} \sum_{i \in I} \alpha_i$. On vérifie, en utilisant la formule $e_{r,\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{a} \in \{0,1\}^m} e_{r+1,2\mathbf{k}+\mathbf{a}}$, que cela ne dépend pas du choix de r , et que l'on a défini de la sorte une forme linéaire sur $\text{Esc}(\mathbf{R}^m)$. Suivant le contexte, l'intégrale de ϕ sera notée indifféremment

$$\int \phi = \int_{\mathbf{R}^m} \phi = \int_{\mathbf{R}^m} \phi d\lambda = \int_{\mathbf{R}^m} \phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^m} \phi(x) dx_1 \cdots dx_m.$$

Remarque III.1.2. — Si $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^m)$ est une fonction continue à support compact, et si on note ϕ_r la fonction en escalier $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m} \phi(\frac{\mathbf{k}}{2^r}) e_{r,\mathbf{k}}$ prenant la valeur $\phi(\frac{k_1}{2^r}, \dots, \frac{k_m}{2^r})$ sur la dalle élémentaire $\prod_{j=1}^m [\frac{k_j}{2^r}, \frac{k_j+1}{2^r}[$, quel que soit $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$, alors $\phi_r \rightarrow \phi$ en norme $\| \cdot \|_\infty$ (i.e. uniformément⁽⁵⁾). Ceci permet de montrer que la suite $(\int \phi_r)_{r \in \mathbf{N}}$ converge, et on définit l'*intégrale de Riemann* $\int \phi$ comme la limite de cette suite. L'intégrale de Lebesgue va être définie de la même manière, mais en relâchant⁽⁶⁾ la condition de convergence uniforme, remplacée par la condition de *convergence simple presque partout*.

⁽⁵⁾C'est une conséquence de l'uniforme continuité d'une fonction continue sur un compact.

⁽⁶⁾Comme la convergence uniforme implique la convergence simple presque partout définie plus loin, les intégrales de Riemann et de Lebesgue d'une fonction continue à support compact coïncident, et l'intégrale de Lebesgue est bien une extension de l'intégrale de Riemann.

2. Ensembles de mesure nulle

On définit la *mesure extérieure* $\lambda^+(A)$ d'un ensemble A comme la borne inférieure des $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda(D_n)$, où $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ décrit l'ensemble des suites de dalles de \mathbf{R}^m telles que $A \subset \cup_{n \in \mathbf{N}} D_n$. En décomposant les dalles D_n en dalles élémentaires disjointes de taille décroissante avec n , et en éliminant les dalles élémentaires de D_n incluses dans un des D_i , pour $i \leq n - 1$, on peut se ramener au cas où les D_n sont des dalles élémentaires disjointes⁽⁷⁾.

Proposition III.1.3. — (i) Si $B \subset A$, alors $\lambda^+(B) \leq \lambda^+(A)$.

(ii) Si $A_n \subset \mathbf{R}^m$, pour $n \in \mathbf{N}$, alors $\lambda^+(\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda^+(A_n)$.

Démonstration. — Le (i) est une évidence. Le (ii) est évident si $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda^+(A_n) = +\infty$. Dans le cas contraire, soit $A = \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$, et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on peut trouver une suite $(D_{n,k})_{k \in \mathbf{N}}$ de dallages de \mathbf{R}^m tels que $A_n \subset \cup_{k \in \mathbf{N}} D_{n,k}$ et $\sum_{k \in \mathbf{N}} \lambda(D_{n,k}) \leq \lambda^+(A_n) + 2^{-1-n}\varepsilon$. Mais alors $A \subset \cup_{k,n \in \mathbf{N}} D_{n,k}$ et

$$\sum_{k,n \in \mathbf{N}} \lambda(D_{n,k}) \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} (\lambda^+(A_n) + 2^{-1-n}\varepsilon) = \varepsilon + \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda^+(A_n).$$

On en déduit que $\lambda^+(A) \leq \varepsilon + \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda^+(A_n)$ quel que soit $\varepsilon > 0$, ce qui permet de conclure.

On dit que A est de *mesure nulle* si $\lambda^+(A) = 0$. En revenant à la définition, on voit que A est de mesure nulle si et seulement si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de dallages de \mathbf{R}^m tels que $A \subset \cup_{n \in \mathbf{N}} D_n$ et $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda(D_n) < \varepsilon$.

Proposition III.1.4. — (i) *Tout sous-ensemble d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.*

(ii) *Une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la prop. III.1.3.

On dit qu'une propriété est *vraie presque partout*, ou bien est *vraie pour presque tout* $x \in \mathbf{R}^m$, ou encore *est vraie p.p.*, si l'ensemble des points ne la vérifiant pas est de mesure nulle. Par exemple, l'ensemble des rationnels étant dénombrable, presque tout réel est irrationnel. De même, presque tout nombre complexe est transcendant. (Un nombre complexe est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans \mathbf{Q} . Un nombre complexe non algébrique est un *nombre transcendant*.)

Remarque III.1.5. — (i) Il ne faudrait pas croire qu'un sous-ensemble de \mathbf{R} de mesure nulle est forcément dénombrable. Par exemple, fixons une bijection $n \mapsto r_n$ de \mathbf{N} sur \mathbf{Q} , et soient $U_k = \cup_{n \in \mathbf{N}}]r_n - 2^{-n-k}, r_n + 2^{-n-k}[$, si $k \in \mathbf{N}$, et $A = \cap_{k \in \mathbf{N}} U_k$. Alors A est de mesure nulle puisqu'il est inclus dans U_k , pour tout k , et que $\lambda^+(U_k) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{1-n-k} = 2^{2-k}$ peut

⁽⁷⁾Le résultat n'est pas sans rappeler la manière dont une image apparaît sur un ordinateur.

être rendu arbitrairement petit. D'un autre côté, U_k est un ouvert dense pour tout k , et donc A est dense et non dénombrable d'après le lemme de Baire (cf. n° 8.2 du Vocabulaire). En particulier, A contient bien d'autres éléments que les rationnels, ce qui n'est pas totalement transparent sur sa construction.

(ii) Un ensemble de mesure nulle peut avoir des propriétés assez surprenantes. Par exemple, A. Besicovitch (1919) a construit des ensembles de mesure nulle de \mathbf{R}^m , pour $m \geq 2$, contenant un segment de longueur 1 dans toutes les directions.

Théorème III.1.6. — (Borel-Cantelli) Si $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de \mathbf{R}_+ telle que $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n < +\infty$, et si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de sous-ensembles de \mathbf{R}^m vérifiant $\lambda^+(A_n) \leq a_n$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors presque tout $x \in \mathbf{R}^m$ n'appartient qu'à un nombre fini de A_n .

Démonstration. — Il s'agit de prouver que l'ensemble A des $x \in \mathbf{R}^m$ appartenant à une infinité de A_n est de mesure nulle. Or $x \in A$ si et seulement si, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe $p \geq n$ tel que $x \in A_p$; autrement dit, on a $A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left(\bigcup_{p \geq n} A_p \right)$. On en déduit que $\lambda^+(A) \leq \sum_{p \geq n} \lambda^+(A_p)$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, et comme la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda^+(A_n)$ est supposée convergente, son reste tend vers 0, ce qui permet de conclure.

3. Fonctions mesurables, ensembles mesurables

3.1. Fonctions mesurables

Une fonction $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ (resp. $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$) est dite *mesurable* si elle est limite p.p. d'une suite de fonctions en escalier. Autrement dit, f est mesurable s'il existe $A \subset \mathbf{R}^m$ de mesure nulle, et une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\text{Esc}(\mathbf{R}^m)$ (resp. $\text{Esc}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}_+)$) tels que $f_n(x) \rightarrow f(x)$, quel que soit $x \notin A$.

On note $\text{Mes}(\mathbf{R}^m)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur \mathbf{R}^m à valeurs dans \mathbf{C} . Plus généralement, si $D \subset \mathbf{R}^m$ et $F \subset \mathbf{C}$ (ou $F \subset \overline{\mathbf{R}}_+$), on note $\text{Mes}(D, F)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur \mathbf{R}^m , qui sont nulles en dehors de D et qui prennent leurs valeurs dans F .

- Les fonctions constantes sont mesurables (la fonction λ est la limite de $\lambda \mathbf{1}_{D_N}$, où D_N est la dalle $[-N, N]^m$).

- $\text{Mes}(\mathbf{R}^m)$ est une \mathbf{C} -algèbre (i.e. λf , $f + g$ et fg sont mesurables si $\lambda \in \mathbf{C}$, f, g mesurables). En effet, si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont des suites d'éléments de $\text{Esc}(\mathbf{R}^m)$ tendant respectivement vers f et g en dehors de A_f et A_g , où A_f et A_g sont de mesure nulle, alors :

- $\lambda f_n \rightarrow \lambda f$ en dehors de A_f et donc λf est mesurable,
- $f_n + g_n \rightarrow f + g$ en dehors de $A_f \cup A_g$ (qui est de mesure nulle), et donc $f + g$ est mesurable,
- $f_n g_n \rightarrow fg$ en dehors de $A_f \cup A_g$, et donc fg est mesurable.

- Si $f, g \in \text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$, alors $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ sont mesurables. En effet, si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont des suites d'éléments de $\text{Esc}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}_+)$ tendant respectivement vers f et g

en dehors de A_f et A_g , où A_f et A_g sont de mesure nulle, alors $\inf(f_n, g_n)$ (resp. $\sup(f_n, g_n)$) tend vers $\inf(f, g)$ (resp. $\sup(f, g)$) en dehors de $A_f \cup A_g$.

• $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ est mesurable si et seulement si les fonctions⁽⁸⁾ $\operatorname{Re}^+(f)$, $\operatorname{Re}^+(-f)$, $\operatorname{Re}^+(if)$ et $\operatorname{Re}^+(-if)$ sont mesurables. En effet, $f = \operatorname{Re}^+(f) - \operatorname{Re}^+(-f) - i\operatorname{Re}^+(if) + i\operatorname{Re}^+(-if)$, ce qui prouve l'implication « $\operatorname{Re}^+(f)$, $\operatorname{Re}^+(-f)$, $\operatorname{Re}^+(if)$ et $\operatorname{Re}^+(-if)$ mesurables » \Rightarrow « f mesurable ». L'implication réciproque suit de ce que $\operatorname{Re}^+(g)$ est en escalier, si g est en escalier, et de ce que Re^+ est continue.

Proposition III.1.7. — Une limite simple p.p. de fonctions mesurables est mesurable.

Démonstration. — Cette proposition est moins évidente qu'il n'y paraît car une limite simple de limites simples n'est pas forcément une limite simple. Nous renvoyons le lecteur intéressé par une démonstration à EAATN.

3.2. La tribu des ensembles mesurables

• Un sous-ensemble X de \mathbf{R}^m est mesurable si sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_X$ est une fonction mesurable⁽⁹⁾. En particulier :

— un ensemble de mesure nulle est mesurable (sa fonction caractéristique est la limite simple p.p. de la suite dont tous les termes sont la fonction nulle).

— si A et B sont mesurables, alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont mesurables (en effet, on a $\mathbf{1}_{A \cap B} = \inf(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$ et $\mathbf{1}_{A \cup B} = \sup(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$).

• Si E est un ensemble, une tribu \mathcal{A} sur E est un ensemble non vide de parties de E , stable par passage au complémentaire (si $A \in \mathcal{A}$, alors $E - A \in \mathcal{A}$) et par réunion dénombrable (si I est dénombrable et si $(A_i)_{i \in I}$ sont des éléments de \mathcal{A} , alors $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$). Une tribu sur E contient toujours E et \emptyset (si $A \in \mathcal{A}$, alors $A \cup (E - A) \in \mathcal{A}$), et est aussi stable par intersection dénombrable puisque $\cap_{i \in I} A_i$ est le complémentaire de la réunion des complémentaires des A_i .

⁽⁸⁾Si $z \in \mathbf{C}$, on note $\operatorname{Re}^+(z)$ le nombre réel $\sup(0, \operatorname{Re}(z))$; on a alors

$$z = \operatorname{Re}^+(z) - \operatorname{Re}^+(-z) + i\operatorname{Re}^+(-iz) - i\operatorname{Re}^+(iz).$$

⁽⁹⁾S. Banach et A. Tarski (1924) ont construit un découpage d'une boule de rayon 1 dans \mathbf{R}^3 en un nombre fini de morceaux (5 morceaux suffisent), tel que si on réarrange ces morceaux (i.e. si on les bouge par des isométries de \mathbf{R}^3), on obtient deux boules de rayon 1 (*paradoxe de Banach-Tarski*). Ces morceaux ne sont pas mesurables, et la construction de Banach et Tarski utilise l'axiome du choix.

D'un autre côté, R. Solovay (1966) a démontré que, si on s'interdit l'axiome du choix non dénombrable, tout en gardant l'axiome du choix dénombrable, on peut, sans introduire de contradiction supplémentaire aux mathématiques, supposer que tout ensemble est mesurable (en analyse, on peut difficilement se passer de l'axiome du choix dénombrable, qui est de toute façon assez raisonnable : on peut parfaitement imaginer que face au problème de choisir un nombre dénombrable d'éléments, on devienne de plus en plus performant, et donc arriver à choisir tous ces éléments en un temps fini ; avec un nombre non dénombrable d'éléments, ceci est voué à l'échec, si on doit les choisir un par un). La leçon à retenir de ce résultat est, qu'en pratique, toutes les fonctions et tous les ensembles rencontrés en analyse sont mesurables et qu'il est inutile de passer son temps à vérifier qu'ils le sont ; le problème est différent en théorie des probabilités où un même événement peut être mesurable ou non mesurable suivant les conditions.

• Une intersection de tribus sur E est encore une tribu ce qui permet, si \mathcal{B} est un ensemble non vide de parties de E , de définir la *tribu engendrée par \mathcal{B}* comme l'intersection de toutes les tribus contenant \mathcal{B} .

• Si E est un espace topologique (par exemple $E = \mathbf{R}, \mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+, \dots$), la *tribu borélienne \mathcal{Bor}* sur E est la tribu engendrée par les ouverts ou, ce qui revient au même, par les fermés. Un élément de la tribu borélienne est un *borélien*; les ouverts et les fermés sont donc des boréliens, mais un borélien quelconque est assez difficile à décrire⁽¹⁰⁾. Parmi les sous-ensembles de \mathcal{Bor} mentionnons l'ensemble \mathcal{G}_δ des intersections dénombrables d'ouverts et l'ensemble \mathcal{F}_σ des réunions dénombrables de fermés.

• La tribu borélienne de \mathbf{R}^m est aussi la tribu engendrée par les dalles élémentaires. En effet, un ouvert de \mathbf{R}^m est la réunion des dalles élémentaires qu'il contient et celles-ci sont en nombre dénombrable, ce qui prouve que les ouverts sont dans la tribu engendrée par les dalles élémentaires qui, de ce fait, contient \mathcal{Bor} . Réciproquement, la dalle $\prod_{i=1}^m [\frac{k_i}{2^r}, \frac{k_i+1}{2^r}[$ est l'intersection de l'ouvert $\prod_{i=1}^m]-\infty, \frac{k_i+1}{2^r}[$ et du fermé $\prod_{i=1}^m [\frac{k_i}{2^r}, +\infty[$, et donc est un élément de \mathcal{Bor} ; il en résulte que \mathcal{Bor} contient toutes les dalles élémentaires et donc aussi la tribu qu'elles engendrent.

On dit que A et B ne diffèrent que par des ensembles de mesure nulle si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$ p.p., ce qui équivaut à ce que $A - (A \cap B)$ et $B - (A \cap B)$ sont de mesure nulle.

Théorème III.1.8. — (i) Les ensembles mesurables forment une tribu sur \mathbf{R}^m .

(ii) La tribu des ensembles mesurables est la tribu engendrée par les boréliens et les ensembles de mesure nulle⁽¹¹⁾. Plus précisément, les conditions suivantes sont équivalentes :

- X est mesurable,
- il existe $X' \in \mathcal{G}_\delta$ tel que X et X' ne diffèrent que par des ensembles de mesure nulle,
- il existe $X'' \in \mathcal{F}_\sigma$ tel que X et X'' ne diffèrent que par des ensembles de mesure nulle.

Démonstration. — Si X est mesurable, alors son complémentaire l'est puisque sa fonction caractéristique est $1 - \mathbf{1}_X$ qui est mesurable comme combinaison linéaire de fonctions mesurables. Si les $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ sont mesurables, alors la fonction caractéristique de la réunion est la limite simple des fonctions $\sup_{i \leq n} \mathbf{1}_{X_i}$, et donc est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables.

On en déduit le (i). Pour démontrer le (ii) commençons par constater qu'un borélien est mesurable puisqu'une dalle élémentaire l'est et que la tribu engendrée par les dalles élémentaires est celle des boréliens. Comme un ensemble de mesure nulle l'est aussi, la tribu des mesurables contient la tribu engendrée par les boréliens et les ensembles de mesure nulle. Pour montrer l'inclusion réciproque, il suffit de montrer qu'un ensemble X mesurable admet l'une des descriptions du théorème. Si $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions en escalier tendant simplement vers $\mathbf{1}_X$ en dehors de A , où A est de mesure nulle, on a aussi $\mathbf{1}_{X_k} \rightarrow \mathbf{1}_X$ en dehors de A , si X_k est le dallage des $x \in \mathbf{R}^m$ vérifiant $|f_k(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$. Soit U_k l'intérieur de X_k . Comme $X_k - U_k$ est de mesure nulle puisqu'inclus dans une réunion finie de faces de dalles élémentaires, il existe un ensemble de mesure nulle A' tel que $\mathbf{1}_{U_k} \rightarrow \mathbf{1}_X$ en dehors de A' . Il en résulte que $\mathbf{1}_X(x) = \limsup \mathbf{1}_{U_k}(x)$, si $x \notin A'$, et donc que X ne diffère de $X' = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \leq n} U_k$ que par des ensembles de mesure nulle, et comme $\bigcup_{k \leq n} U_k$ est un ouvert, on a $X' \in \mathcal{G}_\delta$, ce qui fournit la

⁽¹⁰⁾Une description explicite est, de toute façon, parfaitement inutile pour les applications : la manière dont on démontre une propriété pour un borélien quelconque consiste à vérifier qu'elle est vraie par passage au complémentaire et par réunion dénombrable, et qu'elle est vraie pour les ouverts (ou toute autre famille d'éléments de \mathcal{Bor} engendrant \mathcal{Bor}).

⁽¹¹⁾On peut montrer qu'il existe des ensembles mesurables qui ne sont pas des boréliens par un argument de cardinal : l'ensemble des boréliens a même cardinal que \mathbf{R} , alors que l'ensemble des mesurables, qui contient l'ensemble des parties de l'ensemble de Cantor, a un cardinal strictement plus grand.

première description cherchée. La seconde s'en déduisant en passant aux complémentaires, cela termine la démonstration.

3.3. Fonctions mesurables et ensembles mesurables

D'après la note 9, toute fonction et tout ensemble raisonnable sont mesurables (même si Banach et Tarski ont construit des ensembles très déraisonnables) mais si on éprouve une réticence à utiliser ce métathéorème pour vérifier la mesurabilité d'une fonction, le résultat ci-dessous fournit un critère commode.

Proposition III.1.9. — *Les conditions suivantes sont équivalentes si $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$:*

- f est mesurable,
- $f^{-1}(X)$ est mesurable pour tout borélien X de $\overline{\mathbf{R}}_+$,
- $f^{-1}([0, a[)$ est mesurable pour tout $a \in \mathbf{R}_+$,
- $f^{-1}([0, a])$ est mesurable pour tout $a \in \mathbf{R}_+$.

Démonstration. — L'équivalence entre les 3 derniers points suit de ce que la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}_+$ est engendrée par les $[0, a[$ ou les $[0, a]$, pour $a \in \mathbf{R}_+$. Il suffit donc de prouver l'équivalence entre les premier et troisième points. Si $f^{-1}([0, a])$ est mesurable pour tout $a \in \mathbf{R}_+$, alors $X_{n,k} = f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[) = f^{-1}([0, \frac{k+1}{2^n}[) - f^{-1}([0, \frac{k}{2^n}[)$ l'est aussi, pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$. Il s'ensuit que $f_n = \sum_{k \in \mathbf{N}} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{X_{n,k}}$ est mesurable, comme limite simple (i.e. série) de fonctions mesurables, et comme f_n tend simplement vers f , on en déduit la mesurabilité de f .

Réciproquement, soit f mesurable, et soit $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\text{Esc}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}_+)$ tendant vers f en dehors de B , où B est de mesure nulle. Si $b \in \mathbf{R}_+$, soit $D_{b,k} = f_k^{-1}([0, b[)$, et soient $X_b = f^{-1}([0, b[)$ et $X_b^+ = f^{-1}([0, b])$. Alors $D_{b,k}$ est un dallage, et donc $Y_b = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \geq n} X_{b,k}$ est mesurable. Par ailleurs, si $x \in X_b - B$, alors $f(x) < b$, et donc $f_k(x) < b$, pour tout k assez grand, et donc $X_b - B \subset Y_b$. De même, si $x \in Y_b - B$, alors $f_k(x) < b$, pour une infinité de k , et donc $f(x) \leq b$; autrement dit, $Y_b - B \subset X_b^+$. Comme B est de mesure nulle, on en déduit l'existence de Y'_b mesurable, ne différant de Y_b que par un ensemble de mesure nulle, tel que $X_b \subset Y'_b \subset X_b^+$. On a alors $X_a = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} Y'_{a_n}$, si a_n est une suite croissante de limite a , ce qui prouve que X_a est mesurable, en tant que réunion dénombrable d'ensembles mesurables. Ceci termine la démonstration.

4. Définition de l'intégrale de Lebesgue

Une fois qu'on a défini ce qu'était une fonction mesurable, on peut se demander comment la mesurer. Une mesure naturelle pour beaucoup de questions est fournie par l'intégrale de Lebesgue (et la mesure de Lebesgue). La présentation que nous avons choisie est purement axiomatique⁽¹²⁾; elle n'est pas sans rappeler le point de vue concernant les nombres réels adopté en classes préparatoires (où \mathbf{R} est présenté comme un corps totalement ordonné dans lequel toute partie non vide admet une borne supérieure, le rôle joué par la propriété de la borne supérieure dans cette présentation de \mathbf{R} étant tenu ici par le théorème de convergence monotone).

⁽¹²⁾Ceci a pour avantage de faire glisser sous le tapis certains points assez délicats sans diminuer la facilité d'utilisation de la théorie. Le lecteur se sentant un peu inconfortable à l'idée d'utiliser un résultat dont il n'a pas vu une démonstration est renvoyé à EAATN pour une construction de l'intégrale satisfaisant les axiomes.

4.1. Intégration des fonctions positives

Théorème III.1.10. — Il existe une unique application $f \mapsto \int f$ de $\text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ vérifiant les propriétés (i)–(v) ci-dessous.

- (i) Si f est en escalier, alors $\int f$ est la quantité précédemment définie.
- (ii) (linéarité) $\int (af + bg) = a \int f + b \int g$, si $a, b \in \mathbf{R}_+$, et $f, g \in \text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$.
- (iii) $\int f = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p.
- (iv) Si $f \leq g$ p.p., alors $\int f \leq \int g$.
- (v) (théorème de convergence monotone) Si (f_n) est une suite croissante d'éléments de $\text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

Remarque III.1.11. — (i) Les propriétés fondamentales sont la linéarité de l'intégration (propriété (ii)) et le théorème de convergence monotone (propriété (v)).

(ii) La propriété (iv) découle des (ii) et (iii) : en effet, on a $\int g + \int -\inf(0, g - f) = \int f + \int \sup(g - f, 0)$, où toutes les fonctions sont positives et $-\inf(0, g - f) = 0$ p.p. par hypothèse.

(iii) La propriété (i) est une normalisation qui définit une mesure bien particulière sur \mathbf{R}^m , à savoir la *mesure de Lebesgue*. Comme nous le verrons (th. III.3.6), cette propriété implique que la mesure de Lebesgue est invariante par translation. Réciproquement, si $f \rightarrow \int f$ est linéaire et invariante par translation [ce qui signifie que, pour tous $f \in \text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$ et $a \in \mathbf{R}^m$, on a $\int T_a(f) = \int f$, où $(T_a(f))(t) = f(t + a)$], et si $\int e_{0,0} = 1$, alors $\int e_{r,\mathbf{k}}$ ne dépend pas de \mathbf{k} , grâce à l'invariance par translation, et donc vaut 2^{-rm} , grâce à la normalisation $\int e_{0,0} = 1$ (cela suit, par une récurrence sur r , de l'indépendance de $\int e_{r,\mathbf{k}}$ par rapport à \mathbf{k} et de la formule $e_{r,\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{a} \in \{0,1\}^m} e_{r+1,\mathbf{k}+\mathbf{a}}$); la linéarité implique alors que $\int f$ vérifie la propriété (i). Autrement dit, on aurait pu remplacer la propriété (i) par l'invariance par translation et la normalisation $\int e_{0,0} = 1$.

4.2. Mesure de Lebesgue d'un ensemble

Si $X \subset \mathbf{R}^m$ est mesurable, sa *mesure de Lebesgue* est définie par $\lambda(X) = \int \mathbf{1}_X \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Le résultat suivant montre que la mesure de Lebesgue est dénombrablement additive et donc définit une mesure⁽¹³⁾ sur \mathbf{R}^m muni de la tribu des ensembles mesurables.

Proposition III.1.12. — Si les $(X_i)_{i \in I}$, où I est dénombrable, sont des sous-ensembles mesurables de \mathbf{R}^m deux à deux disjoints, alors

$$\lambda(\cup_{i \in I} X_i) = \sum_{i \in I} \lambda(X_i).$$

Démonstration. — L'hypothèse selon laquelle les X_i sont deux à deux disjoints se traduit par $\mathbf{1}_{\cup_{i \in I} X_i} = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{X_i}$, et il n'y a plus qu'à numéroter les éléments de I et appliquer le

⁽¹³⁾Une *mesure* μ sur un ensemble de E muni d'une tribu \mathcal{A} est une fonction $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ vérifiant $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\cup_{i \in I} X_i) = \sum_{i \in I} \mu(X_i)$ pour toute famille dénombrable $(X_i)_{i \in I}$ d'éléments de \mathcal{A} deux à deux disjoints.

théorème de convergence monotone (dans le cas I infini) à la suite des sommes partielles $\sum_{i \leq n} \mathbf{1}_{X_i}$.

Proposition III.1.13. — Soit $f \in \text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$.

(i) $\int f = 0$ si et seulement si $\lambda(\{t, f(t) \neq 0\}) = 0$.

(ii) Si $\int f < +\infty$, alors $\lambda(\{t, f(t) = +\infty\}) = 0$.

Démonstration. — Soit $A = \{t, f(t) \neq 0\}$. On a $\inf(f, N) \leq N \mathbf{1}_A$ et $\int \inf(f, N) \leq N \lambda(A)$, pour tout $N \in \mathbf{N}$. Comme $\inf(f, N)$ tend en croissant vers f , le théorème de convergence monotone montre que $\int f = 0$ si $\lambda(A) = 0$. Réciproquement, si $\int f = 0$, alors Nf tend en croissant vers $+\infty \mathbf{1}_A$, et comme $\int Nf = 0$ pour tout N , on a $+\infty \lambda(A) = 0$ et donc $\lambda(A) = 0$. Ceci démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit de remarquer que si $A = \{t, f(t) = +\infty\}$, alors $f \geq M \mathbf{1}_A$ quel que soit $M \in \mathbf{R}_+$, et donc $M \lambda(A) \leq \int f$ quel que soit $M \in \mathbf{R}_+$.

Corollaire III.1.14. — X est de mesure nulle si et seulement si $\lambda(X) = 0$.

Démonstration. — Si $X \subset \mathbf{R}^m$ est mesurable, alors

$$X \text{ est de mesure nulle} \iff \mathbf{1}_X = 0 \text{ p.p.} \iff \int \mathbf{1}_X = 0 \iff \lambda(X) = 0.$$

La première équivalence est par définition, la seconde suit du (iii) du th. III.1.10, et la dernière résulte du (i) de la prop. III.1.13.

Le cor. III.1.14 est un cas particulier du résultat suivant, pour lequel nous renvoyons à EAATN.

Théorème III.1.15. — Si X est mesurable, alors $\lambda(X) = \lambda^+(X)$.

4.3. Intégration des fonctions sommables

En découpant une fonction quelconque en partie réelle positive et négative et partie imaginaire et négative, cela permet de définir l'intégrale d'une fonction mesurable à valeurs dans \mathbf{C} . Toutefois, comme $+\infty - (+\infty)$ n'a pas de sens, on est forcé de restreindre l'ensemble des fonctions considérées.

Définition III.1.16. — (Intégrale de Lebesgue)

(i) $f \in \text{Mes}(\mathbf{R}^m)$ est *sommable*, si $\int |f| < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m) \subset \text{Mes}(\mathbf{R}^m)$ l'ensemble des fonctions sommables.

(ii) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$, les fonctions $\text{Re}^+(f)$, $\text{Re}^+(-f)$, $\text{Re}^+(if)$ et $\text{Re}^+(-if)$ sont sommables puisque majorées par $|f|$, et on pose

$$\int f = \int \text{Re}^+(f) - \int \text{Re}^+(-f) + i \int \text{Re}^+(-if) - i \int \text{Re}^+(if).$$

Remarque III.1.17. — (i) L'intégrale $f \mapsto \int f$ est \mathbf{C} -linéaire : cela résulte formellement du (ii) du th. III.1.10.

(ii) Si f est sommable, si $\int f = \rho e^{i\theta}$, et si h est définie par $f = |f|e^{ih}$ p.p., alors

$$\int |f| - \left| \int f \right| = \operatorname{Re} \left(\int |f| - \int f \right) = \operatorname{Re} \left(\int |f| - \int e^{-i\theta} f \right) = \operatorname{Re} \left(\int |f|(1 - e^{ih-i\theta}) \right) \geq 0,$$

puisque la fonction $\operatorname{Re}(|f|(1 - e^{ih-i\theta}))$ est positive. *En résumé*, $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

(iii) Si $X \subset \mathbf{R}^m$ est mesurable, et si $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$, alors $\mathbf{1}_X \phi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$ car $|\mathbf{1}_X \phi| \leq |\phi|$. On note $\int_X \phi$, si $\phi \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$, l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^m} \mathbf{1}_X \phi$.

5. Les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée

Soit X un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^m . On dit que $\phi : X \rightarrow \mathbf{C}$ est mesurable si la fonction obtenue en prolongeant ϕ par 0 à \mathbf{R}^m est mesurable. L'ensemble $\operatorname{Mes}(X)$ des fonctions mesurables sur X est donc naturellement un sous-espace de $\operatorname{Mes}(\mathbf{R}^m)$, et on définit $\mathcal{L}^1(X)$ comme l'intersection de $\operatorname{Mes}(X)$ avec $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$.

L'application $\phi \rightarrow \mathbf{1}_X \phi$ est une projection de $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$ sur son sous-espace $\mathcal{L}^1(X)$.

Théorème III.1.18. — (de convergence monotone)

(i) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\operatorname{Mes}(X, \overline{\mathbf{R}}_+)$, alors la limite est mesurable et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

(ii) Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\operatorname{Mes}(X, \overline{\mathbf{R}}_+)$, alors la somme de la série est mesurable et $\int \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int u_n$ (Fubini pour les fonctions positives sur $\mathbf{N} \times X$).

Démonstration. — Le (i) est immédiat (compte-tenu du théorème de convergence uniforme sur \mathbf{R}^m , cf. (v) du th. III.1.10). Le (ii) se déduit du (i) en considérant les sommes partielles.

Proposition III.1.19. — (Lemme de Fatou) Si $f_n \in \operatorname{Mes}(X, \overline{\mathbf{R}}_+)$, alors

$$\int (\liminf f_n) \leq \liminf \int f_n.$$

Démonstration. — Soit $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$. Alors g_n est mesurable comme limite simple de fonctions mesurables, et $g_n \rightarrow \liminf f_n$ en croissant, par définition de la limite inférieure. D'après le théorème de convergence monotone, on a donc $\int g_n \rightarrow \int \liminf f_n$. Par ailleurs, $\int g_n \leq \int f_n$ quel que soit n . On a donc

$$\int \liminf f_n = \lim \int g_n = \liminf \int g_n \leq \liminf \int f_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si $f \in \mathcal{L}^1(X)$, on définit sa (semi)-norme $\|f\|_1$ par $\|f\|_1 = \int |f|$. Il résulte du (iii) du th. III.1.10 que l'on a $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p. On dit que f_k tend vers f dans $\mathcal{L}^1(X)$ (ou que f_k tend vers f en moyenne), si $\|f_k - f\|_1 \rightarrow 0$. Comme $\|\cdot\|_1$ est une semi-norme et pas une norme, la limite d'une suite n'est pas unique; de fait si $f_k \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^1(X)$, alors $f_k \rightarrow g$ dans $\mathcal{L}^1(X)$ pour tout g tel que $g - f = 0$ p.p.

Il résulte du (ii) de la rem. III.1.17 que $|\int f| \leq \|f\|_1$, et donc que $f \mapsto \int f$ est linéaire continue (et même 1-lipschitzienne) sur $\mathcal{L}^1(X)$.

Théorème III.1.20. — (de convergence dominée)

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments $\mathcal{L}^1(X)$ vérifiant :

- il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ telle que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on a $|f_n| \leq g$ p.p. (domination),
- f_n converge simplement presque partout,

alors la limite presque partout f de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à $\mathcal{L}^1(X)$, et f_n tend vers f dans $\mathcal{L}^1(X)$; en particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n = \int f$.

Démonstration. — f est mesurable comme limite simple p.p. de fonctions mesurables et sommable car $|f| \leq g$ p.p. (si $A_n = \{x, |f_n| > g\}$, on a $|f| \leq g$, si $x \notin A = \cup_{n \in \mathbf{N}} A_n$, et comme A_n est de mesure nulle pour tout n , il en est de même de A). D'autre part, quitte à modifier g et les f_n sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que l'on a $|f_n| \leq g$ partout. On a alors $|f_n - f| \leq 2g$, et on peut appliquer le lemme de Fatou à $h_n = 2g - |f_n - f|$. Comme $h_n \rightarrow 2g$, on obtient

$$\int 2g \leq \liminf \int 2g - |f_n - f| = \int 2g - \limsup \int |f_n - f|,$$

et comme $\int 2g$ est fini, on en tire $\limsup \int |f_n - f| \leq 0$, et donc $\int |f_n - f| \rightarrow 0$, puisque $\int |f_n - f| \geq 0$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Ceci permet de conclure.

Exercice III.1.21. — Si $n \geq 1$, soient $f_n = n \mathbf{1}_{[0, 1/n]}$ et $g_n = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[0, n]}$. Montrer que $f_n \rightarrow 0$ p.p. et $g_n \rightarrow 0$ p.p., et que $\int f_n = \int g_n = 1$. Peut-on en déduire que $1 = 0$?

6. Premières applications

Le résultat qui suit est très utile pour calculer explicitement des intégrales en dimension 1; le théorème de Fubini dont il sera question plus loin permet de ramener le calcul d'intégrales en dimension quelconque à une suite d'intégrations en une variable (on n'est heureusement pas forcé de revenir à la définition!).

Théorème III.1.22. — (Théorème fondamental de l'analyse)

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est continue, et si $F : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est dérivable de dérivée f , alors $\int_{[a, b]} f = F(b) - F(a)$.

Démonstration. — Par linéarité, en considérant séparément $\text{Im}(F)$ et $\text{Re}(F)$, on peut se ramener au cas où F est à valeurs réelles. Si $n \in \mathbf{N}$, et si $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, soit $c_{n,i} = a + i \frac{b-a}{n}$, et soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$, la fonction valant $\frac{n}{b-a} (F(c_{n,i+1}) - F(c_{n,i}))$ sur $[c_{n,i}, c_{n,i+1}[$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors $\int f_n = \sum_{i=0}^{n-1} (F(c_{n,i+1}) - F(c_{n,i})) = F(b) - F(a)$, pour tout n . Le théorème des accroissements finis montre qu'il existe $u_{n,i} \in [c_{n,i}, c_{n,i+1}[$ tel que $f_n(t) = f(u_{n,i})$, si $t \in [c_{n,i}, c_{n,i+1}[$, et donc que $f_n(t) = f(u_n(t))$, avec $|t - u_n(t)| \leq \frac{b-a}{n}$. On en déduit que $|f_n| \leq \|f\|_\infty$ pour tout n et, f étant continue, que f_n tend simplement vers f sur $[a, b]$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour intervertir limite et intégrale, ce qui nous donne $\int_{[a, b]} f = F(b) - F(a)$. Le résultat s'en déduit en remarquant que $\{b\}$ étant de mesure nulle, on a $\int_{[a, b]} f = \int_{[a, b[} f$.

Théorème III.1.23. — (convergence dominée pour les séries)

Soient I un ensemble dénombrable et $(a_{n,i})_{n \in \mathbf{N}, i \in I}$ des nombres complexes vérifiant :

- il existe $(b_i)_{i \in I}$, avec $\sum_{i \in I} |b_i| < +\infty$, telle que $|a_{n,i}| \leq b_i$ pour tous $n \in \mathbf{N}$ et $i \in I$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,i}$ existe pour tout $i \in I$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} a_{n,i} = \sum_{i \in I} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,i}$.

Démonstration. — On peut supposer que $I = \mathbf{N}$, et on transforme les séries en intégrales de fonctions « localement constantes » en associant à une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la fonction valant u_n sur $[n, n+1[$ et 0 sur \mathbf{R}_-^* . L'énoncé se déduit alors du th. III.1.20 (en fait, on peut le démontrer directement, en se fatiguant un peu).

III.2. Quelques espaces fonctionnels

1. L'espace $L^1(X)$

Dans tout ce qui suit, X est un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^m .

Théorème III.2.1. — (Fubini sur $\mathbf{N} \times X$)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(X)$ telle que $\sum_{n \in \mathbf{N}} \int |u_n| < +\infty$.

- (i) La série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(t)$ converge (absolument) p.p.
- (ii) Si $g = \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ p.p., alors $g \in \mathcal{L}^1(X)$, et la série de terme général u_n converge vers g dans $\mathcal{L}^1(X)$; en particulier, $\int_X g = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_X u_n$.

Démonstration. — Soit $h(t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} |u_n(t)|$. D'après le théorème de convergence monotone, on a $\int_X h = \sum_{n \in \mathbf{N}} \int |u_n|$, et l'hypothèse implique que $\int_X h < +\infty$. La prop. III.1.13 permet d'en conclure que $A_1 = \{t \in X, \sum_{n \in \mathbf{N}} |u_n(t)| = +\infty\}$ est de mesure nulle, et comme A_1 est précisément l'ensemble des $t \in X$ tels que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(t)$ ne converge pas absolument, on en déduit le premier point.

Soit A_2 l'ensemble des points tels que $g(t) \neq \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(t)$. Alors A_2 est de mesure nulle par hypothèse, et donc $A = A_1 \cup A_2$ est aussi de mesure nulle comme réunion de deux ensembles de mesure nulle. Soit S la fonction définie par $S(t) = \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(t)$, si $t \notin A$, et $S(t) = 0$ si $t \in A$. Si $N \in \mathbf{N}$, soit $S_N = \sum_{n \leq N} u_n$ la somme partielle de la série. On a $S = g$ p.p., et pour démontrer le second point, il suffit de prouver que S est sommable et $\|S - S_N\|_1 \rightarrow 0$. Or $|S_N(t)| \leq h(t)$ quels que soient $t \notin A$ et $N \in \mathbf{N}$, et donc $|S(t)| \leq h(t)$, quel que soit $t \notin A$. On en déduit le fait que S est sommable. De plus, $|S_N - S| \leq 2h$ en dehors de A et $|S_N(t) - S(t)| \rightarrow 0$, si $t \notin A$. Comme A est de mesure nulle, on est dans les conditions d'application du théorème de convergence dominée; on en déduit que $\int |S_N - S| \rightarrow 0$, ce qui permet de conclure.

Corollaire III.2.2. — Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}^1(X)$ tendant vers f dans $\mathcal{L}^1(X)$, on peut extraire de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une sous-suite convergeant p.p. vers f .

Démonstration. — Extrayons de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une sous-suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\|f - g_n\|_1 \leq 2^{-n}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Soit $u_n = g_n - g_{n-1}$, si $n \geq 1$, et $u_0 = g_0$. Alors $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\|_1 < +\infty$, puisque $\|u_n\|_1 \leq \|g_n - f\|_1 + \|g_{n-1} - f\|_1 \leq 2^{1-n}$. D'après le th. III.2.1, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(x)$ converge presque partout, la limite presque partout g appartient à $\mathcal{L}^1(X)$, et $g_n = \sum_{i=0}^n u_i$ tend vers g dans $\mathcal{L}^1(X)$. Comme $g_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^1(X)$, on en déduit que $\|f - g\|_1 = 0$, ce qui implique que $f = g$ p.p., et que g_n tend vers f p.p., ce qui permet de conclure.

Exercice III.2.3. — Si $2^k \leq n < 2^{k+1}$, soit f_n la fonction caractéristique de $[\frac{n-2^k}{2^k}, \frac{n+1-2^k}{2^k}]$. Montrer que $f_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{L}^1([0, 1])$, mais que $f_n(x)$ ne tend vers 0 pour aucun $x \in [0, 1]$. Ce résultat n'est-il pas en contradiction avec le corollaire précédent ?

L'espace $\mathcal{L}^1(X)$ muni de la semi-norme $\| \cdot \|_1$ n'est pas séparé puisque deux fonctions différant d'une fonction nulle p.p. sont à distance nulle. On note $L^1(X)$ le séparé de $\mathcal{L}^1(X)$. Comme $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ p.p., $L^1(X)$ est le quotient de $\mathcal{L}^1(X)$ par le sous-espace $\text{Npp}(X)$ des fonctions nulles presque partout ; on peut donc penser à $L^1(X)$ comme étant l'espace $\mathcal{L}^1(X)$ des fonctions sommables, en *considérant comme égales deux fonctions qui sont égales presque partout* ⁽¹⁴⁾.

Remarque III.2.4. — L'intégrale $f \mapsto \int f$ est bien définie sur $L^1(X)$ car $\int(f - g) = 0$ si $f = g$ p.p. De plus, $f \mapsto \int f$, qui est linéaire puisqu'elle l'est sur $\mathcal{L}^1(X)$, est continue car $|\int f| \leq \int |f| = \|f\|_1$.

Théorème III.2.5. — *L'espace $L^1(X)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. — On s'est débrouillé pour que $\| \cdot \|_1$ soit une norme sur $L^1(X)$; il suffit donc de prouver que $L^1(X)$ est complet, et pour cela, il suffit de vérifier que toute série normalement convergente est convergente, ce qui est précisément le contenu du th. III.2.1.

2. L'espace $L^2(X)$

Si X est un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^m , on note $\mathcal{L}^2(X)$ l'ensemble des $f : X \rightarrow \mathbf{C}$ mesurables et *de carré sommable* (i.e. telles que $\int_X |f(t)|^2 dt < +\infty$). Il est immédiat que $\mathcal{L}^2(X)$ est stable par multiplication par un scalaire, et un peu moins qu'il est stable par addition, mais cela résulte de l'inégalité $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$, si $a, b \in \mathbf{C}$ dont on déduit que $\int_X |f + g|^2 \leq (2 \int_X |f|^2 + 2 \int_X |g|^2)$, si $f, g \in \text{Mes}(X)$. Autrement dit, $\mathcal{L}^2(X)$ est un espace vectoriel.

⁽¹⁴⁾Cette représentation mentale de $L^1(X)$ est probablement la plus facile d'utilisation ; il faut quand même faire attention qu'un élément de $L^1(X)$ a beau être défini presque partout, il n'a de valeur précise en aucun point puisqu'on peut modifier arbitrairement sa valeur sur un ensemble de mesure nulle. Autrement dit, on peut parler de $f(x)$, où x est pensé comme une variable (par exemple pour les changements de variable dans les intégrales, ou pour définir le produit d'une fonction de $L^1(X)$ et d'une fonction bornée), mais pas de $f(x_0)$.

Maintenant, comme $|ab| \leq \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2)$, si $a, b \in \mathbf{C}$, on en déduit que, si $f, g \in \mathcal{L}^2(X)$, alors $\bar{f}g \in \mathcal{L}^1(X)$, ce qui permet de définir $\langle f, g \rangle \in \mathbf{C}$ par $\langle f, g \rangle = \int_X \bar{f}g$. L'application \langle , \rangle vérifie toutes les propriétés d'un produit scalaire, sauf celle d'être définie. On a :

$$\langle f, f \rangle = 0 \iff \int_X |f(t)|^2 = 0 \iff f \in \text{Npp}(X).$$

Autrement dit, l'application $f \mapsto \|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$ définit une semi-norme hilbertienne sur $\mathcal{L}^2(X)$. On note $L^2(X)$ l'espace séparé associé ; d'après ce qui précède, c'est le quotient de $\mathcal{L}^2(X)$ par $\text{Npp}(X)$. Ceci permet, comme pour $L^1(X)$, de penser à $L^2(X)$ comme étant l'espace $\mathcal{L}^2(X)$ des fonctions de carré sommable, en considérant comme égales deux fonctions qui sont égales presque partout. Comme $\langle f, g \rangle = 0$, si f ou g est nulle p.p., la forme sesquilinéaire \langle , \rangle passe au quotient, et induit un produit scalaire sur $L^2(X)$, étant donné qu'on a fait ce qu'il fallait pour la rendre définie.

Théorème III.2.6. — (Fischer-Riesz, 1907) *L'espace $L^2(X)$, muni de la norme $\| \cdot \|_2$ définie par $\|f\|_2 = (\int_X |f|^2)^{1/2}$, est un espace de Hilbert.*

Démonstration. — D'après la discussion précédant le théorème, il suffit de prouver que $L^2(X)$ est complet, et pour cela, il suffit de prouver qu'une série normalement convergente a une limite. La démonstration, très analogue à celle du th. III.2.5, fait l'objet de l'exercice ci-dessous. La convergence dans $L^2(X)$ est dite *en moyenne quadratique*.

Exercice III.2.7. — Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^2(X)$ telle que $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\|_2 < +\infty$, et soit $h : X \rightarrow \bar{\mathbf{R}}_+$ définie par $h(t) = (\sum_{n \in \mathbf{N}} |u_n(t)|)^2$.

(i) Montrer que $\int_X h < +\infty$. En déduire qu'il existe $A \subset X$ de mesure nulle tel que, si $t \in X - A$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(t)$ converge absolument.

(ii) On note $S(t)$ la somme de la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(t)$, si $t \notin A$, et on prolonge S par 0 à A , et, si $N \in \mathbf{N}$, on pose $S_N(t) = \sum_{n \leq N} u_n(t)$. Montrer que $|S - S_N|^2$ est majoré par $4h$, quel que soit $N \in \mathbf{N}$.

(iii) Montrer que $S \in \mathcal{L}^2(X)$ et que $S_N \rightarrow S$ dans $L^2(X)$.

(iv) Montrer que, si $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^2(X)$, on peut extraire de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une sous-suite convergent p.p. vers f .

3. Convergence dans L^1 et L^2

Remarque III.2.8. — (i) Les espaces $L^1(X)$ et $L^2(X)$ n'ont a priori rien à voir. Toutefois, comme ils sont tous deux obtenus en prenant le quotient d'un sous-espace de $\text{Mes}(X)$ par $\text{Npp}(X)$, nous commettrons l'abus de notations de désigner par $L^1(X) + L^2(X)$ (resp. $L^1(X) \cap L^2(X)$) le quotient de $\mathcal{L}^1(X) + \mathcal{L}^2(X)$ (resp. $\mathcal{L}^1(X) \cap \mathcal{L}^2(X)$) par $\text{Npp}(X)$. Autrement dit, nous verrons un élément de $L^1(X) \cap L^2(X)$ comme une fonction qui est à la fois sommable et de carré sommable, à addition près d'une fonction nulle presque partout.

(ii) Il n'y a d'inclusion dans aucun sens entre $L^1(\mathbf{R}^m)$ et $L^2(\mathbf{R}^m)$. Par contre, si X est de mesure finie, alors $L^2(X) \subset L^1(X)$. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que,

si f est de carré sommable sur X , alors

$$\int_X |f| \leq \left(\int_X 1 \right)^{1/2} \left(\int_X |f|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

En fait, l'inégalité ci-dessus montre que l'inclusion ι de $L^2(X)$ dans $L^1(X)$ est continue, et que l'on a $\|\iota\| \leq \lambda(X)^{1/2}$.

Soit X un ouvert de \mathbf{R}^m . On rappelle que $\mathcal{C}_c(X)$, $\mathcal{C}_c^k(X)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ désignent respectivement l'espace des fonctions continues (resp. de classe \mathcal{C}^k , resp. de classe \mathcal{C}^∞) sur X , dont le support est compact. Comme une fonction nulle p.p. est identiquement nulle, la projection naturelle de $\mathcal{L}^1(X)$ sur $L^1(X)$ induit une injection de chacun des espaces ci-dessus dans $L^1(X)$, ce qui permet de les considérer comme des sous-espaces de $L^1(X)$. Pour la même raison, $\text{Esc}(X)$ est, de manière naturelle, un sous-espace de $L^1(X)$.

Une fonction générale de $L^1(X)$ ou $L^2(X)$ étant assez difficile à appréhender (cf. ex. B.2.9), le très utile résultat suivant permet de démontrer des résultats sur $L^1(X)$ ou $L^2(X)$ en commençant par des fonctions simples et en utilisant des arguments de continuité pour traiter le cas général (cf. th. IV.2.4). Il montre que l'on aurait pu aussi définir $L^1(X)$ et $L^2(X)$ comme les complétés de $\mathcal{C}_c(X)$ (ou de $\text{Esc}(X)$) pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

Théorème III.2.9. — *Si X est un ouvert de \mathbf{R}^m , et si E est un des espaces $\text{Esc}(X)$, $\mathcal{C}_c(X)$, $\mathcal{C}_c^k(X)$, avec $k \in \mathbf{N}$, ou $\mathcal{C}_c^\infty(X)$, alors E est dense dans $L^1(X)$ et $L^2(X)$. De plus, si $\phi \in L^1(X) \cap L^2(X)$, il existe une suite d'éléments de E convergeant vers ϕ , à la fois dans $L^1(X)$ et dans $L^2(X)$.*

Démonstration. — Si D_n est la réunion des dalles élémentaires de taille 2^{-n} incluses dans $X \cap ([-2^n, 2^n]^m)$, alors X est la réunion croissante des dallages D_n , pour $n \in \mathbf{N}$. Soit F un des espaces $L^1(X)$, $L^2(X)$ ou $L^1(X) \cap L^2(X)$, et soit $\phi \in F$ [on munit $L^1(X) \cap L^2(X)$ de la norme $\sup(\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2)$]. Si $n \in \mathbf{N}$, soit ϕ_n la fonction valant $\phi(x)$, si $x \in D_n$ et $|\phi_n(x)| \leq n$, et valant 0 si $x \notin D_n$ ou si $|\phi(x)| > n$. Alors $\phi_n(x) \rightarrow \phi(x)$ quel que soit $x \in X$, et comme $|\phi_n| \leq |\phi|$ et $|\phi_n^2| \leq |\phi^2|$, cela implique que ϕ_n converge vers ϕ dans F , d'après le théorème de convergence dominée. On peut donc, si $j \in \mathbf{N}$, trouver n_j tel que $\|\phi - \phi_{n_j}\|_F \leq 2^{-j}$. Maintenant, comme ϕ_{n_j} est une fonction mesurable bornée à support borné, il existe $f_j \in \text{Esc}(D_{n_j})$ tel que $\|f_j - \phi_{n_j}\|_F \leq 2^{-j}$. On a donc $\|f_j - \phi\|_F \leq 2^{1-j}$. On en déduit la densité de $\text{Esc}(X)$ dans F , ce qui prouve le théorème pour $E = \text{Esc}(X)$. Le reste s'en déduit en utilisant l'existence de fonctions \mathcal{C}^∞ sympathiques (cf. exercice ci-dessous).

Exercice III.2.10. — La fonction φ_0 définie par $\varphi_0(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\varphi_0(x) = e^{-1/x}$ si $x > 0$ est une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} (la dérivée n -ième de φ_0 sur \mathbf{R}_+^* est de la forme $e^{-1/x} P_n(\frac{1}{x})$, où P_n est un polynôme; elle tend donc vers 0 en 0^+ , ce qui permet de la recoller avec la dérivée n -ième de φ_0 sur \mathbf{R}_-^*).

(i) A partir de φ_0 , construire successivement des fonctions \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} :

- $\varphi_1 : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, nulle en dehors de $[0, 1]$, avec $\int_0^1 \varphi_1 = 1$;
- $\varphi_2 : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, valant 0 si $x \leq 0$ et 1; si $x \geq 1$;

- $\varphi_\varepsilon : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$, pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$, nulle en dehors de $[0, 1]$ et valant 1 sur $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$.
- (ii) Terminer la démonstration du théorème III.2.9.

Corollaire III.2.11. — Si $f \in L^1(X)$ vérifie $\int_X \varphi f = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$, alors $f = 0$.

Démonstration. — Il résulte de la démonstration du th. III.2.9 que, si $g \in L^1(X)$ est bornée, on peut trouver une suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ tendant vers g dans $L^1(X)$ et vérifiant de plus $\|g_n\|_\infty \leq \|g\|_\infty$, pour tout n . En outre, quitte à extraire une sous-suite, on peut s'arranger (cor. III.2.2) pour que $g_n \rightarrow g$ p.p.

Ce qui précède s'applique en particulier, si $Y \subset X$ est un ouvert de mesure finie, à la fonction g_Y définie par $g_Y(x) = 0$, si $f(x) = 0$ ou $x \notin Y$, et $g_Y(x) = \bar{f}(x)/|f(x)|$, si $f(x) \neq 0$ et $x \in Y$. La suite $g_n f$ tend alors vers $\mathbf{1}_Y |f|$ p.p. et est majorée, pour tout n , par $\|g_Y\|_\infty |f| = |f|$. On est donc sous les conditions d'application du th. de convergence dominée, ce qui permet de montrer que $\int g_n f \rightarrow \int_Y |f|$. L'hypothèse $\int_X \varphi f = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$ entraîne donc $\int_Y |f| = 0$, pour tout Y , et donc aussi $\int |f| = 0$ par le théorème de convergence monotone. Ceci permet de conclure.

III.3. Intégrales multiples

1. Le théorème de Fubini

Une somme finie $\sum_{j,k} a_{j,k}$ peut se calculer en sommant d'abord sur j puis sur k ou en sommant d'abord sur k puis sur j . Le théorème de Fubini ci-dessous dit qu'il en est de même pour des intégrales (à condition que tout soit sommable).

Lemme III.3.1. — (Fubini pour les fonctions en escalier) L'application $f \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f$ (resp. $f \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f$) est une application linéaire de $\text{Esc}(\mathbf{R}^{n+m})$ dans $\text{Esc}(\mathbf{R}^m)$ (resp. $\text{Esc}(\mathbf{R}^n)$), et on a

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left| \int_{\mathbf{R}^n} f \right| \leq \int_{\mathbf{R}^{n+m}} |f| \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}^n} \left| \int_{\mathbf{R}^m} f \right| \leq \int_{\mathbf{R}^{n+m}} |f|$$

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f \right) = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f \right).$$

Démonstration. — La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale. Maintenant, soit $r \in \mathbf{N}$, et soient $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}^n$ et $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{Z}^m$. On note (\mathbf{j}, \mathbf{k}) l'élément $(j_1, \dots, j_n, k_1, \dots, k_m)$ de \mathbf{Z}^{n+m} . Un calcul immédiat montre alors que

$$\int_{\mathbf{R}^n} e_{r,(\mathbf{j},\mathbf{k})} = 2^{-rn} e_{r,\mathbf{k}}, \quad \int_{\mathbf{R}^m} e_{r,(\mathbf{j},\mathbf{k})} = 2^{-rm} e_{r,\mathbf{j}},$$

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} e_{r,(\mathbf{j},\mathbf{k})} \right) = 2^{-rn} \int_{\mathbf{R}^m} e_{r,\mathbf{k}} = 2^{-r(n+m)} = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} e_{r,(\mathbf{j},\mathbf{k})} = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} e_{r,(\mathbf{j},\mathbf{k})} \right).$$

Le résultat s'en déduit en décomposant f sous la forme $f = \sum_{(\mathbf{j},\mathbf{k})} a_{(\mathbf{j},\mathbf{k})} e_{r,(\mathbf{j},\mathbf{k})}$, pour r assez grand (la somme étant une somme finie).

Proposition III.3.2. — (Fubini dans L^1) Il existe une unique application linéaire continue $f \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f$ (resp. $f \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f$) de $L^1(\mathbf{R}^{n+m})$ dans $L^1(\mathbf{R}^m)$ (resp. $L^1(\mathbf{R}^n)$) coïncidant avec l'application du même nom sur $\text{Esc}(\mathbf{R}^{n+m})$, et on a

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f \right) = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f \right).$$

Démonstration. — L'application linéaire $\int_{\mathbf{R}^n} : \text{Esc}(\mathbf{R}^{n+m}) \rightarrow L^1(\mathbf{R}^m)$ est, d'après le lemme III.3.1, uniformément continue (en fait 1-lipschitzienne) si on munit tous les espaces de la norme $\| \cdot \|_1$. Comme $L^1(\mathbf{R}^m)$ est complet, et comme $\text{Esc}(\mathbf{R}^{n+m})$ est dense dans $L^1(\mathbf{R}^{n+m})$, l'application $\int_{\mathbf{R}^n} : \text{Esc}(\mathbf{R}^{n+m}) \rightarrow L^1(\mathbf{R}^m)$ s'étend (de manière unique) par continuité à $L^1(\mathbf{R}^{n+m})$. De même, $\int_{\mathbf{R}^m} : \text{Esc}(\mathbf{R}^{n+m}) \rightarrow L^1(\mathbf{R}^n)$ s'étend par continuité à $L^1(\mathbf{R}^{n+m})$. Enfin, les trois applications

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f \right), \quad f \mapsto \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f, \quad f \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f \right)$$

sont continues sur $L^1(\mathbf{R}^{n+m})$ et coïncident sur $\text{Esc}(\mathbf{R}^{n+m})$. Comme cet espace est dense dans $L^1(\mathbf{R}^{n+m})$, elles coïncident sur $L^1(\mathbf{R}^{n+m})$ tout entier. Ceci permet de conclure.

On peut rendre la prop. III.3.2 plus concrète (et plus facilement utilisable pour le calcul d'intégrales multiples) sous la forme du (i) du théorème suivant pour lequel nous renvoyons à EAATN.

Théorème III.3.3. — (Fubini)

(i) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^{n+m})$, alors

- $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, pour presque tout $y \in \mathbf{R}^m$, et $y \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$,
- $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^n$, et $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$,

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy \right) dx.$$

(ii) Si $f : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ est mesurable, alors les fonctions

$$y \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx \quad \text{et} \quad x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy,$$

à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}_+$, sont mesurables, et

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy \right) dx.$$

Remarque III.3.4. — (i) Si $X \subset \mathbf{R}^n$ et $Y \subset \mathbf{R}^m$ sont mesurables, alors $X \times Y$ est mesurable dans \mathbf{R}^{n+m} , et on a un énoncé analogue à celui ci-dessus, en remplaçant \mathbf{R}^n par X , \mathbf{R}^m par Y et \mathbf{R}^{n+m} par $X \times Y$. Il se déduit de celui sur \mathbf{R}^{n+m} en écrivant une intégrale sur $X \times Y$ sous la forme $\int_{\mathbf{R}^{n+m}} \mathbf{1}_{X \times Y} \phi$.

(ii) Dans la pratique, on commence par utiliser le (ii) pour vérifier que $|f|$ est sommable, avant d'utiliser le (i) pour calculer des intégrales, intervertir les variables...

(iii) Le (i) s'utilise aussi comme un théorème de semi-existence : il affirme que si $f(x, y)$ est sommable, alors $\int f(x, y) dx$ converge pour presque tout y , et $\int f(x, y) dy$ converge

pour presque tout x ; par contre on ne peut en déduire la convergence de ces intégrales pour aucun x ou y particulier.

Exercice III.3.5. — Soit $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(x, y) = e^{x-y}$ si $x \leq y$, et $f(x, y) = -e^{y-x}$, si $y < x$. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y) dy \right) dx.$$

Peut-on en déduire que $-1 = 1$?

2. La formule du changement de variable

Théorème III.3.6. — (invariance par translation de la mesure de Lebesgue)

Si $v \in \mathbf{R}^m$, et si $\phi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ est mesurable, alors $x \mapsto \phi(x + v)$ est mesurable, et on a

$$\int |\phi(x + v)| dx = \int |\phi(x)| dx \quad \text{et, si } \phi \text{ est sommable, } \int \phi(x + v) dx = \int \phi(x) dx.$$

Démonstration. — Notons T_v l'application $\phi \mapsto T_v(\phi)$, définie par $(T_v(\phi))(x) = \phi(x + v)$. Si D est une dalle, et si les coordonnées de v sont des nombres dyadiques, alors $D - v = \{x - v, x \in D\}$ est encore une dalle, et on a $T_v(\mathbf{1}_D) = \mathbf{1}_{D-v}$; on en déduit, en découpant D et $D - v$ en dalles élémentaires de même taille, que $\int T_v(\mathbf{1}_D) = \int \mathbf{1}_D$. Dans le cas général, on prend une suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de \mathbf{R}^m à coordonnées dyadiques tendant vers le vecteur v de la translation : la suite des $\mathbf{1}_{D-v_n}$ tend simplement vers $\mathbf{1}_{D-v}$ en dehors des faces, mais celles-ci sont de mesure nulle, ce qui montre que $\mathbf{1}_{D-v}$ est mesurable en tant que limite simple p.p. de fonctions mesurables, et permet d'utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire que $\int T_v(\mathbf{1}_D) = \int \mathbf{1}_D$.

Par linéarité, on en déduit que $T_v(\phi)$ est mesurable et $\int T_v(\phi) = \int \phi$, si $\phi \in \text{Esc}(\mathbf{R}^m)$. Le théorème s'en déduit en utilisant la densité de $\text{Esc}(\mathbf{R}^m)$ dans $L^1(\mathbf{R}^m)$ (et le théorème de convergence monotone pour traiter le cas $\int |\phi| = +\infty$).

Soit Ω un ouvert de \mathbf{R}^m , et soit $\varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ un *difféomorphisme* de Ω sur un ouvert $\varphi(\Omega)$ de \mathbf{R}^m , c'est-à-dire une application bijective de classe \mathcal{C}^1 dont l'inverse est aussi de classe \mathcal{C}^1 . L'application φ s'écrit, en coordonnées

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_m)),$$

et la condition « φ est de classe \mathcal{C}^1 » se traduit par le fait que les dérivées partielles $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ sont continues sur Ω . On définit la *matrice jacobienne* $\text{Jac}_\varphi(x)$ de f au point x par $\text{Jac}_\varphi(x) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq m}$. On définit le *jacobien* $J_\varphi(x)$ de φ au point x comme le déterminant de $\text{Jac}_\varphi(x)$; le fait que φ soit un difféomorphisme implique que $\text{Jac}_\varphi(x)$ est inversible, et donc que $J_\varphi(x) \neq 0$, pour tout $x \in \Omega$.

Théorème III.3.7. — Si f est une fonction mesurable sur $\varphi(\Omega)$, alors f est sommable si et seulement si la fonction $x \mapsto f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi(x)$ est sommable sur Ω , et on a

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \cdot |J_\varphi(x)| dx.$$

Remarque III.3.8. — (i) En dimension 1, la matrice jacobienne de φ n'est autre que la dérivée φ' de φ , et on tombe sur la formule $\int_{\varphi([a,b])} f(y) dy = \int_{]a,b[} f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx$. Comme φ' ne s'annule pas sur $]a,b[$, il y a deux cas : soit $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$ et alors $\varphi([a,b]) =]\varphi(a), \varphi(b)[$, soit $\varphi' < 0$ sur $]a,b[$ et $\varphi([a,b]) =]\varphi(b), \varphi(a)[$. Dans le premier cas, la formule devient $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$, et dans le second, elle devient $-\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy = -\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx$; on retombe donc bien, dans les deux cas, sur la formule classique.

(ii) Une manière très pratique d'écrire la formule du changement de variable est d'expliciter formellement les éléments de volume dx et dy sous la forme $dx = |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m|$ et $dy = |dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m|$. Comme $y_i = \varphi_i(x)$, on a $dy_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) dx_j$. Comme \wedge est multilinéaire alternée, on a $\wedge_{i=1}^m (\sum_{j=1}^m a_{i,j} dx_j) = \det(a_{i,j}) \wedge_{j=1}^m dx_j$ (c'est une des manières de définir le déterminant de m vecteurs), ce qui nous donne

$$dy = \left| \wedge_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) dx_j \right) \right| = |J_\varphi(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m| = |J_\varphi(x)| dx.$$

Démonstration. — Commençons par regarder ce qui se passe dans le cas $\Omega = \mathbf{R}^m$ et φ affine (i.e. de la forme $x \mapsto A \cdot x + b$, avec $A \in \mathbf{GL}_m(\mathbf{R})$, et $b \in \mathbf{R}^m$). Dans ce cas, la matrice jacobienne de φ est constante égale à A ; on a donc $J_\varphi(x) = |\det A|$ pour tout x .

Par ailleurs, si $r \in \mathbf{N}$ et si $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$, alors $\varphi(D_{r,\mathbf{k}})$ est un translaté de $\varphi(D_{r,\mathbf{0}})$ et donc a même volume. On en déduit l'existence de $C(A) \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\lambda(\varphi(D_{r,\mathbf{k}})) = 2^{-r} C(A)$, quels que soient $r \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$. Par linéarité on a $\int_{\mathbf{R}^m} \phi(x) dx = C(A) \int_{\mathbf{R}^m} \phi(A \cdot x + b) dx$, quel que soit $\phi \in \text{Esc}(\mathbf{R}^m)$. Par continuité, cette égalité s'étend à $L^1(\mathbf{R}^m)$. Pour conclure dans le cas affine, il reste à vérifier que $C(A) = |\det A|$, ce qui constitue l'interprétation géométrique du déterminant⁽¹⁵⁾.

On démontre le cas général en utilisant le fait que, plus on regarde de près autour d'un point x , plus φ ressemble à l'application affine $h \mapsto \varphi(x) + \text{Jac}_\varphi(x) \cdot h$, et donc que quand r tend vers $+\infty$, l'image de $x + D_{r,\mathbf{0}}$ ressemble de plus en plus au parallélépipède $\varphi(x) + \text{Jac}_\varphi(x) \cdot D_{r,\mathbf{0}}$, dont le volume est $|J_\varphi(x)| \lambda(D_{r,\mathbf{0}})$.

De manière plus précise, on démontre, en utilisant la continuité uniforme de $x \mapsto \text{Jac}_\varphi(x)$ (et de $x \mapsto \text{Jac}_{\varphi^{-1}}(x)$), que si $K \subset \Omega$ est compact, il existe une suite de fonctions $\varepsilon_{K,r} : K \rightarrow \mathbf{R}_+$, pour r assez grand, tendant uniformément vers 0 sur K , telle que, quel que soit $x \in K$, on ait

$$\varphi(x) + (1 - \varepsilon_{K,r}(x)) \text{Jac}_\varphi(x) \cdot D_{r,\mathbf{0}} \subset \varphi(x + D_{r,\mathbf{0}}) \subset \varphi(x) + (1 + \varepsilon_{K,r}(x)) \text{Jac}_\varphi(x) \cdot D_{r,\mathbf{0}}.$$

⁽¹⁵⁾Le volume du parallélépipède supporté par des vecteurs v_1, \dots, v_m de \mathbf{R}^m est égal à la valeur absolue du déterminant de ces vecteurs.

On en déduit l'existence de $\varepsilon'_{K,r}$, tendant uniformément vers 0 sur K , telle que, quel que soit $x \in K$, on ait $\lambda(\varphi(x + D_{r,0})) = (1 + \varepsilon'_{K,r}(x)) |J_\varphi(x)| \lambda(x + D_{r,0})$. Maintenant, on peut écrire Ω comme une réunion croissante de dallages D_n dont l'adhérence est contenue dans Ω , et il suffit de prouver que la formule du théorème est valable pour une fonction en escalier f à support dans un des D_n , car ces fonctions forment un sous-espace dense dans $\mathcal{L}^1(\Omega)$. Par linéarité, on est ramené à prouver que $\lambda(\varphi(D)) = \int_D |J_\varphi(x)| dx$, si D est une dalle élémentaire dont l'adhérence K est incluse dans Ω . Si r est assez grand, D est la réunion disjointe des $D_{r,k}$ contenues dans D , et comme $D_{r,k} = \frac{k}{2r} + D_{r,0}$, on tire de la discussion ci-dessus l'identité

$$\lambda(\varphi(D)) = \sum_{D_{r,k} \subset D} \lambda(\varphi(\frac{k}{2r} + D_{r,0})) = \sum_{D_{r,k} \subset D} (1 + \varepsilon'_{K,r}(\frac{k}{2r})) |J_\varphi(\frac{k}{2r})| \lambda(D_{r,k}) = \int_D \phi_r(x) dx,$$

où ϕ_r est la fonction en escalier sur D valant $(1 + \varepsilon'_{K,r}(\frac{k}{2r})) |J_\varphi(\frac{k}{2r})|$, sur $D_{r,k}$. Comme $\varepsilon'_{K,r}$ tend uniformément vers 0 sur K , ϕ_r tend uniformément vers $|J_\varphi(x)|$ sur D . On en déduit le résultat.

3. L'intégrale de la gaussienne

Nous allons utiliser les résultats des deux précédents n^{os} pour établir les formules

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

On passe de la première à la seconde par le changement de variable $x = \sqrt{\pi} u$; il suffit donc de démontrer la première formule. Pour cela, notons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ l'intégrale à calculer, et posons $I_0 = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

- $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2} e^{-y^2}$ et, d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives,

$$I_0 = \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} e^{-y^2} dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}} I e^{-y^2} dy = I^2.$$

- Soit Δ la demi-droite $] -\infty, 0] \times \{0\}$, et soit $\Omega' = \mathbf{R}^2 - \Delta$. Comme Δ est de mesure nulle, on a aussi $I_0 = \int_{\Omega'} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.

- Soit $\Omega = \mathbf{R}_+^* \times] -\pi, \pi[$. Alors φ défini par $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un difféomorphisme de Ω sur Ω' , et comme $dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$ et $dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$, la matrice jacobienne de φ est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$, et son jacobien est $J_\varphi(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$. La formule du changement de variable appliquée à $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ nous donne :

$$I_0 = \int_{\Omega} e^{-(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)} |J_\varphi(r, \theta)| dr d\theta = \int_{\Omega} e^{-r^2} r dr d\theta.$$

- On utilise de nouveau le théorème de Fubini pour les fonctions positives :

$$I_0 = \int_{\mathbf{R}_+^* \times] -\pi, \pi[} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} r d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr.$$

- Enfin, le changement de variable $r^2 = u$, et donc $r dr = \frac{1}{2} du$, nous donne :

$$I_0 = \pi \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \pi [-e^{-u}]_0^{+\infty} = \pi.$$

Comme $I_0 = I^2$, cela permet de conclure.

CHAPITRE IV

TRANSFORMÉE DE FOURIER

La représentation d'une fonction périodique comme somme d'une série de Fourier est un outil très efficace pour la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (la transformée de Fourier et cette représentation des fonctions périodiques ont d'ailleurs été introduites par Fourier en 1811 dans un mémoire consacré à l'équation de la chaleur). La formule d'inversion de Fourier (démontrée par Cauchy (1815) et Poisson (1816) dans des mémoires consacrés à l'équation de Laplace), qui permet d'écrire une fonction raisonnable sur \mathbf{R}^m comme somme continue de caractères linéaires unitaires⁽¹⁾ continus, rend le même genre de services pour des équations aux dérivées partielles sur \mathbf{R}^m . Cette « boîte à outils » de Fourier s'adapte à tout groupe commutatif localement compact : il s'agit de décomposer une fonction sur un tel groupe comme une « somme » de caractères⁽²⁾. Nous l'avons déjà rencontrée dans le cadre des groupes finis (n° 5 du § I.2) ; les séries de Fourier correspondent au groupe \mathbf{R}/\mathbf{Z} ; nous la rencontrerons de nouveau pour \mathbf{R}_+^* (sous le nom de transformée de Mellin, cf. rem. VII.2.5) ; les cas du corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques et du groupe des adèles de \mathbf{Q} sont traités dans l'annexe F de EAATN.

IV.1. Intégrales dépendant d'un paramètre

De nombreuses fonctions sont définies comme intégrales de fonctions plus simples⁽³⁾, et le théorème de convergence dominée permet, bien souvent, de démontrer leur continuité et leur dérivabilité.

Théorème IV.1.1. — (Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre) *Soit X un espace métrique, et soit $x_0 \in X$. Soit $f : X \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant :*

- *la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est mesurable, quel que soit $x \in X$;*

⁽¹⁾Un caractère linéaire de \mathbf{R}^m est une fonction $\chi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}^*$ vérifiant $\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y)$, quels que soient $x, y \in \mathbf{R}^m$; un tel caractère est unitaire si $|\chi(x)| = 1$, quel que soit $x \in \mathbf{R}^m$.

⁽²⁾En probabilité, la transformée de Fourier est connue sous le nom de *fonction caractéristique*.

⁽³⁾C'est par exemple le cas de la fonction Γ d'Euler définie par $\Gamma(s) = \int_{\mathbf{R}_+} e^{-t} t^{s-1} dt$, ou de la transformée de Fourier \hat{f} d'une fonction sommable f définie (en une variable) par $\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi xt} f(t) dt$.

- pour presque tout $t \in \mathbf{R}^m$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue en x_0 ;
- il existe $h \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$ tel que, quel que soit $x \in X$, on ait $|f(x, t)| \leq h(t)$ p.p.

Alors, si $x \in X$, l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt$ est bien définie et la fonction $F : X \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $F(x) = \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt$ est continue en x_0 .

Démonstration. — La fonction $t \mapsto f(x, t)$ appartient à \mathcal{L}^1 , quel que soit $x \in X$, puisqu'on l'a supposée mesurable et majorée en module par un élément de $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$. La fonction F est donc bien définie. Pour montrer que F est continue en x_0 , il suffit (car X est un espace métrique) de prouver que pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers x_0 , la suite $(F(y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers $F(x_0)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^m} f(y_n, t) dt = \int_{\mathbf{R}^m} f(x_0, t) dt.$$

Posons $g_n(t) = f(y_n, t)$, et $g(t) = f(x_0, t)$. On a alors

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(t) = g(t)$ p.p., car $x \mapsto f(x, t)$ est continue en x_0 , pour presque tout t ;
- $|g_n(t)| \leq h(t)$ p.p. et h est sommable (et indépendante de n).

On est donc dans les conditions d'application du théorème de convergence dominée, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^m} g_n(t) dt = \int_{\mathbf{R}^m} g(t) dt$, ce qui permet de conclure.

Théorème IV.1.2. — (de dérivation sous le signe somme) Soient I un intervalle de \mathbf{R} et $f : I \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant :

- $t \mapsto f(x, t)$ est sommable, quel que soit $x \in I$;
- il existe un ensemble de mesure nulle $A \subset \mathbf{R}^m$ et $h : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}_+$ sommable, tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe en tout point de $\mathbf{R}^m - A$ et $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq h(t)$, pour tous ⁽⁴⁾ $x \in I$ et $t \notin A$.

Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt$ est dérivable et, quel que soit $x \in I$, on a

$$F'(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Démonstration. — Quitte à remplacer f par la fonction valant $f(x, t)$, si $t \notin A$, et valant 0, si $t \in A$, ce qui ne change pas la valeur des intégrales, on peut supposer que $A = \emptyset$.

Fixons $x \in I$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $I - \{x\}$ tendant vers x quand n tend vers $+\infty$. Soit $g(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$, et si $n \in \mathbf{N}$, soit $g_n(t) = \frac{f(x_n, t) - f(x, t)}{x_n - x}$. Alors g_n tend vers g simplement, et d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$|g_n(t)| \leq \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta(x_n - x), t) \right| \leq h(t),$$

⁽⁴⁾La dérivabilité étant une propriété locale, pour démontrer la dérivabilité sur un intervalle I , il suffit de la démontrer sur une suite d'intervalles dont la réunion est I . En d'autres termes, on n'a pas vraiment besoin d'une majoration sur I tout entier, mais sur une suite d'intervalles dont la réunion est I . Cette remarque s'applique aussi au cor. IV.1.3 pour lequel on peut aussi commencer par diminuer Ω .

quel que soit $t \in \mathbf{R}^m$. On est donc dans les conditions d'application du théorème de convergence dominée, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^m} g_n = \int_{\mathbf{R}^m} g$. Autrement dit, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \int_{\mathbf{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt,$$

pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $I - \{x\}$ tendant vers x quand n tend vers $+\infty$. On en déduit le résultat.

Si $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose $|\ell| = \ell_1 + \dots + \ell_n$, et $\partial^\ell = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\ell_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\ell_n}$.

Corollaire IV.1.3. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{R}^n , $k \in \mathbf{N}$ et $f : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ vérifiant :

- $t \mapsto f(x, t)$ est sommable, quel que soit $x \in \Omega$;
- il existe un ensemble de mesure nulle $A \subset \mathbf{R}^m$ et $h : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}_+$ sommable, tels que, si $t \in \mathbf{R}^m - A$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur Ω , et $|\partial^\ell f(x, t)| \leq h(t)$, quels que soient $x \in \Omega$, $\ell \in \mathbf{N}^n$, avec $|\ell| \leq k$, et $t \notin A$.

Alors la fonction F définie sur Ω par $F(x) = \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k et, quels que soient $\ell \in \mathbf{N}^n$, avec $|\ell| \leq k$, et $x \in \Omega$, on a

$$\partial^\ell F(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \partial^\ell f(x, t) dt.$$

Démonstration. — Cela se déduit du théorème de dérivation sous le signe somme par une récurrence immédiate.

IV.2. Transformée de Fourier dans L^1

1. Caractères linéaires de \mathbf{R} et \mathbf{R}^m

Si $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $t = (t_1, \dots, t_m)$ sont deux éléments de \mathbf{R}^m , on note $x \cdot t$ leur produit scalaire $\sum_{i=1}^m x_i t_i$; on a $x \cdot t = t \cdot x$. Rappelons que, si $A \in \mathbf{M}_m(\mathbf{R})$, on note ${}^t A$ la matrice transposée de A . On a alors ${}^t A x \cdot t = x \cdot A t$ pour tous $x, t \in \mathbf{R}^m$.

Proposition IV.2.1. — (i) Les caractères linéaires continus de \mathbf{R} sont les $t \mapsto e^{\lambda t}$, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, et les caractères linéaires unitaires continus sont les $t \mapsto e^{2i\pi x t}$, pour $x \in \mathbf{R}$.

(ii) Les caractères linéaires unitaires continus de \mathbf{R}^m sont les $t \mapsto e^{2i\pi x \cdot t}$, pour $x \in \mathbf{R}^m$.

Démonstration. — Soit $\chi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}^*$ un caractère linéaire continu. On a en particulier $\chi(0) = 1$, et la continuité implique l'existence de $j \in \mathbf{N}$ tel que $|\chi(t) - 1| \leq \frac{1}{2}$, si $|t| \leq 2^{-j}$. Notons $\log : \mathbf{C}^* \rightarrow \{x + iy, -\pi < y \leq \pi\}$ le logarithme complexe. Comme $B(1, \frac{1}{2})$ est incluse dans le secteur angulaire $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{4}$, l'application $g = \log \circ \chi : B(1, \frac{1}{2}) \rightarrow \mathbf{C}$ est à valeur dans la bande $\{x + iy, |y| \leq \frac{\pi}{4}\}$. Maintenant, $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \in 2i\pi$, pour tous $z_1, z_2 \in \mathbf{C}^*$, et comme $\chi(t_1 + t_2) = \chi(t_1)\chi(t_2)$, on a $g(t_1 + t_2) = g(t_1) + g(t_2)$ si t_1, t_2 et $t_1 + t_2$ appartiennent à $B(1, \frac{1}{2})$. On en déduit, par récurrence sur n , que $g(2^{-j-n}) = 2^{-n}g(2^{-j})$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et, par récurrence sur k , que $g(k2^{-j-n}) = kg(2^{-j-n})$, si $k \in \{-2^n, \dots, 2^n\}$. On a donc $g(r2^{-j}) = rg(2^{-j})$, si r est un nombre dyadique dans

l'intervalle $[-1, 1]$, et comme g est continue, on en déduit que $g(t) = \lambda t$, avec $\lambda = 2^j g(2^{-j})$, pour tout $t \in [-2^{-j}, 2^{-j}]$. Par définition de g , cela implique que $\chi(t) = e^{\lambda t}$ pour tout $t \in [-2^{-j}, 2^{-j}]$. Enfin, si $t \in \mathbf{R}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $t/n \in [-2^{-j}, 2^{-j}]$, et comme $\chi(t) = \chi(t/n)^n$, on a $\chi(t) = e^{\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

Maintenant, si χ est unitaire, on doit avoir $\lambda t \in i\mathbf{R}$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, et il existe donc $x \in \mathbf{R}$ tel que $\lambda = 2i\pi x$. On en déduit le (i).

Si $\chi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}^*$ est un caractère linéaire unitaire continu, alors sa restriction à $\mathbf{R}e_j$ définit un caractère linéaire unitaire continu de \mathbf{R} , pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$. Il existe donc $x_j \in \mathbf{R}$ tel que $\chi(t_j e_j) = e^{2i\pi x_j t_j}$. Or $t = \sum_{j=1}^m t_j e_j$, et donc $\chi(t) = \prod_{j=1}^m \chi(t_j e_j) = e^{2i\pi x \cdot t}$, avec $x = (x_1, \dots, x_m)$. Ceci permet de conclure.

2. Définition et premières propriétés

Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$, on a $|e^{-2i\pi x \cdot t} f(t)| = |f(t)|$ quels que soient $x, t \in \mathbf{R}^m$; l'intégrale $\int_{\mathbf{R}^m} e^{-2i\pi x \cdot t} f(t) dt$ est donc bien définie pour toute valeur de $x \in \mathbf{R}^m$.

On appelle *transformée de Fourier* de f la fonction \hat{f} définie, pour $x \in \mathbf{R}^m$, par

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^m} e^{-2i\pi x \cdot t} f(t) dt.$$

Elle ne dépend que de la classe de f dans $L^1(\mathbf{R}^m)$, ce qui permet de définir la transformée de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbf{R}^m)$ par la même formule. On note souvent, pour des raisons typographiques, $\mathcal{F}f$ au lieu de \hat{f} , la transformée de Fourier de f , et on définit $\overline{\mathcal{F}f}$ par $\overline{\mathcal{F}f}(x) = \hat{f}(-x)$.

Exemple IV.2.2. — La transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$ est $\alpha(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, comme le montre un calcul immédiat.

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^m)$. Des changements de variable immédiats montrent que :

- $\mathcal{F}(f(at))(x) = |a|^{-m} \hat{f}(a^{-1}x)$, si $a \in \mathbf{R}^*$; la transformée de Fourier transforme une dilatation en dilatation de rapport inverse;
- $\mathcal{F}(f(t+b))(x) = e^{2i\pi b \cdot x} \hat{f}(x)$ et $\mathcal{F}(e^{2i\pi c \cdot t} f(t))(x) = \hat{f}(x - c)$, si $b, c \in \mathbf{R}^m$; la transformée de Fourier échange les translations et les multiplications par un caractère.

3. Le théorème de Riemann-Lebesgue

On rappelle que $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$ désigne l'espace des fonctions continues sur \mathbf{R}^m , tendant vers 0 à l'infini.

Proposition IV.2.3. — (i) Si $r \in \mathbf{N}$, et si $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$, alors

$$\hat{e}_{r, \mathbf{k}}(x) = 2^{-rm} \prod_{j=1}^m \left(e^{-2^{1-r} i\pi (k_j + \frac{1}{2}) x_j} \alpha(2^{-r} x_j) \right).$$

(ii) Si f est une fonction en escalier, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence de la formule

$$e_{r,\mathbf{k}}(t) = \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(2^r t_j - k_j - \frac{1}{2}),$$

de la formule de l'exemple IV.2.2, et des formules pour les dilatations-translations. Le (ii) est une conséquence du (i), de ce que les $e_{r,\mathbf{k}}$ forment une famille génératrice de $\text{Esc}(\mathbf{R}^m)$, et de ce que α est une fonction continue sur \mathbf{R} , tendant vers 0 à l'infini.

Théorème IV.2.4. — (Riemann-Lebesgue) *L'application $f \mapsto \hat{f}$ est une application linéaire 1-lipschtzienne de $L^1(\mathbf{R}^m)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$. Autrement dit, si $f \in L^1(\mathbf{R}^m)$, alors \hat{f} est une fonction continue sur \mathbf{R}^m , tendant vers 0 à l'infini, et on a $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Démonstration. — La linéarité de $f \mapsto \hat{f}$ suit de la linéarité de l'intégration, et l'inégalité $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ suit de la majoration

$$\left| \int_{\mathbf{R}^m} e^{-2i\pi x \cdot t} f(t) dt \right| \leq \int_{\mathbf{R}^m} |e^{-2i\pi x \cdot t} f(t)| dt = \int_{\mathbf{R}^m} |f(t)| dt = \|f\|_1.$$

Maintenant, si f est une fonction en escalier, la prop. IV.2.3, montre que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$. Comme les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbf{R}^m)$, comme $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire continue de $L^1(\mathbf{R}^m)$ dans l'espace $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ des fonctions bornées sur \mathbf{R}^m (muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$) dans lequel $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$ est fermé, on en déduit que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$ quel que soit $f \in L^1(\mathbf{R}^m)$ (on peut rendre cet argument moins abstrait en considérant une suite f_n de fonctions en escalier tendant vers f dans $L^1(\mathbf{R}^m)$; alors $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ uniformément, et on conclut en utilisant le fait qu'une limite uniforme de fonctions continues tendant vers 0 à l'infini est encore une fonction continue tendant vers 0 à l'infini. Ceci permet de conclure.

4. Transformée de Fourier et dérivation

Une des propriétés fondamentales de la transformée de Fourier est d'échanger la régularité et la décroissance à l'infini (i.e. plus une fonction est régulière, plus sa transformée de Fourier est petite à l'infini, et réciproquement, plus une fonction est petite à l'infini et plus sa transformée de Fourier est régulière), ainsi que dérivations et multiplications par des polynômes, ce qui, combiné avec la formule d'inversion de Fourier (prop. IV.3.18), facilite grandement l'étude de certaines équations aux dérivées partielles⁽⁵⁾. On a en particulier le résultat suivant.

⁽⁵⁾Soit $P = \sum_{\ell} a_{\ell} X^{\ell} \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_m]$, et soit $P(\partial)$ l'opérateur différentiel $\sum_{\ell} a_{\ell} \partial^{\ell}$. Si on cherche à résoudre l'équation aux dérivées partielles $P(\partial)u = \phi$, où ϕ est donnée, et supposée suffisamment sympathique, on peut appliquer formellement la transformée de Fourier aux deux membres, pour obtenir $P(2i\pi x)\hat{u}(x) = \hat{\phi}(x)$. En appliquant la formule d'inversion de Fourier, cela nous donne $u = \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{\hat{\phi}(x)}{P(2i\pi x)}\right)$. Ce qui précède est un jeu d'écriture purement formel, mais donne des résultats utilisables dans de nombreux cas provenant de problèmes physiques. Cette méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles acquiert une efficacité maximale dans le cadre de la théorie des distributions.

Théorème IV.2.5. — (i) Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^m)$ a toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$ sommables, alors $(1 + \|x\|^2)^{k/2} \hat{f}(x)$ tend vers 0 à l'infini, et $\mathcal{F}(\partial^\ell f) = (2i\pi x)^\ell \hat{f}$ si $\ell \in \mathbf{N}^m$ vérifie⁽⁶⁾ $|\ell| \leq k$.

(ii) Si $(1 + \|t\|^2)^{k/2} f(t)$ est sommable, \hat{f} est de classe \mathcal{C}^k , et $\partial^\ell \hat{f}(x) = (-2i\pi)^{|\ell|} \mathcal{F}(t^\ell f)$, si $|\ell| \leq k$.

Démonstration. — Si $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbf{R}^m)$, la formule $\mathcal{F}(\partial^\ell f) = (2i\pi x)^\ell \hat{f}$ s'obtient en intégrant par partie (on intègre $\partial^\ell f$ et on dérive $e^{-2i\pi x \cdot t}$). Par exemple, si $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbf{R}^2)$, on déduit du théorème de Fubini, que

$$\widehat{\partial_1 f}(x_1, x_2) = \int_{\mathbf{R}^2} e^{-2i\pi(x_1 t_1 + x_2 t_2)} \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x_2 t_2} \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x_1 t_1} \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2) dt_1 \right) dt_2.$$

Une intégration par partie dans l'intégrale entre parenthèses nous donne

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x_1 t_1} \frac{\partial f}{\partial t_1}(t_1, t_2) dt_1 = [e^{-2i\pi x_1 t_1} f(t_1, t_2)]_{t_1=-\infty}^{+\infty} + 2i\pi x_1 \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x_1 t_1} f(t_1, t_2) dt_1,$$

et comme f est à support compact, le premier terme du second membre est nul. On réinjecte alors le second terme dans l'intégrale double, et on réutilise le théorème de Fubini, pour obtenir

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_1 f}(x_1, x_2) &= \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x_2 t_2} \left(2i\pi x_1 \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi x_1 t_1} f(t_1, t_2) dt_1 \right) dt_2 \\ &= 2i\pi x_1 \int_{\mathbf{R}^2} e^{-2i\pi(x_1 t_1 + x_2 t_2)} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 2i\pi x_1 \hat{f}(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Le cas général se traite, par récurrence, de la même manière.

Pour traiter le cas f général, choisissons $\phi \in \mathcal{C}_c^k(\mathbf{R}^m)$ valant 1 sur $[-1, 1]^m$, et définissons f_j par $f_j(x) = f(x)\phi(2^{-j}x)$, si $j \in \mathbf{N}$. Alors $f_j \in \mathcal{C}_c^k(\mathbf{R}^m)$ et un petit calcul utilisant la formule de Leibnitz pour la dérivée d'un produit montre que $\partial^\ell f_j$ tend simplement vers $\partial^\ell f$ et que $\partial^\ell f_j$ est majorée par une somme de dérivées \mathbf{k} -ièmes de f , avec $|\mathbf{k}| \leq |\ell|$, ce qui implique que $\partial^\ell f_j$ tend vers $\partial^\ell f$ dans $L^1(\mathbf{R}^m)$. Ceci permet de déduire l'identité $\mathcal{F}(\partial^\ell f) = (2i\pi x)^\ell \hat{f}$ par passage à la limite (en utilisant la continuité de $\phi \mapsto \hat{\phi}(x)$ qui découle de la continuité de $\phi \mapsto \hat{\phi}$ de $L^1(\mathbf{R}^m)$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$). On en déduit le (i) car $\mathcal{F}(\partial^\ell f)$ tendant vers 0 à l'infini quel que soit $\ell \in \mathbf{N}^m$ vérifiant $|\ell| \leq k$, il en est de même de $|x|^\ell \hat{f}$, et donc aussi de $|(1 + \|x\|^2)^{k/2} \hat{f}(x)|$ car $(1 + \|x\|^2)^{k/2} \leq (1 + \sum_{j=1}^m |x_j|)^k$.

Le (ii) est, quant à lui, une simple application du théorème de dérivation sous le signe somme, une fois que l'on a remarqué que $\partial^\ell (e^{-2i\pi x \cdot t}) = (-2i\pi t)^\ell e^{-2i\pi x \cdot t}$.

⁽⁶⁾On rappelle que $(2i\pi x)^\ell = \prod_{j=1}^m (2i\pi x_j)^{\ell_j}$, si $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_m)$.

IV.3. Formules d'inversion

1. Séries de Fourier

Une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est *périodique de période 1*, si $f(x+1) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$. On a alors $f(x+n) = f(x)$ pour tous $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$, et donc f est périodique de période \mathbf{Z} .

On peut aussi (et c'est souvent nettement plus agréable) voir une fonction périodique de période 1 comme une fonction de $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ dans \mathbf{C} . Le passage d'un point de vue à l'autre se fait de la manière suivante, en notant $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}$ l'application envoyant $x \in \mathbf{R}$ sur sa classe modulo \mathbf{Z} : si f est une fonction sur \mathbf{T} , alors $f \circ \pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction périodique de période 1, et réciproquement, si $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est périodique de période 1, alors il existe $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$ unique, telle que $g = f \circ \pi$.

\mathbf{T} est muni de la topologie quotient, ce qui signifie que $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ est continue. L'espace $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ des fonctions continues sur \mathbf{T} s'identifie donc à l'espace des fonctions continues sur \mathbf{R} , périodiques de période 1.

\mathbf{T} est un groupe (quotient du groupe commutatif $(\mathbf{R}, +)$ par son sous-groupe \mathbf{Z}), et, par construction, $\pi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{T}$ est un morphisme de groupes dont le noyau est \mathbf{Z} . Si $n \in \mathbf{Z}$, alors $t \mapsto e^{2i\pi nt}$ est un caractère continu de \mathbf{R} dont le noyau contient \mathbf{Z} , et donc est un caractère continu de \mathbf{T} en vertu de notre identification entre les fonctions périodiques de période 1 et les fonctions sur \mathbf{T} . On note χ_n le caractère $t \mapsto e^{2i\pi nt}$ de \mathbf{T} , si $n \in \mathbf{N}$.

Proposition IV.3.1. — *Les caractères linéaires continus de \mathbf{T} sont les χ_n , pour $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. — Si $\chi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}^*$ est un caractère linéaire continu, alors $\psi = \chi \circ \pi$ est un caractère continu de \mathbf{R} , périodique de période 1. D'après la prop. IV.2.1, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\psi(t) = e^{\lambda t}$, pour tout $t \in \mathbf{R}$. La périodicité de ψ équivaut alors à $\psi(1) = \psi(0) = 1$, ce qui montre que λ doit être de la forme $2i\pi n$, avec $n \in \mathbf{Z}$. Ceci permet de conclure.

Si $a \in \mathbf{R}$, tout élément t de \mathbf{R} peut s'écrire de manière unique sous la forme $t = x + n$, avec $x \in [a, a+1[$ et $n \in \mathbf{Z}$. Autrement dit, l'intervalle $[a, a+1[$ est un système de représentants de \mathbf{R} modulo \mathbf{Z} , pour tout $a \in \mathbf{R}$. On en déduit que l'application ι_a , qui à une fonction f sur \mathbf{T} associe sa restriction (plus précisément, la restriction de $f \circ \pi$) à $[a, a+1[$, est un isomorphisme de l'espace des fonctions sur \mathbf{T} sur celui des fonctions sur $[a, a+1[$. On va utiliser ces isomorphismes pour définir un certain nombre d'espaces de fonctions sur \mathbf{T} .

On vérifie facilement, en utilisant l'invariance de l'intégrale de Lebesgue par translation, que les définitions suivantes, pour $f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{C}$, ne dépendent pas du choix de $a \in \mathbf{R}$:

f est dite nulle p.p., si $\iota_a(f)$ est nulle p.p.,

f est dite sommable, si $\iota_a(f)$ est sommable ; si f est sommable, on définit $\int_{\mathbf{T}} f$ par $\int_{\mathbf{T}} f = \int_a^{a+1} f(t) dt$, et $\|f\|_1$ par $\|f\|_1 = \int_{\mathbf{T}} |f|$.

f est dite de carré sommable, si $\iota_a(f)$ est de carré sommable ; si f est de carré sommable, on pose $\|f\|_2 = (\int_{\mathbf{T}} |f|^2)^{1/2}$, et si f, g sont de carrés sommables, on définit leur produit scalaire $\langle f, g \rangle$ par la formule $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{T}} \bar{f} g$.

On note, $\mathcal{L}^1(\mathbf{T})$ (resp. $\mathcal{L}^2(\mathbf{T})$) l'espace des fonctions sommables (resp. de carré sommable), et $L^1(\mathbf{T})$ (resp. $L^2(\mathbf{T})$) son quotient par l'espace des fonctions nulles p.p. Par définition, ces espaces sont isométriques (via ι_a) aux espaces $\mathcal{L}^1([a, a+1[)$, $\mathcal{L}^2([a, a+1[)$, $L^1([a, a+1[)$ et $L^2([a, a+1[)$ respectivement. On en déduit que $\text{Esc}(\mathbf{T})$ est dense dans $L^1(\mathbf{T})$ et $L^2(\mathbf{T})$: en effet, $\text{Esc}([0, 1[)$ est dense dans $L^1(]0, 1[)$ et $L^2(]0, 1[)$ (cf. th. III.2.9). Comme $[a, a+1[$ est de volume fini, on a $L^2(\mathbf{T}) \subset L^1(\mathbf{T})$.

On définit $\text{Esc}(\mathbf{T})$ comme l'image inverse de $\text{Esc}([0, 1[)$ par ι_0 ; si $r \in \mathbf{N}$, et si $k \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$, on note encore $e_{r,k}$ la fonction sur \mathbf{T} dont l'image par ι_0 est $e_{r,k}$. Les $e_{r,k}$, pour $r \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$ forment une famille génératrice de $\text{Esc}(\mathbf{T})$.

Soit $\text{Trig}(\mathbf{T})$ l'espace des *polynômes trigonométriques* (i.e. des combinaisons linéaires des χ_n , pour $n \in \mathbf{Z}$).

Théorème IV.3.2. — (i) $\text{Trig}(\mathbf{T})$ est dense dans $L^2(\mathbf{T})$.

(ii) Les χ_n , pour $n \in \mathbf{Z}$, forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T})$.

Démonstration. — On a

$$\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \int_a^{a+1} e^{2i\pi(m-n)t} dt = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ \left[\frac{1}{2i\pi(m-n)} e^{2i\pi(m-n)t} \right]_a^{a+1} = 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Les χ_n forment donc une famille orthonormale, et le (ii) est une conséquence du (i), puisque les χ_n engendrent $\text{Trig}(\mathbf{T})$. La manière standard (cf. ex. II.2.2) pour démontrer la densité de $\text{Trig}(\mathbf{T})$ dans $L^2(\mathbf{T})$ est de passer par sa densité dans $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ (cas particulier du théorème de Stone-Weierstrass). Nous proposons ci-dessous une autre approche, via les fonctions en escalier.

Soit F l'adhérence de $\text{Trig}(\mathbf{T})$ dans $L^2(\mathbf{T})$. Le lemme IV.3.3 ci-dessous montre que $\phi_0 \in F$, où $\phi_0 \in L^2(\mathbf{T})$ est définie par $\phi_0(t) = t$, si $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Nous allons en déduire que F contient $\text{Esc}(\mathbf{T})$, ce qui permettra de conclure, cet espace étant dense dans $L^2(\mathbf{T})$.

Soit $T_a : L^2(\mathbf{T}) \rightarrow L^2(\mathbf{T})$ définie par $(T_a(\phi))(t) = \phi(t+a)$. Alors T_a est une isométrie grâce à l'invariance par translation de l'intégration ; en particulier, T_a est continue. Comme $\text{Trig}(\mathbf{T})$ est stable par T_a , il en est de même de F (si $\phi \in F$, et si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\text{Trig}(\mathbf{T})$ tendant vers ϕ dans $L^2(\mathbf{T})$, alors $(T_a(f_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\text{Trig}(\mathbf{T})$ tendant vers $T_a(\phi)$ dans $L^2(\mathbf{T})$). Maintenant, si $r \in \mathbf{N}$, et si $k \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$, on a $e_{r,k} = 2^{-r} - T_{-\frac{1}{2} - \frac{k}{2^r}}(\phi_0) + T_{-\frac{1}{2} - \frac{k+1}{2^r}}(\phi_0)$, comme le montre un petit calcul ; on déduit donc de l'appartenance de ϕ_0 et des constantes à F , celle de $e_{r,k}$, pour tous $r \in \mathbf{N}$ et $k \in \{0, \dots, 2^r - 1\}$. Les $e_{r,k}$ formant une famille génératrice de $\text{Esc}(\mathbf{T})$, cela implique $\text{Esc}(\mathbf{T}) \subset F$, ce que l'on cherchait à démontrer.

Lemme IV.3.3. — (i) Si $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, et si $z = e^{2i\pi t}$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2i\pi n} (z^n - \bar{z}^n) = t$.

(ii) La série $\sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{2i\pi n} e^{2i\pi nt}$ tend vers ϕ_0 dans $L^2(\mathbf{T})$.

Démonstration. — Si $|a| = 1$ et $a \neq -1$, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{2i\pi n} a^n = \frac{a}{2i\pi} \int_0^1 \sum_{n=1}^N (-ua)^{n-1} du = \frac{a}{2i\pi} \int_0^1 \frac{1 - (-ua)^N}{1 + ua} du.$$

Comme $|a| = 1$, la suite de fonctions $\frac{1 - (-ua)^N}{1 + ua}$, pour $N \in \mathbf{N}$, tend simplement vers $\frac{1}{1 + ua}$, sur $[0, 1[$, et est majorée en module par $\frac{2}{|1 + ua|}$, qui est sommable, puisque $a \neq -1$. On peut donc utiliser le théorème de convergence dominée pour intervertir limite et intégrale. On en déduit que la série qui nous intéresse converge vers :

$$\begin{aligned} \frac{z}{2i\pi} \int_0^1 \frac{du}{1 + uz} - \frac{\bar{z}}{2i\pi} \int_0^1 \frac{du}{1 + u\bar{z}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin 2\pi t}{(u + \cos 2\pi t)^2 + \sin^2 2\pi t} du \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\operatorname{arctg} \frac{\sin 2\pi t}{u + \cos 2\pi t} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi} (\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 2\pi t) - \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} \pi t)) = t. \end{aligned}$$

Ceci démontre le (i). Maintenant, $\sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} < +\infty$, et comme les χ_n forment une famille orthonormale, la série $\sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n-1}}{2i\pi n} \chi_n$ est, d'après le lemme II.2.4, sommable dans $L^2(\mathbf{T})$. On note f sa somme. On peut alors extraire (cf. ex. III.2.7) une sous-suite de la suite de ses sommes partielles tendant vers f p.p. Or le (i) montre que toute sous-suite de ses sommes partielles tend simplement vers ϕ_0 en dehors de $\frac{1}{2}$. On en déduit que $f = \phi_0$ p.p., et donc que la série tend vers ϕ_0 dans $L^2(\mathbf{T})$. Ceci permet de conclure.

Si $f \in L^1(\mathbf{T})$, on note $c_n(f) = \langle \chi_n, f \rangle = \int_0^1 e^{-2i\pi nt} f(t) dt$ son n -ième coefficient de Fourier.

Corollaire IV.3.4. — Si $f \in L^2(\mathbf{T})$, alors $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) \chi_n$ est sommable, de somme f , dans $L^2(\mathbf{T})$, et $\|f\|_2 = (\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2)^{1/2}$.

Démonstration. — C'est une simple application du th. II.2.6.

Proposition IV.3.5. — Si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$, et si $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, alors $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) \chi_n$ tend uniformément vers f . En particulier, $f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{2i\pi nt}$, pour tout t .

Démonstration. — La série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) \chi_n$ converge normalement dans $\mathcal{C}(\mathbf{T})$ (muni de $\|\cdot\|_\infty$), et la somme g est donc une fonction continue. De plus, comme $\|h\|_2 \leq \|h\|_\infty$, la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) \chi_n$ converge vers g aussi dans $L^2(\mathbf{T})$. Par ailleurs, il résulte du cor. IV.3.4 que la série converge aussi vers f dans $L^2(\mathbf{T})$, et donc que $f = g$ dans $L^2(\mathbf{T})$. Ceci se traduit par $\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt = 0$ et, f et g étant continues, cela implique que $f - g$ est identiquement nulle. Ceci permet de conclure.

Remarque IV.3.6. — La condition $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)| < +\infty$ est en particulier vérifiée si f est de classe \mathcal{C}^1 . En effet, si $n \neq 0$, une intégration par partie nous donne

$$c_n(f) = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi nt} dt = \frac{1}{2i\pi n} \int_0^1 f'(t) e^{-2i\pi nt} dt = \frac{1}{2i\pi n} c_n(f'),$$

et comme $(\sum_{n \neq 0} |c_n(f')|^2)^{1/2} \leq \|f'\|_2$, on a

$$\sum_{n \neq 0} \left| \frac{1}{2i\pi n} c_n(f') \right| \leq \left(\sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n \neq 0} |c_n(f')|^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

Remarque IV.3.7. — Comme $L^2([a, a+1[)$ est isométrique à $L^2(\mathbf{T})$, les χ_n , pour $n \in \mathbf{N}$, forment aussi une base hilbertienne de $L^2([a, a+1[)$ et donc aussi de $L^2(]a, a+1[)$ ou $L^2([a, a+1])$ puisque $[a, a+1[,]a, a+1[$ et $[a, a+1]$ ne diffèrent que par des ensembles de mesure nulles. Il est très facile d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(I)$, pour tout intervalle I de longueur finie.

2. Séries de Fourier multidimensionnelles

L'étude des séries de Fourier en dimension m se ramène de manière assez formelle⁽⁷⁾ à celle des séries de Fourier en dimension 1.

Une fonction $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ est *périodique de période \mathbf{Z}^m* , si $f(x + \omega) = f(x)$, pour tous $x \in \mathbf{R}^m$ et $\omega \in \mathbf{Z}^m$. Pour que ceci soit le cas, il suffit que l'on ait $f(x + e_j) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}^m$, et tout $j \in \{1, \dots, m\}$, où e_1, \dots, e_m est la base canonique de \mathbf{R}^m .

Comme en dimension 1, on voit une fonction périodique de période \mathbf{Z}^m comme une fonction du groupe $\mathbf{T}^m = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^m = \mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$ dans \mathbf{C} , et l'espace $\mathcal{C}(\mathbf{T}^m)$ des fonctions continues sur \mathbf{T}^m s'identifie à l'espace des fonctions continues sur \mathbf{R}^m , périodiques de période \mathbf{Z}^m .

Si $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbf{Z}^m$, on note $\chi_{\mathbf{n}}$ le caractère de \mathbf{T}^m défini par $\chi_{\mathbf{n}}(t) = e^{2i\pi \mathbf{n} \cdot t}$.

Proposition IV.3.8. — *Les caractères linéaires continus de \mathbf{T}^m sont les $\chi_{\mathbf{n}}$, pour $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m$.*

Démonstration. — Si $\chi : \mathbf{T}^m \rightarrow \mathbf{C}^*$ est un caractère linéaire continu, la restriction de χ à $\mathbf{R}e_j$ est un caractère linéaire continu, périodique de période \mathbf{Z} , et donc, d'après la prop. IV.3.1, de la forme $t_j \mapsto e^{2i\pi n_j t_j}$. Comme $t = \sum_{j=1}^m t_j e_j$, et comme χ est un caractère, on a $\chi(t) = \prod_{j=1}^m e^{2i\pi n_j t_j} = e^{2i\pi \mathbf{n} \cdot t}$, où $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$. Ceci permet de conclure.

Comme en dimension 1, si $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{R}^m$, et si $X_a = \prod_{j=1}^m [a_j, a_j + 1[$, l'application ι_a , qui à une fonction f sur \mathbf{T}^m associe la restriction de f à X_a , est un isomorphisme de l'espace des fonctions sur \mathbf{T}^m sur celui des fonctions sur X_a . Ceci permet de définir, comme en dimension 1 :

— des espaces $L^1(\mathbf{T}^m) \cong L^1(X_a)$ et $L^2(\mathbf{T}^m) \cong L^2(X_a)$,

⁽⁷⁾On peut s'amuser à formaliser le lemme IV.3.10 et son utilisation à grands coups de produits tensoriels et de produits tensoriels complétés. On a vu (ex. I.3.1) que l'espace des fonctions sur $I \times J$ est le produit tensoriel des espaces de fonctions sur I et J , si I et J sont finis. Si I et J ne sont pas finis, la situation est plus compliquée, mais certains sous-espaces de fonctions sur $I \times J$ sont encore des produits tensoriels d'espaces de fonctions sur I et J . C'est par exemple le cas des polynômes trigonométriques sur $\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$ qui sont le produit tensoriel de m copies des polynômes trigonométriques sur \mathbf{R}/\mathbf{Z} . L'espace $L^2(\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m)$ est, quant-à-lui, obtenu en complétant le produit tensoriel de m copies de $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$. Ce procédé de réduction à la dimension est 1 est extrêmement efficace pour beaucoup de questions.

- une intégrale $f \mapsto \int_{\mathbf{T}^m} f = \int_{X_a} f$ sur $L^1(\mathbf{T}^m)$,
 - une norme $\|f\|_1 = \int_{\mathbf{T}^m} |f|$ sur $L^1(\mathbf{T}^m)$,
 - un produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{T}^m} \bar{f} g$ sur $L^2(\mathbf{T}^m)$, et la norme $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$ qui va avec.
- L'invariance de l'intégrale de Lebesgue par translation implique que ce qu'on obtient ne dépend pas du choix de $a \in \mathbf{R}^m$.

On définit $\text{Esc}(\mathbf{T}^m)$ comme l'image inverse de $\text{Esc}([0, 1]^m)$ par ι_0 ; si $r \in \mathbf{N}$, et si $\mathbf{k} \in \{0, \dots, 2^r - 1\}^m$, on note encore $e_{r, \mathbf{k}}$ la fonction sur \mathbf{T}^m dont l'image par ι_0 est $e_{r, \mathbf{k}}$. Les $e_{r, \mathbf{k}}$, pour $r \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{k} \in \{0, \dots, 2^r - 1\}^m$ forment une famille génératrice de $\text{Esc}(\mathbf{T}^m)$.

Soit $\text{Trig}(\mathbf{T}^m)$ l'espace des *polynômes trigonométriques* sur \mathbf{T}^m (i.e. des combinaisons linéaires des $\chi_{\mathbf{n}}$, pour $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m$).

Si $f \in L^1(\mathbf{T}^m)$, on définit ses *coefficients de Fourier* $c_{\mathbf{n}}(f)$, pour $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m$, par la formule $c_{\mathbf{n}}(f) = \langle \chi_{\mathbf{n}}, f \rangle = \int_{[0, 1]^m} e^{-2i\pi \mathbf{n} \cdot t} f(t) dt$.

Théorème IV.3.9. — (i) $\text{Trig}(\mathbf{T}^m)$ est dense dans $L^2(\mathbf{T}^m)$.

(ii) Les $\chi_{\mathbf{n}}$, pour $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m$ forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{T}^m)$.

(iii) Si $f \in L^2(\mathbf{T}^m)$, alors $f = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m} c_{\mathbf{n}}(f) \chi_{\mathbf{n}}$ dans $L^2(\mathbf{T}^m)$.

(iv) Si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T}^m)$, et si $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m} |c_{\mathbf{n}}(f)| < +\infty$, alors $f = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m} c_{\mathbf{n}}(f) \chi_{\mathbf{n}}$ dans $\mathcal{C}(\mathbf{T}^m)$, et en particulier, $f(t) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m} c_{\mathbf{n}}(f) e^{2i\pi \mathbf{n} \cdot t}$ pour tout t .

Démonstration. — Nous allons déduire cet énoncé de l'énoncé analogue en dimension 1. Si ϕ_1, \dots, ϕ_m sont des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , on note $\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_m$ ou, de manière plus compacte, $\otimes_i \phi_i$, la fonction de \mathbf{R}^m dans \mathbf{C} définie par

$$(\otimes_i \phi_i)(t) = \phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_m(t) = \prod_{i=1}^m \phi_i(t_i), \quad \text{si } t = (t_1, \dots, t_m).$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{n}} &= \otimes_i \chi_{n_i}, & \text{si } \mathbf{n} &= (n_1, \dots, n_m) \in \mathbf{Z}^m, \\ e_{r, \mathbf{k}} &= \otimes_i e_{r, k_i}, & \text{si } r &\in \mathbf{N}, \text{ et si } \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{Z}^m. \end{aligned}$$

Lemme IV.3.10. — (i) Si $\phi_i = \psi_i$ p.p., pour tout i , alors $\otimes_i \phi_i = \otimes_i \psi_i$ p.p.

(ii) Si $\phi_i \in \mathcal{L}^1(\mathbf{T})$ pour tout i , alors $\otimes_i \phi_i \in \mathcal{L}^1(\mathbf{T}^m)$, et on a $\|\otimes_i \phi_i\|_1 = \prod_i \|\phi_i\|_1$.

(iii) Si $\phi_i \in \mathcal{L}^2(\mathbf{T})$ pour tout i , alors $\otimes_i \phi_i \in \mathcal{L}^2(\mathbf{T}^m)$, et on a $\|\otimes_i \phi_i\|_2 = \prod_i \|\phi_i\|_2$.

Démonstration. — Soit $A_i \subset \mathbf{R}$ (resp. $A \subset \mathbf{R}^m$) l'ensemble des x tels que $\phi_i(x) \neq \psi_i(x)$ (resp. $\otimes_i \phi_i(x) \neq \otimes_i \psi_i(x)$). Alors A est inclus dans la réunion des $A_i \times \prod_{j \neq i} \mathbf{R}$, qui sont tous de mesure nulle dans \mathbf{R}^m , puisque A_i est de mesure nulle dans \mathbf{R} par hypothèse. Cela démontre le (i).

Les (ii) et (iii) sont des conséquences immédiates du théorème de Fubini.

Revenons à la démonstration du th. IV.3.9. Le (i) du lemme précédent montre que l'application $(\phi_1, \dots, \phi_m) \mapsto \otimes_i \phi_i$ passe au quotient (des deux côtés à la fois) modulo les fonctions nulles p.p. Comme cette application est linéaire en chacune des ϕ_i , les (ii) et (iii) montre que l'on obtient ainsi des applications multilinéaires continues $L^1(\mathbf{T})^m \rightarrow L^1(\mathbf{T}^m)$ et $L^2(\mathbf{T})^m \rightarrow L^2(\mathbf{T}^m)$.

Pour montrer que $\text{Trig}(\mathbf{T}^m)$ est dense dans $L^2(\mathbf{T}^m)$, il suffit de montrer que son adhérence contient $\text{Esc}(\mathbf{T}^m)$, et, par linéarité, il suffit de vérifier qu'elle contient les $e_{r, \mathbf{k}}$, pour $r \geq 1$ et $\mathbf{k} \in \{0, \dots, 2^r - 1\}^m$. Pour cela, on écrit $e_{r, \mathbf{k}}$ sous la forme $e_{r, \mathbf{k}} = \otimes_i e_{r, k_i}$, et on choisit, pour chaque i , une suite $P_{i, n}$ d'éléments de $\text{Trig}(\mathbf{T})$ tendant vers e_{r, k_i} dans $L^2(\mathbf{T})$. Il résulte de la continuité de $(\phi_1, \dots, \phi_m) \mapsto \otimes_i \phi_i$ que $P_n = \otimes_i P_{i, n}$ tend vers $e_{r, \mathbf{k}}$ dans $L^2(\mathbf{T}^m)$, et comme $P_n \in \text{Trig}(\mathbf{T}^m)$, on en déduit le (i).

On déduit du théorème de Fubini que $\langle \chi_{\mathbf{n}}, \chi_{\boldsymbol{\ell}} \rangle = \prod_{i=1}^m \langle \chi_{n_i}, \chi_{\ell_i} \rangle$, si $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$ et $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_m)$, ce qui permet de déduire l'orthonormalité de la famille des $\chi_{\mathbf{n}}$, pour $\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m$, de celle des χ_n , pour $n \in \mathbf{Z}$; le (ii) est donc une conséquence du (i).

Le (iii) est alors une application du th. II.2.6, et le (iv) se déduit du (iii) comme dans la démonstration de la prop. IV.3.5.

Ceci permet de conclure.

3. La formule de Poisson

On note $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ l'espace de Schwartz des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}^m , qui sont à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes leur dérivées. (g est à décroissance rapide à l'infini, si $(1 + \|t\|^2)^N g(t)$ est bornée sur \mathbf{R}^m , quel que soit $N \in \mathbf{N}$.) On déduit du th. IV.2.5 le résultat suivant.

Corollaire IV.3.11. — L'image de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ par la transformée de Fourier est incluse dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$.

Théorème IV.3.12. — (Formule de Poisson, 1816) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ ou, plus généralement, si f est de classe \mathcal{C}^1 , et si f et f' sont des $O(|t|^{-2})$ au voisinage de $\pm\infty$, alors

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n).$$

Démonstration. — Soit $F(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n + t)$. La série converge pour tout t grâce à l'hypothèse $f = O(|t|^{-2})$, et la fonction F est périodique de période 1. De plus, sur $[0, 1]$, la série des $f'(n + t)$ converge normalement, grâce à l'hypothèse $f' = O(|t|^{-2})$, ce qui implique que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbf{T})$. On en déduit, en utilisant la rem. IV.3.6, que F est somme de sa série de Fourier en tout point. Or, si $k \in \mathbf{Z}$, on a (l'interversion de l'intégrale et de la série ci-dessous est justifiée par la convergence uniforme sur $[0, 1]$) :

$$\begin{aligned} c_k(F) &= \int_0^1 e^{-2i\pi kt} F(t) dt = \int_0^1 e^{-2i\pi kt} \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n + t) \right) dt = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_0^1 e^{-2i\pi kt} f(n + t) dt \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \int_n^{n+1} e^{-2i\pi kt} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi kt} f(t) dt = \hat{f}(k). \end{aligned}$$

On en déduit la formule du théorème en comparant la série donnant $F(0)$ avec la série de Fourier de F en 0.

On démontre de même, en dimension quelconque, le résultat suivant.

Théorème IV.3.13. — (Formule de Poisson dans \mathbf{R}^m) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, alors

$$\sum_{\omega \in \mathbf{Z}^m} f(\omega) = \sum_{\omega \in \mathbf{Z}^m} \hat{f}(\omega).$$

4. La formule d'inversion de Fourier dans \mathcal{S}

Théorème IV.3.14. — Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, alors $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \varphi$ et $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\varphi = \varphi$.

Remarque IV.3.15. — Comme $\overline{\mathcal{F}}\varphi(x) = \mathcal{F}\varphi(-x)$, on peut réécrire l'égalité $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\varphi = \varphi$ sous la forme $(\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}}\varphi)(x) = \varphi(-x)$ ou encore $\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = \varphi(-x)$.

Démonstration. — Comme on passe de \mathcal{F} à $\overline{\mathcal{F}}$ en changeant x en $-x$, il suffit de démontrer une des deux formules; nous démontrerons la première. Soient $u \in \mathbf{R}^m$ et $r \in \mathbf{N}$. Si on applique la formule de Poisson à la fonction $f(t) = \varphi(u + 2^r t)$, on obtient la formule suivante (où l'on a utilisé l'identité $\widehat{f}(x) = 2^{-rm} e^{2i\pi u \cdot 2^{-r} x} \widehat{\varphi}(2^{-r} x)$, conséquence des formules pour les dilations-translations) :

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m} \varphi(u + 2^r \mathbf{k}) = 2^{-rm} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m} e^{2i\pi u \cdot 2^{-r} \mathbf{k}} \widehat{\varphi}(2^{-r} \mathbf{k}).$$

Nous allons montrer que, quand $r \rightarrow +\infty$, le membre de gauche tend vers $\varphi(u)$ et le membre de droite vers $\overline{\mathcal{F}}\widehat{\varphi}(u)$, ce qui permettra de conclure.

- On commence par remarquer, que comme φ tend vers 0 à l'infini, on a $\varphi(u + 2^r \mathbf{k}) \rightarrow 0$ si $\mathbf{k} \neq 0$, et $\varphi(u + 2^r \mathbf{k}) = \varphi(u)$ si $\mathbf{k} = 0$; pour prouver que le membre de gauche tend vers $\varphi(u)$, il n'y a donc qu'à justifier l'interversion de la somme et de la limite. La décroissance rapide de φ à l'infini implique en particulier l'existence de C tel que $|\varphi(t)| \leq C(1 + \|t\|^2)^{-(m+1)/2}$ pour tout $t \in \mathbf{R}^m$. Or $\sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m} (1 + a\|\mathbf{k}\|^2)^{-(m+1)/2} < +\infty$ pour tout⁽⁸⁾ $a > 0$, et, si $2^r \geq 2\|u\|$, on a $\|u + 2^r \mathbf{k}\| \geq a\|\mathbf{k}\|$, avec $a = \|u\|$, pour tout $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m$. La série de terme général $C(1 + a\|\mathbf{k}\|^2)^{-(m+1)/2}$ est donc un majorant sommable, pour tout r assez grand, de la série de terme général $\varphi(u + 2^r \mathbf{k})$. On conclut en utilisant le théorème de convergence dominée pour les séries.

- Passons à l'étude de la série dans le membre de droite. Le procédé habituel transformant une somme en intégrale d'une fonction en escalier montre que cette série est égale à $\int \psi_r$, où ψ_r est la fonction définie par

$$\psi_r = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^m} \psi(2^{-r} \mathbf{k}) e_{r, \mathbf{k}}, \quad \text{et } \psi(x) = e^{2i\pi u \cdot x} \widehat{\varphi}(x).$$

Maintenant, si $t = (t_1, \dots, t_m)$, alors $\psi_r(t) = \psi(t^{(r)})$, où $t_i^{(r)} = 2^{-r} [2^r t_i] \in [t_i - 2^{-r}, t_i]$. En particulier, $t^{(r)} \rightarrow t$, et ψ étant continue, on a $\psi_r(t) \rightarrow \psi(t)$, pour tout $t \in \mathbf{R}^m$. De plus, si $C(t)$ désigne le cube $\prod_{i=1}^m [t_i - 1, t_i]$, on a $t^{(r)} \in C(t)$, pour tout $r \in \mathbf{N}$. La fonction ψ_r est donc majorée, pour tout $r \in \mathbf{N}$, par g , où $g(t) = \sup_{u \in C(t)} |\psi(t)| = \sup_{u \in C(t)} |\widehat{\varphi}(t)|$. Enfin, comme $\widehat{\varphi}$ est à décroissance rapide à l'infini, il en est de même de g qui est, de ce fait, sommable, ce qui permet d'utiliser le théorème de convergence dominée pour en déduire que $\int \psi_r \rightarrow \int \psi$. Comme $\int \psi = \overline{\mathcal{F}}\widehat{\varphi}(u)$, cela permet de conclure.

⁽⁸⁾On peut minorer $1 + a\|\mathbf{k}\|^2$ par $1 + a(\sup(|k_1|, \dots, |k_m|))^2$, et comme il y a $(2k+1)^m - (2k-1)^m$ valeurs de \mathbf{k} pour lesquelles $\sup(|k_1|, \dots, |k_m|) = k$, la série est majorée par $1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k+1)^m - (2k-1)^m}{(1+ak^2)^{(m+1)/2}}$ dont le terme général est équivalent à $\frac{2m(2k)^{m-1}}{a^{(m+1)/2} k^{m+1}} = \frac{2m 2^{m-1}}{a^{(m+1)/2} k^2}$; d'où la convergence de la série.

Corollaire IV.3.16. — \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isomorphismes de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ inverses l'un de l'autre.

5. Formules d'inversion dans L^1

Proposition IV.3.17. — Si $f, g \in L^1(\mathbf{R}^m)$, alors

$$\int_{\mathbf{R}^m} g \mathcal{F} f = \int_{\mathbf{R}^m} f \mathcal{F} g \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{R}^m} g \overline{\mathcal{F}} f = \int_{\mathbf{R}^m} f \overline{\mathcal{F}} g.$$

Démonstration. — Remarquons que les deux membres sont bien définis car \hat{f} et \hat{g} sont bornées puisqu'éléments de $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$. Soit $h(x, t) = g(x)f(t)e^{-2i\pi x \cdot t}$. Alors h est sommable sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$, car d'après le théorème de Fubini pour les fonctions positives, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m} |h(x, t)| dx dt &= \int_{\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m} |f(t)||g(x)| dx dt = \int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^m} |f(t)||g(x)| dx \right) dt \\ &= \int_{\mathbf{R}^m} \|g\|_1 |f(t)| dt = \|g\|_1 \|f\|_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Une application immédiate du théorème de Fubini montre alors que les deux membres sont égaux à $\int_{\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m} h(x, t) dx dt$, ce qui permet de conclure.

Proposition IV.3.18. — Si $h \in L^1(\mathbf{R}^m)$ a une transformée de Fourier sommable, alors $\overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} h = h$ p.p.

Démonstration. — Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^m)$. Alors $\mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} \varphi = \varphi$ d'après le th. IV.3.14. Par ailleurs, en appliquant la prop. IV.3.17 successivement à $f = \mathcal{F} h$ et $g = \varphi$, puis à $f = h$ et $g = \overline{\mathcal{F}} \varphi$ (ce qui est licite car h et $\mathcal{F} h$ sont dans $L^1(\mathbf{R}^m)$ par hypothèse, et φ et $\overline{\mathcal{F}} \varphi$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ qui est inclus dans $L^1(\mathbf{R}^m)$), on obtient :

$$\int_{\mathbf{R}^m} \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} h \varphi = \int_{\mathbf{R}^m} \mathcal{F} h \overline{\mathcal{F}} \varphi = \int_{\mathbf{R}^m} h \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} \varphi = \int_{\mathbf{R}^m} h \varphi.$$

La fonction $\overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} h$ n'est pas a priori dans $L^1(\mathbf{R}^m)$ mais, comme elle est continue, sa restriction à tout ouvert borné X est dans $L^1(X)$. Or $\int_X (\overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} h - h) \varphi = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(X)$, d'après ce qui précède, et le cor. III.2.11 permet d'en déduire la nullité (presque partout) de $\overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} h - h$, sur tout ouvert borné X . Ceci permet de conclure.

CHAPITRE V

FONCTIONS HOLOMORPHES

Une fonction holomorphe sur un ouvert Ω est une fonction de Ω dans \mathbf{C} qui est \mathcal{C}^∞ au sens complexe et somme de sa série de Taylor autour de chaque point. Ces fonctions jouissent de propriétés de rigidité absolument remarquables et qui peuvent sembler miraculeuses si on se réfère à ce que l'on connaît des fonctions d'une variable réelle. Une des premières surprises que l'on rencontre est qu'une fonction est holomorphe si et seulement si elle est de classe \mathcal{C}^1 (au sens complexe)! Ceci est une des nombreuses conséquences de la formule intégrale de Cauchy (th. V.2.5). Cette formule et ses conséquences immédiates (rem. V.2.8, th. V.2.11, V.2.12 et V.2.13), couplées avec le principe du maximum (th. V.1.12), le théorème des zéros isolés (th. V.1.8) et la formule des résidus de Cauchy du chapitre suivant, permettent d'attaquer une variété de problèmes assez spectaculaire. Parmi ceux-ci, mentionnons le théorème fondamental de l'algèbre (ex. B.3.5, cor. V.2.10 ou ex. B.3.22), le théorème des 4 carrés de Lagrange (ex. B.3.32) ou encore le théorème des nombres premiers auquel l'annexe A est consacrée.

V.1. Fonctions holomorphes et fonctions analytiques complexes

1. Séries entières

Soit K un corps. Une *série entière* (ou *série formelle*) à coefficients dans K est une expression du type $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$, où les a_n sont des éléments de K . L'ensemble $K[[T]]$ des séries entières à coefficients dans K contient l'anneau $K[T]$ des polynômes à coefficients dans K , et on munit $K[[T]]$ d'une structure d'anneau étendant celle de $K[T]$ en posant

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) T^n, \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n T^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) T^n.$$

On définit la *valuation* $v_T(F)$ de $F = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n T^n$ comme étant le plus petit élément de l'ensemble des $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $a_n \neq 0$, si $F \neq 0$, et comme étant $+\infty$, si $F = 0$. On a $v_T(FG) = v_T(F) + v_T(G)$, et $v_T(F + G) \geq \inf(v_T(F), v_T(G))$. En définissant $|\cdot|_T$, par $|F|_T = e^{-v_T(F)}$, cela se traduit par $|FG|_T = |F|_T |G|_T$ et $|F + G|_T \leq \sup(|F|_T, |G|_T)$.

Cette dernière inégalité (*ultramétrique*), plus forte que l'inégalité triangulaire, montre que $d(F, G) = |F - G|_T$ est une distance sur $K[[T]]$. On vérifie facilement, que $K[[T]]$ est complet pour cette distance, qu'une série $\sum_{n \in \mathbf{N}} F_n$ converge, si et seulement si $|F_n|_T \rightarrow 0$ (ce qui équivaut à $v_T(F_n) \rightarrow +\infty$), et que $K[T]$ est dense dans $K[[T]]$, ce qui prouve que $K[[T]]$ est le complété de $K[T]$ pour la (distance associée à la) valuation v_T . Ceci fournit une construction topologique⁽¹⁾ de $K[[T]]$ à partir de $K[T]$.

Si $F = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in K[[T]]$, on définit la dérivée F' de F par la formule $F' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n T^{n-1}$. Et on définit par récurrence la dérivée k -ième $F^{(k)}$ comme la dérivée de $F^{(k-1)}$, en posant $F^{(0)} = F$. La dérivée seconde $F^{(2)}$ est souvent aussi notée F'' . Un calcul immédiat montre que $\frac{1}{k!} F^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} T^n$, où $\binom{X}{k}$ est le *polynôme binomial*⁽²⁾ de degré k défini par $\binom{X}{0} = 1$ et $\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$, si $k \geq 1$.

On ne s'intéressera, par la suite, qu'au cas $K = \mathbf{C}$, en lien avec les fonctions holomorphes, mais les exemples qui suivent ont un sens sur un corps K de caractéristique 0 quelconque.

Exemple V.1.1. — • *La série exponentielle.* Si $\lambda \in \mathbf{C}$, on note $\exp(\lambda T)$ la série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} T^n$. C'est la solution formelle de l'équation différentielle $F' = \lambda F$ dont le terme constant est 1, et on a $\exp(\lambda T) \exp(\mu T) = \exp((\lambda + \mu)T)$.

• *Les séries puissances.* Si $\alpha \in \mathbf{N}$, alors $(1 + T)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} T^n$, d'après la formule du binôme, et l'annulation de $\binom{\alpha}{n}$, pour $n > \alpha$. Par analogie, on définit $(1 + T)^\alpha$, pour $\alpha \in \mathbf{C}$, comme la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} T^n$. Si $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} \binom{\beta}{n-k} \right) T^n = (1 + T)^\alpha (1 + T)^\beta = (1 + T)^{\alpha+\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha + \beta}{n} T^n,$$

ce qui se traduit par le fait que les polynômes en 2 variables

$$\binom{X + Y}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \binom{X}{k} \binom{Y}{n-k}$$

prennent les mêmes valeurs sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Par suite, ils sont égaux, ce qui permet de démontrer que $(1 + T)^\alpha (1 + T)^\beta = (1 + T)^{\alpha+\beta}$ quels que soient $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

• *La série du logarithme.* On définit $\log(1 + T)$ comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} T^n$.

⁽¹⁾ On obtient une construction algébrique en remarquant que $F \in K[[T]]$ est déterminée si on connaît ses n premiers coefficients, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Autrement dit F est déterminée par ses images F_n dans $K[T]/(T^n)$, pour $n \in \mathbf{N}$, et l'application $F \mapsto (F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ permet d'identifier $K[[T]]$ à la *limite projective* $\varprojlim K[T]/(T^n)$ des $K[T]/(T^n)$, ensemble des suites $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$, où $F_n \in K[T]/(T^n)$, et $F_{n+1} \in K[T]/(T^{n+1})$ a pour image F_n modulo T^n , quel que soit $n \in \mathbf{N}$. On remarquera l'analogie avec la construction des nombres p -adiques.

⁽²⁾ Ce polynôme doit son nom au fait que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est un coefficient du binôme $(1 + X)^n$, si n est un entier $\geq k$; si $n \in \{0, \dots, k-1\}$, on a $\binom{n}{k} = 0$.

2. Rayon de convergence d'une série entière

Si $z_0 \in \mathbf{C}$ et si $r > 0$, on note $D(z_0, r)$ le *disque fermé* de centre z_0 et de rayon r (i.e. l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z - z_0| \leq r$), et $D(z_0, r^-)$ le *disque ouvert* de centre z_0 et de rayon r (i.e. l'ensemble des $z \in \mathbf{C}$ vérifiant $|z - z_0| < r$).

Rappelons que, si $F = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathbf{C}[[T]]$, il existe un unique $\rho(F) \in \overline{\mathbf{R}}_+$, appelé *rayon de convergence* de F , tel que, si $|z| < \rho$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ soit normalement convergente, et si $|z| > \rho(F)$, la suite $a_n z^n$ ne soit pas bornée (et donc la série soit divergente). On a par ailleurs $\rho(F)^{-1} = \limsup |a_n|^{1/n}$.

Si $z \in D(0, \rho(F)^-)$, on note $F(z)$ la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. La vérification du résultat suivant est laissée au lecteur.

Lemme V.1.2. — Si $F, G \in \mathbf{C}[[T]]$, alors

$$\rho(F + G) \geq \inf(\rho(F), \rho(G)) \quad \text{et} \quad \rho(FG) \geq \inf(\rho(F), \rho(G)),$$

et on a

$$(F + G)(z) = F(z) + G(z) \quad \text{et} \quad (FG)(z) = F(z)G(z), \quad \text{si } |z| < \inf(\rho(F), \rho(G)).$$

Exemple V.1.3. — • Si $\lambda \in \mathbf{C}$, alors $\rho(\exp(\lambda T)) = +\infty$.

• $\rho(\log(1 + T)) = 1$, et $\rho((1 + T)^\alpha) = 1$, si $\alpha \notin \mathbf{N}$ (sinon on a affaire à un polynôme dont le rayon de convergence est infini). En effet, si $\alpha \in \mathbf{C} - \mathbf{N}$, alors $|\binom{\alpha}{n+1} / \binom{\alpha}{n}| = |\frac{\alpha-n}{n+1}| \rightarrow 1$, et donc $|\binom{\alpha}{n}|^{1/n} \rightarrow 1$ (version multiplicative de la moyenne de Césaro).

• La série⁽³⁾ $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! T^n$ a un rayon de convergence nul.

Remarque V.1.4. — Comme $(1 + T)^\alpha (1 + T)^\beta = (1 + T)^{\alpha+\beta}$ dans $\mathbf{C}[[T]]$, et comme les trois séries entières ci-dessus ont un rayon de convergence ≥ 1 , on a $(1 + z)^\alpha (1 + z)^\beta = (1 + z)^{\alpha+\beta}$ quels que soient $z \in D(0, 1^-)$, et $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. En particulier, si $m \in \mathbf{N} - \{0\}$, alors $(1 + z)^{1/m}$ est une racine m -ième de $1 + z$, quel que soit $z \in D(0, 1^-)$.

Proposition V.1.5. — (i) Si $F = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathbf{C}[[T]]$, alors $\rho(F^{(k)}) \geq \rho(F)$, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, et si $|z_0| + |z - z_0| < \rho(F)$, alors

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} z_0^n \right) (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

(ii) Si $|z_0| < \rho(F)$, alors $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = F'(z_0)$.

⁽³⁾C'est la série de Taylor en 0 de la fonction $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$, qui est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ , ce qui faisait dire à Euler que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n! = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$. On remarquera que f satisfait l'équation différentielle $x^2 f' + x f + f = 1$; qu'en est-il de la série formelle ?

Démonstration. — Si $|z_0| + |z - z_0| < \rho(F)$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} |a_{n+k} z_0^n| \right) |z - z_0|^k &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n+k=m} \binom{m}{k} |a_m| |z_0^n| |z - z_0|^k \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m| (|z_0| + |z - z_0|)^m < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que la série double de la proposition est absolument convergente. En fixant k , on en déduit que $F^{(k)}$ converge si $|z_0| < \rho(F)$, et donc $\rho(F^{(k)}) \geq \rho(F)$. De plus, on peut réordonner les termes comme on veut, et commencer par sommer sur $n + k = m$, puis sommer sur $m \in \mathbf{N}$. La somme pour $n + k = m$ étant $\sum_{n+k=m} \binom{m}{n} a_n z_0^k (z - z_0)^n = a_m z^m$, cela démontre le (i).

Le (i) permet, en faisant le changement de variables $z = z_0 + h$, de supposer que $z_0 = 0$ pour démontrer le (ii). Or on a

$$\left| \frac{F(h) - F(0)}{h} - F'(0) \right| = \left| h \sum_{n=2}^{+\infty} a_n h^{n-2} \right| \leq |h| \left(\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| (\rho(F)/2)^{n-2} \right), \quad \text{si } |h| < \rho(F)/2,$$

et comme $\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| (\rho(F)/2)^{n-2} < +\infty$, on en déduit que $\frac{F(h)-F(0)}{h} - F'(0)$ tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$, ce qui permet de conclure.

Remarque V.1.6. — On peut reformuler le (ii) de la proposition précédente en disant que, si $F \in \mathbf{C}[[T]]$ est de rayon de convergence non nul, alors F est *dérivable au sens complexe* dans $D(0, \rho(F)^-)$, et que la dérivée au sens complexe de F est F' . Une récurrence immédiate permet donc de montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ au sens complexe sur $D(0, \rho(F)^-)$, et que la dérivée k -ième au sens complexe de F est la fonction associée à la série entière $F^{(k)}$.

3. Premières propriétés des fonctions holomorphes

3.1. Définition

Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , et $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$. Si $z_0 \in \Omega$, si $r > 0$, et si $D(z_0, r^-) \subset \Omega$, on dit que f est *développable en série entière sur* $D(z_0, r^-)$, s'il existe $F \in \mathbf{C}[[T]]$, de rayon de convergence $\geq r$, telle que $f(z) = F(z - z_0)$, pour tout $z \in D(z_0, r^-)$. Il résulte du (i) de la prop. V.1.5 que si f est développable en série entière sur $D(z_0, r^-)$, et si $D(z_1, r_1^-) \subset D(z_0, r^-)$, alors f est développable en série entière sur $D(z_1, r_1^-)$.

On dit que f est *développable en série entière autour de* z_0 s'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $D(z_0, r^-)$, et on dit que f est *analytique sur* Ω ou encore que f est *holomorphe sur* Ω , si f est développable en série entière autour de tout point de Ω . Il résulte de la rem. V.1.6 qu'une fonction analytique sur Ω est de classe \mathcal{C}^∞ au sens complexe sur Ω .

Exemple V.1.7. — (i) Un polynôme est une fonction holomorphe sur \mathbf{C} .

(ii) $\exp(\lambda z)$ est holomorphe sur \mathbf{C} , quel que soit $\lambda \in \mathbf{C}$.

- (iii) $\frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0\}$.
- (iv) $\log(1+z)$ et $(1+z)^s$, si $s \in \mathbf{C}$, sont holomorphes sur $D(0, 1^-)$.
- (v) Si f et g sont holomorphes sur Ω , alors $f+g$ et fg sont holomorphes sur Ω .
- (vi) Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est holomorphe, et si $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe, alors $g \circ f$ est holomorphe sur Ω_1 .
- (vii) Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est holomorphe bijective, alors sa réciproque $f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ est holomorphe.
- (viii) Une fonction rationnelle est holomorphe sur l'ouvert complémentaire de ses pôles.

Démonstration. — Le (i) est évident. Le (ii) et le (iv) suivent de l'exemple V.1.3. Le (iii) se démontre en constatant que $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_0-z)^n}{z_0^{n+1}}$, si $|z - z_0| < |z_0|$. Le (v) suit du lemme V.1.2. Le (vi) et (vii) pourraient se démontrer directement, mais nous attendrons d'en savoir plus pour en donner une démonstration élégante (cf. cor. V.2.7). Finalement, le (viii) se déduit des (i), (iii) et (v) et (vi).

3.2. Théorème des zéros isolés et unicité du prolongement analytique

Si f est analytique sur Ω , et si $z_0 \in \Omega$, on définit l'ordre du zéro $v_{z_0}(f) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ de f en z_0 comme la valuation $v_{\mathbf{T}}(F)$ de la série entière F telle que $f(z) = F(z - z_0)$. Si cet ordre est $+\infty$, c'est que la fonction f est identiquement nulle dans un voisinage de z_0 (i.e. il existe $r > 0$ tel que $f(z) = 0$ si $z \in D(z_0, r^-)$). Si cet ordre est fini, égal à k , on peut factoriser F sous la forme $F = T^k G$, avec $G(0) \neq 0$. Par continuité, $G(z - z_0)$ ne s'annule pas dans un voisinage de z_0 , ce qui prouve que z_0 est le seul zéro de f dans ce voisinage.

Théorème V.1.8. — (des zéros isolés) *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C} . Si f est une fonction holomorphe sur Ω qui n'est pas identiquement nulle, et si $z_0 \in \Omega$ est un zéro de f , alors il existe $r > 0$ tel que z_0 soit le seul zéro de f sur $D(z_0, r)$.*

Démonstration. — D'après la discussion précédant le théorème, z_0 est un zéro non isolé si et seulement si $v_{z_0}(f) = +\infty$. L'ensemble des zéros non isolés est donc fermé car c'est l'intersection des fermés $\{z, f^{(n)}(z) = 0\}$, pour $n \in \mathbf{N}$, et ouvert car si $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout n , alors f est identiquement nulle dans $D(z_0, r^-)$, si f est développable en série entière dans $D(z_0, r^-)$. Comme Ω est supposé connexe, on en déduit que l'ensemble des zéros non isolés est soit Ω (auquel cas f est identiquement nulle), soit l'ensemble vide. Ceci permet de conclure.

Corollaire V.1.9. — (Unicité du prolongement analytique) *Soient $\Omega \subset \Omega'$ deux ouverts non vides de \mathbf{C} . Si Ω' est connexe, et si f et g sont deux fonctions analytiques sur Ω' ayant la même restriction à Ω , alors $f = g$ sur Ω' tout entier.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème des zéros isolés à $f - g$.

Remarque V.1.10. — Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbf{C} , et soit Ω' un ouvert connexe de \mathbf{C} contenant Ω . Il est, en général, impossible de trouver une fonction

holomorphe g sur Ω' dont la restriction à Ω soit f . Dans le cas où c'est possible, le corollaire précédent montre que g est unique ; elle est appelée *le prolongement analytique de f à Ω'* .

On prendra garde au problème suivant. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts connexes, contenant Ω , sur lesquels f admet des prolongements analytiques f_1 et f_2 , on ne peut pas en conclure, en général, que $f_1 = f_2$ sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ (le problème étant que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ n'a aucune raison d'être connexe). Le logarithme fournira un exemple de ce phénomène. Évidemment, si f admet un prolongement analytique à \mathbf{C} tout entier, ce prolongement analytique est véritablement unique.

Exemple V.1.11. — La fonction analytique f définie sur $D(0, 1^-)$ par $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ admet un prolongement analytique à $\mathbf{C} - \{1\}$: en effet, elle coïncide⁽⁴⁾, sur $D(0, 1^-)$, avec $\frac{1}{1-z}$ qui est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{1\}$. Cet exemple n'est qu'à moitié convaincant car on est parti de la fonction $\frac{1}{1-z}$ qui est visiblement holomorphe sur $\mathbf{C} - \{1\}$, mais on verra des exemples moins banals plus tard (ex. B.3.11 et th. VII.3.4 et VII.4.2, par exemple).

3.3. Principe du maximum

Théorème V.1.12. — (Principe du maximum) *Si Ω est un ouvert connexe de \mathbf{C} , si $z_0 \in \Omega$, si f holomorphe sur Ω , et si $|f|$ admet un maximum local en z_0 , alors f est constante sur Ω .*

Démonstration. — Si f n'est pas constante sur Ω , la fonction $f - f(z_0)$ n'est pas identiquement nulle sur Ω , et Ω étant connexe, le développement en série entière de $f - f(z_0)$ autour de z_0 n'est pas identiquement nul. Il existe donc $k \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $\alpha \in \mathbf{C}^*$ tels que $f(z) = f(z_0) + \alpha \cdot (z - z_0)^k + (z - z_0)^k \varepsilon_0(z)$, avec $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon_0(z) = 0$.

- Si $f(z_0) = 0$, alors z_0 est un zéro isolé de f , et $|f(z)| > |f(z_0)|$, quel que soit z dans un voisinage de z_0 ; en particulier, $|f|$ n'admet pas de maximum local en z_0 .

- Si $f(z_0) \neq 0$, soit β avec $\beta^k = \alpha^{-1} f(z_0)$. On a alors $f(z_0 + t\beta) = f(z_0)(1 + t^k + t^k \varepsilon_1(t))$, avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon_1(t) = 0$. Ceci implique que $|f(z_0 + t\beta)| > |f(z_0)|$, si $t > 0$ est assez petit, et donc que $|f|$ n'admet pas de maximum local en z_0 .

Ceci permet de conclure.

⁽⁴⁾On a donc envie d'écrire $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$, ce qu'Euler aurait fait sans aucun scrupule. Dans la même veine, on a (ex. VII.3.6)

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots = \zeta(0) = \frac{-1}{2}, \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = \zeta(-1) = \frac{-1}{12}, \quad 1 + 4 + 9 + 16 + \dots = \zeta(-2) = 0, \dots$$

Manipuler des séries divergentes est amusant mais demande un certain doigté. Par exemple, il ne faut pas confondre $\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = 1 + \zeta(0) = \frac{1}{2}$ avec $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = \zeta(0) = -\frac{1}{2}$. Les physiciens ont acquis une dextérité certaine en la matière ; les mathématiciens ont plus de complexes depuis que Cauchy a déclaré, dans son *Cours d'analyse* à l'École polytechnique, paru en 1821 : « *Je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple (...) qu'une série divergente n'a pas de somme.* »

Remarque V.1.13. — Le principe du maximum est souvent utilisé sous la forme : *une fonction holomorphe atteint son maximum au bord*. Autrement dit, si K est un compact et si f est holomorphe sur un ouvert contenant K , alors le maximum de $|f|$ sur K est atteint sur la frontière de K .

V.2. La formule intégrale de Cauchy et ses conséquences

1. Généralités sur les chemins

Un *chemin* γ (sous-entendu \mathcal{C}^1 par morceaux) dans un ouvert Ω de \mathbf{C} est une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, continue et \mathcal{C}^1 par morceaux, d'un intervalle compact $[a, b]$ de \mathbf{R} dans Ω . Le point $\gamma(a)$ est l'*origine* de γ et $\gamma(b)$ en est l'*extrémité*. On dit que γ est un *lacet* si son origine et son extrémité coïncident. Si $t \in [a, b]$ est un point où les dérivées à droite et à gauche de γ sont distinctes, on dit que $\gamma(t)$ est un *point anguleux* de γ . Par hypothèse, γ n'a qu'un nombre fini de points anguleux.

Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, on définit la *longueur* $\text{lg}(\gamma)$ de γ par la formule

$$\text{lg}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

La longueur est invariante par *reparamétrage* (un reparamétrage de γ est un chemin de la forme $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, où $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ est une bijection croissante de classe \mathcal{C}^1). En effet, on a

$$\begin{aligned} \text{lg}(\gamma_1) &= \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{(x \circ \varphi)'(t)^2 + (y \circ \varphi)'(t)^2} dt = \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{(x' \circ \varphi)(t)^2 \varphi'(t)^2 + (y' \circ \varphi)(t)^2 \varphi'(t)^2} dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \sqrt{(x' \circ \varphi)(t)^2 + (y' \circ \varphi)(t)^2} \varphi'(t) dt = \int_a^b \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds = \text{lg}(\gamma). \end{aligned}$$

Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin, on définit le *chemin opposé* $\gamma^{\text{opp}} : [a, b] \rightarrow \Omega$ de γ , par $\gamma^{\text{opp}}(t) = \gamma(a + b - t)$.

Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \Omega$ sont deux chemins, on dit que γ_1 et γ_2 sont *composables* si l'origine de γ_2 coïncide avec l'extrémité de γ_1 , et on définit le chemin $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [a_1, b_2 - a_2 + b_1] \rightarrow \Omega$, *composé de γ_1 et γ_2* , en posant $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \gamma_1(t)$, si $t \in [a_1, b_1]$ et $\gamma_1 \cdot \gamma_2(t) = \gamma_2(t - a_2 + b_1)$, si $t \in [b_1, b_2 - a_2 + b_1]$.

Exemple V.2.1. — (chemins standard)

- Si $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, on note $C(z_0, r) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ le chemin $t \mapsto z_0 + re^{2i\pi t}$; c'est le *cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru dans le sens direct*. Sa longueur est $2\pi r$.
- Si $a, b \in \mathbf{C}$, on note $[a, b] : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ le chemin $t \mapsto a + t(b - a)$; c'est le *segment d'origine a et d'extrémité b* . Sa longueur est $|b - a|$.

2. Intégration le long d'un chemin

On identifie \mathbf{C} à \mathbf{R}^2 , en écrivant z sous la forme $z = x + iy$. Une 1-forme sur un ouvert Ω de \mathbf{C} est une expression⁽⁵⁾ du type $P dx + Q dy$, où P, Q sont des fonctions continues sur Ω . Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , la différentielle df de f peut être vue comme une 1-forme : on a $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$.

Si $\omega = P dx + Q dy$ est une 1-forme sur Ω , et si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin dans Ω , on définit l'intégrale $\int_{\gamma} \omega$ par la formule

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b P(\gamma(t))d(x(\gamma(t))) + Q(\gamma(t))d(y(\gamma(t))) = \int_a^b P(\gamma(t))(x \circ \gamma)'(t) + Q(\gamma(t))(y \circ \gamma)'(t) dt.$$

Dans l'intégrale ci-dessus, $(x \circ \gamma)'(t)$ et $(y \circ \gamma)'(t)$ sont bien définis sauf aux points anguleux, mais comme ceux-ci sont en nombre fini, cela n'affecte pas l'intégrale.

Théorème V.2.2. — (i) $\int_{\gamma} \omega$ est invariante par reparamétrage : si $\varphi : [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ une bijection croissante de classe \mathcal{C}^1 , et si $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma} \omega$.

(ii) $\int_{\gamma \circ \text{pp}} \omega = - \int_{\gamma} \omega$.

(iii) Si γ_1 et γ_2 sont composables, alors $\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$.

(iv) Si $\omega = df$, alors $\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Démonstration. — Le (i) résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_{a_1}^{b_1} (P(\gamma \circ \varphi(t))(x \circ \gamma \circ \varphi)'(t) + Q(\gamma \circ \varphi(t))(y \circ \gamma \circ \varphi)'(t)) dt \\ &= \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} (P(\gamma(s))(x \circ \gamma)'(s) + Q(\gamma(s))(y \circ \gamma)'(s)) ds = \int_{\gamma} \omega. \end{aligned}$$

Le (ii) suit, via le changement de variable $t \mapsto a+b-t$, de ce que les bornes d'intégration sont échangées.

Le (iii) est immédiat.

⁽⁵⁾Plus généralement, si Ω est un ouvert de \mathbf{R}^n , et si $p \leq n$, une p -forme sur Ω est une expression du type

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

où les f_{i_1, \dots, i_p} sont des fonctions continues sur Ω . (Une 0-forme est juste, par convention, une fonction continue sur Ω .) On voit aussi souvent une p -forme ω sur Ω comme une fonction $x \mapsto \omega_x$, continue sur Ω , à valeurs dans les formes p -linéaires alternées : si u_1, \dots, u_p sont p vecteurs de \mathbf{R}^n , avec $u_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,n})$, et si $x \in \Omega$, alors

$$\omega_x(u_1, \dots, u_p) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p}(x) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \text{sign}(\sigma) u_{\sigma(1), i_1} \cdots u_{\sigma(p), i_p}.$$

Ces objets jouent un rôle très important en géométrie différentielle. L'exemple le plus simple est la 1-forme df , si f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω . Sa valeur en un point x est la forme linéaire $u \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) u_i$.

Le (iv) suit du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))(x \circ \gamma)'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))(y \circ \gamma)'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

On note dz la différentielle $dx + i dy$. Si f est une fonction continue sur Ω , la 1-forme $f(z)dz$ n'est donc autre que $f(x + iy) dx + i f(x + iy) dy$. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux, on a alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))((x \circ \gamma)'(t) + i(y \circ \gamma)'(t)) dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

La majoration du lemme suivant est immédiate, via la formule $\text{lg}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$.

Lemme V.2.3. — $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \text{lg}(\gamma) \cdot \sup_{z \in \gamma([a,b])} |f(z)|$.

Exemple V.2.4. — (Intégration sur les chemins standard)

(i) Si $z_0 \in \mathbf{C}$ et $r > 0$, alors $\int_{C(z_0,r)} f(z) dz = 2i\pi r \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi t})e^{2i\pi t} dt$.

(ii) Si $a, b \in \mathbf{C}$, alors $\int_{[a,b]} f(z) dz = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a)) dt$.

3. Holomorphie des fonctions dérivables au sens complexe

Théorème V.2.5. — (Formule intégrale de Cauchy, 1825) Soit f de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe sur Ω , ouvert de \mathbf{C} , et soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$, tels que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Alors, pour tout $z \in D(z_0, r^-)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Démonstration. — Si $w \in C(z_0, r)$ et $z \in D(z_0, r^-)$, on a $|z - z_0| < |w - z_0|$, et donc $\frac{1}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$. Comme la convergence de la série est uniforme sur le cercle, on peut intervertir somme et intégrale, ce qui nous donne, en posant $w = z_0 + re^{2i\pi t}$,

$$\int_{C(z_0,r)} \frac{dw}{w - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{C(z_0,r)} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(z - z_0)^n}{(re^{2i\pi t})^{n+1}} 2i\pi r e^{2i\pi t} dt,$$

et comme tous les termes de la série sont nuls sauf celui pour $n = 0$ qui vaut $2i\pi$, on obtient $\int_{C(z_0,r)} \frac{dw}{w-z} = 2i\pi$. On en tire l'identité

$$\left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w - z} dw \right) - f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw.$$

Maintenant, on a $\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \int_0^1 f'(w + u(z - w)) du$, et

$$\int_{C(z_0,r)} \int_0^1 f'(w + u(z - w)) du dw = \int_0^1 \int_0^1 f'((1-u)(z_0 + re^{2i\pi t}) + uz) du 2i\pi r e^{2i\pi t} dt.$$

La fonction $(t, u) \mapsto f'((1-u)(z_0 + re^{2i\pi t}) + uz) 2i\pi re^{2i\pi t}$ est sommable car continue sur le compact $[0, 1]^2$; on peut donc utiliser le th. de Fubini pour intervertir les variables. Or

$$\int_0^1 f'((1-u)(z_0 + re^{2i\pi t}) + uz) 2i\pi re^{2i\pi t} dt = \left[\frac{1}{1-u} f((1-u)(z_0 + re^{2i\pi t}) + uz) \right]_{t=0}^{t=1} = 0,$$

pour tout $u \neq 1$. On en déduit la nullité de l'intégrale double et le résultat.

Ce théorème a des conséquences totalement surprenantes pour quelqu'un de familier avec la théorie des fonctions d'une variable réelle⁽⁶⁾. La prop. V.2.6 ci-dessous en est un premier exemple, puisqu'elle montre qu'une fonction de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe est en fait holomorphe (et donc, a fortiori, de classe \mathcal{C}^∞). Le (i) de la rem. V.2.8 et le th. V.2.11 fournissent d'autres exemples de phénomènes un peu miraculeux.

Proposition V.2.6. — Si f vérifie la formule de Cauchy, et si on définit $a_n \in \mathbf{C}$, pour $n \in \mathbf{N}$, par

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

la série $F(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$ a un rayon de convergence $\geq r$, et on a $f(z) = F(z - z_0)$ quel que soit $z \in D(z_0, r^-)$.

Démonstration. — Soit $M = \sup_{w \in C(z_0, r)} |f(w)|$ (M est fini car f est continue sur le compact $C(z_0, r)$). On a alors

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \lg(C(z_0, r)) \cdot \left(\sup_{w \in C(z_0, r)} \left| \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \right| \right) \leq Mr^{-n}.$$

On en déduit que $\rho(F) \geq r$. De plus, si $|z - z_0| < r$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{C(z_0, r)} \frac{(z - z_0)^n f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw. \end{aligned}$$

⁽⁶⁾• La fonction $\varphi_0(x) = e^{-x^{-2}}$, prolongée par continuité en 0, est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , mais n'est pas développable en série entière autour de 0, puisque toutes ses dérivées sont nulles en 0 et $\varphi_0(x) > 0$ si $x \neq 0$.

• La fonction $\frac{1}{x^2+1}$ est analytique sur \mathbf{R} , mais n'est pas développable en série entière sur $](-1+\varepsilon), 1+\varepsilon[$, si $\varepsilon > 0$, car le développement de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n$ en 0 a un rayon de convergence égal à 1.

• Il existe des fonctions continues sur \mathbf{R} n'ayant de dérivée en aucun point (Weierstrass, 1875); en prenant la primitive d'une telle fonction cela montre qu'il existe des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} qui ne sont pas de classe \mathcal{C}^2 et donc, a fortiori, pas analytiques sur \mathbf{R} .

D'un autre côté, la théorie des fonctions holomorphes a été développée avant la théorie des fonctions d'une variable réelle, et c'est les pathologies de cette dernière qui ont beaucoup surpris les mathématiciens du 19-ième siècle (et un peu ceux du 20-ième). Par exemple, H. Poincaré a eu quelques ennuis avec les fonctions \mathcal{C}^∞ qui ne sont pas somme de leur série de Taylor...

On conclut en utilisant la formule intégrale de Cauchy. (Pour justifier l'échange des signes \int et \sum ci-dessus, on peut, par exemple, faire appel au théorème de convergence dominée en majorant $|\sum_{n=0}^N \frac{(z-z_0)^n f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}|$ sur $C(z_0, r)$ par $M \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}} = \frac{M}{r-|z-z_0|}$.)

Corollaire V.2.7. — (i) Si f est holomorphe et ne s'annule pas sur Ω , alors $1/f$ est holomorphe sur Ω ; sa dérivée est $-\frac{f'}{f^2}$.

(ii) Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est holomorphe et si $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe, alors $g \circ f : \Omega_1 \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe; sa dérivée est $(g' \circ f) f'$.

(iii) Si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est holomorphe bijective, et si f' ne s'annule pas⁽⁷⁾ dans Ω , alors sa réciproque $f^{-1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ est holomorphe; sa dérivée est $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration. — Il suffit de recopier la démonstration du cas réel pour montrer que $1/f$ (resp. $g \circ f$, resp. f^{-1}) est \mathcal{C}^1 au sens complexe sur Ω (resp. sur Ω_1 , resp. sur Ω_2); la prop. V.2.6 permet d'en déduire l'holomorphie de $1/f$ (resp. $g \circ f$, resp. f^{-1}). (On aurait aussi pu démontrer directement que $1/f$ (resp. $g \circ f$, resp. f^{-1}) est développable en série entière autour de chaque point, mais ça aurait été nettement plus fatigant.)

Remarque V.2.8. — (i) La formule $f(z) = F(z - z_0)$ montre que les a_n sont les coefficients du développement de Taylor de f en z_0 . Autrement dit, une fonction f , holomorphe sur un ouvert Ω , est somme de sa série de Taylor en z_0 sur tout disque ouvert $D(z_0, r^-)$ contenu dans Ω . De plus, on a

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

(ii) Dans le cas $n = 0$, on obtient la formule $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$, qui montre que f vérifie la propriété de la moyenne : $f(z_0)$ est la moyenne de $f(z)$ sur tout cercle de centre z_0 dont le disque correspondant est inclus dans Ω .

(iii) Dans le cas général, on en déduit la majoration (appelée *inégalité de Cauchy*)

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq r^{-n} \sup_{w \in C(z_0, r)} |f(w)| = r^{-n} \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|.$$

(iv) Plus généralement, si $K \subset \Omega$ est un compact, si U est un ouvert contenant K et dont l'adhérence \bar{U} est un compact contenu dans Ω , alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe $M = M(n, K, U)$, tel que

$$\sup_{z \in K} |f^{(n)}(z)| \leq M \sup_{z \in \bar{U}} |f(z)|.$$

En effet, si $r \leq d(K, \Omega - U)$, alors $C(z, r) \subset \bar{U} \subset \Omega$ quel que soit $z \in K$, et le (i) montre que $M = n!r^{-n}$ convient.

Corollaire V.2.9. — (Théorème de Liouville, 1844) Si f est une fonction holomorphe sur \mathbf{C} tout entier, et si f est bornée, alors f est constante.

⁽⁷⁾Cette hypothèse est en fait inutile (cf. rem. V.3.3, deuxième point).

Démonstration. — Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $|f(z)| \leq M$, quel que soit $z \in \mathbf{C}$. On déduit de l'inégalité de Cauchy que, si $n \in \mathbf{N}$, alors $|\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)| \leq r^{-n}M$, quel que soit $r > 0$. En faisant tendre r vers $+\infty$, on en déduit que $f^{(n)}(0) = 0$, si $n \geq 1$. Or f étant holomorphe sur \mathbf{C} tout entier, est somme de sa série de Taylor en 0 en tout point de \mathbf{C} et donc $f(z) = f(0)$, pour tout $z \in \mathbf{C}$. Ceci permet de conclure.

Corollaire V.2.10. — (Théorème de d'Alembert-Gauss, 1799) \mathbf{C} est algébriquement clos.

Démonstration. — Soit $P \in \mathbf{C}[T]$ ne s'annulant pas sur \mathbf{C} . Alors $f = 1/P$ est une fonction holomorphe. De plus f est bornée sur \mathbf{C} car elle a une limite quand $|z| \rightarrow +\infty$, et est continue. On déduit du théorème de Liouville que f est constante, et donc que P est de degré 0. En prenant la contraposée, cela montre que, si $\deg P \geq 1$, alors P a un zéro dans \mathbf{C} , ce qui permet de conclure.

4. Construction de fonctions holomorphes

4.1. Séries de fonctions holomorphes

Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} . Rappelons qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f , si pour tout compact $K \subset \Omega$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(K, \varepsilon)$, tel que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, si $z \in K$ et $n \geq N(K, \varepsilon)$. Une série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ converge uniformément sur tout compact, si la suite de ses sommes partielles le fait; elle converge normalement sur tout compact, si pour tout compact $K \subset \Omega$, on a $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\|_K < +\infty$, où $\|u_n\|_K = \sup_{z \in K} |u_n(z)|$ est la norme de u_n pour la convergence uniforme sur K .

La convergence normale sur tout compact implique la convergence uniforme sur tout compact qui implique la convergence simple.

Théorème V.2.11. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} .

(i) Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes sur Ω convergeant uniformément sur tout compact de Ω , alors la limite f de la suite f_n est holomorphe sur Ω et, pour tout k , la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$ sur tout compact de Ω .

(ii) Si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions holomorphes sur Ω telle que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ converge uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω , alors la somme f de la série est holomorphe sur Ω et, pour tout k , la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n^{(k)}$ converge uniformément (resp. normalement) vers $f^{(k)}$ sur tout compact de Ω .

Démonstration. — Le (i) se déduit du (ii), et pour montrer le (ii), il suffit de prouver que f est holomorphe, le reste s'en déduisant en utilisant le (iv) de la remarque V.2.8 ci-dessus.

Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Alors, d'après la formule de Cauchy, on a, pour tout $z \in K$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \in \mathbf{N}} \int_{C(z_0, r)} \frac{u_n(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{u_n(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw, \end{aligned}$$

l'interversion des signes \int et \sum ci-dessus étant justifiée par la convergence uniforme (resp. normale) de la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n(z)$ sur le compact $C(z_0, r)$. La prop. V.2.6 permet d'en déduire l'holomorphie de f dans $D(z_0, r^-)$, ce qui permet de conclure.

4.2. Produits infinis de fonctions holomorphes

Soit I un ensemble dénombrable, et soit $(u_i)_{i \in I}$ une suite de nombres complexes. On dit que le produit $\prod_{i \in I} u_i$ est convergent si $\sum_{i \in I} |u_i - 1| < +\infty$. Si $I_0 \subset I$ est l'ensemble des $i \in I$ tels que $u_i = 0$, la condition précédente équivaut à $\sum_{i \in I - I_0} |\log u_i| < +\infty$, où $\log : \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{C}$ désigne la branche du logarithme dont la partie imaginaire appartient à $] -\pi, \pi]$ (en particulier $\log z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$, si $|z-1| < 1$, et $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\log z}{z-1} = 1$). Si I est fini, le produit est convergent et sa valeur est le produit au sens usuel. Si I est infini, et si $n \mapsto i(n)$ est une bijection de \mathbf{N} sur I , alors $x_n = \prod_{k \leq n} u_{i(k)}$ est une suite convergente dont la limite ne dépend pas de la bijection de \mathbf{N} sur I choisie, et qui est, par définition, la valeur du produit infini. En effet :

- si $I_0 \neq \emptyset$, alors $x_n = 0$, pour tout n assez grand, et la valeur du produit est 0 ;
- si $I_0 = \emptyset$, on a $x_n = \exp(\sum_{k \leq n} \log u_{i(k)})$, et comme $\sum_{i \in I} |\log u_i| < +\infty$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \log u_{i(n)}$ est convergente, et $\prod_{i \in I} u_i = \exp(\sum_{n \in \mathbf{N}} \log u_{i(n)}) = \exp(\sum_{i \in I} \log u_i)$.

En particulier, un produit convergent est nul si et seulement si un des termes du produit est nul.

Théorème V.2.12. — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C} , soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur \mathbf{C} telle que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ converge normalement sur tout compact de Ω , et soit $f_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k)$, si $n \in \mathbf{N}$.

(i) La suite f_n converge uniformément sur tout compact (on dit que le produit infini $\prod_{n \in \mathbf{N}} (1 + u_n)$ converge uniformément sur tout compact), et la limite f de la suite f_n est une fonction holomorphe sur Ω .

(ii) Si aucune des u_n est identiquement -1 sur Ω , alors $f(z) = 0$ si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $1 + u_n(z) = 0$, et on a $v_z(f) = \sum_{n \in \mathbf{N}} v_z(1 + u_n)$, quel que soit $z \in \Omega$. De plus, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u'_n}{1 + u_n}$ converge normalement sur tout compact de Ω sur lequel f ne s'annule pas, et

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u'_n(z)}{1 + u_n(z)}, \quad \text{si } f(z) \neq 0.$$

Démonstration. — Si K est un compact de Ω , soit $C(K) = \exp(\sum_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\|_K)$; c'est une quantité finie, par hypothèse. Si $n \in \mathbf{N}$ et si $z \in K$, on a alors

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=0}^{n+1} (1 + u_k(z)) - \prod_{k=0}^n (1 + u_k(z)) \right| &= |u_{n+1}(z)| \cdot \left| \prod_{k=0}^n (1 + u_k(z)) \right| \\ &\leq \|u_{n+1}\|_K \prod_{k=0}^n (1 + \|u_k\|_K) \leq C(K) \|u_{n+1}\|_K. \end{aligned}$$

On en déduit, grâce à la convergence de $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\|_K$, la convergence uniforme du produit sur K . La limite f est donc holomorphe sur Ω d'après le th. V.2.11.

Maintenant, si $z_0 \in \Omega$, on peut choisir $r > 0$ tel que $K = D(z_0, r) \subset \Omega$, et $N \in \mathbf{N}$ tel que $\|u_n\|_K \leq \frac{1}{2}$, si $n > N$. En particulier, $1 + u_n$ ne s'annule pas sur K et, pour tout $z \in K = D(z_0, r)$, on a $|1 + u_n(z)| \geq 1 - \|u_n\|_K \geq e^{-2\|u_n\|_K}$. Soit $g_N = \prod_{n \geq N+1} (1 + u_n)$. On déduit de ce qui précède la minoration $|g_N(z)| \geq \exp(-2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|u_n\|_K)$, ce qui permet de prouver que g_N ne s'annule pas sur K . On en déduit que

$$v_{z_0}(f) = v_{z_0}\left(g_N \prod_{n=0}^N (1 + u_n)\right) = \sum_{n=0}^N v_{z_0}(1 + u_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{z_0}(1 + u_n).$$

La convergence normale de la série des u_n implique alors, d'après le (ii) du th. V.2.11, celle de la série des u'_n . Comme $|1 + u_n(z)| \geq \frac{1}{2}$, si $z \in K$ et $n \geq N$, on en déduit la convergence normale de la série des $\frac{u'_n}{1+u_n}$. De même, la convergence uniforme sur K de f_n vers f entraîne celle de f'_n vers f' ((i) du th. V.2.11). On en déduit que $\frac{f'_n(z)}{f_n(z)}$ tend vers $\frac{f'(z)}{f(z)}$, si $f(z) \neq 0$. Or $\frac{f'_n}{f_n} = \sum_{k=0}^n \frac{u'_k}{1+u_k}$ (cela suit, par récurrence de ce que $(v_1 v_2)' = v'_1 v_2 + v_1 v'_2$), et donc $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u'_n(z)}{1+u_n(z)}$, si $f(z) \neq 0$. Ceci permet de conclure.

4.3. Fonctions holomorphes définies par une intégrale

Théorème V.2.13. — Soit X un sous-ensemble mesurable de \mathbf{R}^m , et soit Ω un ouvert de \mathbf{C} . Soit $F : \Omega \times X \rightarrow \mathbf{C}$. On suppose que :

- $z \mapsto F(z, t)$ est holomorphe sur Ω , quel que soit $t \in X$;
- $t \mapsto F(z, t)$ est mesurable quel que soit $z_0 \in \Omega$, et il existe $r_{z_0} > 0$ et $g_{z_0} \in \mathcal{L}^1(X)$ tels que $D(z_0, r_{z_0}) \subset \Omega$ et $|F(z, t)| \leq g_{z_0}(t)$, pour tous $z \in D(z_0, r_{z_0})$ et $t \in X$.

Alors la fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(z) = \int_X F(z, t) dt$ est holomorphe sur Ω . De plus, si $k \in \mathbf{N}$, alors $(\frac{\partial}{\partial z})^k f(z) = \int_X (\frac{\partial}{\partial z})^k F(z, t) dt$.

Démonstration. — L'holomorphicité étant une propriété locale, il suffit de prouver que, quel que soit $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que f soit holomorphe sur $D(z_0, r^-)$. Fixons donc z_0 , et soit $r = r_{z_0}$. Comme $z \mapsto F(z, t)$ est holomorphe, quel que soit $t \in X$, on tire de la formule de Cauchy l'identité

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_X \left(\int_{C(z_0, r)} \frac{F(w, t)}{w - z} dw \right) dt, \quad \text{si } z \in D(z_0, r^-).$$

Or on a $|\frac{F(w,t)}{w-z}| \leq \frac{g_{z_0}(t)}{r-|z-z_0|}$, si $(w,t) \in (C(z_0,r) \times X)$. Comme g_{z_0} est sommable sur X , la fonction $|\frac{F(w,t)}{w-z}|$ est sommable sur $C(z_0,r) \times X$, ce qui permet d'utiliser le théorème de Fubini pour permuter les deux intégrations. On obtient

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \left(\int_X \frac{F(w,t)}{w-z} dt \right) dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \text{si } z \in D(z_0, r^-).$$

La prop. V.2.6 permet d'en déduire l'holomorphic de f sur $D(z_0, r^-)$.

Maintenant, on a $\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw$ d'après le (i) de la rem. V.2.8. En majorant $|\frac{F(w,t)}{(w-z_0)^{n+1}}|$ par $r^{-k-1} g_{z_0}(t)$ qui est sommable sur $C(z_0,r) \times X$, ce qui permet d'utiliser Fubini dans l'autre sens, on obtient

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) = \int_X \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0,r)} \frac{F(w,t)}{(w-z_0)^{k+1}} dw \right) dt = \int_X \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^k F(z_0, t) dt.$$

Ceci permet de conclure.

Corollaire V.2.14. — Soient Ω et D deux ouverts de \mathbf{C} . Si f est continue sur $\Omega \times D$, et si $z \mapsto f(z, w)$ est holomorphe sur Ω pour tout $w \in D$, alors $z \mapsto \int_\gamma f(z, w) dw$ est holomorphe sur Ω , quel que soit le chemin \mathcal{C}^1 par morceaux γ inclus dans D .

Démonstration. — On a $\int_\gamma f(z, w) dw = \int_0^1 f(z, \gamma(t)) \gamma'(t) dt$. Soit alors $z_0 \in \Omega$. On peut trouver $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset \Omega$. La fonction continue $(z, t) \mapsto |f(z, \gamma(t))|$ est majorée sur le compact $D(z_0, r) \times [0, 1]$, et donc $f(z, \gamma(t)) \gamma'(t)$ admet un majorant du type $M |\gamma'(t)|$ sur $D(z_0, r) \times [0, 1]$. Comme $\int_0^1 |\gamma'(t)| dt < +\infty$, on est dans les conditions d'application du th. V.2.13, ce qui permet de conclure.

V.3. Structure locale des fonctions holomorphes

1. Le théorème d'inversion locale holomorphe

Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbf{C} . Une application $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est *biholomorphe*, si elle est bijective et si φ et φ^{-1} sont holomorphe. (On verra plus tard (rem. V.3.3) qu'il suffit que φ soit injective et holomorphe pour qu'elle soit biholomorphe.)

Théorème V.3.1. — (d'inversion locale pour les fonctions holomorphes) Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , f holomorphe sur Ω , et $z_0 \in \Omega$. Si $f'(z_0) \neq 0$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 dans Ω et un voisinage ouvert V de $f(z_0)$ dans \mathbf{C} tels que f soit biholomorphe de U sur V .

Démonstration. — Commençons par supposer que $z_0 = 0, f(z_0) = 0$ et $f'(z_0) = 1$; nous allons construire l'application réciproque g de f par une méthode du point fixe (cf. n° 8.2 du Vocabulaire) en partant du fait que g est point fixe de $\varphi \mapsto \varphi - f \circ \varphi + z$.

Il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ tel que $f(z) = z + \alpha z^2 + O(|z|^3)$, ce qui fait que

$$h(u, v) = f(u - v) - f(u) + v = \alpha(v^2 - 2uv) + O((|u| + |v|)^3).$$

Soit $r_0 < \frac{1}{2}\rho(f)$. On déduit du développement limité ci-dessus, l'existence de $C > 0$, tel que $|h(u, v)| < C|u| \cdot |v|$ si $|v| \leq |u| \leq r_0$. Comme $f(z) - z = O(|z|^2)$, on peut quitte à diminuer r_0 imposer de plus que $|f(z) - z| \leq \frac{1}{4}|z|$ si $|z| \leq r_0$, et on peut aussi imposer $r_0 \leq \frac{1}{2C}$.

Soit $r = \frac{2}{3}r_0$. On construit, par récurrence, deux suites de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$, en posant $g_1(z) = z$; $u_n(z) = f(g_n(z)) - z$; $g_{n+1}(z) = g_n(z) - u_n(z)$. Nous allons montrer que g_n et u_n sont holomorphes sur $D(0, r^-)$, et que

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)|z| \leq |g_n(z)| \leq \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n}\right)|z| \quad \text{et} \quad |u_n(z)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|z|, \quad \text{quel que soit } z \in D(0, r^-).$$

Le résultat est évident pour $n = 1$ puisque $g_1(z) = z$ et $u_1(z) = f(z) - z$. Si la propriété est vérifiée pour n , alors l'encadrement de $|g_{n+1}(z)|$ est une conséquence immédiate de l'encadrement pour $|g_n(z)|$ et de la majoration pour $|u_n(z)|$. Par ailleurs, comme $|g_n(z)| \leq \frac{3}{2}|z| < r_0 < \rho(f)$, $f(g_n(z))$ est bien définie et holomorphe sur $D(0, r^-)$, et donc u_{n+1} est holomorphe sur $D(0, r^-)$. Maintenant, on a

$$u_{n+1}(z) = f(g_n(z) - u_n(z)) - z = h(g_n(z), u_n(z)) + f(g_n(z)) - u_n(z) - z = h(g_n(z), u_n(z)).$$

Comme $|u_n(z)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|z| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)|z| \leq |g_n(z)|$, on a

$$|u_{n+1}(z)| \leq |h(g_n(z), u_n(z))| \leq C|g_n(z)||u_n(z)| \leq \frac{3C|z|}{2} \cdot \frac{|z|}{2^{n+1}} \leq Cr_0 \frac{|z|}{2^{n+1}} \leq \frac{|z|}{2^{n+2}}.$$

Ceci montre que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $n + 1$.

On déduit de la majoration $|g_{n+1}(z) - g_n(z)| = |u_n(z)| \leq \frac{r}{2^{n+1}}$ la convergence uniforme de la suite g_n sur $D(0, r^-)$. La limite est donc une fonction holomorphe sur $D(0, r^-)$ qui vérifie $g(z) = g(z) - (f(g(z)) - z)$. Autrement dit, on a construit une fonction holomorphe g sur $D(0, r^-)$ telle que $f(g(z)) = z$ si $z \in D(0, r^-)$.

Dans le cas général, on peut appliquer ce qui précède à $F(z) = f'(z_0)^{-1}(f(z + z_0) - f(z_0))$ (et donc $f(z) = f'(z_0)(F(z - z_0) + f(z_0))$). On en déduit l'existence de $r_0 > 0$, et de G holomorphe sur $D(0, r_0^-)$, tels que $F(G(z)) = z$, si $z \in D(0, r_0^-)$. Si on définit g sur $D(f(z_0), r^-)$, où $r = |f'(z_0)|r_0$, par $g(z) = z_0 + G(f'(z_0)^{-1}(z - f(z_0)))$, un calcul immédiat montre que $f(g(z)) = z$, si $z \in D(f(z_0), r^-)$. Autrement, dit, on peut trouver un voisinage V_0 de $f(z_0)$ et g holomorphe sur V_0 tels que $f \circ g = \text{id}$ sur V_0 . Ceci implique en particulier que g est injective sur V_0 . De plus, on a $f'(g(z))g'(z) = 1$, si $z \in V_0$, et donc $g'(f(z_0)) \neq 0$. En appliquant ce qui précède à g au lieu de f , on en déduit l'existence d'un voisinage U de z_0 (que l'on peut supposer inclus dans Ω), et de $h : U \rightarrow V_0$ holomorphe, tels que $g \circ h = \text{id}$ sur U . Soit $V = h(U)$. Comme $g \circ h = \text{id}$ sur U , on a $g(V) = U$, et comme g est injective sur V_0 , on a $V = g^{-1}(U)$, ce qui prouve que V est un ouvert (dans V_0 et donc aussi dans \mathbf{C} puisque V_0 est ouvert dans \mathbf{C}) qui contient $z_0 = h(f(z_0))$. Finalement, on a $f = f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = h$ sur U , et $f \circ g = \text{id}$ sur V (puisque $V \subset V_0$) et $g \circ f = g \circ h = \text{id}$ sur U . En résumé, f induit une bijection holomorphe de U sur V dont l'inverse g est aussi holomorphe. Ceci permet de conclure.

Théorème V.3.2. — Soient Ω un ouvert connexe de \mathbf{C} et f une fonction holomorphe non constante sur Ω . Si $z_0 \in \Omega$, et si $m = v_{z_0}(f - f(z_0))$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 dans Ω , un réel $r > 0$ et $\varphi : U \rightarrow D(0, r^-)$ biholomorphe, avec $\varphi(z_0) = 0$, telle que $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$, quel que soit $z \in U$.

Démonstration. — Par définition de m , on a, dans un voisinage U_0 de z_0 ,

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m(a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \dots),$$

avec $a_m \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbf{C}^*$ une racine m -ième de a_m , et soit

$$g = \frac{f(z) - f(z_0)}{a_m(z - z_0)^m} = 1 + b_1(z - z_0) + \dots$$

La fonction g est holomorphe dans U_0 , et comme elle vaut 1 en z_0 , il existe un voisinage ouvert U_1 de z_0 tel que $g(z) \in D(1, 1^-)$ si $z \in U_1$. Mais alors la fonction $h = g^{1/m}$ est holomorphe sur U_1 et vérifie $h^m = g$ (cf. rem. V.1.4). Ceci montre que, si on pose $\varphi(z) = \alpha(z - z_0)h(z)$, alors φ est holomorphe sur U_1 , et on a $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$ quel que soit $z \in U_1$. Finalement, comme $\varphi'(z_0) = \alpha \neq 0$, le théorème d'inversion locale holomorphe montre qu'il existe un voisinage ouvert U de z_0 dans U_1 et $r > 0$ tels que φ induise une bijection biholomorphe de U sur $D(0, r^-)$.

Remarque V.3.3. — Si $m \geq 1$, l'application $z \mapsto z^m$ induit une surjection de $D(0, r^-)$, sur $D(0, (r^m)^-)$, et tout point de $D(0, (r^m)^-) - \{0\}$ a exactement m antécédents. On en déduit (grâce au th. V.3.2), les résultats suivants.

- Si Ω est un ouvert connexe de \mathbf{C} , et si f est holomorphe non constante sur Ω , alors $f(\Omega)$ est un ouvert (théorème de l'application ouverte). En effet, en reprenant les notations du théorème, on voit que si $z_0 \in \Omega$, alors il existe $r > 0$ tel que $f(\Omega)$ contienne $D(f(z_0), (r^m)^-)$.

- Si Ω est un ouvert de \mathbf{C} , et si f est holomorphe injective sur Ω , alors f est biholomorphe de Ω sur $f(\Omega)$ (inversion globale). En effet, si f est injective, on doit avoir $m = 1$ dans les notations du théorème⁽⁸⁾, et f' ne s'annule pas sur Ω . On déduit du théorème d'inversion locale que f^{-1} est holomorphe au voisinage de tout point de l'ouvert $f(\Omega)$.

2. Logarithme et fonctions puissances

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. L'application $z \mapsto e^z$ est injective sur la bande $\{z, \alpha < \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$, et son image est \mathbf{C} privé de la demi-droite $\mathbf{R}_+e^{i\alpha}$ d'argument α (ou $\alpha + 2\pi$, ce qui revient au même). D'après le théorème d'inversion globale ((ii) de la rem. V.3.3), son inverse

$$\log_\alpha : \mathbf{C} - \mathbf{R}_+e^{i\alpha} \rightarrow \{z, \alpha < \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$$

est une fonction holomorphe.

Comme $\exp(\log_\alpha(z)) = z$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+e^{i\alpha}$, on obtient, en dérivant cette relation, que la dérivée de \log_α sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+e^{i\alpha}$ est $\frac{1}{z}$, et donc que \log_α vérifie les propriétés que l'on est en droit d'attendre d'une fonction logarithme. Le seul problème est qu'on ne peut pas définir le logarithme comme une fonction holomorphe sur \mathbf{C}^* tout entier, à cause de la discontinuité le long de la demi-droite $\mathbf{R}_+e^{i\alpha}$ (les limites « à gauche » et « à droite »

⁽⁸⁾Si $m \geq 2$, et si $0 < |u - f(z_0)| < r^m$, alors u a m antécédents par f dans U , à savoir les images réciproques par φ des m racines m -ièmes de $u - f(z_0)$.

différent de $2i\pi$, le long de cette demi-droite). Ce problème⁽⁹⁾ est dans la nature des choses : le logarithme est une fonction holomorphe *multivaluée* sur \mathbf{C}^* , et chacune des fonctions \log_α ci-dessus correspond au choix d'une détermination du logarithme, holomorphe dans un ouvert aussi grand que possible. La *détermination principale du logarithme* est la fonction $\log_{-\pi}$; c'est donc la détermination du logarithme, définie sur \mathbf{C} privé de la demi-droite réelle négative \mathbf{R}_- , et qui vaut 0 en 1 ; ses valeurs ont une partie imaginaire dans l'intervalle $] -\pi, \pi[$. Dans la pratique, on ne met pas le α en indice, ce qui demande de *faire attention à ce que signifie exactement* $\log z$ dans la situation que l'on considère ; les valeurs possibles de $\log z$ étant les $2i\pi k + \log_{-\pi} z$, pour $k \in \mathbf{Z}$.

Proposition V.3.4. — Soit \log la détermination principale du logarithme. Alors on a $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, si $|z| < 1$.

Démonstration. — Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$. C'est une fonction holomorphe sur $D(0, 1^-)$ dont la dérivée est $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z}$. Par ailleurs, $\log(1+z)$ est aussi holomorphe sur $D(0, 1^-)$, de dérivée $\frac{1}{1+z}$. La fonction $g(z) = f(z) - \log(1+z)$ est, d'après le (i) de la rem. V.2.8, somme de sa série de Taylor en 0 sur tout $D(0, 1^-)$, et comme sa dérivée est nulle, elle est constante sur $D(0, 1^-)$. On conclut en remarquant que $g(0) = 0$.

Exercice V.3.5. — Soit \log la détermination principale du logarithme.

- (i) Montrer que $\log z = \log|z| + i \arg z$, où $\arg z \in] -\pi, \pi[$ est l'argument principal de z .
- (ii) Soient $z_1, z_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_-$, tels que $z_1 z_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}_-$. Déterminer, suivant les cas, la valeur de $\log(z_1 z_2) - \log z_1 - \log z_2$.

Si $s \in \mathbf{C}^*$, on définit z^s par la formule $z^s = \exp(s \log z)$. Comme la fonction $\log z$ est multivaluée, il en est de même de z^s , et il faut donc bien faire attention au choix que l'on a fait de $\log z$. Si a est une valeur possible de z^s , les autres sont les $e^{2i\pi k s} a$, pour $k \in \mathbf{Z}$. En particulier, on peut se débrouiller, par un choix convenable de la détermination de $\log z$, pour que z^s soit holomorphe dans $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\alpha}$, mais, si $s \notin \mathbf{Z}$, la fonction z^s ne peut pas se prolonger en une fonction holomorphe sur \mathbf{C}^* . Même si on prend la détermination principale du logarithme, il n'est pas toujours vrai que $z_1^s z_2^s = (z_1 z_2)^s$. Par contre, la fonction $s \mapsto z^s$ est, elle, holomorphe sur \mathbf{C} tout entier, et on a $z^{s_1+s_2} = z^{s_1} z^{s_2}$ (si on ne s'amuse pas à changer la valeur de $\log z$). En particulier, si $m \in \mathbf{N} - \{0\}$, alors $z^{1/m}$ est une racine m -ième de z , quelle que soit la détermination du logarithme choisie.

⁽⁹⁾Il a fortement perturbé nos ancêtres. Bernoulli et Leibnitz se sont battus (épistolièrement), en 1712-1713, sur la valeur de $\log(-1)$, l'un soutenant que $\log(-1) = 0$ car $2 \log(-1) = \log(-1)^2 = \log 1 = 0$, et l'autre que $\log(-1)$ devait être imaginaire car $\log(-1) = -2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} \dots$ ne converge pas... Il a fallu attendre 1749 pour qu'Euler explique qu'un nombre complexe a une infinité de logarithmes.

CHAPITRE VI

LA FORMULE DE CAUCHY ET CELLE DES RÉSIDUS (DE CAUCHY)

Le lecteur a déjà pu apprécier la puissance de la formule de Cauchy pour l'étude des fonctions holomorphes. La formule des résidus, qui en est une extension, est à la fois un outil pratique permettant de calculer sans douleur certaines intégrales, et un outil théorique extrêmement souple dont nous verrons certaines utilisations au chap. VII et dans l'annexe A. Par ailleurs, les idées qu'elle met en oeuvre sont le point de départ de constructions plus générales permettant d'associer des invariants aux variétés de dimension quelconque. Par exemple, on peut utiliser (les idées intervenant dans) la formule des résidus, pour démontrer qu'un ouvert de \mathbf{R}^2 n'est pas homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^n , si $n \neq 2$. Démontrer, ce qui est vital si on veut pouvoir parler de dimension d'un point de vue topologique, qu'un ouvert de \mathbf{R}^n n'est pas homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^m , si $n \neq m$, peut se faire en généralisant (grandement) ces idées.

VI.1. Homotopie de lacets et formule de Cauchy

1. Vocabulaire de topologie algébrique

Soient X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ et $g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. On dit que f et g sont *homotopes* si « on peut passer continûment de f à g ». De manière précise, f et g sont homotopes, s'il existe $u : [0, 1] \times X \rightarrow Y$ continue, telle que $u(0, x) = f(x)$ et $u(1, x) = g(x)$, quel que soit $x \in X$. Si on note $f_t : X \rightarrow Y$ l'application $f_t(x) = u(t, x)$, alors f_t est continue, quel que soit $t \in [0, 1]$, $t \mapsto f_t$ est une application continue de $[0, 1]$ dans l'espace des applications continues de X dans Y (muni de la topologie de la convergence simple), et $t \mapsto f_t$ connecte $f = f_0$ à $g = f_1$.

Un ouvert Ω de \mathbf{C} est *contractile* s'il est *homotope à un point*, c'est-à-dire, s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $\text{id} : \Omega \rightarrow \Omega$ est homotope, dans Ω , à l'application constante $z \mapsto z_0$, quel que soit $z \in \Omega$. Autrement dit, Ω est contractile, s'il existe $z_0 \in \Omega$ et $u : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \Omega$, continue, telle que $u(0, z) = z$ et $u(1, z) = z_0$, quel que soit $z \in \Omega$.

Un ouvert Ω est *étoilé* s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que, quel que soit $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z]$ est inclus dans Ω . En particulier, un ouvert convexe est étoilé ; \mathbf{C} privé d'une demi-droite Y est

étoilé (on peut prendre pour z_0 n'importe quel élément de l'autre demi-droite de la droite contenant Y). Un ouvert étoilé est contractile : il suffit de poser $u(t, z) = z(1 - t) + tz_0$; la condition selon laquelle $[z_0, z] \subset \Omega$ fait que u est bien à valeurs dans Ω .

Si Ω est un ouvert de \mathbf{C} , une *homotopie de lacets dans Ω* de $\gamma_0 : (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \rightarrow \Omega$ sur $\gamma_1 : (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \rightarrow \Omega$ est une application continue $u : [0, 1] \times (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \rightarrow \Omega$, vérifiant $u(0, t) = \gamma_0(t)$ et $u(1, t) = \gamma_1(t)$; on peut aussi voir u comme une application continue $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ telle que $u(s, 0) = u(s, 1)$, quel que soit $s \in [0, 1]$. On dit qu'un lacet $\gamma : (\mathbf{R}/\mathbf{Z}) \rightarrow \Omega$ est *contractile dans Ω* , s'il existe une homotopie de lacets de γ sur un lacet constant. Si Ω est contractile⁽¹⁾, alors tout lacet est contractile dans Ω .

2. Un cas particulier de la formule de Stokes

Soient $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$ et $D = (0, 1)$ les sommets du carré $[0, 1]^2$. On note $\partial([0, 1]^2)$ le bord orienté du carré $[0, 1]^2$; c'est la réunion des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$.

Proposition VI.1.1. — Si $\omega = P ds + Q dt$ est une 1-forme sur $[0, 1]^2$, avec P et Q de classe \mathcal{C}^1 , alors⁽²⁾

$$\int_{\partial([0,1]^2)} \omega = \int_{[0,1]^2} \left(-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \right) ds dt.$$

Démonstration. — En revenant à la définition d'une intégrale curviligne, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{[A,B]} \omega &= \int_0^1 P(s, 0) ds, & \int_{[C,D]} \omega &= \int_0^1 P(1 - v, 1) dv = - \int_0^1 P(s, 1) ds, \\ \int_{[B,C]} \omega &= \int_0^1 Q(1, t) dt, & \int_{[D,A]} \omega &= \int_0^1 Q(0, 1 - v) dv = - \int_0^1 Q(0, t) dt. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Plus généralement, un espace topologique connexe X est *simplement connexe*, si tout lacet dans X est contractile. D'après un célèbre théorème énoncé par B. Riemann (1851) et vraiment démontré par P. Koebe en 1914, (le *théorème de représentation conforme de Riemann*), un ouvert simplement connexe de \mathbf{C} , non égal à \mathbf{C} , est biholomorphe au disque unité $D = D(0, 1^-)$. En particulier, cela permet de montrer que tout ouvert U simplement connexe de \mathbf{R}^2 est difféomorphe à \mathbf{R}^2 (i.e. il existe une bijection de classe \mathcal{C}^1 de U sur \mathbf{R}^2 dont la réciproque est aussi de classe \mathcal{C}^1). Comme une fonction holomorphe préserve les angles, on voit que l'on peut transformer (l'intérieur d') un cercle en (l'intérieur d') un triangle en conservant les angles...

⁽²⁾ La formule qui suit est un cas particulier de la *formule de Stokes* $\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$, qui est une des formules mathématiques les plus esthétiques, et aussi une des plus utiles. Dans la formule de Stokes, ω est une p -forme sur un compact K de dimension $p + 1$, $d\omega$ est sa différentielle, Ω est l'intérieur de K et $\partial\Omega$ est la frontière orientée de Ω (et donc aussi celle de K). Donner un sens précis à ce qui précède demande un peu de travail (en particulier définir une orientation sur la frontière, ce qui n'est pas toujours possible). Si $p = 0$, la formule de Stokes est « le théorème fondamental de l'analyse » $\int_a^b df = f(b) - f(a)$, et si $p = 1$ et si Ω est de dimension 2, la formule de Stokes est aussi connue sous le nom de *théorème de Green* (on a alors $d(P dx + Q dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dy$, en tenant compte de ce que \wedge est bilinéaire alterné ; on retombe donc bien sur la formule de la proposition).

Ceci nous donne

$$\begin{aligned} \int_{\partial([0,1]^2)} \omega &= \int_0^1 (P(s, 0) - P(s, 1)) ds + \int_0^1 (Q(1, t) - Q(0, t)) dt \\ &= - \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial t}(s, t) dt \right) ds + \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial s}(s, t) ds \right) dt \\ &= \int_{[0,1]^2} \left(- \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \right) ds dt. \end{aligned}$$

Si Ω est un ouvert de \mathbf{C} , si $u : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ est une application de classe \mathcal{C}^1 , et si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est de classe \mathcal{C}^1 , on définit la 1-forme $u^*(f(z) dz)$ sur $[0, 1]^2$, par la formule :

$$u^*(f(z) dz) = f(u(s, t)) d(u(s, t)) = f(u(s, t)) \left(\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) ds + \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) dt \right).$$

Lemme VI.1.2. — Soit Ω un ouvert de \mathbf{C} . Si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe, si $u : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ est une application de classe \mathcal{C}^2 , et si on pose $u^*(f(z) dz) = P(s, t) ds + Q(s, t) dt$, alors $-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$.

Démonstration. — Comme f est holomorphe⁽³⁾, on a

$$f(u(s+h, t)) = f(u(s, t) + h \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) + o(h)) = f(u(s, t)) + f'(u(s, t)) \left(\frac{\partial u}{\partial s}(s, t) h \right) + o(h).$$

On en déduit que (avec le même argument pour $\frac{\partial}{\partial t}$)

$$\frac{\partial(f \circ u)}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot f' \circ u \quad \text{et} \quad \frac{\partial(f \circ u)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f' \circ u.$$

Comme $P = \frac{\partial u}{\partial s} \cdot f' \circ u$ et $Q = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f' \circ u$, on obtient

$$\begin{aligned} - \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} &= - \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} \cdot f' \circ u - \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot f'' \circ u + \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \cdot f' \circ u - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial s} \cdot f'' \circ u \\ &= \left(- \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) f' \circ u = 0. \end{aligned}$$

Théorème VI.1.3. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} et f une fonction de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe sur Ω . Alors, si γ_0, γ_1 sont deux lacets homotopes dans Ω , on a

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

⁽³⁾Une démonstration plus savante, mais plus naturelle, consisterait à remarquer que l'on a d'une part $(-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s}) ds \wedge dt = d(u^*(f(z) dz))$, et d'autre part que $d(u^*(f(z) dz)) = u^*(d(f(z) dz))$, et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, puisque f est holomorphe, et donc $d(f(z) dz) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 0$.

Remarque VI.1.4. — Si γ est un lacet constant, on a $\int_{\gamma} \omega = 0$ quelle que soit la 1-forme ω . On en déduit, si $\omega = f(z) dz$, avec f holomorphe sur Ω , les résultats suivants.

(i) Si γ est un lacet contractile dans Ω , alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

(ii) Si Ω est contractile (en particulier, si Ω est étoilé), alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, quel que soit le lacet γ dans Ω .

Démonstration. — Commençons par supposer qu'il existe, dans Ω , une homotopie de lacets, de classe \mathcal{C}^2 , de γ_0 sur γ_1 . Autrement dit, il existe $u : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$ de classe \mathcal{C}^2 , telle que $u(0, t) = \gamma_0(t)$, $u(1, t) = \gamma_1(t)$, et $u(s, 0) = u(s, 1)$ quel que soit $s \in [0, 1]$. Notons ω la 1-forme $f(z) dz$. Écrivons $u^*\omega$, sous la forme $P ds + Q dt$. D'après le lemme VI.1.2, on a $-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0$. On déduit donc de la proposition VI.1.1, la nullité de $\int_{\partial([0,1]^2)} u^*\omega$. En notant, A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 1) et D = (0, 1) les sommets du carré $[0, 1]^2$, on voit que

$$\int_{[B,C]} u^*\omega = \int_0^1 Q(1, t) dt = \int_0^1 f(u(1, t)) \frac{\partial u}{\partial t}(1, t) dt = \int_0^1 f(\gamma_1(t)) \gamma_1'(t) dt = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

De même, $\int_{[D,A]} u^*\omega = -\int_{\gamma_0} f(z) dz$. Par ailleurs, on a $\int_{[A,B]} u^*\omega + \int_{[C,D]} u^*\omega = 0$, puisque $u(s, 0) = u(s, 1)$, quel que soit $s \in [0, 1]$. On obtient donc

$$0 = \int_{\partial([0,1]^2)} u^*\omega = \int_{[A,B]} u^*\omega + \int_{[B,C]} u^*\omega + \int_{[C,D]} u^*\omega + \int_{[D,A]} u^*\omega = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_0} f(z) dz,$$

ce qui permet de conclure dans le cas particulier où γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω par une homotopie de classe \mathcal{C}^2 .

Passons au cas général. Les chemins γ_0 et γ_1 sont \mathcal{C}^1 par morceaux, et on dispose de $u : [0, 1]^2 \rightarrow \Omega$, continue, telle que $u(0, t) = \gamma_0(t)$, $u(1, t) = \gamma_1(t)$, et $u(s, 0) = u(s, 1)$ quel que soit $s \in [0, 1]$. L'idée est d'approximer u par des fonctions u_{ε} de classe \mathcal{C}^2 , en régularisant, et de passer à la limite. La mise en œuvre de cette stratégie demande de prendre un peu de précautions pour s'assurer que les approximations construites sont des homotopies de lacets et ne sortent pas de Ω .

On note $[x]$ la partie entière de $x \in \mathbf{R}$. Soit $\tilde{u} : [-1, 2]^2 \rightarrow \Omega$ définie par

$$\tilde{u}(s, t) = \begin{cases} u(0, t - [t]), & \text{si } s \leq 0, \\ u(s, t - [t]), & \text{si } 0 \leq s \leq 1, \\ u(1, t - [t]), & \text{si } s \geq 1. \end{cases}$$

Par construction, \tilde{u} est continue, coïncide avec u sur $[0, 1]^2$, est la restriction d'une fonction périodique (en t) de période 1, et son image coïncide avec celle de u . Comme $[-1, 2]^2$ est compact, son image K par \tilde{u} est compacte, et la distance $d(K, \mathbf{C} - \Omega)$ de K au fermé $\mathbf{C} - \Omega$ est > 0 . Il existe donc $\delta > 0$ tel que Ω contienne $K_{\delta} = \{z \in \mathbf{C}, d(z, K) \leq \delta\}$. Maintenant, si $\varepsilon > 0$, soit

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{(s', t', s, t) \in [-1, 2]^4, |s' - s| \leq \varepsilon, |t' - t| \leq \varepsilon} |\tilde{u}(s', t') - \tilde{u}(s, t)|.$$

Comme $[-1, 2]^2$ est compact, \tilde{u} est uniformément continue sur $[-1, 2]^2$, ce qui se traduit par $\delta(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On choisit $\varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}$, tel que $\delta(\varepsilon) \leq \delta$, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. Finalement, on choisit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$, de classe

\mathcal{C}^2 , nulle en dehors de $[-1, 1]$, avec $\int_{\mathbf{R}} \varphi = 1$, et on définit φ_ε , par $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} \varphi(\varepsilon^{-1}x)$, ce qui fait de φ_ε une fonction positive de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} , nulle en dehors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$, avec $\int_{\mathbf{R}} \varphi_\varepsilon = 1$.

On note $\varphi_\varepsilon^{[2]} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ la fonction définie par $\varphi_\varepsilon^{[2]}(s, t) = \varphi_\varepsilon(s)\varphi_\varepsilon(t)$. Si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, soit u_ε la restriction de $\tilde{u} * \varphi_\varepsilon^{[2]}$ à $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. On a donc

$$u_\varepsilon(s, t) = \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \tilde{u}(x, y) \varphi_\varepsilon(s-x) \varphi_\varepsilon(t-y) dy dx.$$

Comme $|\tilde{u}(x, y) - \tilde{u}(s, t)| \leq \delta(\varepsilon)$, si $x \in [s-\varepsilon, s+\varepsilon]$ et $y \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$, on obtient

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(s, t) - \tilde{u}(s, t)| &= \left| \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} (\tilde{u}(x, y) - \tilde{u}(s, t)) \varphi_\varepsilon(s-x) \varphi_\varepsilon(t-y) dy dx \right| \\ &\leq \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} |\tilde{u}(x, y) - \tilde{u}(s, t)| \varphi_\varepsilon(s-x) \varphi_\varepsilon(t-y) dy dx \\ &\leq \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \delta(\varepsilon) \varphi_\varepsilon(s-x) \varphi_\varepsilon(t-y) = \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

ce qui montre à la fois que u_ε est à valeurs dans $K_\delta \subset \Omega$, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, et que u_ε tend uniformément vers \tilde{u} sur $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ quand ε tend vers 0.

Par ailleurs, comme $\varphi_\varepsilon^{[2]}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R}^2 et à support compact, il en est de même de $\tilde{u} * \varphi_\varepsilon^{[2]}$, et comme $\tilde{u}(s, t+1) = \tilde{u}(s, t)$, si $s \in [-1, 2]$, et $t \in [-2, 0]$, on a $u_\varepsilon(s, t+1) = u_\varepsilon(s, t)$, si $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, si $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, et si $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ceci s'applique en particulier à $t = 0$; on en déduit que $\gamma_{s,\varepsilon} = u_\varepsilon(s, \cdot)$, est un lacet de $[0, 1]$ dans Ω , pour tout $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, et tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. En résumé, on a prouvé que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, u_ε est une homotopie de lacets dans Ω , de classe \mathcal{C}^2 . On en déduit que $\int_{\gamma_{s,\varepsilon}} f(z) dz$ ne dépend pas de $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. En particulier, on a

$$\int_{\gamma_{-1/2,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{\gamma_{3/2,\varepsilon}} f(z) dz, \quad \text{quel que soit } \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Or, par construction, $\tilde{u}(s, t) = \gamma_0(t)$, si $s \leq 0$. On en déduit que

$$\gamma_{-1/2,\varepsilon}(t) = \int_{-1/2-\varepsilon}^{-1/2+\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \gamma_0(t) \varphi_\varepsilon(-\frac{1}{2}-x) \varphi_\varepsilon(t-y) dx dy = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \gamma_0(t) \varphi_\varepsilon(t-y) dy = (\gamma_0 * \varphi_\varepsilon)(t),$$

et donc que $\gamma'_{-1/2,\varepsilon} = \gamma'_0 * \varphi_\varepsilon$. On a déjà montré que $\gamma_{-1/2,\varepsilon}(t) = u_\varepsilon(-\frac{1}{2}, t)$ tend vers $\tilde{u}(-\frac{1}{2}, t) = \gamma_0(t)$; les mêmes arguments montrent que $\gamma'_{-1/2,\varepsilon}(t) \rightarrow \gamma'_0(t)$, si t n'est pas un point anguleux de γ_0 . Finalement, si $t \in [0, 1]$, on a

$$|f(\gamma_{-1/2,\varepsilon}(t)) \gamma'_{-1/2,\varepsilon}(t)| \leq \sup_{z \in K_\delta} |f(z)| \cdot \sup_{t \in [0,1]} |\gamma'_0(t)|,$$

ce qui permet de déduire du théorème de convergence dominée que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\int_{\gamma_{-1/2,\varepsilon}} f(z) dz = \int_0^1 f(\gamma_{-1/2,\varepsilon}(t)) \gamma'_{-1/2,\varepsilon}(t) dt \rightarrow \int_0^1 f(\gamma_0(t)) \gamma'_0(t) dt = \int_{\gamma_0} f(z) dz.$$

On montre de même que $\int_{\gamma_{3/2,\varepsilon}} f(z) dz \rightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz$, et un passage à la limite permet d'en conclure que $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$. Ceci termine la démonstration du théorème.

3. Seconde démonstration de la formule de Cauchy

Reprenons les notations du th. V.2.5. Si $\varepsilon \in]0, r - |z - z_0|[$, soit

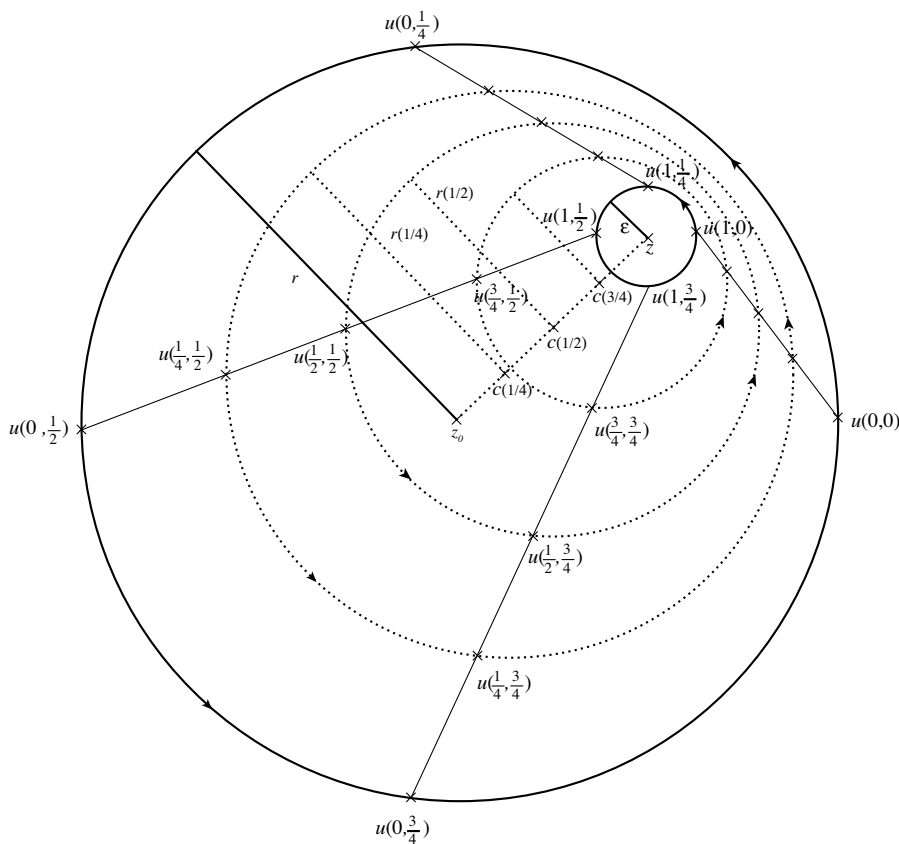
$$u(s, t) = (1-s)(z_0 + re^{2i\pi t}) + s(z + \varepsilon e^{2i\pi t}) = (1-s)z_0 + sz + ((1-s)r + s\varepsilon)e^{2i\pi t}.$$

Alors $\gamma_s(t) = u(s, t)$ est le cercle de centre $c(s) = (1 - s)z_0 + sz$ et de rayon $r(s) = (1 - s)r + s\varepsilon$, parcouru dans le sens direct. On a donc $\gamma_0 = C(z_0, r)$ et $\gamma_1 = C(z, \varepsilon)$. Par ailleurs, on a $u(s, 0) = u(s, 1)$ quel que soit $s \in [0, 1]$, et

$$|u(s, t) - z| \geq |r(s) - |c(s) - z|| = s\varepsilon + (1 - s)(r - |z - z_0|) \geq \varepsilon,$$

$$|u(s, t) - z_0| \leq |c(s) - z_0| + r(s) = r - s(r - |z - z_0| - \varepsilon) \leq r,$$

ce qui prouve que u est une homotopie de lacets dans $D(z_0, r) - D(z, \varepsilon^-) \subset \Omega - \{z\}$, de $C(z_0, r)$ sur $C(z, \varepsilon)$.



L'homotopie de $C(z_0, r)$ sur $C(z, \varepsilon)$

Comme $\frac{f(w)}{w-z}$ est de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe (en w) sur $\Omega - \{z\}$, on déduit du th. VI.1.3, que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad \text{quel que soit } \varepsilon > 0.$$

Or $C(\varepsilon, r)$ est le chemin $t \mapsto z + \varepsilon e^{2i\pi t}$, et donc $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_0^1 f(z + \varepsilon e^{2i\pi t}) dt$ tend vers $\int_0^1 f(z) dt = f(z)$ quand ε tend vers 0 (continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, f étant continue en z puisque holomorphe dans un voisinage de z). En

passant à la limite, on en déduit la formule $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z)$ que l'on cherchait à établir.

VI.2. Indice d'un lacet par rapport à un point

1. Primitives

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C} . Si f est holomorphe sur Ω , on dit que $F : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est une *primitive* de f , si F est holomorphe sur Ω et si $F' = f$. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin de classe \mathcal{C}^1 , alors $(F \circ \gamma)'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, quel que soit $t \in [a, b]$.

Une fonction holomorphe admet toujours *localement* une primitive. En effet, si f est holomorphe sur $D(z_0, r^-)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$, d'après le (i) de la rem. V.2.8, et f admet la fonction F , définie par $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{(n+1)!} (z-z_0)^{n+1}$, comme primitive sur $D(z_0, r^-)$. Par contre, une fonction holomorphe sur un ouvert Ω quelconque n'admet pas toujours une primitive sur tout Ω .

Proposition VI.2.1. — *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C} . Si f est holomorphe sur Ω , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) f admet une primitive F sur Ω ;
- (ii) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, pour tout lacet γ , de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, contenu dans Ω .

Démonstration. — Si f admet une primitive F sur Ω , alors $f(z) dz = dF$. On en déduit, en utilisant le (iv) du th. V.2.2, que $\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$, si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est \mathcal{C}^1 . En particulier, si γ est un lacet, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$, puisque $\gamma(b) = \gamma(a)$. D'où l'implication (i) \Rightarrow (ii). Passons à la démonstration de la réciproque. Fixons $a \in \Omega$. Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins⁽⁴⁾ \mathcal{C}^1 par morceaux dans Ω , d'extrémités a et b , on obtient un lacet γ en composant γ_1 avec l'opposé de γ_2 ; on a donc $\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz = 0$, par hypothèse. Ceci permet de définir $F : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$, par $F(b) = \int_{\gamma} f(z) dz$, où γ est n'importe quel chemin \mathcal{C}^1 par morceaux dans Ω , d'extrémités a et b .

Il suffit de prouver que F est dérivable au sens complexe, et qu'en tout point de Ω sa dérivée est $f(z_0)$, car la prop. V.2.6 montre qu'alors F est holomorphe. Soit donc $z_0 \in \Omega$, et soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r^-) \subset \Omega$. Si on fixe un chemin γ_0 joignant a à z_0 dans Ω , et si $b \in D(z_0, r^-)$, on fabrique un chemin γ_b joignant a à b dans Ω , en rajoutant le segment $[z_0, b]$ au chemin γ_0 . On a alors

$$\frac{F(b) - F(z_0)}{b - z_0} = \frac{1}{b - z_0} \left(\int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{[z_0, b]} f(z) dz - F(z_0) \right) = \int_0^1 f(z_0 + t(b - z_0)) dt,$$

⁽⁴⁾On déduit de la démonstration de ce qu'un ouvert connexe de \mathbf{R}^n est connexe par arcs qu'un tel ouvert est aussi connexe par lignes brisées (réunion finie de segments de droite), et donc aussi par chemins \mathcal{C}^1 par morceaux.

et la continuité de f en z_0 permet de montrer (par exemple en utilisant le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre), que $\frac{F(b)-F(z_0)}{b-z_0} \rightarrow f(z_0)$ quand $b \rightarrow z_0$. Ceci permet de conclure.

Remarque VI.2.2. — (i) D'après le (ii) de la rem. VI.1.4, la condition (ii) est automatiquement vérifiée si Ω est un ouvert étoilé ou, plus généralement, contractile. Il en résulte qu'une fonction holomorphe sur un ouvert contractile possède une primitive.

(ii) Si $a \in \mathbf{C}$, et si $0 < R_1 < R_2$, la fonction $1/(z-a)$ est holomorphe sur la couronne $C(a, R_1, R_2)$, mais $\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi \neq 0$ si $R_1 < r < R_2$. La fonction $1/(z-a)$ n'admet donc pas de primitive sur la couronne $C(a, R_1, R_2)$ et cette couronne n'est pas contractile.

Proposition VI.2.3. — (logarithme d'une fonction holomorphe)

Soit Ω un ouvert contractile de \mathbf{C} , et soit f holomorphe sur Ω ne s'annulant pas sur Ω . Alors il existe g holomorphe sur Ω , telle que $f = e^g$, et on a $g' = \frac{f'}{f}$.

Démonstration. — Comme Ω est contractile, et comme $\frac{f'}{f}$ est holomorphe sur Ω , il existe, d'après le (i) de la rem. VI.2.2, h holomorphe sur Ω telle que $h' = \frac{f'}{f}$. Soit $z_0 \in \Omega$. Quitte à rajouter une constante à h , on peut supposer que $e^{h(z_0)} = f(z_0)$. Mais alors $(e^{-h}f)' = -h'e^{-h}f + e^{-h}f' = 0$, et donc $e^{-h}f$ est constante sur Ω , et comme elle vaut 1 en z_0 , on a $f = e^h$ sur Ω . Si g est une autre fonction holomorphe sur Ω vérifiant $e^g = f$, on a $e^{g-h} = 1$, et donc $g-h$ est holomorphe et à valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$. Comme Ω est connexe, $g-h$ est constante et $g' = \frac{f'}{f}$.

2. Nombre de tours d'un lacet autour d'un point

Soit $z_0 \in \mathbf{C}$, et soit γ un lacet ne passant pas par z_0 . Notre but est de définir mathématiquement le nombre de tours que fait γ autour de z_0 .

2.1. Définition

Lemme VI.2.4. — Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C} - \{z_0\}$ un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux. Si $t \in [a, b]$, soit γ_t la restriction de γ à $[a, t]$, et soit $f(t) = \int_{\gamma_t} \frac{dz}{z-z_0}$. Alors $e^{-f(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est constante sur $[a, b]$.

Démonstration. — Par définition, on a $f(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z_0} du$, et donc $f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}$, si t n'est pas un point anguleux de γ . La dérivée de $e^{-f(t)}(\gamma(t) - z_0)$ est donc

$$-f'(t)e^{-f(t)}(\gamma(t) - z_0) + e^{-f(t)}\gamma'(t) = e^{-f(t)}\left(-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}(\gamma(t) - z_0) + \gamma'(t)\right) = 0,$$

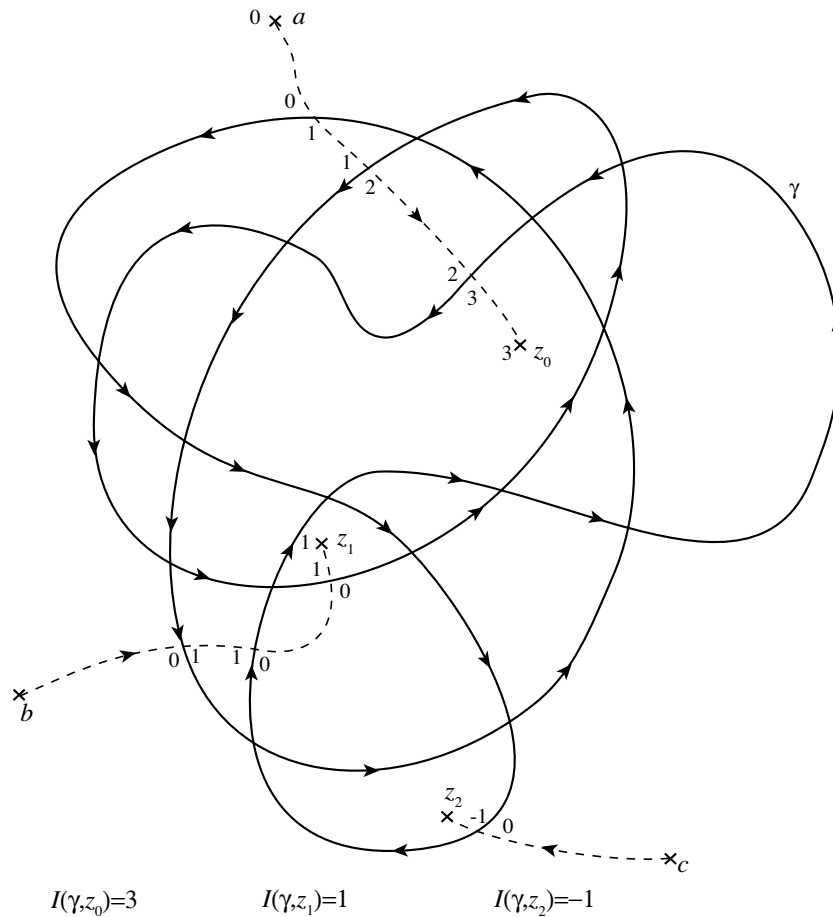
et f est constante par morceaux; comme elle est continue cela permet de conclure.

Corollaire VI.2.5. — Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est un lacet \mathcal{C}^1 par morceaux, ne rencontrant pas z_0 , alors $I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}$ est un entier.

Démonstration. — En reprenant les notations du lemme, on voit que $e^{f(b)} = e^{f(a) \frac{\gamma(b)-z_0}{\gamma(a)-z_0}}$, et, comme γ est un lacet, que $\exp(\int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0}) = e^{f(b)} = e^{f(a)} = 1$, ce qui permet de conclure.

L'entier $I(\gamma, z_0)$ défini ci-dessus est *l'indice de γ par rapport à z_0* . Par exemple, si γ est le chemin $C(a, r)$, et si $|z_0 - a| < r$, la formule de Cauchy utilisée pour la fonction constante 1, montre que $I(C(a, r), z_0) = 1$. Par contre, si $|z_0 - a| > r$, le cercle $C(a, r)$ est homotope à $\{a\}$ dans $\mathbf{C} - \{z_0\}$, et comme $\frac{1}{z-z_0}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{z_0\}$, on a $I(C(a, r), z_0) = 0$. Autrement dit, si z_0 est à l'intérieur du cercle parcouru dans le sens direct, alors l'indice du cercle par rapport à z_0 est 1, alors que si z_0 est à l'extérieur, cet indice est 0, ce qui est en accord avec l'idée selon laquelle $I(\gamma, z_0)$ représente le nombre de tours que fait γ autour de z_0 . On fera attention au fait que, *si le cercle est parcouru dans le sens rétrograde, son indice par rapport à un point à l'intérieur est -1* .

2.2. Détermination visuelle de l'indice d'un lacet par rapport à un point



Dans les situations considérées dans ce cours, les lacets sont sans point double (et sont constitués de segments de droite et d'arcs de cercle), et un théorème de Jordan affirme

qu'un tel lacet découpe le plan en deux régions, l'une à l'intérieur du lacet et l'autre à l'extérieur du lacet, auquel cas on se retrouve dans le même cas de figure que pour le cercle. Dans le cas général, déterminer sur un dessin l'indice d'un lacet par rapport à un chemin peut donner le tournis, mais la prop. VI.2.6 ci-dessous fournit un procédé permettant un calcul en regardant toujours droit devant soi.

La recette est la suivante. On choisit un point $a \in \mathbf{C}$ assez grand pour que $\gamma \subset D(0, |a|^-)$, et on trace un chemin u allant de a à z_0 . Alors $I(\gamma, z_0) = n_g - n_d$, où n_g (resp. n_d) est le nombre de points d'intersections de u et γ , où γ arrive de la gauche⁽⁵⁾ (resp. de la droite), quand on va de a à z_0 .

Soit γ un lacet dans \mathbf{C} . Comme γ est compact (en tant qu'image d'un intervalle compact par une application continue), son complémentaire est ouvert, et chacune des composantes connexes du complémentaire est un ouvert. D'autre part, si R est assez grand, γ est inclus dans $D(0, R)$, et comme $\mathbf{C} - D(0, R)$ est connexe, une (et une seule) des composantes connexes de $\mathbf{C} - \gamma$ contient $\mathbf{C} - D(0, R)$, pour R assez grand. Cette composante connexe est la *composante connexe de l'infini*.

Proposition VI.2.6. — Soit γ un lacet \mathcal{C}^1 par morceaux.

- (i) $z \mapsto I(\gamma, z)$ est constant sur chacune des composantes connexes de $\mathbf{C} - \gamma$.
- (ii) $I(\gamma, z) = 0$ si z est dans la composante connexe de l'infini de $\mathbf{C} - \gamma$.
- (iii) Soit $t \mapsto \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ un paramétrage de γ , \mathcal{C}^1 par morceaux, et soit $t_0 \in]a, b[$ tel que $\gamma(t_0)$ soit un point simple de γ , et $\gamma'(t_0) \neq 0$. Si $h \in \mathbf{C}$ vérifie $\text{Im}(h) > 0$, et si $\varepsilon > 0$ est assez petit, alors
 - $\gamma(t_0) + \varepsilon h \gamma'(t_0)$ et $\gamma(t_0) - \varepsilon h \gamma'(t_0)$ n'appartiennent pas à γ ,
 - $I(\gamma, \gamma(t_0) + \varepsilon h \gamma'(t_0)) - I(\gamma, \gamma(t_0) - \varepsilon h \gamma'(t_0)) = 1$.

Démonstration. — Le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre montre que $z_0 \mapsto I(\gamma, z_0)$ est continue sur $\mathbf{C} - \gamma$, et comme $I(\gamma, z_0)$ est à valeurs dans \mathbf{Z} , qui est discret, cela démontre le (i).

Si $\gamma \subset D(0, R)$, et si $|z_0| > R$, alors γ est homotope à un point dans $\mathbf{C} - \{z_0\}$ (et même dans $D(0, R)$, puisque $D(0, R)$ est contractile), et comme $\frac{1}{z-z_0}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{z_0\}$, on a $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$. On en déduit le (ii) pour $|z_0| > R$, et le (i) permet de terminer la démonstration du (ii).

Passons à la démonstration du (iii). Choisissons $h \in \mathbf{C}$, avec $\text{Im}(h) > 0$. On a donc $0 < \arg(h) < \pi$. Quitte à faire une translation sur la variable, on peut supposer $t_0 = 0$, et quitte à transformer la situation par la similitude $z \mapsto \gamma'(t_0)^{-1}(z - \gamma(t_0))$, on peut supposer que $\gamma(t_0) = 0$, et $\gamma'(t_0) = 1$, ce qui permet de simplifier un peu les formules. On a alors $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}\gamma(t) = 1$, ce qui implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que, quel que soit $t \in [-\delta, \delta] - \{0\}$,

- $|\arg(t^{-1}\gamma(t))| < \frac{1}{2} \inf(\arg(h), \pi - \arg(h))$,
- $|t^{-1}\gamma(t) - 1| \leq 1/2$.

Par ailleurs, comme $0 = \gamma(0)$ est un point simple de γ , il existe $\eta > 0$ tel que $d(0, \gamma(t)) \geq \eta$, si $t \in [a, b] -]-\delta, \delta[$. On en déduit que, si $0 < \varepsilon < |h|^{-1}\eta$, alors $\pm \varepsilon h$ n'est pas de la forme $\gamma(t)$, avec $t \in [a, b] -]-\delta, \delta[$. Par ailleurs, $\pm \varepsilon h$ n'est pas non plus de la forme $\gamma(t)$, avec $t \in [-\delta, \delta]$, puisque $\pm \varepsilon h \neq 0$ et $\arg(\frac{\pm \varepsilon h}{\gamma(t)}) \neq 0$, si $t \in [-\delta, \delta] - \{0\}$, d'après le choix de δ . En résumé, si $0 < \varepsilon < |h|^{-1}\eta$, alors $\pm \varepsilon h$ n'appartient pas à γ .

⁽⁵⁾Pour que ceci ait un sens, il vaut mieux prendre quelques précautions; par exemple, imposer que u et γ ne s'intersectent qu'en des points simples non anguleux de γ , et que les tangentes à γ et à u en un point d'intersection ne soient pas colinéaires.

Maintenant, on a $I(\gamma, \varepsilon h) - I(\gamma, -\varepsilon h) = I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon)$, où l'on a posé

$$I_1(\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma([a, -\delta] \cup \gamma([\delta, b])} \frac{dz}{z - \varepsilon h} - \frac{dz}{z + \varepsilon h} \quad \text{et} \quad I_2(\varepsilon) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma([-\delta, \delta])} \frac{dz}{z - \varepsilon h} - \frac{dz}{z + \varepsilon h}.$$

On a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_1(\varepsilon) = 0$, puisque $\frac{1}{z - \varepsilon h} - \frac{1}{z + \varepsilon h}$ tend vers 0 et est majoré en module par $\frac{2}{\eta - \varepsilon|h|}$. Comme $I(\gamma, \varepsilon h) - I(\gamma, -\varepsilon h) \in \mathbf{Z}$, il suffit donc, pour montrer que $I(\gamma, \varepsilon h) - I(\gamma, -\varepsilon h) = 1$, si $\varepsilon > 0$ est assez petit, de prouver que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_2(\varepsilon) = 1$. Pour cela, écrivons $2i\pi I_2(\varepsilon)$ sous la forme

$$2i\pi I_2(\varepsilon) = \int_{\gamma([-\delta, \delta])} \frac{2\varepsilon h}{z^2 - \varepsilon^2 h^2} dz = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{2\varepsilon h \gamma'(t)}{\gamma(t)^2 - \varepsilon^2 h^2} dt = \int_{-\delta/\varepsilon}^{\delta/\varepsilon} \frac{2h \gamma'(\varepsilon t)}{\varepsilon^{-2} \gamma(\varepsilon t)^2 - h^2} dt.$$

L'expression sous l'intégrale tend vers $\frac{2h}{t^2 - h^2}$ quand ε tend vers 0 et $t \in \mathbf{R}$. Par ailleurs, d'après le choix de δ , il existe $c > 0$ tel que $2\pi - c > \arg(h^2 \gamma(u)^{-2}) > c$, si $u \in [-\delta, \delta]$; on en déduit l'existence de $C > 0$ (avec $C = 1$, si $\cos c \leq 0$, et $C = |\sin c|$, si $\cos c \geq 0$) tel que $|\lambda \gamma(t)^2 - \mu h^2| \geq C \sup(|\lambda \gamma(t)^2|, |\mu h^2|)$, quels que soient $\mu, \lambda \in \mathbf{R}_+$. Comme $|\gamma(u)| \geq \frac{1}{2}|u|$, et comme il existe $M \geq 0$ tel que $|\gamma'(u)| \leq M$, si $u \in [-\delta, \delta]$, on peut majorer, en module, $\frac{2h \gamma'(\varepsilon t)}{\varepsilon^{-2} \gamma(\varepsilon t)^2 - h^2}$ sur $[-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon]$, par $\frac{2|h|M}{C \sup(t^2/4, |h|^2)}$, qui est une fonction sommable sur \mathbf{R} , indépendante de ε . On obtient donc, via le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2i\pi I_2(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2h}{t^2 - h^2} dt.$$

Finalement, en posant $h = \sigma + i\tau$, avec $\tau > 0$ par hypothèse, cette dernière intégrale devient.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t - h} - \frac{dt}{t + h} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t - \sigma) + i\tau}{(t - \sigma)^2 + \tau^2} - \frac{(t + \sigma) - i\tau}{(t + \sigma)^2 + \tau^2} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \log \frac{(t - \sigma)^2 + \tau^2}{(t + \sigma)^2 + \tau^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + i \left[\operatorname{artg} \frac{t - \sigma}{\tau} + \operatorname{artg} \frac{t + \sigma}{\tau} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 2i\pi, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. (On peut fabriquer (exercice) une démonstration de ce que $I_2(\varepsilon) \rightarrow 1$ en remarquant qu'au voisinage de 0, γ est le graphe d'une fonction, ce qui permet d'écrire $2i\pi I_2(\varepsilon)$ comme l'intégrale de $\frac{dz}{z}$ sur un contour C_ε ressemblant à un parallélogramme de sommets $\pm\delta \pm \varepsilon h$, privé des cotés verticaux (dont la longueur tend vers 0). La formule des résidus (th. VI.3.4) montre que l'intégrale sur C_ε est égale à $2i\pi$. On évite de cette manière les majorations ci-dessus.)

VI.3. La formule des résidus de Cauchy

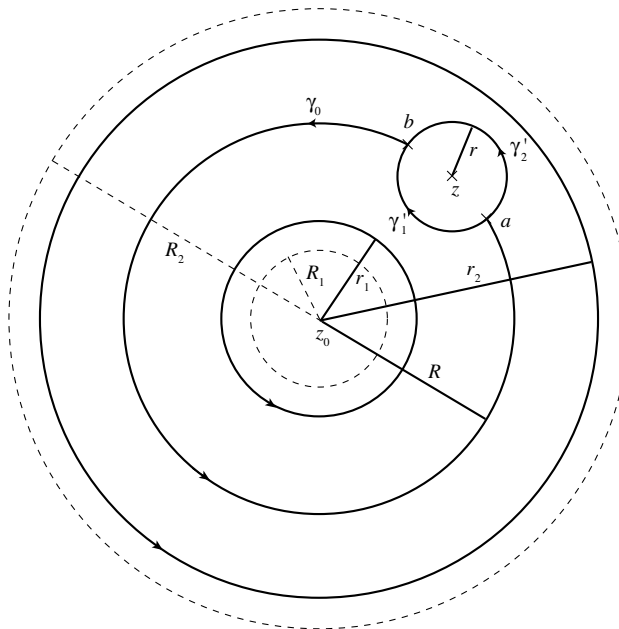
1. Fonctions holomorphes sur une couronne

Si $z_0 \in \mathbf{C}$ et si $0 \leq R_1 < R_2$, on note $C(z_0, R_1, R_2)$ la *couronne ouverte* des $z \in \mathbf{C}$, avec $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Si $R_1 = 0$, on obtient le *disque époinché* ouvert de centre z_0 et de rayon R_2 (i.e. $D(z_0, R_2) - \{z_0\}$).

Lemme VI.3.1. — *Si f est holomorphe sur la couronne $C(z_0, R_1, R_2)$, si $z \in C(z_0, R_1, R_2)$, et si $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$, alors*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

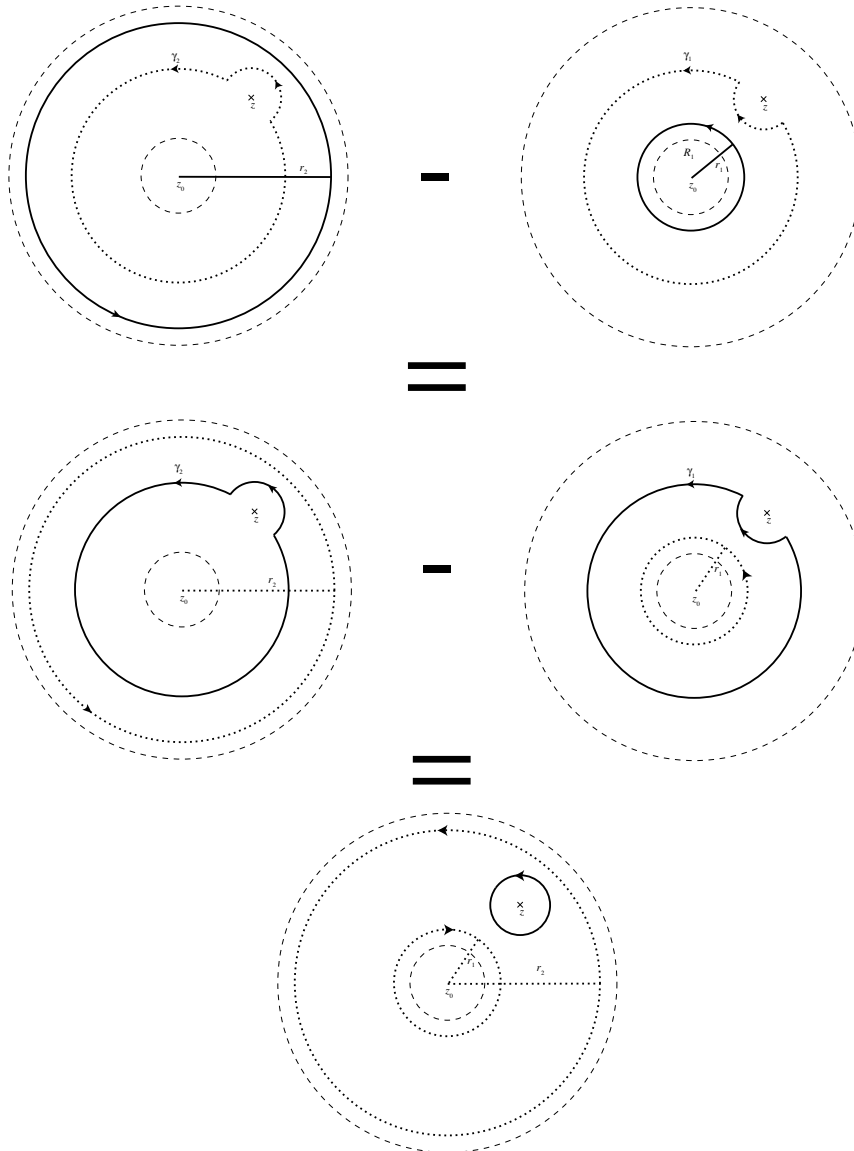
Démonstration. — Le lecteur est invité à suivre les arguments qui suivent⁽⁶⁾ sur un dessin.



Soit $r < \inf(r_2 - |z - z_0|, |z - z_0| - r_1)$ de telle sorte que $D(z, r) \subset C(z_0, r_1, r_2)$. Soit $R \in]|z - z_0| - r, |z - z_0| + r[$ de telle sorte que les cercles $C(z_0, R)$ et $C(z, r)$ s'intersectent en deux points a et b . Soit γ_0 l'arc du cercle $C(z_0, R)$ à l'extérieur de $D(z, r)$, parcouru dans le sens direct ; quitte à échanger les noms de a et b , c'est un chemin allant de b à a . Soit γ_1' (resp. γ_2') l'arc du cercle $C(z, r)$ à l'intérieur (resp. l'extérieur) de $D(z_0, R)$, parcouru dans le sens rétrograde (resp. direct) ; c'est un chemin allant de a à b . Si $i \in \{1, 2\}$, soit γ_i le lacet dans $C(z_0, r_1, r_2) - \{z\}$ obtenu en composant γ_0 , avec γ_i' ; c'est un lacet homotope⁽⁷⁾ dans $C(z_0, R_1, R_2) - \{z\}$ à $C(z_0, r_i)$. On a donc

⁽⁶⁾Il peut aussi préférer utiliser la forme générale de la formule de Stokes, dont on déduit directement que $\int_{C(z_0, r_i)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma_i} \frac{f(w)}{w-z} dw$, car f est holomorphe sur l'ouvert délimité par $C(z_0, r_i)$ et γ_i .

⁽⁷⁾C'est parfaitement évident sur un dessin, mais on peut aussi écrire une formule d'homotopie explicite. Par exemple, pour aller de γ_2 à $C(z_0, r_2)$, on paramètre γ_0 par $\gamma_0(t) = z_0 + R e^{2i\pi(t-\beta)}$, où β est choisit pour que $\gamma_0(t) = b$, et $t \in [0, \alpha]$, avec $\alpha < 1$ vérifiant $\gamma_0(\alpha) = a$, puis on paramètre γ_2' sous la forme $\gamma_2'(t) = z + r e^{2i\pi(\lambda t + \mu)}$, avec $t \in [\alpha, 1]$, ce qui nous fournit un paramétrage $t \mapsto \gamma_2(t)$, avec $t \in [0, 1]$, de γ_2 . Finalement, on paramètre $C(z_0, r_2)$ sous la forme $t \mapsto \delta(t) = z_0 + r_2 e^{2i\pi(t-\beta)}$, avec $t \in [0, 1]$, et on fabrique une homotopie $u(s, t)$ de γ_2 sur $C(z_0, r_2)$, en posant $u(s, t) = (1 - s)\gamma_2(t) + s\delta(t)$. Il reste à vérifier que cette homotopie a bien lieu dans $C(z_0, R_1, R_2) - \{z\}$, ce qui est évident sur un dessin (on s'est débrouillé pour que l'angle entre $\gamma_2(t) - z_0$ et $\delta(t) - z_0$ soit petit, et $u(s, t)$ parcourt le segment $[\gamma_2(t), \delta(t)]$ quand s varie de 0 à 1).



$$\begin{aligned} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \int_{\gamma'_2} \frac{f(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma'_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{C(z, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant la formule de Cauchy pour la fonction f , qui est holomorphe sur $D(z, r^-)$.

Corollaire VI.3.2. — Si f est holomorphe sur $C(z_0, R_1, R_2)$, il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ d'éléments de \mathbf{C} vérifiant

- (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge si $|z| < R_2$ et $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n z^n$ converge si $|z|^{-1} < R_1^{-1}$;
(ii) $f(z)$ est somme de la série (de Laurent) $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$, si $z \in C(z_0, R_1, R_2)$.
De plus, quels que soient $r \in]R_1, R_2[$ et $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} (w - z_0)^{-n-1} f(w) dw.$$

Démonstration. — Si $r, r' \in]R_1, R_2[$, les cercles $C(z_0, r)$ et $C(z_0, r')$ sont homotopes dans $C(z_0, R_1, R_2)$. Comme $(z - z_0)^{-n-1} f(z)$ est holomorphe dans $C(z_0, R_1, R_2)$, cela permet de montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} (z - z_0)^{-n-1} f(z) dz$ ne dépend pas du choix de $r \in]R_1, R_2[$; notons le a_n . Maintenant, d'après le lemme VI.3.1, si $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{w - z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}, & \text{si } |w - z_0| = r_2, \\ -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}, & \text{si } |w - z_0| = r_1. \end{cases}$$

On en déduit, en reportant les développements ci-dessus dans l'intégrale comme dans la démonstration de la prop. V.2.6, la convergence normale (pour la norme uniforme) de la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$ vers $f(z)$ sur la couronne $r_1 < |z - z_0| < r_2$. On conclut en faisant tendre r_1 vers R_1 et r_2 vers R_2 .

2. Fonctions holomorphes sur un disque époiné; résidus

Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , $z_0 \in \Omega$, et f holomorphe sur $\Omega - \{z_0\}$. Soit $r > 0$ tel que $D(z_0, r^-) \subset \Omega$. La fonction f est donc holomorphe sur le disque époiné $D(z_0, r^-) - \{z_0\}$ qui peut aussi être vu comme la couronne $C(z_0, 0, r)$. On peut donc lui appliquer les résultats du n° 1, et on en déduit l'existence d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de nombres complexes vérifiant les propriétés suivantes :

- la série $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ converge sur $D(z_0, r^-)$;
- la série $h(z) = \sum_{n \leq -1} a_n (z - z_0)^n$ converge, et définit une fonction holomorphe, sur $\mathbf{C} - \{z_0\}$;
- $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n$, quel que soit $z \in D(z_0, r^-) - \{z_0\}$.

La série $h(z)$ est la *partie singulière* de f en z_0 , et le coefficient a_{-1} de $(z - z_0)^{-1}$ est le *résidu* $\text{Res}(f, z_0)$ de f en z_0 .

On dit que f est *holomorphe*⁽⁸⁾ en z_0 , si $h = 0$. Plus généralement, on dit que f est *méromorphe* en z_0 , s'il existe $k \in \mathbf{Z}$, avec $a_n = 0$, si $n \leq k$. Si k est un entier ≥ 1 , on dit

⁽⁸⁾C'est un abus de langage, mais cela veut dire que la fonction f peut se prolonger par continuité en z_0 , et que la fonction obtenue est holomorphe sur $D(z_0, r^-)$.

que f a un pôle d'ordre k en z_0 , si $a_{-k} \neq 0$ et $a_n = 0$, quel que soit $n < -k$ ⁽⁹⁾. On dit que f a une singularité essentielle en z_0 si elle n'est pas méromorphe en z_0 .

On peut reformuler les définitions ci-dessus en terme de la valuation $v_{z_0}(f)$ de f en z_0 définie par

$$v_{z_0}(f) = \inf_{n \in \mathbf{Z}, a_n \neq 0} n \in \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}.$$

On a alors :

- $v_{z_0}(f) = -\infty \iff f$ a une singularité essentielle en z_0 ;
- $v_{z_0}(f) > -\infty \iff f$ est méromorphe en z_0 ;
- $v_{z_0}(f) = -k, k \in \mathbf{N} - \{0\} \iff f$ a un pôle d'ordre k en z_0 ;
- $v_{z_0}(f) \geq 0 \iff f$ est holomorphe en z_0 ;
- $v_{z_0}(f) = 0 \iff f$ est holomorphe et ne s'annule pas en z_0 ;
- $v_{z_0}(f) = k, k \in \mathbf{N} \iff f$ a un zéro d'ordre k en z_0 ;
- $v_{z_0}(f) = +\infty \iff f$ est nulle dans la composante connexe de z_0 dans Ω .

Dans les équivalences précédentes, la seule qui ne soit pas une reformulation de la définition est la dernière, qui est une reformulation du théorème des zéros isolés (th. V.1.8).

Si Ω est un ouvert de \mathbf{C} , on dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est *méromorphe* sur Ω , si f est méromorphe en tout point de Ω .

Pour un certain nombre d'applications, il est important de savoir calculer explicitement le résidu $\text{Res}(f, z_0)$ de f en z_0 . L'exercice ci-dessous fournit quelques recettes ⁽¹⁰⁾

Exercice VI.3.3. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} et $z_0 \in \Omega$.

- (i) Si f est holomorphe en z_0 , alors $\text{Res}(f, z_0) = 0$.
- (ii) Si $f = \frac{g}{h}$, où g et h sont holomorphes sur Ω , si $g(z_0) \neq 0$, et si h a un zéro simple en z_0 , alors $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.
- (iii) Si f a un pôle simple en z_0 , et si g est holomorphe en z_0 , alors $\text{Res}(gf, z_0) = g(z_0)\text{Res}(f, z_0)$.
- (iv) Si $k \geq 1$, et $f = (z - z_0)^{-k}g$, où g est holomorphe sur Ω , alors $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$.
- (v) Si f est méromorphe sur Ω , alors $\frac{f'}{f}$ est méromorphe sur Ω , avec des pôles simples aux pôles et zéros de f , et on a

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = v_{z_0}(f), \quad \text{quel que soit } z_0 \in \Omega.$$

⁽⁹⁾Une fonction est donc méromorphe si et seulement si elle est holomorphe ou a un pôle d'ordre k , avec $k \in \mathbf{N}$

⁽¹⁰⁾Si f a une singularité essentielle, il est en général impossible de trouver une expression « finie » du résidu. C'est une des raisons qui fait que certaines intégrales résistent à la méthode des résidus.

3. La formule des résidus

Théorème VI.3.4. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , F un ensemble fini de points de Ω , f une fonction holomorphe sur $\Omega - F$, et γ un lacet de Ω , contractile dans Ω , et ne rencontrant pas F . Alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum_{a \in F} I(\gamma, a) \text{Res}(f, a).$$

Démonstration. — Si $a \in F$, et si $r_a > 0$ est tel que $D(a, r_a^-)$ est inclus dans Ω et ne contient aucun autre point de F , alors il existe une suite $(c_{a,n})_{n \in \mathbf{Z}}$ d'éléments de \mathbf{C} , telle que $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{a,n} (z - a)^n$, si $z \in D(a, r_a^-)$. De plus, la série $\sum_{n \leq -2} c_{a,n} (z - a)^n$ définit une fonction holomorphe g_a dans $\mathbf{C} - \{a\}$, et g_a admet $G_a(z) = \sum_{n \leq -2} c_{a,n} \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ comme primitive sur $\mathbf{C} - \{a\}$. Soit alors $h = f - \sum_{a \in F} (g_a + \frac{c_{a,-1}}{z-a})$. Par construction, h est holomorphe sur $\Omega - F$, et a une singularité fictive en tous les points de F ; elle se prolonge donc, par continuité, en une fonction holomorphe sur Ω tout entier. On a alors

- $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} h(z) dz + \sum_{a \in F} \int_{\gamma} g_a(z) dz + \sum_{a \in F} c_{a,-1} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-a}$;
- $\int_{\gamma} h(z) dz = 0$ puisque h est holomorphe dans Ω et γ est contractile dans Ω ;
- $\int_{\gamma} g_a(z) dz = 0$, si $a \in F$, puisque g_a a une primitive sur $\Omega - \{a\}$ qui contient γ ;
- $c_{a,-1} = \text{Res}(f, a)$ et $\int_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi I(\gamma, a)$, par définition.

Ceci permet de conclure.

La formule des résidus permet de localiser les zéros d'une fonction holomorphe.

Corollaire VI.3.5. — Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ un ouvert, et soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Soit f holomorphe sur Ω . Si $C(z_0, r)$ ne contient aucun zéro de f , alors le nombre de zéros de f dans $D(z_0, r^-)$, comptés avec multiplicité, est égal à $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

Démonstration. — On sait (cf. (v) de l'ex. VI.3.3) que $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est méromorphe sur Ω , avec des pôles simples aux zéros de f , le résidu en chacun de ces pôles étant l'ordre du zéro de f . La formule des résidus permet de conclure.

CHAPITRE VII

SÉRIES DE DIRICHLET

Une série de Dirichlet générale est une expression de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, où les a_n sont des nombres complexes, et les λ_n sont des nombres complexes dont la partie réelle tend vers $+\infty$. (Si $\lambda_n = n - 1$ pour tout n , on retombe, modulo le changement de variable $e^{-s} = z$, sur le cas des séries entières (avec une indexation bizarre), ce qui permet de voir les séries de Dirichlet générales comme une généralisation des séries entières.) Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'au cas où $\lambda_n = \log n$, pour tout n , qui est le cas originellement considéré par Dirichlet, mais le cas général intervient naturellement quand, par exemple, on essaie de définir le déterminant d'un opérateur en dimension infinie, ce qui a de multiples applications en physique⁽¹⁾ et en mathématiques. Comme illustration de ce procédé « de zêta-régularisation », mentionnons la formule

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots = \sqrt{2\pi},$$

équivalente à $-\sum_{n=1}^{+\infty} \log n = -\frac{1}{2} \log 2\pi$, dans laquelle le membre de gauche s'interprète comme la dérivée en 0 de la fonction ζ définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, si $\operatorname{Re}(s) > 1$, et prolongée analytiquement à $\mathbf{C} - \{1\}$.

VII.1. Séries de Dirichlet

1. Abscisse de convergence absolue

On appelle *série de Dirichlet* une série de la forme $L(\mathbf{a}, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$, où $s \in \mathbf{C}$ et $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres complexes (et $n^{-s} = \exp(-s \log n)$, où $\log n \in \mathbf{R}_+$). Une série de Dirichlet peut ne converger pour aucune valeur de s , mais si elle converge pour s_0 , on a en particulier, $a_n n^{-s_0} \rightarrow 0$, et donc $|a_n| = o(n^{\operatorname{Re}(s_0)})$. Réciproquement, si $|a_n| = O(n^\alpha)$, pour un certain $\alpha \in \mathbf{R}$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ converge normalement sur

⁽¹⁾Les fréquences d'une membrane vibrante sont les valeurs propres du laplacien sur l'ouvert de \mathbf{C} représentant cette membrane. La *fonction zêta du laplacien* $\zeta_\Delta(s) = \sum \lambda^{-s}$, où la somme porte sur les valeurs propres non nulles, encode des relations entre ces fréquences et la géométrie de la surface. Le déterminant du laplacien est $\exp(-\zeta'_\Delta(0))$; il intervient par exemple dans des questions de renormalisation.

tout demi-plan de la forme $\operatorname{Re}(s) > \alpha + 1 + \delta$, avec $\delta > 0$; elle définit donc une fonction holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \alpha + 1$. De même, si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$ converge absolument pour $s = s_0$, alors elle converge normalement sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s - s_0) \geq 0$, puisque $|a_n n^{-s}| \leq |a_n n^{-s_0}|$ sur ce demi-plan; elle définit donc une fonction holomorphe sur le demi-plan ouvert $\operatorname{Re}(s - s_0) > 0$, qui se prolonge par continuité au demi-plan fermé $\operatorname{Re}(s - s_0) \geq 0$.

La discussion précédente amène naturellement à définir les éléments suivants de $\overline{\mathbf{R}}$:

- $\sigma_{\text{conv}} = \inf\{\operatorname{Re}(s), L(\mathbf{a}, s) \text{ converge}\}$ *abscisse de convergence*;
- $\sigma_{\text{abs}} = \inf\{\operatorname{Re}(s), L(\mathbf{a}, s) \text{ converge absolument}\}$ *abscisse de convergence absolue*;
- $\sigma_{\text{hol}} = \inf\{\sigma \in \mathbf{R}, L(\mathbf{a}, s) \text{ admet un prolongement holomorphe sur } \operatorname{Re}(s) > \sigma\}$.
- $\tau = \inf\{\alpha \in \mathbf{R}, a_n = O(n^\alpha)\}$.

Le nombre τ n'a pas de signification particulière, mais des quantités précédentes, c'est la plus facile à calculer; de plus la discussion ci-dessus nous fournit les encadrements :

$$\tau \leq \sigma_{\text{conv}} \leq \sigma_{\text{abs}} \leq \tau + 1.$$

Par ailleurs, contrairement au cas des séries entières (cf. (i) de la rem. V.2.8), on n'a pas forcément $\sigma_{\text{hol}} = \sigma_{\text{abs}}$, comme le montre l'exemple des fonctions L de Dirichlet (th. VII.4.2). Pour beaucoup de séries de Dirichlet issues de la théorie des nombres ou de la physique théorique, on conjecture que $\sigma_{\text{hol}} = -\infty$ (i.e. il existe un prolongement analytique à tout le plan complexe), mais ceci est un petit miracle indiquant des symétries cachées qui restent fort mystérieuses.

On suppose dans tout ce qui suit que les séries de Dirichlet que l'on considère convergent quelque part (i.e. $\sigma_{\text{abs}} \neq +\infty$), le cas contraire n'ayant qu'un intérêt limité... On peut alors retrouver les a_n à partir de la fonction $L(\mathbf{a}, s)$ (en effet, $a_1 = \lim_{s \rightarrow +\infty} L(\mathbf{a}, s)$, $a_2 = \lim_{s \rightarrow +\infty} 2^s(L(\mathbf{a}, s) - a_1)$, etc.).

On remarquera que le produit de deux séries de Dirichlet $L(\mathbf{a}, s)L(\mathbf{b}, s)$ est encore une série de Dirichlet $L(\mathbf{c}, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{n^s}$, où $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$. Cette formule, qui fait intervenir la factorisation des entiers, est largement responsable de l'intérêt des séries de Dirichlet pour des questions d'arithmétique.

Théorème VII.1.1. — (Landau) Soit $L(\mathbf{a}, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet à coefficients positifs (i.e. $a_n \in \mathbf{R}_+$, quel que soit $n \geq 1$). Alors σ_{abs} n'a aucun voisinage dans \mathbf{C} sur lequel $L(\mathbf{a}, s)$ admet un prolongement analytique⁽²⁾.

Corollaire VII.1.2. — Si $L(\mathbf{a}, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ est une série de Dirichlet à coefficients positifs, alors $\sigma_{\text{hol}} = \sigma_{\text{abs}}$.

Démonstration. — Le corollaire est immédiat. Passons à la démonstration du théorème. Posons $\sigma = \sigma_{\text{abs}}$, et supposons, par l'absurde, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $L(\mathbf{a}, s)$ admette un

⁽²⁾Il arrive que $L(\mathbf{a}, s)$ admette un prolongement méromorphe comme le montre le cas de la fonction zêta de Riemann (cf. th. VII.3.4), mais alors σ_{abs} est un pôle de ce prolongement.

prolongement analytique au disque $D(\sigma, 3\varepsilon^-)$. Alors $L(\mathbf{a}, s)$ est holomorphe sur l'ouvert Ω réunion de $D(\sigma, 3\varepsilon^-)$ et du demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma$. Comme Ω contient $D(\sigma + \varepsilon, 3\varepsilon^-)$, $L(\mathbf{a}, s)$ est somme de sa série de Taylor en $\sigma + \varepsilon$ sur ce disque, et en particulier, on a $L(\mathbf{a}, \sigma - \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{L^{(k)}(\mathbf{a}, \sigma + \varepsilon)}{k!} (-2\varepsilon)^k$. Par ailleurs, comme $\sigma + \varepsilon$ est dans le demi-plan de convergence de $L(\mathbf{a}, s)$, on peut, d'après le th. V.2.11, calculer $L^{(k)}(\mathbf{a}, \sigma + \varepsilon)$ en dérivant terme à terme la série de Dirichlet. On obtient donc

$$L(\mathbf{a}, \sigma - \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} L^{(k)}(\mathbf{a}, \sigma + \varepsilon) \frac{(-2\varepsilon)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n (-\log n)^k}{n^{\sigma+\varepsilon}} \right) \frac{(-2\varepsilon)^k}{k!}.$$

En faisant rentrer le $\frac{(-2\varepsilon)^k}{k!}$ à l'intérieur de la parenthèse, on obtient une série double à termes positifs, ce qui permet d'échanger l'ordre des sommations, et d'obtenir :

$$L(\mathbf{a}, \sigma - \varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma+\varepsilon}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2\varepsilon \log n)^k}{k!} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma+\varepsilon}} n^{2\varepsilon} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\sigma-\varepsilon}}.$$

On en déduit que $L(\mathbf{a}, s)$ converge en $\sigma - \varepsilon$, ce qui est contraire à la définition de σ . Ceci permet de conclure.

VII.2. Séries de Dirichlet et transformée de Mellin

1. La fonction Γ dans le plan complexe

La fonction Γ d'Euler a été définie (cf. ex. B.2.14) sur \mathbf{R}_+^* par la formule $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$. Nous nous proposons de l'étendre en une fonction méromorphe sur \mathbf{C} tout entier. On trouvera une autre approche dans l'ex. B.3.11 ; l'approche ci-dessous montre directement que Γ ne s'annule pas, ce qui peut aussi se déduire de la formule des compléments (ex. B.3.12).

On rappelle que la *constante d'Euler* γ est la limite de $-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, quand $n \rightarrow +\infty$.

Théorème VII.2.1. — (i) *Le produit*

$$f(z) = z e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(\left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \right)$$

est uniformément convergent sur tout compact de \mathbf{C} , et coïncide avec $\frac{1}{\Gamma}$ sur \mathbf{R}_+^ .*

(ii) *La fonction Γ complexe définie par $\Gamma(z) = \frac{1}{f(z)}$ est méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors de pôles simples aux entiers négatifs, de résidu $\frac{(-1)^n}{n!}$ en $-n$, si $n \in \mathbf{N}$. De plus, on a $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, quel que soit $z \in \mathbf{C} - (-\mathbf{N})$.*

Démonstration. — La fonction $h(z) = z^{-2}((1+z)e^{-z} - 1)$ est holomorphe sur \mathbf{C} , et donc est bornée sur tout compact. En particulier, il existe M tel que $|(1+z)e^{-z} - 1| \leq M|z|^2$, si $|z| \leq 1$. Maintenant, si K est compact, il existe $R(K)$ tel que $|z| \leq R(K)$, quel que soit $z \in K$, et on a $|(1 + \frac{z}{k})e^{-z/k} - 1| \leq \frac{MR(K)^2}{k^2}$, si $k \geq R(K)$ et $z \in K$. On en déduit la

convergence uniforme du produit sur \mathbf{K} , et le th. V.2.12 montre que f est une fonction holomorphe sur \mathbf{C} avec des zéros simples en 0 et les $-k$, pour $k \in \mathbf{N} - \{0\}$. En passant à l'inverse, cela montre que Γ est méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors de pôles simples aux entiers négatifs.

Maintenant, si $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a, d'après la formule de Gauss (cf. ex. B.2.14),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x(x+1) \cdots (x+n)}{n! n^x} = x \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x \log n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \\ &= x e^{\gamma x} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-(1+\cdots+1/n)x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) \right) = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-x/k} \right), \end{aligned}$$

ce qui permet de montrer que f coïncide avec $\frac{1}{\Gamma}$ sur \mathbf{R}_+^* .

Finalement, les fonctions $\Gamma(z+1)$ et $z\Gamma(z)$ sont holomorphes sur $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$, et coïncident sur \mathbf{R}_+^* ; elle coïncident donc sur $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$, d'après le th. des zéros isolés. Comme $\Gamma(1) = 1$, cela permet de montrer, par récurrence sur n , que l'on a $\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$. Ceci termine la démonstration du théorème.

Exercice VII.2.2. — Établir la formule de multiplication : si $z \in \mathbf{C} - (-\mathbf{N})$, alors

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{2}\right) = 2^{1-z}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(z).$$

2. Une formule intégrale pour les séries de Dirichlet

Le changement de variable⁽³⁾ $u = \lambda t$ montre que, si $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, et si $\operatorname{Re}(s) > 0$, alors

$$\frac{1}{\lambda^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^s \frac{dt}{t}.$$

Cette simple remarque va se révéler extrêmement utile pour étudier le prolongement analytique de certaines séries de Dirichlet.

Soit $L(\mathbf{a}, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet convergeant quelque part.

Lemme VII.2.3. — (i) La série entière $F_{\mathbf{a}}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ est de rayon de convergence au moins 1.

(ii) $f_{\mathbf{a}}(t) = F_{\mathbf{a}}(e^{-t})$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* et à décroissance rapide à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées.

Démonstration. — Il existe $\tau \in \mathbf{R}$ tel que $a_n = O(n^\tau)$; on en déduit le (i) et le fait que $F_{\mathbf{a}}(z) = O(|z|)$ au voisinage de 0. Ceci implique que $f_{\mathbf{a}}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* et $O(e^{-t})$ au voisinage de $+\infty$ (et donc à décroissance rapide, ce qui, pour une fonction $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$, signifie, rappelons le, que $t^N f(t)$ est bornée quand $t \rightarrow +\infty$, pour tout $N \in \mathbf{N}$). Pour passer

⁽³⁾Une raison pour faire apparaître la mesure $\frac{dt}{t}$ est qu'elle est invariante par ce type de changement de variable de même que dt est invariante par un changement de variable $u = t + a$.

au cas d'une dérivée d'ordre quelconque de $f_{\mathbf{a}}$, il suffit de constater que $f_{\mathbf{a}}^{(k)} = f_{\mathbf{a}^{(k)}}$, où $\mathbf{a}^{(k)} = ((-n)^k a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Lemme VII.2.4. — Si $\operatorname{Re}(s) > \sup(\sigma_{\text{abs}}, 0)$, la fonction $f_{\mathbf{a}}(t)t^{s-1}$ est sommable sur \mathbf{R}_+^* , et on a

$$L(\mathbf{a}, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f_{\mathbf{a}}(t)t^s \frac{dt}{t}.$$

Démonstration. — Si $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \sup(\sigma_{\text{abs}}, 0)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |f_{\mathbf{a}}(t)t^{s-1}| dt &\leq \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| e^{-nt} \right) t^\sigma \frac{dt}{t} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^\sigma \frac{dt}{t} = \Gamma(\sigma) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < +\infty, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f_{\mathbf{a}}(t)t^{s-1}$ est sommable sur \mathbf{R}_+^* et que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nt} t^{s-1}$ converge dans $L^1(\mathbf{R}_+^*)$ vers $f_{\mathbf{a}}(t)t^{s-1}$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} f_{\mathbf{a}}(t)t^{s-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} a_n e^{-nt} t^{s-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\Gamma(s)}{n^s}.$$

Ceci permet de conclure.

Remarque VII.2.5. — (i) Si $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{C}$, la fonction $s \mapsto \operatorname{Mel}(f, s) = \int_0^{+\infty} f(t)t^s \frac{dt}{t}$ est la transformée de Mellin de f . Le changement de variable $t = e^u$ montre que, sur une droite verticale $\operatorname{Re}(s) = \sigma$, la transformée de Mellin coïncide, à homothétie près, avec la transformée de Fourier de $f(e^u)e^{\sigma u}$, ce qui permet de déduire un grand nombre de ses propriétés de celles de la transformée de Fourier.

(ii) La fonction $f_{\mathbf{a}}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-nt}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* , mais n'a aucune raison, a priori, d'être très sympathique en 0. De fait, les propriétés de prolongement analytique de la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ sont étroitement liées à la régularité de $f_{\mathbf{a}}$ en 0. La prop. VII.2.6 ci-dessous donne une illustration de ce phénomène.

3. Prolongement analytique de séries de Dirichlet

Proposition VII.2.6. — Soit f une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ , à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées.

(i) La fonction $M(f, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t)t^s \frac{dt}{t}$, définie pour $\operatorname{Re}(s) > 0$, admet un prolongement holomorphe à \mathbf{C} tout entier⁽⁴⁾

(ii) Si $k \in \mathbf{N}$, alors $M(f, -k) = (-1)^k f^{(k)}(0)$.

⁽⁴⁾La distribution $f \mapsto M(f, s)$ que ceci permet de définir, est une *partie finie de Hadamard*. Le (ii) montre que si $k \in \mathbf{N}$, alors $M(\cdot, -k)$ est la dérivée k -ième de la masse de Dirac en 0.

Démonstration. — Sur la bande $b > \operatorname{Re}(s) > a > 0$, on a $|f(t)t^{s-1}| \leq |f(t) \sup(t^{a-1}, t^{b-1})|$. Or $\int_0^{+\infty} |f(t) \sup(t^{a-1}, t^{b-1})| dt < +\infty$, grâce à la décroissance rapide de f à l'infini, et à l'hypothèse $a > 0$ pour ce qui se passe au voisinage de 0. On est sous les conditions d'application du th. V.2.13, ce qui permet de montrer que $M(f, s)$ est holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$.

Par ailleurs, une intégration par partie nous donne $M(f, s) = -M(f', s+1)$, si $\operatorname{Re}(s) > 0$. On a donc, plus généralement, $M(f, s) = (-1)^n M(f^{(n)}, s+n)$, si $\operatorname{Re}(s) > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. En appliquant ce qui précède à $f^{(n)}$, au lieu de f , on en déduit que $(-1)^n M(f^{(n)}, s+n)$ est holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > -n$. Comme cette fonction coïncide avec $M(f, s)$ sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$, cela prouve que $M(f, s)$ admet un prolongement holomorphe au demi-plan $\operatorname{Re}(s) > -n$, et comme ceci est vrai quel que soit $n \in \mathbf{N}$, cela permet de démontrer le (i).

Le (ii) suit de ce que $M(f, -k) = (-1)^{k+1} M(f^{(k+1)}, 1)$ est aussi égal à

$$(-1)^{k+1} \int_0^{+\infty} f^{(k+1)}(t) dt = (-1)^{k+1} [f^{(k)}]_0^{+\infty} = (-1)^k f^{(k)}(0).$$

Corollaire VII.2.7. — Si $f_{\mathbf{a}}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ , alors $L(\mathbf{a}, s)$ admet un prolongement holomorphe à \mathbf{C} tout entier. De plus, si $k \in \mathbf{N}$, on a $L(\mathbf{a}, -k) = (-1)^k f_{\mathbf{a}}^{(k)}(0)$.

Démonstration. — C'est une conséquence directe de la prop. VII.2.6 puisque $f_{\mathbf{a}}$ est à décroissance rapide à l'infini, ainsi que toutes ses dérivées (lemme VII.2.3).

Remarque VII.2.8. — La formule $L(\mathbf{a}, -k) = (-1)^k f_{\mathbf{a}}^{(k)}(0)$ montre que l'on obtient la même valeur pour la somme de la série divergente $\sum_{n \geq 1} a_n n^k$, en prenant la valeur de $L(\mathbf{a}, s)$ en $-k$ ou la limite quand $x \rightarrow 1^-$ de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^k x^n$.

VII.3. La fonction zêta de Riemann

1. Séries de Dirichlet attachées à des fonctions multiplicatives

On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers.

Une fonction $n \mapsto a(n)$ de $\mathbf{N} - \{0\}$ dans \mathbf{C} est *multiplicative*, si $a(1) = 1$, et si $a(nm) = a(n)a(m)$ pour tous n et m premiers entre eux; elle est *strictement multiplicative*, si $a(1) = 1$, et $a(nm) = a(n)a(m)$, quels que soient $m, n \geq 1$. On remarquera qu'une fonction strictement multiplicative est déterminée par les $a(p)$, pour $p \in \mathcal{P}$ puisque, si $n = \prod_{i \in \mathbf{I}} p_i^{k_i}$ est la décomposition de n en facteurs premiers, on a $a(n) = \prod_{i \in \mathbf{I}} a(p_i)^{k_i}$. Par contre, pour une fonction multiplicative, on a besoin de connaître les $a(p^k)$, pour $p \in \mathcal{P}$ et $k \geq 1$. On a alors $a(n) = \prod_{i \in \mathbf{I}} a(p_i^{k_i})$

Proposition VII.3.1. — Si $n \mapsto a(n)$ est multiplicative, et si $L(a, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{n^s}$ converge quelque part, alors pour tout s dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \sigma_{\text{abs}}$, on a :

(i) $1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \dots$ est absolument convergent quel que soit $p \in \mathcal{P}$;

(ii) le produit $\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \dots)$ converge uniformément sur tout demi-plan $\text{Re}(s) > c > \sigma_{\text{abs}}$, et sa valeur est $L(a, s)$.

Démonstration. — Soit $c > \sigma_{\text{abs}}$. Si $\text{Re}(s) > c$, on a

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \left| \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right| \leq \sum_{p \in \mathcal{P}} \left(\left| \frac{a(p)}{p^s} \right| + \left| \frac{a(p^2)}{p^{2s}} \right| + \dots \right) \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{|a(n)|}{n^c} < +\infty.$$

On en déduit le (i) et, en utilisant le th. V.2.12 (ou plutôt la démonstration du (i) de ce théorème), la convergence uniforme du produit sur $\text{Re}(s) > c$.

Si $X \in \mathbf{R}_+$, soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des nombres premiers $\leq X$, et soit $I(X)$ l'ensemble des entiers dont tous les diviseurs premiers sont dans $\mathcal{P}(X)$. Si $k \in \mathbf{N}$, soit $I(X, k)$ l'ensemble des entiers de la forme $\prod_{p \in \mathcal{P}(X)} p^{k_p}$, avec $0 \leq k_p \leq k$. L'ensemble $I(X, k)$ est donc un ensemble fini. Par ailleurs, la multiplicativité de $n \mapsto a(n)$ fait que l'on a

$$\prod_{p \in \mathcal{P}(X)} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \dots + \frac{a(p^k)}{p^{ks}} \right) = \sum_{n \in I(X, k)} \frac{a(n)}{n^s}.$$

Comme toutes les séries qui interviennent sont majorées, en valeur absolue, par la série sommable $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{a(n)}{n^s} \right|$, le théorème de convergence dominée pour les séries montre, en faisant tendre k vers $+\infty$, que

$$\prod_{p \in \mathcal{P}(X)} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \sum_{n \in I(X)} \frac{a(n)}{n^s},$$

puis, en faisant tendre X vers $+\infty$, que

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{a(n)}{n^s},$$

ce que l'on cherchait à établir.

Remarque VII.3.2. — (i) Le facteur $1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \dots$ du produit est le *facteur d'Euler en p* de la fonction $L(a, s)$, et la formule $L(a, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{a(p)}{p^s} + \frac{a(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)$ est la *décomposition de $L(a, s)$ en produit de facteurs d'Euler* (ou en *produit eulérien*).

(ii) Si a est strictement multiplicative, les facteurs d'Euler sont donnés par des séries géométriques et on a $L(a, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - a(p)p^{-s}}$.

2. Prolongement analytique de la fonction ζ

La série de Dirichlet $L(\mathbf{1}, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ admet 1 comme abscisse de convergence absolue (et comme abscisse de convergence puisqu'elle est à coefficients positifs (cor. VII.1.2)). De plus $n \mapsto 1$ est on ne peut plus strictement multiplicative; on déduit donc de la théorie générale le résultat suivant (dû à Euler).

Proposition VII.3.3. — Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$, et le produit est uniformément convergent sur tout demi-plan $\operatorname{Re}(s) > c > 1$.

Théorème VII.3.4. — Il existe une unique fonction, notée ζ (fonction zêta de Riemann), vérifiant :

- ζ est méromorphe sur \mathbf{C} tout entier, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$, de résidu 1 ;
- $\zeta(s) = L(\mathbf{1}, s)$, si $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Démonstration. — L'unicité est une conséquence de l'unicité du prolongement analytique (cor. V.1.9). Si $f_1(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{e^t-1}$ et si $g(t) = t f_1(t)$, on déduit du lemme VII.2.4 que, quel que soit s , avec $\operatorname{Re}(s) > 1$,

$$L(\mathbf{1}, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f_1(t) t^s \frac{dt}{t} = \frac{1}{(s-1)\Gamma(s-1)} \int_0^{+\infty} t f_1(t) t^{s-1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{s-1} M(g, s-1).$$

Comme $g(t)$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* , holomorphe au voisinage de 0 (et donc \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+), et à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées, la prop. VII.2.6 s'applique. On en déduit que $M(g, s)$ a un prolongement analytique à \mathbf{C} tout entier, avec $M(g, 0) = g(0) = 1$. Le résultat s'en déduit.

Remarque VII.3.5. — Si s est réel > 1 , on a $\log \zeta(s) = -\sum_{p \in \mathcal{P}} \log(1-p^{-s})$ d'après la prop. VII.3.3. Or $-\log(1-p^{-s}) \sim p^{-s}$, et l'existence d'un pôle de ζ en $s = 1$ se traduit par le fait que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \sum_{p \in \mathcal{P}} p^{-s} = +\infty$. Il en résulte que la somme des inverses des nombres premiers diverge (résultat dû à Euler (1737)) ; en particulier, ceci prouve que l'ensemble des nombres premiers est infini (résultat remontant à l'antiquité), mais en dit un peu plus sur leur répartition que la preuve des grecs.

Exercice VII.3.6. — Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ le développement de Taylor⁽⁵⁾ de $g(t) = \frac{t}{e^t-1}$ en 0.

- (i) Calculer $g(t) - g(-t)$. En déduire $B_{2k+1} = 0$, si $k \geq 1$.
- (ii) Montrer que $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$, si $n \in \mathbf{N}$. En déduire que ζ prend des valeurs rationnelles aux entiers⁽⁶⁾ négatifs, et a des zéros en les entiers pairs < 0 .

⁽⁵⁾Les B_n sont des nombres rationnels, appelés nombres de Bernoulli, et qu'on retrouve dans toutes les branches des mathématiques. On a en particulier

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{-1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = \frac{-1}{30}, \quad \dots, \quad B_{12} = \frac{-691}{2730}, \dots$$

Un test presque infaillible pour savoir si une suite de nombres a un rapport avec les nombres de Bernoulli est de regarder si 691 apparaît dans les premiers termes de cette suite.

⁽⁶⁾Les valeurs aux entiers de la fonction zêta, ou plus généralement des fonctions L de la géométrie arithmétique, recellent une quantité impressionnante d'informations arithmétiques. Kummer fut l'un des premiers à exploiter cette information, ce qui lui a permis de montrer (1852) que, si p est un nombre premier ≥ 3 ne divisant pas le numérateur de $\zeta(-1)$, $\zeta(-3)$, \dots , $\zeta(2-p)$, alors l'équation $a^p + b^p = c^p$ n'a pas de solution en nombres entiers avec $abc \neq 0$ (i.e. le théorème de Fermat est vrai pour un tel p (dit *régulier*)). Jusqu'à 100, les seuls nombres premiers irréguliers sont 37, 59 et 67.

(iii) Montrer que $g(z) - \frac{2i\pi}{z-2i\pi} + \frac{2i\pi}{z+2i\pi}$ est holomorphe sur $D(0, (4\pi)^-)$. En déduire des équivalents de $\frac{B_{2n}}{(2n)!}$ et de $\zeta(1-2n)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

3. Équation fonctionnelle de la fonction zêta

Soit $\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) \zeta(s)$; c'est une fonction méromorphe sur \mathbf{C} puisque toutes les fonctions la composant le sont.

Théorème VII.3.7. — (Riemann, 1858)

(i) La fonction ξ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$, a des pôles simples en $s = 0$ et $s = 1$ de résidus respectifs -1 et 1 , et vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

(ii) La fonction ζ vérifie l'équation fonctionnelle⁽⁷⁾

$$\zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi s}{2} \cdot \zeta(1-s).$$

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence du (i) et des formules (ex. VII.2.2 et B.3.12)

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(s), \quad \text{et} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Passons à la démonstration du (i). Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_n = 1$ si n est un carré et $a_n = 0$ si n n'est pas un carré. On a donc $L(\mathbf{a}, s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2s}} = \zeta(2s)$, si $\text{Re}(s) > \frac{1}{2}$. On en déduit, en utilisant le lemme VII.2.4, que

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \int_0^{+\infty} f_{\mathbf{a}}(t) t^{s/2} \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \xi(s) = \int_0^{+\infty} f_{\mathbf{a}}(\sqrt{\pi}t) t^{s/2} \frac{dt}{t}, \quad \text{si } \text{Re}(s) > 1.$$

Or $f_{\mathbf{a}}(\sqrt{\pi}t) = \frac{1}{2}(g(t) - 1)$, où $g(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}$. Maintenant, la transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ est $e^{-\pi x^2}$ (cf. ex. B.2.21 et B.3.18), et donc celle de $x \mapsto e^{-\pi t x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi t^{-1} x^2}$.

On en déduit, en utilisant la formule de Poisson que pour $x \mapsto e^{-\pi t x^2}$ que l'on a

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\pi t^{-1} n^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} g(t^{-1}).$$

Ceci permet, en coupant en 1 l'intégrale $\int_0^{+\infty} (g(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t} = 2\xi(s)$, puis en faisant le changement de variable $t \mapsto t^{-1}$ sur $[0, 1]$, d'obtenir :

$$\begin{aligned} 2\xi(s) &= \int_1^{+\infty} (g(t) - 1) t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} (t^{1/2} g(t) - 1) t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \left(\int_1^{+\infty} (g(t) - 1) (t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t} \right) - \left(\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s} \right). \end{aligned}$$

⁽⁷⁾Cette équation fonctionnelle avait été conjecturée par Euler (1749) qui se basait sur ses calculs de ζ en les entiers.

Maintenant, on a $|(t^{s/2} + t^{(1-s)/2})| \leq 2t^a$, si $t \geq 1$ et $1 - 2a < \operatorname{Re}(s) < 2a$, et comme la fonction $t^a(g(t) - 1)$ est sommable sur $[1, +\infty[$ car à décroissance rapide à l'infini, il résulte du th. V.2.13 que $s \mapsto G(s) = \int_1^{+\infty} (g(t) - 1)(t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t}$ est une fonction holomorphe sur la bande $1 - 2a < \operatorname{Re}(s) < 2a$, pour tout $a \geq 1$, et donc aussi sur \mathbf{C} tout entier. La fonction $G(s) - \left(\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s}\right)$ est donc une fonction méromorphe sur \mathbf{C} qui coïncide avec $2\xi(s)$ sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 0$, et donc sur \mathbf{C} tout entier par unicité du prolongement analytique. Il en résulte que ξ est holomorphe en dehors des pôles de $\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s}$, à savoir 0 et 1, puisque G est holomorphe sur \mathbf{C} tout entier. De plus, ces pôles sont simples et les résidus de ξ en ces pôles sont ceux de $-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s}\right)$, c'est-à-dire -1 (en 0) et -1 (en 1). Enfin, l'expression ci-dessus étant symétrique en s et $1 - s$, on a $\xi(s) = \xi(1 - s)$, ce qui permet de conclure.

4. Les zéros de la fonction ζ

Le théorème VII.3.7 permet une bonne localisation des zéros de la fonction ζ dans le plan complexe.

Corollaire VII.3.8. — *Les seuls zéros de la fonction ζ qui ne sont pas dans la bande verticale $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ sont des zéros simples aux entiers pairs < 0 .*

Démonstration. — $\zeta(s)$ est donnée (prop. VII.3.3) par le produit absolument convergent $\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$. Comme aucun des termes du produit ne s'annule sur ce demi-plan, la fonction ζ ne s'annule pas sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$. D'autre part, si $\operatorname{Re}(s) < 0$, on a $\Gamma(1 - s) \neq 0$, et, d'après ce qui précède, $\zeta(1 - s) \neq 0$. L'équation fonctionnelle du th. VII.3.7 montre donc que les zéros de ζ sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) < 0$ sont les mêmes que ceux de $\sin \frac{\pi s}{2}$. Ceci permet de conclure.

On appelle *zéros triviaux* les zéros aux entiers pairs < 0 . La *bande critique* est la bande verticale $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$; c'est un monde mystérieux, où il est difficile de voir clair. Riemann, à qui on doit la démonstration ci-dessus de l'équation fonctionnelle de la fonction ζ a, le premier (en 1858), dans un mémoire qui est un des grands classiques des mathématiques, montré comment la répartition des zéros dans cette bande critique est reliée à la répartition des nombres premiers (cf. annexe A). Ce mémoire contient aussi *l'hypothèse de Riemann*, toujours non résolue à ce jour, et dont la tête est mise à prix pour un million de dollar, selon laquelle *tous les zéros de ζ dans la bande critique sont sur la droite $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$.*

VII.4. Fonctions L de Dirichlet

1. Caractères de Dirichlet et Fonctions L de Dirichlet

Si D est un entier, un *caractère de Dirichlet modulo D* est un morphisme de groupes $\chi : (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$. L'image d'un caractère de Dirichlet est un sous-groupe fini de \mathbf{C}^* ,

et donc est incluse dans le groupe des racines de l'unité. On note $\mathbf{1}_D$ le *caractère trivial*, défini par $\mathbf{1}_D(a) = 1$, quel que soit $a \in (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$.

Si χ est un caractère de Dirichlet modulo D , on considère aussi souvent χ comme une fonction périodique sur \mathbf{Z} de période D , en composant χ avec la projection naturelle de \mathbf{Z} sur $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$, et en étendant χ par 0 sur les entiers non premiers à D . La fonction $\chi \mapsto \chi(n)$ est alors strictement multiplicative : en effet, si m et n sont premiers à D , alors $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ par multiplicativité de la réduction modulo D et celle de χ , tandis que si m ou n n'est pas premier à D , alors mn non plus, et on a $\chi(mn) = 0 = \chi(m)\chi(n)$. La *fonction L de Dirichlet* attachée à χ est alors la série de Dirichlet $L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$. Comme $|\chi(n)| = 1$, si $(n, D) = 1$, l'abscisse de convergence absolue de $L(\chi, s)$ est 1, et on a la proposition suivante.

Proposition VII.4.1. — Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, alors $L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$, et le produit est uniformément convergent sur tout demi-plan de la forme $\operatorname{Re}(s) > c > 1$.

Démonstration. — Cela suit juste de la théorie générale (cf. prop. VII.3.1).

Théorème VII.4.2. — Si χ est un caractère de Dirichlet modulo D non trivial, alors $L(\chi, s)$ admet un prolongement analytique à \mathbf{C} tout entier. De plus, $L(\chi, s) = M(f_\chi, s)$, où $f_\chi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{C}$ est donnée par la formule

$$f_\chi(t) = \frac{\sum_{b=1}^D \chi(b)e^{-bt}}{1 - e^{Dt}}.$$

Démonstration. — Il résulte du lemme VII.2.4, que $L(\chi, s) = M(f, s)$, où f est définie par $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n)e^{-nt}$. Or on peut écrire n sous la forme $n = kD + b$, avec $k \in \mathbf{N}$ et $b \in \{1, \dots, D\}$, et on a $\chi(b + kD) = \chi(b)$, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $b \in \{1, \dots, D\}$. Ceci nous donne

$$f(t) = \sum_{b=1}^D \sum_{k=0}^{+\infty} \chi(b + kD)e^{-(kD+b)t} = \sum_{b=1}^D \chi(b)e^{-bt} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kDt} \right) = \sum_{b=1}^D \chi(b) \frac{e^{-bt}}{1 - e^{Dt}} = f_\chi(t).$$

Par ailleurs, on a $\sum_{b=1}^D \chi(b)\chi(b) = \sum_{b \in (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*} \chi(b)$ car les autres termes sont nuls, et $\sum_{b \in (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*} \chi(b) = 0$ par orthogonalité des caractères $\mathbf{1}_D$ et χ de $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$. Il en résulte que la fonction $z \mapsto \sum_{b=1}^D \chi(b)e^{-bz}$, qui est holomorphe sur \mathbf{C} , s'annule en $z = 0$, et donc que la fonction $z \mapsto f_\chi(z) = \frac{\sum_{b=1}^D \chi(b)e^{-bz}}{1 - e^{Dz}}$ est holomorphe dans un voisinage de 0, le zéro du numérateur compensant le pôle simple du dénominateur. La fonction $t \mapsto f_\chi(t)$ est donc \mathcal{C}^∞ en 0, et on conclut en utilisant la prop VII.2.6.

2. Le théorème de la progression arithmétique

Proposition VII.4.3. — $F(s) = \prod_{\chi \in \operatorname{Dir}(D)} L(\chi, s)$ est une série de Dirichlet à coefficients dans \mathbf{N} .

Démonstration. — D'après le (i) de la prop. VII.4.1, si $\chi \in \text{Dir}(\mathbf{D})$ et si $\text{Re}(s) > 1$, alors $L(\chi, s)$ est le produit (convergent) des $(1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$ pour p premier ne divisant pas \mathbf{D} . On obtient donc

$$F(s) = \prod_{p \nmid \mathbf{D}} \left(\prod_{\chi \in \text{Dir}(\mathbf{D})} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \right).$$

Maintenant, l'application $p \mapsto \chi(p)$ est un morphisme du groupe $\text{Dir}(\mathbf{D})$ dans \mathbf{C}^* ; son image est un sous-groupe fini de \mathbf{C}^* , et donc de la forme $\mu_{d(p)}$, et son noyau est un sous-groupe H_p de $\text{Dir}(\mathbf{D})$ dont on note $h(p)$ le cardinal. Si $\eta \in \mu_{d(p)}$, il existe $h(p)$ éléments χ de $\text{Dir}(\mathbf{D})$ tels que $\chi(p) = \eta$ (si χ_0 en est un, l'application $\chi' \mapsto \chi_0 \chi'$ induit une bijection de H_p sur l'ensemble de ces χ). Il en résulte que

$$\prod_{\chi \in \text{Dir}(\mathbf{D})} (1 - \chi(p)p^{-s}) = \left(\prod_{\eta \in \mu_{d(p)}} (1 - \eta p^{-s}) \right)^{h(p)},$$

et comme $\prod_{\eta \in \mu_{d(p)}} (1 - \eta X) = 1 - X^{d(p)}$, on obtient

$$F(s) = \prod_{p \nmid \mathbf{D}} \left(\frac{1}{1 - p^{-d(p)s}} \right)^{h(p)}.$$

Le résultat suit de ce que $\frac{1}{1 - p^{-d(p)s}} = 1 + p^{-d(p)s} + p^{-2d(p)s} + \dots$ est une série de Dirichlet à coefficients dans \mathbf{N} , et un produit de séries de Dirichlet à coefficients dans \mathbf{N} est une série de Dirichlet à coefficients dans \mathbf{N} .

Théorème VII.4.4. — (i) $L(\mathbf{1}_D, s)$ a un pôle simple en $s = 1$, de résidu $\frac{\varphi(\mathbf{D})}{\mathbf{D}}$.
(ii) Si $\chi \in \text{Dir}(\mathbf{D}) - \{\mathbf{1}_D\}$, alors $L(\chi, 1) \neq 0$.

Démonstration. — Compte-tenu de ce que ζ a un pôle simple en $s = 1$, de résidu 1 (th. VII.3.4), le (i) suit des formules $L(\mathbf{1}_D, s) = \zeta(s) \prod_{p|\mathbf{D}} (1 - p^{-s})$ (comme on somme sur les entiers premiers à \mathbf{D} , cela fait disparaître les facteurs d'Euler en les nombres premiers divisant \mathbf{D}) et $\prod_{p|\mathbf{D}} (1 - \frac{1}{p}) = \frac{\varphi(\mathbf{D})}{\mathbf{D}}$ (ex. 2.5 du Vocabulaire).

Maintenant, s'il existe $\chi \in \text{Dir}(\mathbf{D}) - \{\mathbf{1}_D\}$, avec $L(\chi, 1) = 0$, le zéro de $L(\chi, s)$ compense le pôle simple de $L(\mathbf{1}_D, s)$; il s'ensuit que $F(s) = \prod_{\chi \in \text{Dir}(\mathbf{D})} L(\chi, s)$ est holomorphe sur \mathbf{C} tout entier. Comme $F(s)$ est, d'après la prop. VII.4.3, une série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ à coefficients dans \mathbf{N} (et donc positifs), il résulte du th. de Landau (th. VII.1.1) que la série $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ converge pour tout $s \in \mathbf{C}$ et donc, en particulier, pour $s = 0$. Comme les a_n appartiennent à \mathbf{N} , cela implique que seul un nombre fini d'entre eux sont non nuls, ce qui est clairement absurde (par exemple parce que le coefficient de $p^{-d(p)s}$ est $h(p)$ et qu'il y a une infinité de nombres premiers).

On en déduit le (ii), ce qui termine la démonstration.

Théorème VII.4.5. — (Dirichlet, 1837) Si $(a, \mathbf{D}) = 1$, il y a une infinité de nombres premiers de la forme $a + n\mathbf{D}$, avec $n \in \mathbf{N}$.

Démonstration. — Soit $\phi_a : (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction valant 1 en a et 0 ailleurs. Il s'agit de prouver que $\{p, \phi_a(p) = 1\}$ est infini et, pour ce faire, nous allons prouver que $\lim_{s \rightarrow 1^+} F_a(s) = +\infty$, où $F_a(s) = \sum_p \phi_a(p)p^{-s}$; ceci montrera non seulement que l'ensemble des p de la forme $a + nD$ est infini, mais aussi que ces nombres premiers sont assez denses dans les entiers puisque la somme de leurs inverses diverge (cette stratégie est inspirée de la démonstration d'Euler de l'existence d'une infinité de nombres premiers (rem. VII.3.5)).

Il résulte de la prop. I.2.21 que, si $p \nmid D$, alors $\phi_a(p) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \in \text{Dir}(D)} \bar{\chi}(a)\chi(p)$, et donc que

$$F_a(s) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \in \text{Dir}(D)} \bar{\chi}(a) \sum_{p \nmid D} \chi(p)p^{-s}, \quad \text{si } s \text{ est réel } > 1.$$

Maintenant, $|\chi(p)p^{-s}| \leq \frac{1}{2}$, si $p \in \mathcal{P}$ et $s > 1$, et comme

$$|z + \log(1 - z)| \leq \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \dots \leq \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{1 - |z|} \leq |z|^2, \quad \text{si } |z| \leq \frac{1}{2},$$

il en résulte que

$$\left| \sum_{p \nmid D} (\chi(p)p^{-s} + \log(1 - \chi(p)p^{-s})) \right| \leq \sum_{p \nmid D} p^{-2s} \leq \zeta(2), \quad \text{si } s > 1.$$

La fonction $-\sum_{p \nmid D} \log(1 - \chi(p)p^{-s})$ est continue sur $]1, +\infty]$ comme restriction d'une fonction holomorphe, et son exponentielle est $L(\chi, s)$ d'après le (i) de la prop. VII.4.1; il est donc justifié de la noter $\log L(\chi, s)$. Il résulte alors de la majoration ci-dessus que $F_a(s) - \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \in \text{Dir}(D)} \bar{\chi}(a) \log L(\chi, s)$ reste bornée quand $s \rightarrow 1^+$. Or le (ii) du th. VII.4.4 et la continuité de $\log L(\chi, s)$ pour $s > 1$ impliquent que la somme $\sum_{\chi \neq \mathbf{1}_D} \bar{\chi}(a) \log L(\chi, s)$ admet une limite finie en 1^+ , tandis que $\log L(\mathbf{1}_D, s)$ tend vers $+\infty$ en 1^+ d'après le (i) du th. VII.4.4. Comme $\mathbf{1}_D(a) = 1$, on en déduit que $F_a(s)$ tend vers $+\infty$ en 1^+ (et même, en utilisant toute la force du (i) du th. VII.4.4, que $\lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{F_a(s)}{\log(s-1)} = \frac{1}{\varphi(D)}$), ce que l'on cherchait à démontrer.

ANNEXE A

LE THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS

A.1. Introduction

Ce chapitre est consacré à la démonstration du *théorème des nombres premiers* et du *théorème de la progression arithmétique*. On sait depuis les grecs qu'il existe une infinité de nombres premiers⁽¹⁾. Leur répartition n'a cessé depuis de fasciner les mathématiciens. Voici, par exemple, ce qu'écrivait Euler en 1747 : « *Les mathématiciens ont tâché jusqu'ici en vain à découvrir un ordre quelconque dans la progression des nombres premiers, et on a lieu de croire, que c'est un mystère auquel l'esprit humain ne saurait jamais pénétrer. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à jeter les yeux sur les tables des nombres premiers, que quelques personnes se sont donné la peine de continuer au-delà de cent-mille : et on s'apercevra d'abord qu'il n'y règne aucun ordre ni règle. Cette circonstance est d'autant plus surprenante, que l'arithmétique nous fournit des règles sûres, par le moyen desquelles on est en état de continuer la progression de ces nombres aussi loin que l'on souhaite, sans pourtant nous y laisser apercevoir la moindre marque d'un ordre quelconque.* ».

Le même Euler a, entre autres :

- démontré que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ diverge comme $\log n$, (et même que $-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ tend vers une limite γ appelée depuis « constante d'Euler »),
- factorisé $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{n}$ sous la forme $\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \cdots)$,
- remarqué que le logarithme du produit était $\sum_p \frac{1}{p}$ à une somme convergente près.

Ceci lui a fourni, en 1737, une nouvelle démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers (puisque la somme de leurs inverses diverge). De plus, en partant de la formule $\sum_p \frac{1}{p} \sim \log(\sum_n \frac{1}{n})$, il en avait déduit que $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \sim \log \log x$. Maintenant, si Δx est petit devant x , les nombres premiers entre x et $x + \Delta x$ sont tous de taille x . Si on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers $\leq x$, on a donc $\log \log(x + \Delta x) - \log \log x \sim \frac{\pi(x + \Delta x) - \pi(x)}{x}$. Comme la dérivée de $\log \log x$ est $\frac{1}{x \log x}$, on en « déduit » que la densité des nombres

⁽¹⁾Il n'est toutefois pas si facile d'en produire explicitement ; le plus grand nombre premier connu à ce jour est le nombre premier de Mersenne $2^{43112609} - 1$, découvert en août 2008 ; il a plus de 10^7 chiffres en écriture décimale.

premiers autour de x est de l'ordre de $\frac{1}{\log x}$, et donc que⁽²⁾ $\pi(x) \sim \text{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$. Il a fallu attendre plus d'un siècle pour que ce résultat soit rigoureusement⁽³⁾ démontré, ce qui fut fait en 1896 par J. Hadamard et de la Vallée Poussin indépendamment.

Théorème A.1.1. — (des nombres premiers) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Les démonstrations de J. Hadamard et C. de la Vallée Poussin reposent sur la stratégie suggérée par B. Riemann, utilisant le lien entre les zéros de la fonction ζ et la répartition des nombres premiers. L'ingrédient fondamental est la non existence de zéros de la fonction ζ sur la droite $\text{Re}(s) = 1$, où la convergence du produit eulérien cesse, ce qui ne permet pas de conclure quoi que ce soit de la non annulation de chacun de ses facteurs. De fait, le théorème des nombres premiers est équivalent à la non annulation de ζ sur la droite $\text{Re}(s) = 1$. Cette équivalence a longtemps fait penser qu'une démonstration « élémentaire » (i.e. n'utilisant pas la variable complexe) du théorème des nombres premiers était impossible mais, en 1948, P. Erdős et A. Selberg ont obtenu une telle démonstration, ce qui a valu à A. Selberg la médaille Fields en 1950.

Si P est un polynôme, et s'il n'y a aucune obstruction arithmétique à ce que les valeurs de P aux entiers puissent être des nombres premiers⁽⁴⁾, on peut partir du principe que $P(n)$ a autant de chance d'être premier qu'un nombre de même taille pris au hasard, soit $\frac{1}{\log P(n)} \sim \frac{1}{\deg P} \cdot \frac{1}{\log n}$. C'est ce genre d'heuristique, convenablement modifiée pour tenir compte de la probabilité qu'un entier de la forme $P(n)$ soit divisible par p si $p \in \mathcal{P}$, qui mène à la conjecture de Bateman et Horn ci-dessous.

Soient P_1, \dots, P_k des polynômes distincts, à coefficients entiers, irréductibles dans $\mathbf{Q}[X]$, dont le coefficient dominant est > 0 , et soit $P = P_1 \cdots P_k$. Si $p \in \mathcal{P}$, on note $N_p(P)$ le nombre de solutions de l'équation $P(x) = 0$ dans le corps $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, et on

⁽²⁾La fonction Li est le *logarithme intégral*; au voisinage de l'infini, on a $\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$ (faire une intégration par partie, en intégrant 1 et en dérivant $\frac{1}{\log t}$). On peut donc reformuler le théorème des nombres premiers sous la forme plus parlante $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$; c'est sous cette forme que nous le démontrerons, mais $\text{Li}(x)$ est une bien meilleure approximation de $\pi(x)$ que $\frac{x}{\log x}$.

⁽³⁾Le lecteur pourra vérifier que, si $M = \cup_{k \geq 1} [2^{2^k}, 2^{2^k+1}[$, alors $\sum_{n \in \mathbf{N} \cap M, n \leq x} \frac{1}{n} \sim \log \log x$, mais que $\frac{|\{n \in \mathbf{N} \cap M, n \leq x\}|}{x/\log x}$ n'a pas de limite.

⁽⁴⁾Par exemple $12n + 9$, $n(n^2 + 1)$ ou $n(n - 1) + 2$ ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs premières pour des raisons évidentes.

définit une constante⁽⁵⁾ $C(P)$ par

$$C(P) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-k} \left(1 - \frac{N_p(P)}{p}\right) \right).$$

Conjecture A.1.2. — (Bateman-Horn, 1962) *Si $C(P) \neq 0$, alors l'ensemble des $n \in \mathbf{N}$ tels que $P_1(n), \dots, P_k(n)$ soient simultanément premiers est infini, et on a*

$$|\{n \leq x, P_1(n) \in \mathcal{P}, \dots, P_k(n) \in \mathcal{P}\}| \sim \frac{C(P)}{\deg P_1 \cdots \deg P_k} \cdot \frac{x}{(\log x)^k}.$$

Le théorème des nombres premiers correspond au cas $k = 1$, $P = X$ de la conjecture. Le seul autre résultat que l'on ait confirmant cette conjecture est celui où $k = 1$, et $P = P_1$ est de degré 1. Dans ce cas, P est de la forme $Dx + a$, où $D \geq 2$, et a est premier à D , sinon il existe un nombre premier p pour lequel $Dx + a$ est identiquement nul modulo p , et $C(P) = 0$. Si $p \mid D$, alors $N_p(P) = 0$, et si $p \nmid D$, alors $N_p(P) = 1$. La constante $C(P)$ de la conjecture de Bateman et Horn est donc

$$\prod_{p \mid D} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p \mid D} \frac{p}{p-1} = \prod_{p \mid D} \frac{p^{v_p(D)}}{(p-1)p^{v_p(D)-1}} = \frac{D}{\varphi(D)},$$

où $\varphi(D) = |(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*|$ est la fonction indicatrice d'Euler. La conjecture de Bateman et Horn est donc, dans ce cas, conséquence du résultat suivant (appliqué à Dx au lieu de x).

Théorème A.1.3. — (de la progression arithmétique) *Si $D \geq 2$, si a est premier à D , et si $\pi(D, a, x) = |\{p \in \mathcal{P}, p \equiv a \pmod{D}, p \leq x\}|$, alors $\pi(D, a, x) \sim \frac{1}{\varphi(D)} \cdot \frac{x}{\log x}$*

On peut paraphraser ce théorème en disant que les nombres premiers s'équirépartissent dans les progressions arithmétiques dans lesquelles ils peuvent exister⁽⁶⁾. Sous la forme du théorème, le résultat est dû à de la Vallée Poussin, mais n'est qu'une petite extension du théorème des nombres premiers, si on utilise les idées de Dirichlet (1837) qui avait

⁽⁵⁾Le produit définissant $C(P)$ n'est pas convergent ; on définit sa valeur comme la limite quand $x \rightarrow +\infty$ des produits partiels $\prod_{p \leq x}$. L'existence de cette limite n'est pas du tout évidente, mais la preuve montre, en outre, que $C(P) \neq 0$ si $N_p(P) \neq p$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. Ceci traduit le fait que le nombre de solutions modulo p de l'équation $P(x) = 0$, pour $P \in \mathbf{Z}[X]$ sans racine double, est, en moyenne, le nombre de facteurs de la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{Z}[X]$.

⁽⁶⁾Dans la rubrique « nombres premiers et progressions arithmétiques », mentionnons que B. Green et T. Tao ont démontré en 2004 qu'il existait des progressions arithmétiques de longueur arbitraire (mais pas infinie...) dans l'ensemble des nombres premiers, ce qui joua un rôle certain dans l'attribution de la médaille Fields à T. Tao en 2006. P. Erdős avait espéré que l'on pourrait démontrer ce résultat en utilisant juste que la somme des inverses des nombres premiers diverge (il offrait 3000 dollar pour une solution selon ces lignes). Malgré les efforts de pas mal de gens réputés pour leur astuce (dont Roth, Gowers, Bourgain et Tao, médaillés Fields tous les quatre), on ne sait toujours pas démontrer (ou infirmer...) que si $X \subset \mathbf{N} - \{0\}$ ne contient pas de progression arithmétique de longueur 3 (i.e. il n'existe pas $a, b, c \in X$ distincts, tels que $a + c = 2b$), alors $\sum_{n \in X} \frac{1}{n} < +\infty$. Le meilleur résultat dans cette direction est un résultat de J. Bourgain (1999) selon lequel $|\{n \in X, n \leq N\}| = O\left(\frac{N\sqrt{\log \log N}}{\sqrt{\log N}}\right)$.

déjà démontré un résultat d'équirépartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques (nettement moins fin, mais quand même spectaculaire : démontrer, à la main, l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $7n + 3$ (par exemple), n'est pas si facile...). La démonstration du th. A.1.3 suit celle du théorème des nombres premiers, en utilisant toutes les fonctions L de Dirichlet (que celui-ci avait précisément introduites pour démontrer son théorème), au lieu de la seule fonction ζ .

Le théorème de la progression arithmétique est aussi le seul cas où on sache prouver l'existence d'une infinité de n tel que $P_1(n), \dots, P_k(n)$ soient simultanément premiers (ici $k = 1$). Par exemple, on ne sait pas démontrer l'existence d'une infinité de $p \in \mathcal{P}$ tel que $p + 2$ soit premier (problème des *nombres premiers jumeaux* ⁽⁷⁾ ; il correspond à $k = 2$, $P_1 = X$, $P_2 = X + 2$). De même, on ne sait pas démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$ ⁽⁸⁾.

A.2. Les fonctions ψ et ψ_1

1. Théorème des nombres premiers et comportement de ψ_1 en $+\infty$

Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de nombres complexes, l'étude de $\sum_{n \leq x} a_n$ est étroitement liée à celle de la série de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ comme le montre le cor. A.2.3 ci-dessous. Pour évaluer $\pi(x)$, on est donc naturellement amené à considérer la série de Dirichlet $\sum_{p \in \mathcal{P}} p^{-s}$, qui n'est pas très éloignée de la fonction $-\log \zeta(s)$, et comme elle a des propriétés nettement moins agréables que cette dernière, cela nous conduit à introduire les fonctions auxiliaires suivantes.

• La fonction Λ de von Mangoldt définie par $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, on a $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$, d'après la prop. VII.3.3, et donc (th. V.2.12),

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^{-s} \log p}{1-p^{-s}} = \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{\log p}{p^{\nu s}}, \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

On en déduit que $\Lambda(n) = 0$, si n n'est pas une puissance d'un nombre premier, et $\Lambda(n) = \log p$, si $n = p^\nu$, et $\nu \geq 1$.

- La fonction ψ définie par $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$.
- La fonction ψ_1 définie par $\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t) dt$.

⁽⁷⁾Il a fallu attendre 2005 pour que D. Goldston et C. Yildirim démontrent que $\liminf \frac{p_{n+1} - p_n}{\log n} = 0$, si p_n désigne le n -ième nombre premier, ce qui constitue un pas encourageant en direction du problème des nombres premiers jumeaux. (La division par $\log n$ se justifie par le fait que p_n est de l'ordre de $n \log n$ et l'écart moyen entre $p_{n+1} - p_n$ est $\log n$.)

⁽⁸⁾On sait, depuis Fermat (lettre à Mersenne de Noël 1640), que tout nombre premier de la forme $4k + 1$ est somme de deux carrés ; on en déduit qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + m^2$, avec $n, m \in \mathbf{N}$. Il a fallu attendre 1998 pour que J. Friedlander et H. Iwaniec démontrent l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + m^4$; on est encore loin de $n^2 + 1$...

Lemme A.2.1. — Les énoncés suivants sont équivalents au voisinage de $+\infty$.

- (i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.
- (ii) $\psi(x) \sim x$.
- (iii) $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$.

Démonstration. — Par définition, $\psi(x) = \sum_{p^\nu \leq x} \log p$. Or, $p^\nu \leq x$ implique en particulier $\nu \leq \frac{\log x}{\log 2}$, et $\nu \geq 2$ implique $p \leq \sqrt{x}$. On en déduit l'encadrement

$$\sum_{p \leq x} \log p \leq \psi(x) \leq \sum_{p \leq x} \log p + (\sqrt{x} \log x) / \log 2 \leq \pi(x) \log x + (\sqrt{x} \log x) / \log 2.$$

Par ailleurs, si $\beta < 1$, et $x^\beta \leq p$, on a $\log p \geq \beta \log x$. On en déduit que

$$\sum_{p \leq x} \log p \geq \beta \log x (\pi(x) - \pi(x^\beta)),$$

et comme $\pi(x^\beta) \leq x^\beta$, on obtient, quel que soit $\beta < 1$, l'encadrement

$$\beta(\pi(x) \log x - x^\beta \log x) \leq \psi(x) \leq \pi(x) \log x + (\sqrt{x} \log x) / \log 2.$$

On en déduit l'équivalence entre (i) et (ii).

L'implication (ii) \Rightarrow (iii) est immédiate par intégration. Pour démontrer la réciproque, constatons que ψ est une fonction croissante, et donc que l'on a

$$\frac{\psi_1(x) - \psi_1((1 - \varepsilon)x)}{\varepsilon x} \leq \psi(x) \leq \frac{\psi_1((1 + \varepsilon)x) - \psi_1(x)}{\varepsilon x},$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. Maintenant, si $\psi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x^2\eta(x)$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x) = 0$, on obtient, en divisant l'encadrement ci-dessus par x , l'encadrement suivant :

$$1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta(x) - \eta((1 - \varepsilon)x)}{\varepsilon} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\eta((1 + \varepsilon)x) - \eta(x)}{\varepsilon}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on en déduit que $\liminf \frac{\psi(x)}{x} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\limsup \frac{\psi(x)}{x} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela prouve que $\psi(x) \sim x$, ce qui permet de conclure.

2. Une formule intégrale pour ψ_1

Lemme A.2.2. — Si $c > 0$ et $x > 0$, alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Démonstration. — C'est un calcul de résidus parfaitement standard. La fonction $\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ est méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors de deux pôles simples en $s = 0$ et $s = -1$, de résidus respectifs $\text{Res}(\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}, 0) = x$ et $\text{Res}(\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}, -1) = -1$.

- Si $x \geq 1$, on intègre sur le lacet γ_T constitué du segment $[c - iT, c + iT]$, et de $C^+(\mathbf{T})$, arc de cercle $c + Te^{i\theta}$, avec θ variant de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$. Si $T > c + 1$, le lacet γ_T a pour indice 1 par rapport aux deux points 0 et -1 . On déduit de la formule des résidus que

$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_T} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = x - 1$, si $T > c + 1$. Par ailleurs, sur $C^+(T)$, on a $|x^{s+1}| \leq x^{c+1}$ et $|\frac{1}{s(s+1)}| \leq \frac{1}{(T-c)(T-c-1)}$. Donc $\int_{C^+(T)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$, et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{[c-iT, c+iT]} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds \\ &= x - 1 - \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{C^+(T)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = x - 1. \end{aligned}$$

• Si $x < 1$, on intègre sur le lacet γ_T constitué du segment $[c - iT, c + iT]$, et de $C^-(T)$, arc de cercle $c + Te^{i\theta}$, avec θ variant de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{-\pi}{2}$. Dans ce cas γ_T a pour indice 0 par rapport aux deux points 0 et -1 , et la formule des résidus nous donne $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_T} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = 0$, quel que soit $T > 0$. Le reste de l'argument est le même que ci-dessus.

Corollaire A.2.3. — Soit $L(\mathbf{a}, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ une série de Dirichlet d'abscisse de convergence absolue $\sigma_{\text{abs}} \neq +\infty$. Alors, si $c > \sup(0, \sigma_{\text{abs}})$ et $x > 0$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L(\mathbf{a}, s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \int_0^x \left(\sum_{n \leq t} a_n \right) dt.$$

Démonstration. — Par hypothèse, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ converge normalement sur la droite $c + i\mathbf{R}$, et comme la fonction $\frac{1}{s(s+1)}$ est sommable sur cette droite, on peut échanger somme et intégrale. Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{n^s} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n, \\ n\left(\frac{x}{n} - 1\right) = x - n & \text{si } x \geq n. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L(\mathbf{a}, s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \sum_{n \leq x} a_n(x - n) = \int_0^x \left(\sum_{n \leq t} a_n \right) dt,$$

ce qui permet de conclure.

Corollaire A.2.4. — Si $c > 1$, et si $x > 1$, alors $\psi_1(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$.

A.3. Formules explicites

La formule du cor. A.2.4 est, en elle-même, assez peu utile en ce qui concerne la démonstration du théorème des nombres premiers. La seule information qu'on puisse en tirer est, semble-t-il, en majorant brutalement ce qu'on intègre, l'existence, pour tout $c > 1$, d'une constante $C(c)$ telle que $\psi_1(x) \leq C(c)x^{1+c}$, ce qui était évident dès le départ. Pour obtenir des résultats plus fins, on va déplacer la ligne d'intégration vers la gauche (de manière à diminuer le c). La traversée de la bande critique est un peu périlleuse à cause de la présence des zéros de ζ qui entraîne l'existence de nombreux pôles pour la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}$, ce

qui fait que la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}$ est loin d'être assez petite pour qu'on puisse se dispenser de prendre des précautions en se déplaçant. On va donc être forcé de majorer cette fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}$ dans la bande critique, et le miracle des fonctions holomorphes fait que la connaissance de la fonction ζ des deux côtés de la bande critique permet de contrôler un peu ce qui se passe à l'intérieur (on maîtrise bien la fonction ζ dans le demi-plan $\text{Re}(s) < 0$ grâce à l'équation fonctionnelle et à la formule de Stirling).

1. Énoncé du résultat

Afin de pouvoir appliquer les résultats de ce § aux fonctions L de Dirichlet, nous allons partir d'une fonction L méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors d'un pôle simple éventuel en $s = 1$, et qui vérifie les conditions (L1)–(L3) ci-dessous, ce qui est le cas de ζ (d'après le lemme A.3.1) et des fonctions L de Dirichlet :

(L1) Si $a > 1$, il existe $c(a)$, tel que, si $\text{Re}(s) \geq a$, on ait

$$|L(s)| \leq c(a), \quad |L(s)^{-1}| \leq c(a), \quad \left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| \leq c(a).$$

En particulier, L ne s'annule pas sur le demi-plan $\text{Re}(s) > 1$.

(L2) Il existe $A \in \mathbf{C}^*$, $B \in \mathbf{R}_+^*$ et $c \in [0, 2[$ tels que L vérifie l'équation fonctionnelle

$$L(s) = A \cdot B^s \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin \frac{\pi(s-c)}{2} \cdot \bar{L}(1-s), \quad \text{où } \bar{L} \text{ est définie par } \bar{L}(s) = \overline{L(\bar{s})}.$$

(L3) Quels que soient $a \leq b$ réels, il existe $C(a, b) > 0$ et $c(a, b) > 0$ tels que, si $a \leq \sigma \leq b$ et $|\tau| \geq 1$, alors

$$|L(\sigma + i\tau)| \leq C(a, b)e^{c(a,b)|\tau|}.$$

Lemme A.3.1. — *La fonction ζ vérifie les propriétés (L1)–(L3).*

Démonstration. — Si $\text{Re}(s) > a$, on a

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &= \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{|1-p^{-s}|} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-\text{Re}(s)}} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-a}} \leq \zeta(a), \\ |\zeta(s)^{-1}| &= \prod_{p \in \mathcal{P}} |1-p^{-s}| \leq \prod_{p \in \mathcal{P}} (1+p^{-a}) \leq \frac{\zeta(a)}{\zeta(2a)}, \\ \left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| &\leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \Lambda(n) |n^{-s}| \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} \Lambda(n) n^{-a} = \frac{\zeta'(a)}{\zeta(a)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que ζ vérifie (L1), avec $c(a) = \sup(\zeta(a), \frac{\zeta'(a)}{\zeta(a)})$. Les propriétés (L2) et (L3) sont nettement plus délicates mais ont déjà été démontrées (la propriété (L2) fait l'objet du th. VII.3.7, et la prop. A.3.5 ci-dessous (allié à la formule $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} M(\frac{t}{e^t-1}, s-1)$ de la démonstration du th. VII.3.4) montre que l'on peut prendre $c(a, b) = \frac{\pi}{2}$).

Soit donc L une fonction méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors d'un pôle simple éventuel (ce pôle simple éventuel pouvant en fait être un zéro) en $s = 1$, et vérifiant les

propriétés (L1)-(L3). Si $x > 1$, on note F_x la fonction $F_x(s) = -\frac{L'(s)}{L(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$. C'est une fonction méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors de pôles en 0, -1 , éventuellement en 1, et en les zéros de L . Comme L ne s'annule pas sur $\operatorname{Re}(s) > 0$ et vérifie l'équation fonctionnelle de la propriété (L2), les seuls zéros de L en dehors de la bande $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ (bande critique) sont les $c - 2k$, pour $k \in \mathbf{N} - \{0\}$, ce qui peut inclure -1 . On note $Y(L)$ l'ensemble des zéros dans la bande critique, distincts de 0 et 1.

Soient $a_0 = x^{-1} \operatorname{Res}(F_x, 0)$ et $a_{-1} = \operatorname{Res}(F_x, -1)$ ⁽⁹⁾. Le résultat que nous avons en vue est la « formule explicite » suivante (dans laquelle $v_z(L) \in \mathbf{Z}$ désigne la valuation (i.e. l'ordre du zéro) de L au point z).

Théorème A.3.2. — (i) La série $\sum_{\rho \in Y(L)} \frac{v_\rho(L)}{\rho(\rho+1)}$ est absolument convergente.

(ii) Si $x > 1$, alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-L'(s)}{L(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$ est aussi égal à

$$-v_1(L) \frac{x^2}{2} + a_0 x + a_{-1} - \sum_{\rho \in Y(L)} \frac{v_\rho(L) x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_{k \geq 1, c-2k \neq -1} \frac{x^{1+c-2k}}{(2k-c)(2k-c-1)},$$

les deux séries ci-dessus étant absolument convergentes.

La démonstration va demander un peu de préparation, mais on peut tout de même remarquer que l'expression finale peut se réécrire sous la forme plus compacte ⁽¹⁰⁾

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-L'(s)}{L(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \sum_{\operatorname{Re}(\rho) < 2} \operatorname{Res}(F_x, \rho),$$

l'expression du théorème étant obtenue en explicitant le résidu de F_x en tous ses pôles (qui sont simples sauf peut-être 0 et -1). De plus, comme $|x^{\rho+1}| \leq x^3$, si $\operatorname{Re}(\rho) < 2$, la convergence des séries suit juste de la convergence absolue des séries $\sum_{\rho \in Y(L)} \frac{v_\rho(L)}{\rho(\rho+1)}$ et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k-c)(2k-c-1)}$. Il suffit donc de démontrer le (i) et la forme compacte ci-dessus.

2. La formule de Stirling

La formule de Stirling complexe permet d'étudier le comportement de la fonction Γ et des séries de Dirichlet dans des bandes verticales (cor. A.3.4 et prop. A.3.5).

Proposition A.3.3. — Sur tout secteur angulaire de la forme $|\arg(z)| < \alpha$, où $\alpha < \pi$, on a les développements suivants au voisinage de $|z| = \infty$:

(i) $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$;

⁽⁹⁾ Si 0 n'est pas un zéro de L , alors $a_0 = \frac{-L'(0)}{L(0)}$. Si 0 est un zéro de L , alors 0 est un pôle double de F , et a_0 est de la forme $a_{0,0} + a_{0,1} \log x$.

Si $c \neq 1$, alors -1 est un pôle simple de F , et $a_{-1} = \frac{L'(1)}{L(1)}$. Si $c = 1$, alors -1 est un pôle double de F , et a_{-1} est de la forme $a_{-1,0} + a_{-1,1} \log x$.

⁽¹⁰⁾ Formellement, cette formule n'est autre que la formule des résidus si on considère la droite $\operatorname{Re}(s) = 2$ comme un lacet entourant le demi-plan $\operatorname{Re}(s) < 2$.

(ii) $\log \Gamma(z) = z \log z - z + \frac{1}{2}(\log(2\pi) - \log z) + O(\frac{1}{z})$, où $\log \Gamma(z) = \int_{[1,z]} \frac{\Gamma'(w)}{\Gamma(w)} dw$ est le logarithme de $\Gamma(z)$, holomorphe dans le secteur angulaire, prenant la valeur 0 en $z = 1$. (formule de Stirling complexe).

Démonstration. — On part de la formule $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k})$, qui découle (th. V.2.12) de la définition de $\frac{1}{\Gamma}$ comme un produit convergent. Si $z \notin \mathbf{R}_-$, on peut réécrire cette formule sous la forme (où $[t]$ désigne la partie entière de t et $\{t\} = t - [t]$, sa partie fractionnaire)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} &= -\gamma - \frac{1}{z} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{z+[t]} \right) dt \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t} - \frac{1}{z+[t]} + \frac{1}{z+t} \right) dt + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{z+t} \right) dt \\ &= -\gamma - \frac{1}{z} + \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t[t]} dt - \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{(z+t)(z+[t])} dt + \left[\log \frac{t}{z+t} \right]_1^{+\infty}. \end{aligned}$$

Maintenant, $\left[\log \frac{t}{z+t} \right]_1^{+\infty} = \log(z+1) = \log z + \frac{1}{z} + O(\frac{1}{z^2})$ et $C = \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t[t]} dt$ est une constante. Finalement, on peut écrire $\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{(z+t)(z+[t])} dt$ sous la forme

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{(z+t)(z+[t])} dt &= \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{(z+t)^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}^2}{(z+t)^2(z+[t])} dt \\ &= \frac{1}{2(z+1)} + \int_1^{+\infty} \frac{\{t\} - 1/2}{(z+t)^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}^2}{(z+t)^2(z+[t])} dt, \end{aligned}$$

et une intégration par parties nous donne

$$\int_1^{+\infty} \frac{\{t\} - 1/2}{(z+t)^2} dt = \left[\frac{\{t\}^2 - \{t\}}{2(z+t)^2} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{(z+t)^3} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{(z+t)^3} dt.$$

En utilisant la minoration

$$|z+u|^2 \geq \frac{1+\cos \alpha}{2} (|z|+u)^2, \quad \text{si } u \in \mathbf{R}^+ \text{ et } |\arg(z)| \leq \alpha,$$

cela permet de majorer en module les quantités $\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}^2}{(z+t)^2(z+[t])} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}^2 - \{t\}}{(z+t)^3} dt$ par $\int_1^2 \frac{1}{(|z|-2)^3} dt + \int_2^{+\infty} \left(\frac{2}{1+\cos \alpha} \right)^{3/2} \frac{1}{(|z|+t-1)^3} dt$. On en déduit que ces deux intégrales sont des $O(\frac{1}{z^2})$ et comme il en est de même de $\frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{2z}$, on obtient finalement :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z + C - \gamma - \frac{1}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

On en déduit, en intégrant, que

$$\log \Gamma(z) = [w \log w - w + (C - \gamma)w - \frac{1}{2} \log w]_1^z + \int_1^{+\infty} O\left(\frac{1}{w^2}\right) dw + \int_{+\infty}^z O\left(\frac{1}{w^2}\right) dw.$$

D'où l'existence de $C' \in \mathbf{C}$, tel que l'on ait $\log \Gamma(z) = z \log z - z + (C - \gamma)z - \frac{1}{2} \log z + C' + O(\frac{1}{z})$ au voisinage de l'infini. La formule de Stirling réelle :

$$\log(\Gamma(x+1)) = x \log x - x + \frac{1}{2} \log(2\pi x) + o(1), \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

permet alors d'en déduire que $C - \gamma = 0$ et $C' = \frac{1}{2} \log 2\pi$, ce qui permet de conclure.

Corollaire A.3.4. — Quand $|\tau|$ tend vers $+\infty$, on a

$$|\Gamma(\sigma + i\tau)| = \sqrt{2\pi}|\tau|^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-\pi|\tau|/2}(1 + O(\frac{1}{\tau})),$$

uniformément dans toute bande verticale de largeur finie.

Démonstration. — Si $s = \sigma + i\tau$, et $a \leq \sigma \leq b$, où $a, b \in \mathbf{R}$ sont fixés, alors

$$\log s = \log i\tau + \frac{\sigma}{i\tau} + O(\frac{1}{\tau^2}) = \log |\tau| + \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{\tau}{|\tau|} + \frac{\sigma}{i\tau} + O(\frac{1}{\tau^2}).$$

En utilisant le (ii) de la prop. A.3.3 et la formule ci-dessus, on en déduit que

$$\operatorname{Re}(\log \Gamma(\sigma + i\tau)) = \sigma \log |\tau| - \frac{\pi|\tau|}{2} + \sigma - \sigma - \frac{1}{2} \log |\tau| + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(\frac{1}{\tau}).$$

Ceci permet de conclure.

Le résultat suivant, dans lequel $M(f, s)$ est la fonction définie dans la prop. VII.2.6, permet de montrer que le prolongement analytique d'une série de Dirichlet a un comportement raisonnable dans une bande verticale.

Proposition A.3.5. — Soit f une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ , à décroissance rapide à l'infini ainsi que toutes ses dérivées. Si $a \leq b$ sont deux réels, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $C_{a,b,k}(f)$ tel que

$$|M(f, s)| \leq C_{a,b,k}(f)(1 + |\tau|)^{-k}e^{\frac{\pi}{2}|\tau|}, \text{ si } s = \sigma + i\tau \text{ et } a \leq \sigma \leq b.$$

Démonstration. — Choisissons $n \in \mathbf{N}$ tel que $n + a > k + \frac{1}{2}$. Si $s = \sigma + i\tau$, avec $a \leq \sigma \leq b$, alors

$$|M(f, s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s+n)|} \int_0^{+\infty} |f^{(n)}(t)| t^{\sigma+n} \frac{dt}{t} \leq \frac{C_n}{|\Gamma(s+n)|},$$

où $C_n = \int_0^{+\infty} |f^{(n)}(t)| \sup(t^{a+n}, t^{b+n}) \frac{dt}{t}$. Par ailleurs, d'après le cor. A.3.4, il existe $T > 0$ tel que, si $s = \sigma + i\tau$, alors

$$|\Gamma(s+n)|^{-1} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(1 + |\tau|)^{\frac{1}{2}-\sigma-n}e^{\frac{\pi}{2}|\tau|} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(1 + |\tau|)^{-k}e^{\frac{\pi}{2}|\tau|}, \text{ si } |\tau| \geq T \text{ et } a \leq \sigma \leq b.$$

Donc $(1 + |\tau|)^k e^{-\frac{\pi}{2}|\tau|} |M(f, s)|$ est bornée sur $\{s = \sigma + i\tau, |\tau| \geq T, a \leq \sigma \leq b\}$, et comme elle est continue sur la bande $a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b$, elle est aussi bornée sur la bande toute entière. Ceci permet de conclure.

3. Les fonctions L et $\frac{L'}{L}$ en dehors de la bande critique

Lemme A.3.6. — Si $a < 0$, la fonction $(s - a + 1)^{a-\frac{3}{2}}(s - 1)L(s)$ est bornée sur la droite $\operatorname{Re}(s) = a$.

Démonstration. — Sur la droite $\text{Re}(s) = a$, la fonction $F(s) = (s - a + 1)^{a-\frac{3}{2}}(s - 1)L(s)$ est continue. Par ailleurs, si $t \in \mathbf{R}$, on a

$$L(a + it) = A B^{a+it} \sin\left(\frac{\pi(a - c + it)}{2}\right) \Gamma(1 - a - it) \bar{L}(1 - a - it).$$

Or $A B^{a+it} \bar{L}(1 - a - it)$ est bornée pour $t \in \mathbf{R}$, et $e^{-\pi|t|/2} \left| \sin \frac{\pi(a-c+it)}{2} \right|$ tend vers $\frac{1}{2}$ quand $|t|$ tend vers $+\infty$, ce qui permet de déduire du cor. A.3.4 que

$$\left| \sin\left(\frac{\pi(a - c + it)}{2}\right) \Gamma(1 - a - it) \right| |t|^{-\frac{1}{2}+a}$$

est borné quand $|t|$ tend vers $+\infty$. Donc $|F(a + it)| = |(it + 1)^{a-\frac{3}{2}}(a + it - 1)L(a + it)|$ est borné quand $|t|$ tend vers $+\infty$, et comme $F(a + it)$ est continue sur \mathbf{R} , elle est bornée sur \mathbf{R} . Ceci permet de conclure.

Lemme A.3.7. — Soit $(t_n^+)_{n \geq 2}$ (resp. $(t_n^-)_{n \geq 2}$) une suite de réels vérifiant $n \leq t_n^+ \leq n+1$ (resp. $-n-1 \leq t_n^- \leq -n$). Soient $b_n^+ = -1 + it_n^+$ (resp. $b_n^- = -1 + it_n^-$) et $c_n^+ = c + 1 - 2n + it_n^+$ (resp. $c_n^- = c + 1 - 2n + it_n^-$). Alors il existe $C > 0$ tels que, $\left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| \leq C + \log n$, quels que soient $n \geq 2$ et $s \in [b_n^+, c_n^+] \cup [c_n^+, c_n^-] \cup [c_n^-, b_n^-]$.

Démonstration. — On part de l'équation fonctionnelle (L2) dont on déduit l'identité

$$\frac{L'(s)}{L(s)} = \log B + \frac{i\pi}{2} \cdot \frac{e^{i\pi(s-c)/2} + e^{-i\pi(s-c)/2}}{e^{i\pi(s-c)/2} - e^{-i\pi(s-c)/2}} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\bar{L}'(1-s)}{\bar{L}(1-s)}.$$

Maintenant, quand s décrit $[b_n^+, c_n^+] \cup [c_n^+, c_n^-] \cup [c_n^-, b_n^-]$, on a $\text{Re}(1-s) \geq 2$.

- Or $\left| \frac{\bar{L}'(1-s)}{\bar{L}(1-s)} \right| \leq c(2)$, si $\text{Re}(1-s) \geq 2$, d'après la propriété (L1).
- D'après la prop. A.3.3, il existe $C_1 > 0$ tel que $\left| \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \log(1-s) \right| \leq C_1$, si $\text{Re}(1-s) \geq 2$. On en déduit, si $s \in [b_n^+, c_n^+] \cup [c_n^+, c_n^-] \cup [c_n^-, b_n^-]$, que

$$\left| \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} \right| \leq \pi + C_1 + \log |1-s| \leq \pi + C_1 + \log \sqrt{(2n-c)^2 + (n+1)^2} \leq \pi + C_1 + \log 3 + \log n.$$

- Si s appartient à $[b_n^+, c_n^+]$ ou $[c_n^-, b_n^-]$, on a $|\text{Im}(s)| \geq n$, et donc

$$\left| \frac{e^{i\pi(s-c)/2} + e^{-i\pi(s-c)/2}}{e^{i\pi(s-c)/2} - e^{-i\pi(s-c)/2}} \right| \leq \frac{e^{\pi n/2} + e^{-\pi n/2}}{e^{\pi n/2} - e^{-\pi n/2}} \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Si $s \in [c_n^+, c_n^-]$, et si $s = c + 1 - 2n + it$, alors

$$\left| \frac{e^{i\pi(s-c)/2} + e^{-i\pi(s-c)/2}}{e^{i\pi(s-c)/2} - e^{-i\pi(s-c)/2}} \right| = \left| \frac{e^{-\pi t/2} - e^{\pi t/2}}{e^{-\pi t/2} + e^{\pi t/2}} \right| \leq 1 \leq \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

On en déduit l'inégalité $\left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| \leq \log B + c(2) + \pi + C_1 + \log 3 + \frac{\pi}{2} \frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}} + \log n$, si $s \in [b_n^+, c_n^+] \cup [c_n^+, c_n^-] \cup [c_n^-, b_n^-]$. Ceci permet de conclure.

4. La fonction L dans la bande critique

Lemme A.3.8. — Soit F une fonction holomorphe sur un ouvert contenant la bande $a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b$. On suppose que $|F(s)| \leq M$ sur les droites $\operatorname{Re}(s) = a$ et $\operatorname{Re}(s) = b$, et qu'il existe $c, C > 0$ tels que $|F(\sigma + i\tau)| \leq C e^{c|\tau|}$, si $a \leq \sigma \leq b$ et $|\tau| \geq 1$. Alors $|F(s)| \leq M$ sur la bande toute entière.

Démonstration. — Si $\varepsilon > 0$, alors $F(s)e^{\varepsilon s^2}$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini dans cette bande, puisque $\operatorname{Re}(\varepsilon s^2) \sim -\varepsilon \operatorname{Im}(s)^2$ tend vers $-\infty$ beaucoup plus vite que $c|\operatorname{Im}(s)|$. Le principe du maximum (rem. V.1.13) permet d'en déduire que, si T est assez grand, le maximum de $|F(s)e^{\varepsilon s^2}|$ sur le rectangle de sommets $a \pm iT$ et $b \pm iT$ est atteint sur un des segments verticaux, et donc que le maximum de $|F(s)e^{\varepsilon s^2}|$ dans la bande est atteint sur la droite $\operatorname{Re}(s) = a$ ou sur la droite $\operatorname{Re}(s) = b$. On en déduit que $|F(s)e^{\varepsilon s^2}| \leq M \sup(e^{\varepsilon a^2}, e^{\varepsilon b^2})$, quels que soient $\varepsilon > 0$, et s dans la bande $a \leq \operatorname{Re}(s) \leq b$. En faisant tendre ε vers 0, cela montre que $|F|$ est majorée par M sur la bande, ce que l'on cherchait à démontrer.

Lemme A.3.9. — Si $a < 0$, la fonction $(s - a + 1)^{a - \frac{3}{2}}(s - 1)L(s)$ est bornée sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq a$.

Démonstration. — Comme $\frac{3}{2} - a \geq 1$ et comme L est bornée sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - a$, la fonction $F(s) = (s - a + 1)^{a - \frac{3}{2}}(s - 1)L(s)$ est bornée sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geq 1 - a$ (et donc en particulier sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1 - a$). Par ailleurs, la fonction F est bornée sur la droite $\operatorname{Re}(s) = a$, d'après le lemme A.3.6. Finalement, la fonction F est holomorphe dans la bande $a \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1 - a$ et la propriété (L3) montre que F vérifie les hypothèses du lemme A.3.8 (avec $b = 1 - a$ et c n'importe quel réel $> c(a, 1 - a)$). On en déduit le résultat.

Lemme A.3.10. — Il existe $C_1 > 0$ tel que $\sup_{s \in D(2+it, 12)} \left| \frac{L(s)}{L(2+it)} \right| \leq C_1 |t|^{21/2}$, si $t \in \mathbf{R}$ et $|t| \geq 15$.

Démonstration. — On déduit du lemme A.3.9 (avec $a = -10$) l'existence d'une constante C'_1 telle que

$$|L(s)| \leq C'_1 \frac{|s + 11|^{23/2}}{|s - 1|}, \quad \text{si } \operatorname{Re}(s) \geq -10.$$

Maintenant, si $s \in D(2 + it, 12)$, on a $|s + 11| \leq |t| + 25$, et $|s - 1| \geq |s| - 1 \geq |t| - 13$. Comme de plus, $|L(2 + it)^{-1}| \leq c(2)$, d'après la propriété (L1), on obtient, si $|t| > 13$,

$$\sup_{s \in D(2+it, 12)} \left| \frac{L(s)}{L(2+it)} \right| \leq c(2) C'_1 \frac{(|t| + 25)^{23/2}}{|t| - 13}.$$

Le résultat s'en déduit sans problème.

5. La fonction $\frac{L'}{L}$ dans la bande critique

Lemme A.3.11. — (Borel-Carathéodory) Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , $R > 0$ tel que $D(0, R) \subset \Omega$, et f holomorphe sur Ω , avec $f(0) = 0$. Si $A = \sup_{|s|=R} \operatorname{Re}(f(s))$, alors

$$\left| \frac{f^{(k)}(s)}{k!} \right| \leq \frac{4AR}{(R - |s|)^{k+1}}, \quad \text{quels que soient } k \in \mathbf{N} \text{ et } s \in D(0, R^-).$$

Démonstration. — On a $F(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n s^n$ sur $D(0, R)$. En écrivant a_n sous la forme $|a_n|e^{i\theta_n}$, on obtient $\operatorname{Re}(f(Re^{i\theta})) = \sum_{m=1}^{+\infty} |a_m|R^m \cos(m\theta + \theta_m)$ et

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(n\theta + \theta_n)) \operatorname{Re}(f(Re^{i\theta})) d\theta \\ = \sum_{m=1}^{+\infty} |a_m|R^m \int_0^{2\pi} (1 + \cos(n\theta + \theta_n)) \cos(m\theta + \theta_m) d\theta = \pi |a_n|R^n. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq 1 + \cos(n\theta + \theta_n) \leq 2$, on en tire la majoration $\pi |a_n|R^n \leq 4\pi A$ et donc $|a_n| \leq 4AR^{-n}$. (En particulier, $A \geq 0$.) Maintenant, si $|s| < R$, on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(s)}{k!} \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} s^n \right| \leq 4A \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} \frac{|s|^n}{R^{n+k}} = \frac{4AR}{(R - |s|)^{k+1}}.$$

Ceci permet de conclure.

Lemme A.3.12. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , $R > 0$ tel que $D(0, 3R) \subset \Omega$, et f holomorphe sur Ω , avec $f(0) = 1$. Soit $M = \sup_{s \in D(0, 3R)} |f(s)|$, et soit Y l'ensemble des zéros de f dans $D(0, R)$. Alors :

$$\sum_{\rho \in Y} v_\rho(f) \leq \frac{\log M}{\log 2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\rho \in Y} \frac{v_\rho(f)}{s - \rho} \right| \leq \frac{4R \log M}{(R - |s|)^2}, \quad \text{quel que soit } s \in D(0, R^-).$$

Démonstration. — Soit $g(s) = f(s) \prod_{\rho \in Y} (1 - s/\rho)^{-v_\rho(f)}$. Par construction, g ne s'annule pas sur $D(0, R)$, et $g(0) = 1$; il existe donc (cf. prop. VI.2.3) un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ contenant $D(0, R)$ et h holomorphe sur Ω' , avec $h(0) = 0$, tels que $g = e^h$ sur Ω' . Soit $N = \sum_{\rho \in Y} v_\rho(f)$. Comme $|1 - s/\rho| \geq 2$, si $|s| = 3R$, on a $|g(s)| \leq 2^{-N}M$, si $|s| = 3R$. Par le principe du maximum (rem. V.1.13) cela implique que $1 = |g(1)| \leq 2^{-N}M$, et donc que $N \leq \frac{\log M}{\log 2}$. Finalement, on a $|g(s)| \leq M$, si $|s| = 3R$ et donc, d'après le principe du maximum, $\sup_{|s|=R} |g(s)| \leq M$ et $\sup_{|s|=R} \operatorname{Re}(h(s)) \leq \log M$. Le lemme A.3.11 permet d'en déduire que $|h'(s)| \leq \frac{4R \log M}{(R - |s|)^2}$, si $|s| < R$, et comme $h'(s) = \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\rho \in Y} \frac{v_\rho(f)}{s - \rho}$, cela permet de conclure.

Si $n \in \mathbf{N}$, notons Z_n l'ensemble des zéros de L dans le disque $D(2 + in, 4)$.

Corollaire A.3.13. — Il existe des constantes C_2, C_3 , telles que, si $|n|$ est assez grand :

- (i) $\sum_{\rho \in Z_n} v_\rho(L) \leq C_2 \log |n|$;
- (ii) $\left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| \leq C_3 \log |n| + C_2 \log |n| (\inf_{\rho \in Z_n} |s - \rho|)^{-1}$, si $s \in D(2 + in, \sqrt{10})$.

Démonstration. — On applique le lemme A.3.12 à $f(s) = \frac{L(s+(2+in))}{L(2+in)}$, et $R = 4$; dans les notations de ce lemme, on peut prendre $M = C_1|n|^{21/2}$, d'après le lemme A.3.10. On en déduit que

$$\sum_{\rho \in Z_n} v_\rho(L) \leq \frac{\frac{21}{2} \log n + \log C_1}{\log 2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| \leq \frac{16(\frac{21}{2} \log n + \log C_1)}{4 - \sqrt{10}} + \sum_{\rho \in Z_n} \frac{v_\rho(L)}{|s - \rho|},$$

si $|s - (2 + in)| \leq \sqrt{10}$. Le résultat s'en déduit.

Corollaire A.3.14. — *Il existe $C_4 > 0$, tel que, si $n \in \mathbf{N}$ est assez grand, il existe $t_n^+ \in [n, n + 1]$ et $t_n^- \in [-n - 1, -n]$, tels que*

$$\sup_{s \in [2+it_n^+, -1+it_n^+]} \left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| \leq C_4(\log n)^2 \quad \text{et} \quad \sup_{s \in [-1+it_n^-, 2+it_n^-]} \left| \frac{L'(s)}{L(s)} \right| \leq C_4(\log n)^2.$$

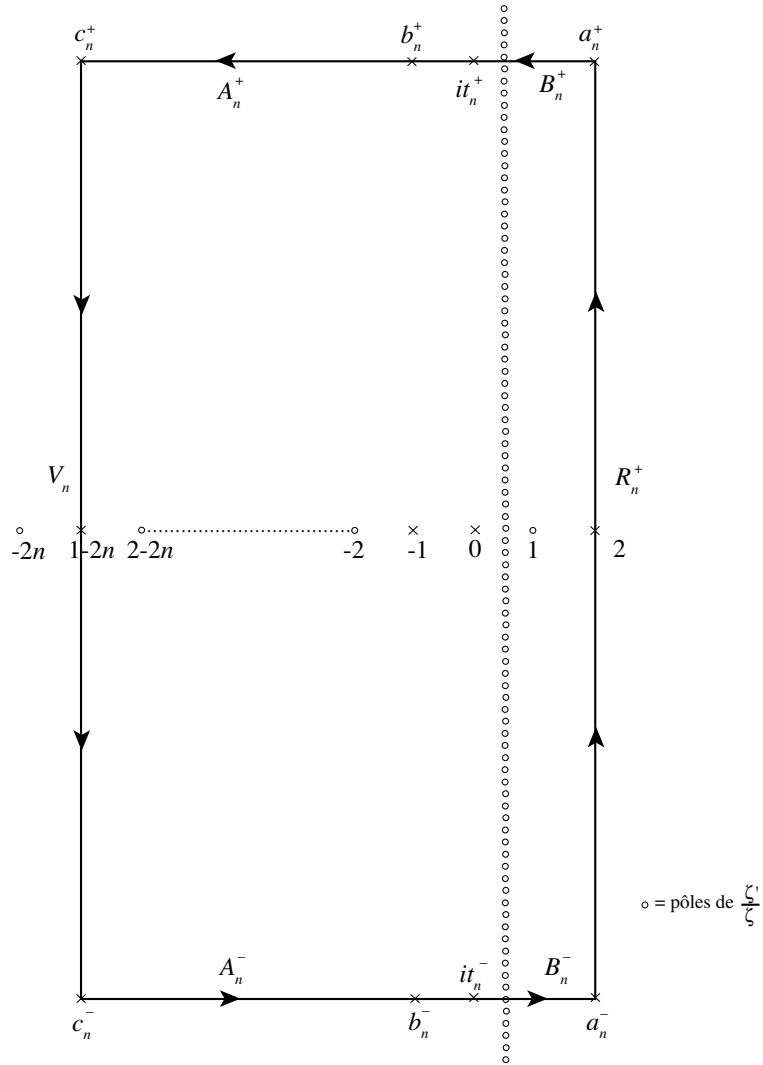
Démonstration. — Comme $|Z_n| \leq C_2 \log n$, les segments $[\text{Im}(\rho) - \frac{1}{2C_2 \log n}, \text{Im}(\rho) + \frac{1}{2C_2 \log n}]$, pour $\rho \in Z_n$ ne recouvrent pas complètement $[n, n + 1]$, puisque leur réunion est un ouvert de longueur ≤ 1 . Il existe donc t_n^+ tel que $|\text{Im}(\rho) - t_n^+| \geq \frac{1}{2C_2 \log n}$, quel que soit $\rho \in Z_n$. On a alors $\inf_{\rho \in Z_n} |s - \rho| \geq \inf_{\rho \in Z_n} |\text{Im}(s - \rho)| \geq \frac{1}{2C_2 \log n}$, quel que soit $s \in [2 + it_n^+, -1 + it_n^+]$. De même il existe $t_n^- \in [-n - 1, -n]$ tel que $\inf_{\rho \in Z_n} |s - \rho| \geq \frac{1}{2C_2 \log n}$, quel que soit $s \in [-1 + it_n^-, 2 + it_n^-]$. Le (ii) du lemme A.3.12 permet de conclure (avec $C_4 = 2C_2^2 + 1$ par exemple).

6. Conclusion

Passons à la démonstration du th. A.3.2. Pour prouver la convergence absolue de la série $\sum_{\rho \in Y(L)} \frac{v_\rho(L)}{\rho(\rho+1)}$, constatons que l'ensemble Z'_n des éléments de $Y(L)$ dont la partie imaginaire est comprise entre n et $n + 1$ est inclus dans le disque $D(2 + in, 4)$, et donc est un sous-ensemble de Z_n . Comme $\sum_{\rho \in Z_n} v_\rho(L) \leq C_2 \log |n|$, si n est assez grand, on déduit la convergence absolue de $\sum_{\rho \in Y(L)} \frac{v_\rho(L)}{\rho(\rho+1)}$ de celle de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$.

Maintenant, choisissons, pour tout n assez grand, des réels t_n^+ et t_n^- vérifiant les conclusions du cor. A.3.14. Soient a_n^+, b_n^+, c_n^+ les points $2 + it_n^+, -1 + it_n^+, c + 1 - 2n + it_n^+$, et a_n^-, b_n^-, c_n^- les points $2 + it_n^-, -1 + it_n^-, c + 1 - 2n + it_n^-$. On note :

- V_n le segment vertical $[c_n^+, c_n^-]$,
- A_n^+ et A_n^- les segments horizontaux $[b_n^+, c_n^+]$ et $[c_n^-, b_n^-]$,
- B_n^+ et B_n^- les segments horizontaux $[a_n^+, b_n^+]$ et $[b_n^-, a_n^-]$,
- R_n^- le chemin composé $B_n^+ \cdot A_n^+ \cdot V_n \cdot A_n^- \cdot B_n^-$,
- R_n^+ le segment vertical $[a_n^-, a_n^+]$.



Le chemin R_n dans le cas de ζ

Alors $R_n = R_n^+ \cdot R_n^-$ est le rectangle de sommets a_n^-, a_n^+, c_n^+ et c_n^- parcouru dans le sens direct. On note Y_n l'ensemble des pôles de F_x se trouvant à l'intérieur du rectangle R_n .

La formule des résidus nous donne alors

$$\int_{R_n} F_x(s) ds = \sum_{\rho \in Y_n} \text{Res}(F_x, \rho).$$

Maintenant, $\int_{R_n} F_x(s) ds = \int_{R_n^+} F_x(s) ds + \int_{R_n^-} F_x(s) ds + \int_{A_n^+ \cdot V_n \cdot A_n^-} F_x(s) ds + \int_{B_n^-} F_x(s) ds$.

- $\int_{R_n^+} F_x(s) ds$ tend vers $\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-L'(s)}{L(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$.

• Sur B_n^+ et B_n^- , $F_x(s)$ est, d'après le cor. A.3.14, majorée en valeur absolue, si $x \geq 1$, par $C_4(\log n)^2 \frac{x^3}{|\operatorname{Im}(s)| \cdot |\operatorname{Im}(s+1)|} \leq \frac{x^3 C_4 (\log n)^2}{n^2}$. Donc $\int_{B_n^+} F_x(s) ds$ et $\int_{B_n^-} F_x(s) ds$ sont majorés en valeur absolue par $3 \frac{x^3 C_4 (\log n)^2}{n^2}$ et tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

• Sur $A_n^+ \cdot V_n \cdot A_n^-$, $F_x(s)$ est, d'après le lemme A.3.7, majorée en valeur absolue, si $x \geq 1$, par $(C_0 + \log n) \frac{x^3}{|s(s+1)|} \leq (C_0 + \log n) \frac{x^3}{n^2}$, et comme la longueur de $A_n^+ \cdot V_n \cdot A_n^-$ est $2(2n-2) + t_n^+ - t_n^- \leq 6n-2$, on en déduit que $\int_{A_n^+ \cdot V_n \cdot A_n^-} F_x(s) ds$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit le théorème en faisant tendre n vers $+\infty$, et en remarquant que l'ensemble des pôles de F_x est la réunion croissante des Y_n , et donc que $\sum_{\rho \in Y_n} \operatorname{Res}(F_x, \rho)$ tend vers $\sum_{\operatorname{Re}(\rho) < 2} \operatorname{Res}(F_x, \rho)$.

A.4. Démonstration du théorème des nombres premiers

1. Non annulation sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$

Lemme A.4.1. — Si $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, et si $|z| < \inf(1, |\alpha|^{-1}, |\beta|^{-1}, |\alpha\beta|^{-1})$, alors

$$\frac{1 - \alpha\beta z^2}{(1-z)(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\alpha\beta z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \alpha + \cdots + \alpha^n)(1 + \beta + \cdots + \beta^n) z^n.$$

Démonstration. — Si on multiplie par $(1-z)(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\alpha\beta z)$ les deux membres de l'identité à démontrer, on obtient des séries du type $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\alpha, \beta) z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} Q_n(\alpha, \beta) z^n$, où les P_n et Q_n sont des polynômes (en deux variables). On est ramené à prouver que $P_n = Q_n$ pour tout n . Or pour prouver que $P_n = Q_n$, il suffit de prouver que $P_n = Q_n$ sur un ouvert, le reste s'en déduisant par prolongement analytique. On peut donc se restreindre au cas où $1, \alpha, \beta$ et $\alpha\beta$ sont tous distincts. Dans ce cas, la fraction rationnelle $F(z) = \frac{1 - \alpha\beta z^2}{(1-z)(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\alpha\beta z)}$ n'a que des pôles simples, ce qui rend sa décomposition en éléments simples particulièrement facile à calculer. Soient

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z)F(z) = \frac{1 - \alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\alpha\beta)} = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}, \\ a_\alpha &= \lim_{z \rightarrow \alpha^{-1}} (1-\alpha z)F(z) = \frac{1 - \alpha^{-1}\beta}{(1-\alpha^{-1})(1-\alpha^{-1}\beta)(1-\beta)} = -\frac{\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)}, \\ a_\beta &= \lim_{z \rightarrow \beta^{-1}} (1-\beta z)F(z) = \frac{1 - \alpha\beta^{-1}}{(1-\beta^{-1})(1-\alpha\beta^{-1})(1-\alpha)} = -\frac{\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}, \\ a_{\alpha\beta} &= \lim_{z \rightarrow \alpha^{-1}\beta^{-1}} (1-\alpha\beta z)F(z) = \frac{1 - \alpha^{-1}\beta^{-1}}{(1-\alpha^{-1}\beta^{-1})(1-\beta^{-1})(1-\alpha^{-1})} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{a_1}{1-z} + \frac{a_\alpha}{1-\alpha z} + \frac{a_\beta}{1-\beta z} + \frac{a_{\alpha\beta}}{1-\alpha\beta z} \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{\alpha}{1-\alpha z} - \frac{\beta}{1-\beta z} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha\beta z} \right) \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)} \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + (\alpha\beta)^{n+1}) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1 - \alpha^{n+1})(1 - \beta^{n+1})}{(1-\alpha)(1-\beta)} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \alpha + \dots + \alpha^n)(1 + \beta + \dots + \beta^n) z^n.
\end{aligned}$$

Proposition A.4.2. — Si $t \in \mathbf{R}$, alors $F(s) = \zeta(2s)^{-1} \zeta(s)^2 \zeta(s+it) \zeta(s-it)$ est une série de Dirichlet à coefficients positifs.

Démonstration. — En utilisant la factorisation de ζ en facteurs d'Euler, on obtient

$$F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{(1 - p^{-2s})}{(1 - p^{-s})^2 (1 - p^{-s-it}) (1 - p^{-s+it})}.$$

On peut alors utiliser le lemme A.4.1 avec $z = p^{-s}$, $\alpha = p^{it}$ et $\beta = p^{-it}$ pour obtenir la formule

$$F(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |1 + p^{it} + \dots + p^{ikt}|^2 p^{-ks} \right),$$

ce qui permet de conclure.

Théorème A.4.3. — La fonction ζ ne s'annule pas sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$.

Démonstration. — Supposons, par l'absurde qu'il existe $t \in \mathbf{R}$, avec $\zeta(1+it) = 0$. On a alors $\zeta(1-it) = \overline{\zeta(1+it)} = 0$. La fonction $\zeta(s+it)\zeta(s-it)$ a donc un zéro double en $s = 1$, ce qui fait que $F(s) = \zeta(2s)^{-1} \zeta(s)^2 \zeta(s+it)\zeta(s-it)$ est holomorphe en $s = 1$, le zéro double contrebalançant le pôle double de $\zeta(s)^2$. De même, les zéros de $\zeta(s)$ en $1+it$ et $1-it$ contrebalancent les pôles de $\zeta(s+it)$ en $1-it$ et $\zeta(s-it)$ en $1+it$. On en déduit que $F(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$. De plus, comme $\zeta(2s)^{-1}$ est holomorphe au voisinage de $s = \frac{1}{2}$, et comme F est à coefficients positifs, il suit du théorème de Landau (th. VII.1.1) que l'abscisse de convergence absolue de F est $< \frac{1}{2}$. On aboutit à une contradiction car, d'une part $F(\frac{1}{2}) = 0$ puisque $\zeta(2s)^{-1} = 0$, et d'autre part $F(\frac{1}{2}) > 0$ comme somme d'une série à termes positifs non tous nuls. Ceci permet de conclure.

2. Conclusion

D'après le lemme A.2.1, pour démontrer le théorème des nombres premiers, il suffit de prouver que $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$. Maintenant, comme ζ vérifie les propriétés (L1)–(L3) (cf. lemme A.3.1), le cor. A.2.4 et le th. A.3.2 nous fournissent la formule explicite

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \sum_{\rho \in Y(\zeta)} \frac{v_\rho(\zeta)x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} - \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{x^{1-2r}}{2r(2r-1)}.$$

Il en résulte que « $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$ » est équivalent à « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{\rho \in Y(\zeta)} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} = 0$ ». Comme ζ ne s'annule pas sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$, on a $\operatorname{Re}(\rho - 1) < 0$, et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)} = 0$, quel que soit $\rho \in Y(\zeta)$. Comme de plus $|\frac{v_\rho(\zeta)x^{\rho-1}}{\rho(\rho+1)}| \leq |\frac{v_\rho(\zeta)}{\rho(\rho+1)}|$, et comme la somme des $|\frac{v_\rho(\zeta)}{\rho(\rho+1)}|$ est convergente, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour les séries pour intervertir sommes et limites, ce qui permet de conclure.

ANNEXE B

EXERCICES

B.1. Représentations des groupes finis

On rappelle que si H est un sous-groupe d'un groupe G , alors $|H|$ divise $|G|$ (th. de Lagrange); le quotient $[G : H]$ de $|G|$ par $|H|$ est l'indice de H dans G .

1. Actions de groupes

Exercice B.1.1. — On fait agir S_n sur l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n\}$ par $\sigma(\{i_1, \dots, i_p\}) = \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_p)\}$.

- (i) Si $p \leq n$, quelle est l'orbite de $\{1, \dots, p\}$?
- (ii) Quel est le stabilisateur de $\{1, \dots, p\}$; quel est son cardinal?
- (iii) Retrouver la valeur $\frac{n!}{p!(n-p)!}$ pour le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Exercice B.1.2. — (démonstration combinatoire du petit th. de Fermat). Soient $n \geq 1$ et X l'ensemble des applications de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ dans $\{1, \dots, n\}$. Si $g \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $\phi \in X$, on définit $g \cdot \phi$ par $(g \cdot \phi)(x) = \phi(x + g)$, pour tout $x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (la loi de groupe de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est notée additivement).

- (i) Vérifier que ceci définit une action de groupe.
- (ii) Quels sont les points fixes de cette action? Combien y en a-t-il?
- (iii) Combien d'éléments a une orbite non réduite à un point?
- (iv) Calculer le nombre de ces orbites, et en déduire le petit théorème de Fermat.

Exercice B.1.3. — Soient p un nombre premier et G un groupe de cardinal divisible par p . On fait agir $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ sur G^p par $i \cdot (x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i-1})$ (i.e. on décale les indices de i , en identifiant $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $\{0, \dots, p-1\}$). Soit X le sous-ensemble de G^p des (x_0, \dots, x_{p-1}) vérifiant $x_0 \cdots x_{p-1} = 1$.

- (i) Montrer que X est stable par $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Quels sont les points fixes de cette action?
- (ii) Montrer que $|X|$ est divisible par p ; en déduire que G admet des éléments d'ordre p (th. de Cauchy).

2. Classes de conjugaison

On rappelle que $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ définit une action de G sur lui-même (par conjugaison), que les classes de conjugaison de G sont les orbites pour cette action, et que deux éléments de G sont conjugués s'ils sont dans la même classe de conjugaison.

Exercice B.1.4. — Soit G un groupe agissant sur un ensemble fini X . Montrer que si g et g' sont conjugués dans G , ils ont le même nombre de points fixes dans X . Comment ceci se traduit-il en termes du caractère de la représentation de permutation V_X ?

Exercice B.1.5. — (i) Soit K un corps et soit $g \in \mathbf{GL}_2(K)$ qui n'est pas une homothétie.

(a) Montrer qu'il existe $v \in K^2$ tel que v et $g(v)$ forment une base de K^2 sur K .

(b) En déduire que la classe de conjugaison de g dans $\mathbf{GL}_2(K)$ est celle de $\begin{pmatrix} 0 & -\det(g) \\ 1 & \text{Tr}(g) \end{pmatrix}$.

(ii) Combien $\mathbf{GL}_2(\mathbf{F}_p)$ a-t-il de classes de conjugaison ?

Exercice B.1.6. — Soit $n \geq 3$ et $z_n = \exp(2i\pi/n)$. On note D_n le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$ engendré par les matrices : $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} z_n & 0 \\ 0 & z_n^{-1} \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que D_n est d'ordre $2n$, n'est pas abélien, et que le groupe C_n engendré par Y est d'indice 2.

(ii) Montrer que D_3 est isomorphe à S_3 .

(iii) Faire la liste des classes de conjugaison de D_n .

3. Représentations irréductibles

Exercice B.1.7. — Soit $n \geq 2$ un entier. Quelles sont les représentations irréductibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice B.1.8. — Soient S_3 le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et s et t les éléments (12) et (123) de S_3 .

(i) Soient s et t les éléments (12) et (123) de S_3 . Vérifier (ou admettre) que s et t engendrent S_3 et que $sts^{-1} = t^2$, et déterminer les classes de conjugaison de S_3 .

(ii) Soit V une représentation de dimension finie de S_3 , et soient W_0, W_1 et W_2 les espaces propres de t (i.e. de $\rho_V(t)$) pour les valeurs propres 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2 . Montrer que $V = W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$.

(iii) Montrer que W_0 est stable par s , et que s échange W_1 et W_2 .

(iv) Montrer que, si $v \in W_1 - \{0\}$, alors le sous-espace de V engendré par v et $s \cdot v$ est stable par S_3 et irréductible comme représentation de S_3 .

(v) En déduire une décomposition de V en somme de représentations irréductibles de S_3 et la table des caractères de S_3 .

Exercice B.1.9. — On fait agir S_n sur \mathbf{C}^n par permutation des éléments de la base canonique.

(i) Montrer que l'hyperplan $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ est stable par S_n et que la représentation V ainsi obtenue est irréductible (considérer $v - \sigma \cdot v$, où σ est une transposition).

(ii) En déduire une décomposition de \mathbf{C}^n en somme de représentations irréductibles de S_n .

(iii) Quel est le caractère de V ?

Exercice B.1.10. — Soit η un caractère linéaire de G . Montrer que pour toute représentation irréductible V de G la représentation $V \otimes \eta$ est encore irréductible.

4. Tables de caractères

On rappelle que la table des caractères de G est la matrice dont les colonnes sont indexées par les représentations irréductibles de G et les lignes par les classes de conjugaison de G . L'élément correspondant à la colonne V et à la ligne C est le nombre $\chi_V(g)$ où $g \in C$.

On rappelle aussi que, si p premier divise $|G|$, alors G contient un élément d'ordre p (th. de Cauchy).

Exercice B.1.11. — Soit G un groupe non commutatif d'ordre 6.

(i) Quels sont les ordres des éléments de G ?

(ii) Montrer que G a deux caractères irréductibles de degré 1 (notés $\mathbf{1}$ et η) et un de degré 2 (noté χ).

(iii) Montrer que G a 3 classes de conjugaison ; quelles sont-elles ?

(iv) Montrer que $\eta(g) = 1$, si g est d'ordre 3, et que $\eta(g) = -1$, si g est d'ordre 2 (on s'intéressera à $\eta(g^2)$). En déduire le cardinal de chaque classe de conjugaison.

(v) Dresser la table des caractères de G .

Exercice B.1.12. — (o) Montrer que S_5 a 7 classes de conjugaison, et calculer le cardinal de chaque classe.

(i) On fait agir S_5 sur \mathbf{C}^5 par permutation des éléments de la base canonique. Montrer que l'hyperplan $U = \{\sum_{i=1}^5 x_i = 0\}$ est stable par S_5 , et calculer le caractère χ_U . En déduire que U et $U \otimes \text{sign}$ sont irréductibles non isomorphes.

(ii) Calculer $\chi_{\wedge^2 U}$ et montrer que $\wedge^2 U$ est irréductible.

(iii) Calculer $\chi_{\text{Sym}^2 U}$ et montrer que $\text{Sym}^2 U = \mathbf{1} \oplus U \oplus V$, où V est irréductible.

(iv) Dresser la table des caractères de S_5 .

(v) Soit H l'ensemble des $g \in S_5$ vérifiant $g(\{1, 2\}) = \{1, 2\}$. Montrer que H est un sous-groupe et décomposer $\text{Ind}_H^{S_5} \mathbf{1}$ en représentations irréductibles.

Exercice B.1.13. — Soit D_n le groupe construit dans l'exercice 3 et h un entier.

(i) Montrer que les applications $X \mapsto X$ et $Y \mapsto Y^h$ s'étendent en un morphisme de D_n dans $\text{GL}_2(\mathbf{C})$ et définissent donc une représentation V_h de D_n .

(ii) Pour quelles valeurs de h est-ce que V_h est irréductible? Pour quels h_1 et h_2 les V_{h_i} sont-elles isomorphes? On distinguera les cas n pair et n impair.

(iii) Dresser la table des caractères de D_n .

5. Exercices plus théoriques

Exercice B.1.14. — Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\sum_{M \in G} \text{Tr}(M)$ est un entier. Comment cet entier s'interprète-t-il?

Exercice B.1.15. — (Cet exercice fait suite à l'ex. B.1.9.)

(i) Si $\sigma \in S_n$, soit $f(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ . Montrer que $\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma)^2 = 2n!$.

(ii) Quel est le nombre moyen de points fixes d'un élément de S_n ?

Exercice B.1.16. — (i) Soit G un groupe fini et soit $\chi \in \widehat{G}$. Montrer que $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)$ vaut 1 si χ est le caractère trivial, et 0 sinon. (Multiplier la somme par $\chi(h)$, pour un $h \in G$ bien choisi.)

(ii) En déduire que, si $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, et si $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \chi_2(g)$, alors $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 1$ si $\chi_1 = \chi_2$, et $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$ si $\chi_1 \neq \chi_2$. (Orthogonalité des caractères linéaires)

(iii) Soient ξ, ζ deux racines n -ièmes de l'unité dans \mathbf{C} , calculer $\sum_{j=0}^{n-1} \zeta^j \bar{\xi}^j$, en utilisant ce qui précède et l'ex. B.1.7.

Exercice B.1.17. — Soit G un groupe fini.

(i) Montrer que, si χ est le caractère d'une représentation de G , alors $K_\chi = \{g \in G, \chi(g) = \chi(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G .

(ii) Montrer que G est simple si et seulement si $K_\chi = \{1\}$, pour tout $\chi \in \text{Irr}(G) - \{1\}$. Comment peut-on lire la simplicité de G sur sa table des caractères?

Exercice B.1.18. — Soient G un groupe fini, et V une représentation fidèle de G (i.e. $\rho_V(g) \neq 1$ si $g \neq 1$).

(i) Montrer que $\chi_V(g) \neq \dim V$, si $g \neq 1$.

(ii) Soit W une représentation irréductible de G . Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle \chi_W, \chi_V^n \rangle T^n$ est une fraction rationnelle que l'on explicitera, mais n'est pas un polynôme.

(iii) En déduire que W apparaît dans la décomposition d'une infinité de $\otimes^n V$.

Exercice B.1.19. — Soit G un groupe fini, soit $H \neq G$ un sous-groupe de G , et soit V la représentation de permutation associée à l'action de G sur G/H .

(i) Montrer que $\iota : \text{Ind}_H^G \mathbf{1} \rightarrow V$ définie par $\iota(\phi) = \sum_{x \in G/H} \phi(x^{-1})e_x$ est bien définie et induit un isomorphisme de représentations de $\text{Ind}_H^G \mathbf{1}$ sur V . En déduire que $\sum_{g \in G} \chi_V(g) = |G|$.

(ii) Montrer que V n'est pas irréductible ; en déduire que $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)^2 \geq 2$. (On remarquera que χ_V est à valeurs réelles.)

(iii) Soit Y l'ensemble des $g \in G$ vérifiant $\chi_V(g) = 0$. Montrer que

$$\sum_{g \in G} (\chi_V(g) - 1)(\chi_V(g) - |G/H|) \leq |G/H| \cdot |Y|.$$

(iv) En déduire que $|Y| \geq |H|$.

(v) Soit X un ensemble de cardinal ≥ 2 sur lequel G agit transitivement (i.e., quels que soient $x, y \in X$, il existe $g \in G$, tel que $y = g \cdot x$). Montrer que la proportion des $g \in G$ agissant sans point fixe sur X est supérieure ou égale à $1/|X|$.

Exercice B.1.20. — Soit G un groupe commutatif (pas nécessairement fini). Montrer que toute représentation irréductible de G de dimension finie est de dimension 1. (On pourra utiliser le lemme de Schur.)

Exercice B.1.21. — Soient G_1, G_2 deux groupes finis, et soit $G = G_1 \times G_2$.

(i) Montrer que, si V_1 et V_2 sont des représentations irréductibles de G_1 et G_2 , alors $V_1 \boxtimes V_2$ (cf. rem. I.3.3 du poly) est une représentation irréductible de G (on calculera le caractère de $V_1 \boxtimes V_2$ en fonction de ceux de V_1 et V_2).

(ii) Montrer que toute représentation irréductible de G est obtenue de cette manière.

Exercice B.1.22. — (i) Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer que l'équation $\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_k} = 1$ n'a qu'un nombre fini de solutions dans $(\mathbf{N} - \{0\})^k$.

(ii) Montrer que $|\text{Irr}(G)| \rightarrow +\infty$ quand $|G| \rightarrow +\infty$.

B.2. Analyse réelle

Sauf mention explicite du contraire, on ne demande pas de vérifier que les fonctions ou les ensembles considérés sont mesurables.

1. Intégration

Exercice B.2.1. — (i) Montrer que, si A est de mesure nulle dans \mathbf{R}^n , alors $A \times \mathbf{R}^m$ est de mesure nulle dans \mathbf{R}^{n+m} .

(ii) Montrer que la diagonale dans \mathbf{R}^2 est de mesure nulle.

Exercice B.2.2. — Montrer qu'une fonction continue, qui est nulle p.p., est identiquement nulle et que deux fonctions continues qui sont égales p.p., sont égales partout.

Exercice B.2.3. — Montrer que, si $\varepsilon > 0$ et $C > 0$, alors pour presque tout nombre réel x , l'ensemble des couples d'entiers (p, q) , tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq Cq^{-2-\varepsilon}$, est fini.

Exercice B.2.4. — Soit $X \subset \mathbf{R}^m$ de mesure finie. Montrer que, quel que soit $\alpha \in [0, 1]$, il existe $B \subset X$ tel que $\lambda(B) = \alpha\lambda(X)$. (On pourra s'intéresser à $f(t) = \lambda(X \cap [-t, t]^m)$.)

Exercice B.2.5. — (i) Montrer que $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1} dt < +\infty$, si $s > 0$.

(ii) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{s-1} dt \rightarrow \Gamma(s)$ quand $n \rightarrow \infty$.

(iii) En déduire la formule $\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^s}{s(s+1)\dots(s+n)}$ de Gauss.

Exercice B.2.6. — Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ décroissante et sommable. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} tf(t) = 0$.

Exercice B.2.7. — Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$, et soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de sous-ensembles mesurables de \mathbf{R}^m .

(i) Montrer que si A_n est croissante et $\cup_{n \in \mathbf{N}} A_n = \mathbf{R}^m$, alors $\int_{\mathbf{R}^m} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f$.

(ii) Montrer que, si $\lambda(A_n) \rightarrow 0$, alors $\int_{A_n} f \rightarrow 0$.

Exercice B.2.8. — Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ dérivable. Montrer que f' est mesurable et que, si f' est bornée, alors $\int_a^b f' = f(b) - f(a)$.

Exercice B.2.9. — Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par $f(x) = |x|^{-1/2}$, si $0 < |x| < 1$, et $f(x) = 0$, sinon.

(i) Montrer que f est sommable.

(ii) Soit $n \mapsto r_n$ une bijection de \mathbf{N} sur \mathbf{Q} . Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{-1}{2})^n f(x - r_n)$ converge absolument p.p., que la somme $F(x)$ est sommable, et calculer $\int_{\mathbf{R}} F(x) dx$. À quoi ressemble le graphe de F ?

Exercice B.2.10. — (Volume de la boule unité de \mathbf{R}^m)

Soit $m \geq 1$. On munit \mathbf{R}^m de la norme euclidienne standard $\| \cdot \|$. Si $\rho \in \mathbf{R}_+$, soit $B(\rho)$ la boule unité fermée de centre 0 et de rayon ρ . On note C_m le volume de $B(1)$.

(i) Montrer que $\lambda(B(\rho)) = C_m \rho^m$, si $\rho \in \mathbf{R}_+$.

(ii) Soit $\phi_r = \sum_{k=1}^{2^r} (\frac{k}{2^r})^{1-m} \mathbf{1}_{B(\frac{k}{2^r}) - B(\frac{k-1}{2^r})}$. Montrer que $\int_{\mathbf{R}^m} \phi_r \rightarrow \int_{B(1)} \|x\|^{1-m} dx$.

(iii) En déduire que $\int_{B(1)} \|x\|^{1-m} dx = mC_m$.

(iv) Montrer que, si $\phi \in \text{Esc}(\mathbf{R}_+)$, alors $mC_m \int_{\mathbf{R}_+} \phi(t) dt = \int_{\mathbf{R}^m} \|x\|^{1-m} \phi(\|x\|) dx$. En déduire que $\phi \in L^1(\mathbf{R}_+)$ si et seulement si $\|x\|^{1-m} \phi(\|x\|) \in L^1(\mathbf{R}^m)$, et que $mC_m \int_{\mathbf{R}_+} \phi(t) dt = \int_{\mathbf{R}^m} \|x\|^{1-m} \phi(\|x\|) dx$, quel que soit $\phi \in L^1(\mathbf{R}_+)$.

(v) Soit $s \in \mathbf{R}$. Montrer que $\int_{\|x\| \leq 1} \|x\|^s < +\infty$ si et seulement si $s > -m$ et que $\int_{\|x\| \geq 1} \|x\|^s < +\infty$ si et seulement si $s < -m$.

(vi) En appliquant ce qui précède à la fonction $t^{m-1} e^{-\pi t^2}$, et en utilisant la définition de $\pi = C_2$, en déduire la valeur de $\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2} dx$, et montrer que $C_m = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(1 + \frac{m}{2})}$.

Exercice B.2.11. — Soit $N \in \mathbf{N} - \{0\}$, et soit $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'application déduite de $z \mapsto z^N$ de \mathbf{C} dans \mathbf{C} , en identifiant \mathbf{R}^2 à \mathbf{C} . On rappelle par anticipation que le jacobien de φ en $z_0 \in \mathbf{C}$ est $|Nz_0^{N-1}|^2$. Montrer que, si f est sommable sur \mathbf{R}^2 , alors

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(u, v) du dv = N \int_{\mathbf{R}^2} f(\varphi(x, y))(x^2 + y^2)^{N-1} dx dy.$$

Exercice B.2.12. — (i) Établir la formule $\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1-x^2y^2} = \frac{3}{4}\zeta(2)$.

(ii) Soient $\Omega_1 = \{(u, v), u > 0, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\}$ et $\Omega_2 = \{(x, y), 0 < x, y < 1\}$. Montrer que φ défini par $\varphi(u, v) = (\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u})$ induit un difféomorphisme de Ω_1 sur Ω_2 .

(iii) En déduire la formule $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice B.2.13. — (i) Soit $P \in \mathbf{R}[X, Y]$ non nul. Montrer que $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, P(x, y) = 0\}$ est de mesure nulle dans \mathbf{R}^2 . (On pourra s'intéresser à $\int_{\mathbf{R}^2} \mathbf{1}_X$.)

(ii) Soit $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_m]$ non nul. Montrer que $\{x \in \mathbf{R}^m, P(x) = 0\}$ est de mesure nulle dans \mathbf{R}^m .

2. Fonctions définies par des intégrales

Exercice B.2.14. — (Fonction Γ d'Euler)

(i) Montrer que l'intégrale $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ est bien définie si $s \in \mathbf{R}_+^*$.

(ii) Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* et tend vers $+\infty$ en $s = 0$.

(iii) Montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ si $s > 0$; en déduire que $\Gamma(n+1) = n!$, si $n \in \mathbf{N}$.

(iv) *Formule de Stirling* : montrer que $\Gamma(s+1) \sim (\frac{s}{e})^s \sqrt{2\pi s}$ au voisinage de $+\infty$. On fera le changement de variable $t = s + u\sqrt{s}$ (méthode de Laplace), et on montrera que

$$-u\sqrt{s} + s \log(1 + \frac{u}{\sqrt{s}}) \leq \begin{cases} -\frac{u^2}{2} & \text{si } -\sqrt{s} < u \leq 0, \\ -u + \log(1 + u) & \text{si } u \geq 0 \text{ et } s \geq 1. \end{cases}$$

(v) En déduire la *formule de Gauss* : $\frac{1}{\Gamma(s)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+n)}{n!n^s}$, si $s \in \mathbf{R}_+^*$.

Exercice B.2.15. — (Convolution de deux fonctions sommables) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$.

(i) Montrer que $\int \int |f(x-y)g(y)| = \|f\|_1 \|g\|_1$.

(ii) En déduire que, pour presque tout x la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est sommable et que $f * g$ définie p.p. par $f * g(x) = \int f(x-y)g(y) dy$ est elle-aussi sommable.

(iii) Montrer que, si $f_1 = f_2$ p.p. et $g_1 = g_2$ p.p., alors $f_1 * g_1 = f_2 * g_2$ p.p. (L'application $(f, g) \mapsto f * g$ passe donc au quotient et définit une application $(f, g) \mapsto f * g$ de $L^1(\mathbf{R}^m) \times L^1(\mathbf{R}^m)$ dans $L^1(\mathbf{R}^m)$.)

(iv) Montrer que $(f, g) \mapsto f * g$ est bilinéaire continue de $L^1(\mathbf{R}^m) \times L^1(\mathbf{R}^m)$ dans $L^1(\mathbf{R}^m)$.

Exercice B.2.16. — Soit ϕ une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}^m , à support dans $[-1, 1]^m$, à valeurs dans \mathbf{R}_+ , et vérifiant $\int_{\mathbf{R}^m} \phi = 1$. Si $\varepsilon > 0$, soit ϕ_ε définie par $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m} \phi(\frac{x}{\varepsilon})$.

(i) Montrer que $\int_{\mathbf{R}^m} \phi_\varepsilon = 1$, et que ϕ_ε est à support dans $[-\varepsilon, \varepsilon]^m$.

(ii) Montrer que, si f est une fonction en escalier, alors $f * \phi_\varepsilon \rightarrow f$ p.p. quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(iii) Montrer que, si f est une fonction en escalier, alors $f * \phi_\varepsilon \rightarrow f$ dans $L^1(\mathbf{R}^m)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(iv) Montrer que, si $f \in L^1(\mathbf{R}^m)$, alors $f * \phi_\varepsilon \rightarrow f$ dans $L^1(\mathbf{R}^m)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

(v) Montrer que, si $f \in L^1(\mathbf{R}^m) + L^2(\mathbf{R}^m)$ vérifie $\int_{\mathbf{R}^m} \phi f = 0$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^m)$, alors $f = 0$ p.p.

Exercice B.2.17. — Soient $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

(i) Montrer que $f * g$ est partout définie, est bornée, et $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

(ii) Montrer que $f * g$ est continue et tend vers 0 à l'infini. (Commencer par des fonctions en escalier.)

(iii) Montrer que si $A, B \subset \mathbf{R}^n$ sont de mesure > 0 , alors $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$ contient un ouvert.

(iv) Un fermé d'intérieur vide est-il forcément de mesure nulle ?

Exercice B.2.18. — (i) Soient $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$ et $g \in \mathcal{C}_c^k(\mathbf{R}^m)$, où $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^m)$.

(ii) Montrer que, si $f \in \mathcal{C}^\ell(\mathbf{R}^m)$ et si $g \in \mathcal{C}_c^k(\mathbf{R}^m)$, alors $f * g \in \mathcal{C}^{k+\ell}(\mathbf{R}^m)$.

3. Transformée de Fourier

Exercice B.2.19. — Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(t) = \frac{1}{(t+i)^3}$.

(i) Montrer que \hat{f} est bien définie, est de classe \mathcal{C}^1 , et que $|t^N \hat{f}(t)| \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow +\infty$, pour tout $N \in \mathbf{N}$.

(ii) Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $g(t) = e^{-2\pi t}$, si $t > 0$, et $g(t) = 0$, si $t \leq 0$. Calculer \hat{g} ; en déduire la transformée de Fourier de $h(t) = t^2 g(t)$, puis \hat{f} .

(iii) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(n+i)^3}$ est absolument convergente, et calculer sa somme.

Exercice B.2.20. — (i) Montrer que, si $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$, l'équation différentielle $u'' - u = \phi$ a une unique solution dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Cette solution est-elle toujours à support compact ?

(ii) À quelle condition portant sur $\hat{\phi}$, l'équation différentielle $u'' + u = \phi$ a-t-elle une solution dans $\mathcal{S}(\mathbf{R})$? Si solution il y a, est-elle toujours à support compact ?

Exercice B.2.21. — Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(t) = e^{-\pi t^2}$.

(i) Montrer que \hat{f} est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , et vérifie l'équation différentielle $\hat{f}'(x) = -2\pi x \hat{f}(x)$. En déduire, en utilisant la formule $\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi t^2} dt = 1$, que $\hat{f}(x) = e^{-\pi x^2}$.

(ii) Si $u \in \mathbf{R}_+^*$, calculer la transformée de Fourier de f_u définie par $f_u(t) = e^{-\pi u t^2}$.

(iii) Si $u \in \mathbf{R}_+^*$, et si $F(u) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 u}$, montrer que $F(u) = \frac{1}{\sqrt{u}} F\left(\frac{1}{u}\right)$.

Exercice B.2.22. — Si $\lambda > 0$, soit $\phi_\lambda(t) = e^{-\pi \lambda |t|} \frac{\sin \pi t}{\pi t}$. Soit $x \in \mathbf{R}$.

(i) Montrer que $\lambda \mapsto \hat{\phi}_\lambda(x)$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* , et calculer sa dérivée. En déduire $\hat{\phi}_\lambda(x)$.

(ii) Remarquer que $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ est la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}$, et retrouver le (i).

(iii) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente (c'est-à-dire que $\frac{\sin t}{t}$ est sommable sur $[0, T]$, pour tout T , et que $\int_0^T \frac{\sin t}{t} dt$ a une limite quand $T \rightarrow +\infty$), et la calculer.

4. Espaces de Hilbert

Exercice B.2.23. — Quelle est la valeur maximale de $\int_{-1}^1 x f(x) dx$ pour $f \in L^2([-1, 1])$ soumis aux conditions $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ et $\int_{-1}^1 f(x)^2 = 1$.

Exercice B.2.24. — (o) On rappelle que les polynômes sont dense dans $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ (cas particulier du th. de Stone-Weierstrass). Montrer qu'ils sont denses dans $L^2([0, 1])$.

(i) Soient X_1, \dots, X_n des variables. Montrer que le déterminant de la matrice des $(\frac{1}{X_i + X_j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est

$$\Delta_n(X_1, \dots, X_n) = \frac{\prod_{i < j} (X_i - X_j)^2}{\prod_{i, j} (X_i + X_j)}.$$

(ii) Soit $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ une suite d'entiers strictement croissante. Si $n \in \mathbf{N}$, notons $\text{Vect}(x^{a_1}, \dots, x^{a_n})$ le sous-espace de $\mathcal{C}([0, 1])$ engendré par les x^{a_i} , pour $1 \leq i \leq n$. Montrer que, si $k \in \mathbf{N}$, alors

$$d(x^k, \text{Vect}(x^{a_1}, \dots, x^{a_n}))^2 = \frac{\Delta_{n+1}(k + \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{2}, \dots, a_n + \frac{1}{2})}{\Delta_n(a_1 + \frac{1}{2}, \dots, a_n + \frac{1}{2})}.$$

(iii) Montrer que $\text{Vect}(x^{a_i}, i \in \mathbf{N})$ est dense dans $L^2([0, 1])$, si et seulement si $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$.

Exercice B.2.25. — (i) Montrer que $(\frac{d}{dx})^n e^{-\pi x^2} = e^{-\pi x^2} H_n(x)$, où H_n est un polynôme de degré exactement n et dont on calculera le coefficient du terme de plus haut degré.

(ii) On définit une fonction Ψ_n par la formule $\Psi_n(x) = e^{-\frac{\pi x^2}{2}} H_n(x)$. Calculer le produit scalaire $\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_{L^2}$.

(iii) Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ orthogonale aux Ψ_n . Montrer que g définie par $g(x) = e^{-\frac{\pi x^2}{2}} f(x)$ est sommable et que \hat{g} est identiquement nulle. En déduire que les Ψ_n engendrent un sous-espace dense de $L^2(\mathbf{R})$.

(iv) En utilisant le fait que la transformée de Fourier de $e^{-\pi t^2}$ est $e^{-\pi x^2}$, calculer, par récurrence, la transformée de Fourier de Ψ_n . (On établira la relation $\Psi_{n+1}(t) = \Psi'_n(t) - 2\pi t \Psi_n(t)$.)

(v) Montrer qu'il existe une unique isométrie $U : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R})$ vérifiant $U(\Psi_n) = (-i)^n \Psi_n$, si $n \in \mathbf{N}$.

(vi) Montrer que $U(\phi) = \hat{\phi}$, pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

B.3. Fonctions holomorphes

Les majorations suivantes peuvent s'avérer utiles : $|\frac{1}{z-a}| \leq \frac{1}{|z|-|a|}$, si $|a| < |z|$ et $|z^s| \leq e^{C|\text{Im}(s)||z|^{\text{Re}(s)}}$, si la détermination du logarithme est telle que $|\text{Im}(\log z)| \leq C$.

1. Généralités

Exercice B.3.1. — (i) Montrer que $\sin z$ est holomorphe sur \mathbf{C} , et que $\cotg \pi z$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$.

(ii) Montrer que $z \mapsto |z|^2$ est \mathcal{C}^∞ au sens réel sur $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$, mais n'est pas holomorphe.

Exercice B.3.2. — Soit f holomorphe sur \mathbf{C} vérifiant $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$, pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$. Montrer que $f(z) = z^2$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

Exercice B.3.3. — Peut-on trouver une fonction \mathcal{C}^∞ , non identiquement nulle, à support compact dans \mathbf{R} , dont la transformée de Fourier soit à support compact ?

Exercice B.3.4. — Montrer que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n!}$ est holomorphe sur $D(0, 1^-)$, mais n'a de prolongement analytique à aucun ouvert contenant strictement $D(0, 1^-)$. Quid de $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n!}}{n!}$?

Exercice B.3.5. — Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non constant. Montrer que, si P ne s'annule pas sur \mathbf{C} , alors $|1/P|$ atteint son maximum en un point de \mathbf{C} . En déduire que \mathbf{C} est algébriquement clos.

Exercice B.3.6. — (Lemme de Schwarz) Soit $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$, et soit f holomorphe de D dans D vérifiant $f(0) = 0$.

(i) Montrer que $|f(z)| \leq |z|$, quel que soit $z \in D$.

(ii) Montrer que, si $|f'(0)| = 1$, alors $f(z) = f'(0)z$ quel que soit $z \in D$.

(iii) Montrer que si f est bijective, alors il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $f(z) = e^{2i\theta}z$, quel que soit $z \in D$.

(iv) Montrer que si f n'est pas bijective, alors pour tout compact K de D , il existe $c_K < 1$, tel que $|f(z)| \leq c_K|z|$ pour tout $z \in K$.

(v) Soit $f^{on} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois). Montrer que, si f n'est pas bijective, alors f^{on} tend uniformément vers 0 sur tout compact de D .

Exercice B.3.7. — Soient $a < b \in \mathbf{R}$, et soit f une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de la bande verticale $B = \{z \in \mathbf{C}, a \leq \text{Re}(z) \leq b\}$. On suppose que f est bornée sur les droites $\text{Re}(z) = a$ et $\text{Re}(z) = b$.

(i) Montrer que, s'il existe $C > 0$ et $c > 0$ tels que $|f(z)| \leq Ce^{c|\text{Im}(z)|}$, quel que soit $z \in B$, alors f est bornée sur B . (On considérera la fonction $e^{\varepsilon z^2}f(z)$.)

(ii) Montrer de même que, s'il existe $C > 0$, $c > 0$, et $N \in \mathbf{N}$ tels que $|f(z)| \leq Ce^{c|\text{Im}(z)|^N}$, quel que soit $z \in B$, alors f est bornée sur B .

(iii) Construire une fonction holomorphe sur \mathbf{C} , bornée sur chacune des droites $\text{Re}(z) = a$ et $\text{Re}(z) = b$, et non bornée sur B (penser à des exponentielles d'exponentielles).

Exercice B.3.8. — Montrer que tg est somme de sa série de Taylor sur $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$. Quid de $\frac{\text{tg } t}{1+t^2}$?

Exercice B.3.9. — (i) Montrer que si K est un compact de \mathbf{C} , il existe $n(K)$ tel que $\sum_{n=n(K)}^{+\infty} (\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n})$ soit uniformément convergente sur K . En déduire que la série $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n})$ définit une fonction F , holomorphe sur $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$.

(ii) Montrer que $G(z) = F(z) - \pi \cotg \pi z$ est impaire et périodique de période 1.

(iii) Montrer que G se prolonge par continuité en une fonction holomorphe sur \mathbf{C} .

(iv) Montrer que G est bornée sur \mathbf{C} ; en déduire que $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{z+n} + \frac{1}{z-n}) = \pi \cotg \pi z$, si $z \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$.

(v) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ le développement de Taylor de $\frac{t}{e^t-1}$ en $t = 0$, et, si k est un entier ≥ 1 , soit $\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. Montrer que

$$\zeta(2k) = -\frac{1}{2} B_{2k} \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k)!}.$$

En déduire que $\pi^{-2k} \zeta(2k)$ est un nombre rationnel (Euler, 1734).

Exercice B.3.10. — Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe $f : D(0, 1^-) \rightarrow \mathbf{C}$ qui soit bijective.

2. La fonction Γ dans le plan complexe

Exercice B.3.11. — (La fonction Γ dans le plan complexe).

(i) Montrer que $F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$ converge si $\operatorname{Re}(z) > 0$, et que $F(z)$ est holomorphe sur le demi-plan $\operatorname{Re}(z) > 0$.

(ii) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on a $F(z) = \frac{F(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$, si $\operatorname{Re}(z) > 0$. En déduire qu'il existe une unique fonction Γ , méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors de pôles simples aux entiers négatifs, telle que $\Gamma(z) = F(z)$ si $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Exercice B.3.12. — Nous nous proposons de démontrer que $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$, pour tout $s \notin \mathbf{Z}$ (formule des compléments).

(i) Soit s dans la bande $-1 < \operatorname{Re}(s) < 0$. (On peut adapter ce qui suit pour calculer les intégrales du type $\int_0^{+\infty} f(t)t^s dt$, où f est une fraction rationnelle). Si $r > 0$, on note $C^+(0, r)$ le quart de cercle $\theta \mapsto re^{i\theta}$, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $C^-(0, r)$ les 3 quarts de cercle $\theta \mapsto re^{i\theta}$, pour $\theta \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$. Si $0 < \varepsilon < R$, soit $\gamma_{\varepsilon, R}^+$ le lacet obtenu en composant $C^+(0, R)$, $[iR, i\varepsilon]$, $C^+(0, \varepsilon)^{\text{opp}}$ et $[\varepsilon, R]$ (faire un dessin!), et soit $\gamma_{\varepsilon, R}^-$ le lacet obtenu en composant $[i\varepsilon, iR]$, $C^-(0, R)$, $[R, \varepsilon]$ et $C^-(0, \varepsilon)^{\text{opp}}$.

(a) Calculer $\int_{\gamma_{\varepsilon, R}^+} \frac{(-z)^s}{z+1} dz$ et $\int_{\gamma_{\varepsilon, R}^-} \frac{(-z)^s}{z+1} dz$ en utilisant la formule des résidus, avec $\log(-z) \in \mathbf{R}$, si $z \in \mathbf{R}_*$. (Attention à la détermination du logarithme!).

(b) Montrer que les intégrales sur les portions de cercle tendent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow +\infty$.

(c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{y^s}{y+1} dy$, si $-1 < \operatorname{Re}(s) < 0$.

(ii) Soit $B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$. Montrer que $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$, si $\operatorname{Re}(s) > 0$ et $\operatorname{Re}(t) > 0$. (On écrira $\Gamma(s+t)B(s, t)$ comme une intégrale double.)

(iii) Démontrer la formule des compléments (on utilisera la formule $B(s, t) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{s-1}}{(1+y)^{s+t}} dy$ obtenue en faisant le changement de variable $y = \frac{x}{x-1}$).

(iv) En déduire que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice B.3.13. — Soit Γ la fonction méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors de pôles simples en les entiers négatifs, définie par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z \frac{dt}{t}$, si $\operatorname{Re}(z) > 0$. On rappelle (cf. ex. B.3.11) que l'on a $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

(i) Montrer que $\lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$.

(ii) Montrer que, si $x > 0$, et si $c \notin -\mathbf{N}$, alors $I_c(x) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-z}\Gamma(z) dz$ converge.

(iii) Si $n \in \mathbf{N}$, calculer $I_1(x) - I_{\frac{1}{2}-n}(x)$ par la méthode des résidus.

(iv) Montrer que $I_{\frac{1}{2}-n}(x) \rightarrow 0$. En déduire que $\frac{1}{2i\pi} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{-z}\Gamma(z) dz = e^{-x}$.

(v) Retrouver le résultat en utilisant la transformée de Fourier.

3. Fonctions méromorphes

Exercice B.3.14. — (i) Montrer qu'une fonction méromorphe sur un ouvert Ω n'a qu'un nombre fini de pôles dans tout compact de Ω .

- (ii) Montrer qu'une fonction méromorphe bornée à l'infini (il existe M et R tels que $|f(z)| \leq M$, si $|z| \geq R$) est une fraction rationnelle.
- (iii) Montrer qu'une fonction méromorphe tendant vers l'infini à l'infini est une fraction rationnelle.

Exercice B.3.15. — Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C}, \text{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré, et soit $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe, périodique de période 1.

- (i) Montrer qu'il existe $\tilde{f} : D(0, 1^-) - \{0\} \rightarrow \mathbf{C}$, holomorphe, telle que $f(z) = \tilde{f}(e^{2i\pi z})$.
- (ii) En déduire qu'il existe une suite $(a_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ de nombres complexes, telle que l'on ait $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(f) e^{2i\pi n z}$, quel que soit $z \in \mathcal{H}$, la série étant normalement convergente sur toute bande horizontale $a \leq \text{Im}(z) \leq b$, avec $0 < a < b < +\infty$.
- (iii) Montrer que $f'(z) = 2i\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} n a_n(f) e^{2i\pi n z}$, pour tout $z \in \mathcal{H}$.

4. Applications de la formule des résidus

Exercice B.3.16. — Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} et $z_0 \in \Omega$.

- (i) Si f est holomorphe en z_0 , alors $\text{Res}(f, z_0) = 0$.
- (ii) Si $f = \frac{g}{h}$, où g et h sont holomorphes sur Ω , si $g(z_0) \neq 0$, et si h a un zéro simple en z_0 , alors $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.
- (iii) Si f a un pôle simple en z_0 , et si g est holomorphe en z_0 , alors $\text{Res}(gf, z_0) = g(z_0)\text{Res}(f, z_0)$.
- (iv) Si $k \geq 1$, et $f = (z - z_0)^{-k}g$, où g est holomorphe sur Ω , alors $\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$.
- (v) Si f est méromorphe sur Ω , alors $\frac{f'}{f}$ est méromorphe sur Ω , avec des pôles simples aux pôles et zéros de f , et on a $\text{Res}(\frac{f'}{f}, z_0) = v_{z_0}(f)$, pour tout $z_0 \in \Omega$.

Exercice B.3.17. — Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. Calculer directement $\text{Res}(\frac{1}{z^2 + \lambda^2} e^{1/z}, 0)$. Retrouver le résultat en intégrant $\frac{1}{z^2 + \lambda^2} e^{1/z}$ sur $C(0, R)$, avec $R \rightarrow +\infty$.

Exercice B.3.18. — Soit f définie sur \mathbf{R} par $f(t) = e^{-\pi t^2}$. Rappel : $\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi t^2} dt = 1$.

- (i) Montrer que f se prolonge analytiquement en une fonction (encore notée f) holomorphe sur \mathbf{C} .
- (ii) Si $a \in \mathbf{R}$ et $R \in \mathbf{R}_+$, soit $\gamma_{a,R}$ le lacet composé des segments $[-R, R]$, $[R, R + ai]$, $[R + ai, -R + ai]$ et $[-R + ai, -R]$. Que vaut $\int_{\gamma_{a,R}} f(z) dz$?
- (iii) En déduire, en faisant tendre R vers $+\infty$, que $\hat{f}(a) = e^{-\pi a^2}$.

Exercice B.3.19. — Calculer les intégrales suivantes par la méthode des résidus :

- (a) $\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$ et $\int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(x+i)(x-i)(x-2i)\dots(x-ni)}$. (On prendra un lacet γ formé du segment $[-R, R]$ et d'un demi-cercle convenable.)
- (b) $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx$.

Exercice B.3.20. — Soit $k \geq 2$ un entier. Calculer $\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{-2i\pi t\xi}}{(t+i)^k} dt$ par la méthode des résidus. (On prendra un lacet γ formé du segment $[-R, R]$ et d'un demi-cercle convenable⁽¹⁾ ; cette méthode permet le calcul de la transformée de Fourier des fonctions rationnelles).

Exercice B.3.21. — Soit $\gamma_{\varepsilon,R}$ le lacet composé du segment $[\varepsilon, R]$, du demi-cercle $C^+(0, R) : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{C}$, donné par $t \mapsto Re^{it}$, du segment $[-R, -\varepsilon]$, et demi-cercle $C^+(0, \varepsilon)^{\text{opp}}$, donné par $t \mapsto \varepsilon e^{i(\pi-t)}$. (Faire un dessin.)

- (i) Calculer $\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz$ via la formule des résidus.

⁽¹⁾Une manière de voir que l'on a pris le bon demi-cercle est de vérifier que ce qu'on obtient tend vers 0 quand $|\xi| \rightarrow +\infty$; il faut aussi faire attention à l'indice du lacet par rapport aux pôles...

- (ii) Montrer que $\int_{C^+(0,R)} \frac{e^{iz}}{z} dz \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$.
 (iii) Calculer la limite de $\int_{C^+(0,\varepsilon)^{\text{opp}}} \frac{e^{iz}}{z} dz$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
 (iv) En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice B.3.22. — Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ unitaire de degré n . Calculer

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

En déduire que \mathbf{C} est algébriquement clos.

Exercice B.3.23. — Soit Ω un ouvert connexe de \mathbf{C} , et soient f une fonction holomorphe non constante sur Ω et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions holomorphes tendant vers f uniformément sur tout compact de Ω .

(i) Soient $z_0 \in \Omega$ et $r > 0$ tels que $D(z_0, r) \subset \Omega$. On suppose que $C(z_0, r)$ ne contient aucun zéro de f . Montrer qu'il existe $N(z_0, r)$ tel que, si $n \geq N(z_0, r)$, alors f et f_n ont le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, dans $D(z_0, r^-)$.

(ii) Montrer que, si f_n est injective sur Ω , pour tout n assez grand, il en est de même de f .

Exercice B.3.24. — (Théorème de Rouché et applications).

Soient $R > 0$, $D = D(0, R)$ et $C = \partial D$ le cercle de centre 0 et de rayon R . Soient Ω un ouvert contenant D , f holomorphe sur Ω , ne s'annulant pas sur C , et g holomorphe sur Ω , telle que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, si $z \in C$.

(i) Montrer qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$, ouvert contenant C , et h holomorphe sur Ω' , tels que $\frac{g}{f} = e^h$ sur Ω' . Que vaut h' ?

(ii) Montrer que f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans D . Le résultat n'est-il valable que pour un disque ?

(iii) Soit G holomorphe sur Ω telle que $|G(z)| < R$, si $z \in C$. Montrer que $G(D) \subset D$ et que G a un unique point fixe dans D .

(iv) Montrer que toutes les solutions de $z \sin z = 1$ sont réelles.

Exercice B.3.25. — Calculer $\int_{\mathbf{R}} e^{2i\pi t\xi} \frac{e^{-\pi t}}{e^{2\pi t} + 1} dt$ de deux manières : d'une part en intégrant $e^{2i\pi z\xi} \frac{e^{-\pi z}}{e^{2\pi z} + 1} dz$ sur un rectangle convenable, en faisant tendre les sommets vers l'infini, d'autre part en écrivant $\frac{e^{-\pi t}}{e^{2\pi t} + 1}$ comme une série en $e^{\pi t}$ ou $e^{-\pi t}$ suivant que t est négatif ou positif. Comparer avec l'ex. B.3.9.

5. formes modulaires et séries de Dirichlet

Soit $\mathcal{H} = \{z, \text{Im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On rappelle (ex. B.3.15) que si $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe et périodique de période 1, alors il existe une suite $(a_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ de nombres complexes telle que l'on ait $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(f) e^{2i\pi n z}$, quel que soit $z \in \mathcal{H}$, la convergence étant uniforme sur toute bande horizontale $0 < a \leq \text{Im}(z) \leq b$. Il est d'usage de poser $e^{2i\pi z} = q$ et d'appeler q -développement de f la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(f) q^n$. On définit alors $v_\infty(f) \in \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ comme l'inf. de l'ensemble des n tels que $a_n(f) \neq 0$ (en particulier, $v_\infty(f) = +\infty$ si et seulement si $f = 0$).

Si $k \in \mathbf{Z}$, une forme modulaire f de poids k est une fonction holomorphe sur \mathcal{H} , telle que $f(z+1) = f(z)$ et $f(z) = z^{-k} f(-1/z)$, quel que soit $z \in \mathcal{H}$, et $v_\infty(f) \geq 0$. Si $v_\infty(f) > 0$, on dit que f est parabolique.

Soit Ω l'ouvert $\{z \in \mathcal{H}, |z| > 1 \text{ et } -\frac{1}{2} < \text{Re}(z) < \frac{1}{2}\}$. Si $a, b \in \mathcal{H}$ vérifient $|a| = |b| = 1$, et si C^+ est le demi-cercle de centre 0 et rayon 1 contenu dans \mathcal{H} , on note $A(a, b)$ l'arc de C^+ allant de a à b . Soit $\alpha = e^{i\pi/3}$. Le bord $\partial\Omega$ de Ω est alors la réunion des demi-droites verticales $[\alpha, \alpha + i\infty)$ et $[\alpha^2, \alpha^2 + i\infty)$,

et de l'arc de cercle $A(\alpha^2, \alpha)$. On note D la réunion de Ω , de la demi-droite $[\alpha, \alpha + i\infty)$ et de l'arc de cercle $A(i, \alpha)$.

Exercice B.3.26. — (formule $\frac{k}{12}$) Soit f une forme modulaire de poids k non nulle. Le but de cet exercice est de prouver la formule suivante.

$$v_\infty(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_\alpha(f) + \sum_{z \in D - \{i, \alpha\}} v_z(f) = \frac{k}{12}.$$

(i) On suppose que f ne s'annule pas sur $\partial\Omega$. Si $T \geq 2$, soit γ_T le lacet composé des segments $[\alpha, \alpha + iT]$, $[\alpha + iT, \alpha^2 + iT]$, $[\alpha^2 + iT, \alpha^2]$, et de l'arc de cercle $A(\alpha^2, \alpha)$. On note $\frac{df}{f}$ la 1-forme $\frac{f'(z)}{f(z)} dz$.

- Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{[\alpha+iT, \alpha^2+iT]} \frac{df}{f}$ tend vers $-v_\infty(f)$ quand $T \rightarrow +\infty$.
- Montrer que $\int_{[\alpha, \alpha+iT]} \frac{df}{f} + \int_{[\alpha^2+iT, \alpha^2]} \frac{df}{f} = 0$.
- Montrer que $\int_{A(\alpha^2, i)} \frac{df}{f} = -\int_{A(i, \alpha)} \left(\frac{df}{f} + \frac{k}{z} dz\right)$. En déduire que $\frac{1}{2i\pi} \int_{A(\alpha^2, \alpha)} \frac{df}{f} = \frac{k}{12}$.
- Montrer que $v_\infty(f) + \sum_{z \in \Omega} v_z(f) = \frac{k}{12}$.

(ii) Montrer que, si on ne suppose pas que f ne s'annule pas sur $\partial\Omega$, alors

$$v_\infty(f) + \sum_{z \in \Omega} v_z(f) + \frac{1}{2} \sum_{z \in \partial\Omega - \{\alpha, \alpha^2\}} v_z(f) + \frac{1}{6}(v_\alpha(f) + v_{\alpha^2}(f)) = \frac{k}{12}.$$

(Si f s'annule en $z \in \partial\Omega$, modifier le chemin γ_T au voisinage de z en le remplaçant par un arc de cercle, à l'intérieur de Ω , de centre z et de rayon tendant vers 0.)

(iii) Conclure.

Exercice B.3.27. — (Applications de la formule $\frac{k}{12}$)

- (i) Montrer qu'une forme modulaire de poids 0 est constante.
- (ii) Montrer qu'il n'y a pas de forme modulaire de poids 2 ou de poids impair.
- (iii) Montrer que l'ensemble M_k des formes modulaires de poids k est un espace vectoriel et que $f \mapsto (a_n(f))_{0 \leq n \leq \frac{k}{12}}$ est une application linéaire injective de M_k dans $\mathbf{C}^{d(k)}$, avec $d(k) = 1 + [\frac{k}{12}]$. En déduire que M_k est de dimension finie et que $\dim M_k \leq 1 + [\frac{k}{12}]$.

Exercice B.3.28. — (Séries d'Eisenstein)

- (i) Montrer que $|mz + n| \geq \inf(y, \frac{y}{|z|}) \sup(|m|, |n|)$, si $z = x + iy \in \mathcal{H}$ et $m, n \in \mathbf{Z}$.
- (ii) Montrer que, si $k \geq 3$, la série $\sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - (0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k}$ converge uniformément sur tout compact de \mathcal{H} .
- (iii) Si $z \in \mathcal{H}$, soit $G_k(z) = \frac{\Gamma(k)}{2(-2i\pi)^k} \sum_{(m,n) \in \mathbf{Z}^2 - (0,0)} \frac{1}{(mz+n)^k}$. Montrer que G_k est une fonction holomorphe sur \mathcal{H} et que

$$G_k\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k G_k(z), \quad \text{quel que soit } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}).$$

(iv) Montrer que, si k est impair, alors $G_k = 0$, et que si k est pair, G_k est une forme modulaire de poids k non nulle.

Exercice B.3.29. — (q -développement des séries d'Eisenstein)

Le but de cet exercice est de prouver que, si k est un entier pair ≥ 3 , le q -développement de G_k est donné par la formule suivante

$$G_k = \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} \zeta(k) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad \text{où } \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n, d \geq 1} d^{k-1}.$$

Soit k un entier ≥ 2 .

- (i) Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z+n)^k}$ converge uniformément sur tout compact de \mathcal{H} . En déduire que sa somme $A_k(z)$ est une fonction holomorphe sur \mathcal{H} .
- (ii) Montrer que A_k est périodique de période 1. Déduire du (i) que $x \mapsto A_k(x + iy)$ est somme de sa série de Fourier $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n(y) e^{2i\pi nx}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
- (iii) Calculer $a_n(y)$ par la formule des résidus.
- (iv) En déduire que $\frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} A_k(z) = \sum_{n \geq 1} n^{k-1} e^{2i\pi nz}$.
- (v) Soit $k \geq 3$, pair. Montrer que $G_k(z) = \frac{\Gamma(k)}{(-2i\pi)^k} (\zeta(k) + \sum_{m \geq 1} A_k(mz))$, et en déduire le résultat.

Exercice B.3.30. — (La fonction thêta de Jacobi)

- (i) Montrer que $\theta(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\pi n^2 z}$ converge normalement sur tout compact de \mathcal{H} . En déduire que θ est holomorphe sur \mathcal{H} .
- (ii) Montrer, en utilisant le fait que la transformée de Fourier de $e^{-\pi t^2}$ est $e^{-\pi x^2}$ (cf. ex. B.3.18), que $\theta(iu) = \frac{1}{\sqrt{u}} \theta(\frac{i}{u})$, si $u \in \mathbf{R}_+^*$.
- (iii) En déduire que l'on a $\theta(z) = \sqrt{\frac{i}{z}} \theta(\frac{-1}{z})$, si $z \in \mathcal{H}$ (où \sqrt{z} est la racine carrée de z holomorphe sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$, et valant 1 en 1).

Exercice B.3.31. — Cet exercice est un préliminaire pour le théorème des 4 carrés. Son but est de démontrer que si $(a_n)_{n \geq 2}$ est une suite de nombres complexes vérifiant :

- il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que $a_n = O(n^c)$,
- $F(z) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n e^{i\pi nz}$ vérifie l'équation fonctionnelle $z^{-4} F(-1/z) = F(z)$, si $z \in \mathcal{H}$,

alors $a_n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

- (i) Montrer que $F(z) = O(e^{-2\pi \text{Im}(z)})$ dans $Y = \{z \in \mathbf{C}, |\text{Re}(z)| \leq 1, \text{Im}(z) \geq 1\}$.
- (ii) Montrer que $F(1 - 1/z) = O(\text{Im}(z)^{c+1})$ dans Y .
- (iii) Soit k un entier pair. Si $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ est une fonction, et si $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$, on définit $f|_k \gamma : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ par la formule $f|_k \gamma(z) = (cz + d)^{-k} f(\frac{az+b}{cz+d})$. Vérifier que ceci est bien défini et que $(f|_k \gamma_1)|_k \gamma_2 = f|_k \gamma_1 \gamma_2$, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$.
- (iv) Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S^2 = (TS)^3 = -I$; en déduire que pour toute fonction $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$, on a $f|_k S^2 = f|_k (TS)^3 = f$.
- (v) Montrer que $F|_4 TS = F|_4 TST$. (On pourra s'intéresser à $F|_4 T^2 STSTST^2$.)
- (vi) En déduire⁽²⁾ que $F|_4 (TS)^2 = F|_4 T$ et que, si $G = F \cdot F|_4 TS \cdot F|_4 (TS)^2$, alors $G|_{12} S = G|_{12} T = G$ et $G = O(\text{Im}(y)^{c+1-4} e^{-4\pi \text{Im}(y)})$ dans Y .
- (vii) En déduire que G est une forme modulaire de poids 12, que $v_\infty(G) \geq 2$, et conclure.

Exercice B.3.32. — (Sommes de 4 carrés)

Le but de cet exercice est de démontrer la formule suivante (C. Jacobi, 1829), dont on déduit une forme effective du théorème de Lagrange (1770) : *tout nombre entier positif est somme⁽³⁾ d'au plus 4 carrés de*

⁽²⁾Ces calculs cachent les résultats suivants. Le sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ engendré par S et T est $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, et celui engendré par S et T^2 est le sous-groupe Γ de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ des matrices dont l'image dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est I ou S . Comme $|\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})| = 6$, l'indice de Γ dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ est 3, et $I, TS, (TS)^2$ forment un système de représentants de $\Gamma \backslash \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$.

⁽³⁾Ce résultat a été énoncé par Bachet de Méziriac en 1624 et généralisé par Fermat en 1638, sous la forme : tout nombre entier est somme de 3 nombres triangulaires, 4 carrés, 5 nombres pentagonaux, 6 nombres hexagonaux etc. (un nombre k -gonal est de la forme $\frac{n((k-2)n-(k-4))}{2}$, avec $n \geq 1$), mais on n'a aucune trace de démonstration. L'énoncé général a été démontré par Cauchy en 1815.

nombres entiers,

$$|\{(a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n\}| = \begin{cases} 8 \sum_{d|n} d & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 24 \sum_{d|m} d & \text{si } n = 2^k m, \text{ où } m \text{ est impair et } k \geq 1. \end{cases}$$

On note $r(n)$ la quantité $|\{(a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = n\}|$; autrement dit $r(n)$ est le nombre de décompositions de n en somme de quatre carrés. On note $\theta = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i\pi n^2 z}$ la fonction thêta de Jacobi de l'ex. B.3.30.

(i) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} r(n) e^{i\pi n z} = \theta(z)^4$.

(ii) Montrer que $H(z) = \frac{\Gamma(2)}{2(-2i\pi)^2} \sum_{(\mu, \nu) \in \mathbf{Z}^2} \left(\frac{1}{(\mu z + \nu + \frac{1}{2})^2} - \frac{1}{(\mu z + \nu + \frac{z}{2})^2} \right)$ est holomorphe sur \mathcal{H} et vérifie les équations fonctionnelles $H(z+2) = H(z)$ et $z^2 H(\frac{1}{z}) = -H(z)$.

(iii) Montrer que $H(z) = \frac{\Gamma(2)}{(-2i\pi)^2} (3\zeta(2) + \sum_{\mu=1}^{+\infty} A_2(\mu z + \frac{1}{2}) - \sum_{\mu=0}^{+\infty} A_2((\mu + \frac{1}{2})z))$. En déduire que $H(z) = \frac{-1}{8} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{i\pi n z}$, avec $b_n = \sum_{d|n} d$, si n est impair, et $b_n = 3 \sum_{d|n} d$, si $n = 2^k m$, où m est impair et $k \geq 1$.

(iv) Montrer que $r(n) \leq (1 + 2\sqrt{n})^4$ et $b_n \leq \frac{n(n+1)}{2}$. En déduire que, si $F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{i\pi n z}$, alors $a_n = O(n^2)$.

(v) En déduire, en utilisant l'ex. B.3.31, que $\theta^4(z) = -8H(z)$, et conclure.

ANNEXE C

EXAMENS ET CORRIGÉS

Examen du 10 juillet 2007

Durée 2 heures

Documents autorisés : cours photocopié et notes personnelles

Les 5 exercices sont totalement indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Tous les énoncés du cours peuvent être utilisés sans démonstration, mais doivent être signalés par leur nom ou par une référence précise au photocopié. Les nombres apparaissant en gras dans la marge représentent le nombre de points de la question correspondante (il est donc possible, en théorie, d'obtenir une note de 25 sur 20).

Exercice 1. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^\infty$ une suite bornée de nombres complexes.

(i) Montrer que, si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$, alors $(a_n x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$, et que l'application linéaire $f : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ainsi définie est continue (on ne demande pas de vérifier la linéarité de f). **1**

(ii) Montrer que si f est surjective, il existe $C > 0$ tel que $|a_n| \geq C$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. (On pourra commencer par montrer que f est injective en considérant un antécédent de e_i , où, si $i \in \mathbf{N}$, on a noté $e_i \in \ell^2$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $x_n = 0$, si $n \neq i$ et $x_i = 1$.) **2**

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $f(t) = \frac{1}{(t+i)^3}$.

(i) Montrer que \hat{f} est bien définie, est de classe \mathcal{C}^1 , et que $|t^N \hat{f}(t)| \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow +\infty$, pour tout $N \in \mathbf{N}$. **1**

(ii) Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $g(t) = e^{-2\pi t}$, si $t > 0$, et $g(t) = 0$, si $t \leq 0$. Calculer \hat{g} ; en déduire la transformée de Fourier de $h(t) = t^2 g(t)$, puis \hat{f} . **2**

(iii) Retrouver le résultat par la méthode des résidus. (On intégrera $F_t(z) = \frac{e^{-2i\pi tz}}{(z+i)^3}$ sur un contour bien choisi (faire un dessin), et on traitera en détail le cas $t \geq 0$, et rapidement le cas $t \leq 0$.) **4**

Exercice 3. Soit S_3 le groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$. On note e , s et t les trois classes de conjugaison de S_3 , où e est la classe de conjugaison de l'identité, s celle des transpositions et t celle des 3-cycles.

(i) Montrer (sans les construire) que S_3 a deux représentations irréductibles de dimension 1 et une de dimension 2. **1**

(ii) On note χ_1 le caractère de la représentation triviale **1**, χ_2 celui de la signature ε qui est l'autre **2**

représentation de dimension 1, et θ celui de la représentation W de dimension 2. De quelle représentation $\psi = \chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ est-il le caractère? Compléter la table

	e	s	t
χ_1			
χ_2			
$\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$			
θ			

2 (iii) On fait agir S_3 sur lui-même par conjugaison intérieure ($g \cdot x = gxg^{-1}$), et on note V la représentation de permutation associée (cf. alinéa 2.3 du § VII.1) et χ son caractère. Calculer χ . (On rappelle que, si G est un groupe fini, si $x \in G$, et si C_x est la classe de conjugaison de x et $Z_x = \{g \in G, gx = xg\}$ est le centralisateur de x , alors $|C_x| \cdot |Z_x| = |G|$.) En déduire les multiplicités de $\mathbf{1}$, ε et W dans la décomposition de V .

1 **Exercice 4.** (i) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{(n+x)^s}$ converge si $\operatorname{Re}(s) > 1$, et que la somme $F(x, s)$ de cette série est holomorphe en s sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$.

2 (ii) Établir la formule $F(x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt$, si $\operatorname{Re}(s) > 1$.

1 (iii) Montrer que $F(x, s)$ admet un prolongement méromorphe à \mathbf{C} , holomorphe en dehors d'un pôle simple de résidu 1 en $s = 1$.

Exercice 5. Soient $D = D(0, 1)$ et $C = \partial D$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Soient Ω un ouvert contenant D , f holomorphe sur Ω , ne s'annulant pas sur C , et g holomorphe sur Ω , telle que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, si $z \in C$.

2 (i) Montrer qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$ ouvert contenant C et h holomorphe sur Ω' tels que $\frac{g}{f} = e^h$ sur Ω' . Que vaut h' ?

2 (ii) Montrer que f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec multiplicité) dans D . (On pourra utiliser sans démonstration le fait que, si F est holomorphe non identiquement nulle dans un voisinage de z_0 , alors $\operatorname{Res}\left(\frac{F'}{F}, z_0\right)$ est l'ordre du zéro de F en z_0 .)

2 (iii) Soit G holomorphe sur Ω telle que $|G(z)| < 1$, si $z \in C$. Montrer que $G(D) \subset D$ et que G a un unique point fixe dans D .

Corrigé

Exercice 1. (i) $\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n x_n|^2 \leq \|a\|_\infty^2 \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^2 = \|a\|_\infty^2 \|x\|_2^2 < +\infty$, ce qui prouve que $(a_n x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$ et $\|f(x)\|_2 \leq \|a\|_\infty \|x\|_2$. Comme f est linéaire, cette dernière inégalité montre que f est continue (et $\|f\| \leq \|a\|_\infty$). (ii) Si f est surjective, il existe $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2$ avec $f(x) = e_i$. On a alors $a_i x_i = 1$, et donc $a_i \neq 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$. Maintenant, si $f(x) = 0$, on a $a_n x_n = 0$ pour tout n , et comme aucun des a_n n'est nul, cela implique que $x_n = 0$ pour tout n . Le noyau de f est donc réduit à 0, ce qui montre que f est injective.

Il résulte que f est bijective, et comme elle est continue et ℓ^2 est complet, son inverse f^{-1} est aussi continue d'après le théorème de l'image ouverte⁽¹⁾. On a alors $f^{-1}(e_n) = a_n^{-1} e_n$, et donc $\|a_n^{-1}\| = \|a_n^{-1} e_n\|_2 \leq \|f^{-1}\| \|e_n\|_2 = \|f^{-1}\|$. D'où le résultat avec $C = \|f^{-1}\|^{-1}$.

⁽¹⁾Ce théorème a disparu du poly en même temps qu'une grande partie de la théorie des espaces de Banach.

Exercice 2. (i) La fonction f est sommable ainsi que $t \mapsto tf(t)$. Il en résulte ((ii) du th. IV.2.5) que \hat{f} est bien définie et est de classe \mathcal{C}^1 . De plus, f est de classe \mathcal{C}^∞ , et $f^{(N)}(t) = \frac{(-3)(-4)\dots(-N-2)}{(t+i)^{3+N}}$ est sommable; il en résulte

((i) du th. IV.2.5) que $|t^N \hat{f}(t)| \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow +\infty$, pour tout $N \in \mathbf{N}$.

(ii) $\hat{g}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t(1+ix)} dt = \left[\frac{e^{-2\pi t(1+ix)}}{-2\pi(1+ix)} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi(1+ix)}$. Comme $t^2 g(t)$ est sommable, sa transformée de Fourier est $\frac{1}{(-2i\pi)^2} \hat{g}^{(2)}(x) = \frac{2}{(2i\pi)^3} \frac{1}{(x-i)^3}$ ((ii) du th. IV.2.5); en particulier elle est sommable. On peut donc appliquer la formule d'inversion de Fourier dans L^1 , ce qui nous donne $\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{2}{(2i\pi)^3} \frac{1}{(x-i)^3}\right) = t^2 g(t)$. Comme $\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{1}{(x-i)^3}\right)(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{2i\pi tx} \frac{1}{(x-i)^3} dx = (-1)^3 \hat{f}(t)$, grâce au changement de variable $x = -y$, on obtient finalement $\hat{f}(t) = \frac{(-2i\pi)^3}{2} t^2 g(t)$.

(iii) La fonction $F_t(z)$ est méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe en dehors d'un pôle d'ordre 3 en $z = -i$, et comme

$$e^{-2i\pi tz} = e^{-2\pi t} e^{-2i\pi t(z+i)} = e^{-2\pi t} (1 - 2i\pi t(z+i) + \frac{1}{2}(2i\pi t(z+i))^2 + \dots),$$

on a $F_t(z) = e^{-2\pi t} \left(\frac{1}{(z+i)^3} - \frac{2i\pi t}{(z+i)^2} + \frac{(2i\pi t)^2}{2(z+i)} + \dots \right)$, et donc $\text{Res}(F_t, -i) = \frac{(2i\pi)^2}{2} t^2 e^{-2\pi t}$.

Supposons $t \geq 0$. Si $R > 1$, soit γ_R le lacet formé du segment $[-R, R]$ et du demi-cercle C_R^- paramétré par $t \mapsto Re^{-i\pi t}$, pour $t \in [0, 1]$. Soient

$$I_1(R) = \int_{[-R, R]} F_t(z) dz \quad \text{et} \quad I_2(R) = \int_{C_R^-} F_t(z) dz.$$

On a $I(\gamma_R, -i) = -1$, et donc

$$\int_{\gamma_R} F_t(z) dz = 2i\pi I(\gamma_R, -i) \text{Res}(F_t, -i) = \frac{(-2i\pi)^3}{2} t^2 e^{-2\pi t}, \quad \text{quel que soit } R > 1.$$

Maintenant, $I_1(R) \rightarrow \hat{f}(t)$ quand $R \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, $|e^{-2i\pi tz}| \leq 1$, si $\text{Im}(z) \leq 0$, et $|z+i| \geq |z| - 1 = R - 1$, si $z \in C_R^-$. On en déduit la majoration $|F_t(z)| \leq \frac{1}{(R-1)^3}$, si $z \in C_R^-$ et donc $|I_2(R)| \leq \frac{1}{(R-1)^3} \text{lg}(C_R^-) = \frac{\pi R}{(R-1)^3} \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$. En passant à la limite, cela nous donne $\hat{f}(t) = \frac{(-2i\pi)^3}{2} t^2 e^{-2\pi t}$.

Si $t \leq 0$, on remplace le demi-cercle C_R^- par le demi-cercle C_R^+ dans le demi-plan supérieur. On a alors $I(\gamma_R, -i) = 0$, et la même méthode que ci-dessus montre que $\hat{f}(t) = 0$.

Exercice 3. (i) Comme S_3 a trois classes de conjugaison, il a aussi 3 représentations irréductibles W_1, W_2 et W_3 , et comme $(\dim W_1)^2 + (\dim W_2)^2 + (\dim W_3)^2 = 6$ d'après la formule de Burnside, la seule possibilité est que deux des dimensions valent 1 et la troisième 2.

(ii) $\psi = \chi_1 + \chi_2 + 2\theta$ est le caractère de la représentation régulière d'après le (i) du cor. I.2.18; on a donc $\psi(e) = 6$, $\psi(s) = 0$ et $\psi(t) = 0$, d'après la formule générale pour le caractère de la représentation régulière (alinéa 2.3 du § I.1). Ceci nous fournit la table

	e	s	t
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
$\chi_1 + \chi_2 + 2\theta$	6	0	0
θ	2	0	-1

(iii) Comme V est une représentation de permutation, $\chi(g)$ est le nombre de points fixes de g (alinéa 2.3 du § I.1), c'est-à-dire le nombre d'éléments h de S_3 tels que $ghg^{-1} = h$, ou encore le nombre d'éléments de S_3 commutant avec g . On a donc $\chi(g) = |Z_g| = |S_3| \cdot |C_g|^{-1}$. On en déduit que $\chi(e) = 6$, $\chi(s) = 2$ et $\chi(t) = 3$.

Si W' est une représentation irréductible, alors la multiplicité de W' dans V est $\langle \chi_{W'}, \chi \rangle$ d'après le cor. I.2.14. Comme

$$\begin{aligned}\langle \chi_1, \chi \rangle &= \frac{1}{6}(6 + 3 \cdot (1 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 3)) = 3, \\ \langle \chi_2, \chi \rangle &= \frac{1}{6}(6 + 3 \cdot (-1 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 3)) = 1 \\ \langle \theta, \chi \rangle &= \frac{1}{6}(2 \cdot 6 + 3 \cdot (0 \cdot 2) + 2 \cdot (-1 \cdot 3)) = 1,\end{aligned}$$

on a $V = 3 \cdot \mathbf{1} \oplus \varepsilon \oplus W$.

Exercice 4. (i) Si $a > 1$ et $\operatorname{Re}(s) > a$, alors $|\frac{1}{(n+x)^s}| \leq \frac{1}{(n+x)^a}$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^a} < +\infty$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \frac{1}{(n+x)^s}$ converge normalement sur $\operatorname{Re}(s) > a$. Il résulte du (ii) du th. V.2.11 que la somme $F(x, s)$ de cette série est holomorphe sur $\operatorname{Re}(s) > a$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, la fonction $F(x, s)$ est holomorphe sur $\operatorname{Re}(s) > 1$.

(ii) On a $\frac{1}{(n+x)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-(n+x)t} t^{s-1} dt$, si $\operatorname{Re}(s) > 0$. Les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+x)t} t^{s-1}$ sont majorées en valeur absolue par $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+x)t} t^{\operatorname{Re}(s)-1} = \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}} t^{\operatorname{Re}(s)-2}$ qui est sommable, si $\operatorname{Re}(s) - 2 > -1$ car à décroissance rapide en $+\infty$ et équivalente à $t^{\operatorname{Re}(s)-2}$ en 0. On peut donc, si $\operatorname{Re}(s) > 1$, utiliser le théorème de convergence dominée pour échanger somme et intégrale, ce qui nous donne

$$F(x, s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} e^{-(n+x)t} t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+x)t} t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt.$$

(iii) Posons $g_x(t) = \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}}$. Alors g_x est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ comme restriction d'une fonction holomorphe en dehors de $2i\pi\mathbf{Z} - \{0\}$, et à décroissance rapide à l'infini. On est donc dans les conditions d'application de la prop. VII.2.6, et $M(g_x, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt$ admet un prolongement holomorphe à \mathbf{C} vérifiant $M(g_x, 0) = g_x(0) = 1$. Or on a $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$, et donc $F(x, s) = \frac{1}{s-1} M(g_x, s-1)$. Le résultat s'en déduit.

Exercice 5. (i) Soit $\Omega' = \{z \in \Omega, |f(z) - g(z)| < |f(z)|\}$. Alors Ω' est un ouvert comme image réciproque de l'ouvert $\{(x, y), x < y\}$ de \mathbf{R}^2 par l'application continue $z \mapsto (|f(z) - g(z)|, |f(z)|)$, et Ω' contient \mathbf{C} par hypothèse. Maintenant, si $z \in \Omega'$, on a $|\frac{g(z)}{f(z)} - 1| < 1$, ce qui permet de définir h comme la composée de $\frac{g}{f} : \Omega' \rightarrow D(1, 1^-)$ et

$\log : D(1, 1^-) \rightarrow \mathbf{C}$, où \log est la détermination principale du logarithme. On a alors $h' = \frac{(e^h)'}{e^h} = \frac{(g/f)'}{g/f} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f}$.

(ii) La fonction $\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$ admet $-h$ comme primitive sur Ω' et donc a une intégrale nulle sur tout lacet contenu dans Ω' . En particulier, si γ est le cercle \mathbf{C} parcouru dans le sens direct, alors $\int_\gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = 0$. On peut aussi évaluer cette intégrale par la formule des résidus : on a $I(\gamma, a) = 1$, si $|a| < 1$ et $I(\gamma, a) = 0$, si $|a| > 1$; on en déduit, compte-tenu de la formule $\operatorname{Res}\left(\frac{F'}{F}, z_0\right) = v_{z_0}(F)$, que si F ne s'annule pas sur \mathbf{C} , alors $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz$ est le nombre de zéros de F dans D , comptés avec multiplicité. Comme f ne s'annule pas sur \mathbf{C} par hypothèse, et g non plus puisque $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, si $z \in \mathbf{C}$, on déduit de la formule $\int_\gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = 0$ que f et g ont le même nombre de zéros dans D , comptés avec multiplicité.

(iii) D étant compact et G continue sur D , il existe $z_0 \in D$ tel que $|G|$ atteigne son maximum en z_0 , et le principe du maximum montre que $z_0 \in \mathbf{C}$. Comme $|G(z_0)| < 1$, par hypothèse, on a $|G(z)| < 1$, si $z \in D$, et donc $G(D) \subset D$. En appliquant le (ii) à $f(z) = z$ et $g(z) = z - G(z)$, on en déduit que f et g ont le même nombre de zéros dans D , et comme f a un unique zéro en 0, cela implique que g a un unique zéro et donc que G a un unique point fixe dans D .

Examen du 8 juillet 2008

Durée 2 heures

Documents autorisés : cours photocopié et notes personnelles

Les 5 exercices sont totalement indépendants et peuvent donc être traités dans n'importe quel ordre. Tous les énoncés du cours peuvent être utilisés sans démonstration, mais doivent être signalés par leur nom ou par une référence précise au photocopié. Les nombres apparaissant en gras dans la marge représentent le nombre de points (sur 20) de la question correspondante (il est donc possible, en théorie, d'obtenir une note de 28 sur 20).

Exercice 1. On se propose d'établir la table des caractères du groupe S_4 des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$. Comme les partitions de 4 sont 4, $3 + 1$, $2 + 2$, $2 + 1 + 1$ et $1 + 1 + 1 + 1$, le groupe S_4 a 5 classes de conjugaison : la classe C_1 de l'élément neutre 1 (1 élément), celle C_2 des transpositions (6 éléments), celle $C_{2,2}$ des produits de deux transpositions de supports disjoints (3 éléments), celle C_3 des 3-cycles (8 éléments), celle C_4 des 4-cycles (6 éléments).

		1	ε	θ	χ_1	χ_2
1	C_1	1	1	2	3	3
6	C_2	1	-1	0	1	-1
3	$C_{2,2}$	1	1	2	-1	-1
8	C_3	1	1	-1	0	0
6	C_4	1	-1	0	-1	1

FIG. 1. Table des caractères de S_4

(i) Soit V la représentation de permutation associée à l'action de S_4 sur $\{1, 2, 3, 4\}$ (donc $V = \mathbf{C}^4$ et $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, si $\sigma \in S_4$ et $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, où e_1, \dots, e_4 est la base canonique de \mathbf{C}^4).

(a) Calculer χ_V et $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$; en déduire que V est la somme directe $V_1 \oplus V_2$ de deux représentations irréductibles V_1, V_2 non isomorphes. **2**

(b) Déterminer les sous-espaces V_1 et V_2 de V et montrer, en revenant à la définition, que ce sont des représentations irréductibles de S_4 . **2**

(c) Calculer les caractères de V_1 et V_2 ; quelles colonnes de la table cela permet-il de remplir? **1**

(ii) Quelle est la seconde représentation de dimension 1? Comment peut-on obtenir la seconde de dimension 3 (pourquoi est-elle irréductible et différente de celle déjà construite?). **2**

(iii) Comment peut-on compléter la table des caractères de S_4 ? **2**

Exercice 2. (i) Montrer que $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ est somme de sa série de Taylor en 0 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. **1**

(ii) Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor en 0 de $\frac{\sin \pi z}{z-1}$? **1**

Exercice 3. Soit n entier ≥ 2 , et soit $\theta \in [0, \pi]$ pas de la forme $\frac{(2k+1)\pi}{n}$, avec $k \in \mathbf{N}$. Si $R > 1$, soient $I_1(R)$, $I_2(R)$ et $I_3(R)$ les intégrales de $\frac{dz}{1+z^n}$ sur le segment $[0, R]$, l'arc de cercle de centre 0 allant de R à $e^{i\theta}R$, et le segment $[e^{i\theta}R, 0]$. (Faire un dessin.)

- 2 (i) Calculer $I_1(R) + I_2(R) + I_3(R)$.
 1 (ii) Quelles sont les limites, quand $R \rightarrow +\infty$, de $I_1(R)$, $I_2(R)$ et $I_3(R)$.
 1 (iii) En déduire, en choisissant judicieusement θ , la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$.

Exercice 4. Soit $\Omega = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

- 1,5 (i) Soit $\alpha = a + ib \in \Omega$, et soit γ_R , si $R > 0$, le lacet constitué des segments $[0, R]$, $[R, \frac{\alpha R}{a}]$ et $[\frac{\alpha R}{a}, 0]$. Que vaut $\int_{\gamma_R} z^n e^{-z} dz$, si $n \in \mathbf{N}$? En déduire que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.
 0,5 (ii) Si $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, soit $f_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction définie par $f_\lambda(t) = 0$, si $t \leq 0$, et $f_\lambda(t) = te^{-\lambda t}$, si $t \geq 0$. Calculer $\hat{f}_\lambda(x)$, si $x \in \mathbf{R}$.
 2 (iii) On remarque que $x \mapsto x\hat{f}_\lambda(x)$ n'est pas sommable. Pouvait-on le savoir sans calculer \hat{f}_λ ? (On distinguera les cas \hat{f}_λ non sommable et \hat{f}_λ sommable.)
 2 (iv) Établir la formule $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(\lambda + 2i\pi n)^2} = \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2}$, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$.
 1 (v) Comment pourrait-on obtenir une formule analogue pour $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{(-1)^n}{(\lambda + 2i\pi n)^2}$? (On ne demande pas de faire le calcul.)
 2 (vi) Montrer que $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(z + 2i\pi n)^2}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$ et que sa somme vaut $\frac{e^z}{(e^z - 1)^2}$.

- 1 **Exercice 5.** (i) Si g est méromorphe sur \mathbf{C} , et si $N \in \mathbf{N}$, on dit que $g = O(y^N)$ s'il existe $C, M \in \mathbf{R}$ tels que $|g(x + iy)| \leq C|y|^N$, si $|y| \geq M$. Montrer que si g est $O(y^N)$, alors g' est $O(y^{N-1})$.
 3 (ii) Soit f une fonction méromorphe sur \mathbf{C} , impaire, périodique de période 1, holomorphe en dehors de pôles simples de résidu 1 en les entiers, et $O(y^N)$. Montrer que $f^2 + f'$ est constante.

Corrigé

Exercice 1. (i) (a) Comme V est une représentation de permutation, $\chi_V(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ agissant sur $\{1, 2, 3, 4\}$ (alinéa 2.3 du § I.1). On a donc $\chi_V(C_1) = 4$, $\chi_V(C_2) = 2$, $\chi_V(C_{2,2}) = 0$, $\chi_V(C_3) = 1$ et $\chi_V(C_4) = 0$.

Le produit scalaire $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$ est égal à $\frac{1}{24}(4^2 + 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 0^2) = 2$. Si $V = \bigoplus_{W \in \operatorname{Irr}(S_4)} m_W W$, ce produit scalaire est aussi égal à $\sum_{W \in \operatorname{Irr}(S_4)} m_W^2$ puisque les χ_W forment une famille orthonormale (th. I.2.10), et comme la seule écriture de 2 comme somme de deux carrés est $1^2 + 1^2$, on en déduit que $m_W = 1$ pour exactement deux $W \in \operatorname{Irr}(S_4)$, et $m_W = 0$ pour les autres, ce qui permet de conclure.

(b) La droite V_1 engendrée par $e_1 + \dots + e_4$ et l'hyperplan V_2 d'équation $x_1 + \dots + x_4$ sont stables par S_4 . Comme V_1 est de dimension 1, elle est automatiquement irréductible.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V_2$ non nul. Il s'agit de prouver que le sous-espace vectoriel U_x de V_2 engendré par les $\sigma \cdot x$, pour $\sigma \in S_4$, est égal à V_2 . Il existe $i \neq j$ tels que $x_i \neq x_j$. Soit τ la transposition (ij) . Alors $x - \tau \cdot x$ est un multiple non nul de $e_i - e_j$. On en déduit l'appartenance de $e_i - e_j$ à U_x , et donc aussi celle de $\sigma \cdot (e_i - e_j) = e_{\sigma(i)} - e_{\sigma(j)}$, pour tout $\sigma \in S_4$. Comme $(\sigma(i), \sigma(j))$ décrit les couples d'éléments distincts de $\{1, 2, 3, 4\}$ quand σ décrit S_4 , cela montre que U_x contient $e_1 - e_2$, $e_1 - e_3$ et $e_1 - e_4$, et comme ces vecteurs engendrent V_2 , cela permet de conclure.

(c) La représentation V_1 est la représentation triviale, et donc $\chi_{V_1}(C) = 1$ pour tout $C \in \operatorname{Conj}(S_4)$. Comme $\chi_{V_1} + \chi_{V_2} = \chi_V$, cela permet de déterminer le caractère de χ_{V_2} et de remplir les première et quatrième colonnes de la table.

(ii) (a) La seconde représentation de dimension 1 est la signature ε ; ses valeurs sont bien celles reportées dans la seconde colonne. La seconde représentation de dimension 3 est $V_1 \otimes \varepsilon$. Si elle pouvait se décomposer sous la forme $V_1 \otimes \varepsilon = W_1 \oplus W_2$, alors $V_1 = (V_1 \otimes \varepsilon) \otimes \varepsilon$ pourrait se décomposer sous la forme $(W_1 \otimes \varepsilon) \oplus (W_2 \otimes \varepsilon)$, ce qui est absurde. On a $\chi_{V_1 \otimes \varepsilon}(g) = \chi_{V_1}(g)\varepsilon(g)$ (alinéa 2.1 du § I.1), et donc $\chi_{V_1 \otimes \varepsilon}(C_2) = -1$ est différent de

$\chi_{V_1}(\mathbb{C}_2) = 1$, ce qui prouve que les représentations $V_1 \otimes \varepsilon$ et V_1 ne sont pas isomorphes puisque leurs caractères sont distincts.

(b) Comme S_4 a 5 classes de conjugaison, il a 5 représentations irréductibles (cor. I.2.12). Si on note d la dimension de la représentation manquante et θ son caractère, la formule de Burnside montre que $24 = 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + d^2$, et donc que $d = 2$. Pour remplir la dernière colonne, on utilise le fait que $1 + \varepsilon + 2\theta + 3\chi_1 + 3\chi_2$ est le caractère de la représentation régulière ((i) du cor. I.2.18) qui est connu (alinéa 2.3 du § I.1).

Exercice 2. (i) La fonction $\operatorname{tg} z$ est holomorphe en dehors des zéros de $\cos z$. Comme le disque $D(0, (\frac{\pi}{2})^-)$ ne contient aucun de ces zéros, $\operatorname{tg} z$ est somme de sa série de Taylor en 0 sur tout le disque ((i) de la rem. V.2.8), et donc a fortiori sur $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

(ii) La fonction $\frac{\sin \pi z}{z-1}$ est holomorphe sur \mathbb{C} sauf peut-être en $z = 1$ où elle peut avoir un pôle d'ordre 1. Or, en $z = 1$, la fonction $\sin \pi z$ s'annule; il n'y a donc pas de pôle et $\frac{\sin \pi z}{z-1}$ est holomorphe sur \mathbb{C} tout entier. Le rayon de convergence de sa série de Taylor en 0 est donc $+\infty$.

Exercice 3. (i) Comme le chemin $\gamma_{\mathbb{R}}$ formé du segment $[0, R]$, de l'arc de cercle de centre 0 allant de R à $e^{i\theta}R$, et du segment $[e^{i\theta}R, 0]$ est un lacet, on a

$$I_1(\mathbb{R}) + I_2(\mathbb{R}) + I_3(\mathbb{R}) = 2i\pi \left(\sum_{a^n+1=0} I(\gamma_{\mathbb{R}}, a) \operatorname{Res} \left(\frac{1}{z^n+1}, a \right) \right),$$

d'après la formule des résidus. Les solutions de $a^n + 1 = 0$ sont les $e^{i\pi(2k+1)/n}$, pour $k = \{0, 1, \dots, n-1\}$ et le pôle de $\frac{1}{z^n+1}$ en chacun d'eux est simple; son résidu est donc $\frac{1}{na^{n-1}} = \frac{-a}{n}$. Par ailleurs, l'indice $I(\gamma_{\mathbb{R}}, e^{i\pi(2k+1)/n})$ est égal à 1, si $0 < \frac{(2k+1)\pi}{n} < \theta$, et vaut 0 sinon. On a donc

$$I_1(\mathbb{R}) + I_2(\mathbb{R}) + I_3(\mathbb{R}) = \frac{-2i\pi}{n} \sum_{0 < \frac{(2k+1)\pi}{n} < \theta} e^{i\pi(2k+1)/n}.$$

(ii) Les fonctions $\frac{1}{1+t^n}$ et $\frac{1}{1+t^n e^{in\theta}}$ étant sommables sur \mathbb{R}_+ , on a $I_1(\mathbb{R}) \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n}$ et $I_3(\mathbb{R}) \rightarrow -e^{i\theta} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n e^{in\theta}}$. Maintenant, $I_2(\mathbb{R}) = \int_0^\theta \frac{iRe^{it} dt}{1+R^n e^{in\theta}}$, et on peut majorer $|\frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{in\theta}}|$ par $\frac{R}{R^n-1}$. On a donc $|I_2(\mathbb{R})| \leq \frac{\theta R}{R^n-1}$, et comme $n \geq 2$, cela montre que $I_2(\mathbb{R}) \rightarrow 0$.

(iii) Prenons $\theta = \frac{2\pi}{n}$. En passant à la limite dans la formule du (i), on obtient

$$(1 - e^{2i\pi/n}) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{-2i\pi}{n} e^{i\pi/n},$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{2i\pi e^{i\pi/n}}{n(e^{2i\pi/n} - 1)} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Exercice 4. (i) La fonction e^{-z} est holomorphe sur \mathbb{C} qui est contractile. Son intégrale sur tout lacet est donc nulle ((i) de la rem. VI.1.4 ou formule des résidus). On en déduit que

$$\int_0^R t^n e^{-t} dt + \int_0^{\frac{bR}{a}} (R+it)^n e^{-R-it} i dt + \int_R^0 (\alpha t)^n e^{-\alpha t} \alpha dt = 0.$$

Quand $R \rightarrow +\infty$, on a $\int_0^R t^n e^{-t} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$ et

$$\left| \int_0^{\frac{bR}{a}} (R+it)^n e^{-R-it} i dt \right| \leq e^{-R} \int_0^{\frac{bR}{a}} |(R+it)|^n dt \leq e^{-R} \frac{bR}{a} (R^2 + (\frac{bR}{a})^2)^{n/2} \rightarrow 0.$$

Comme $\int_R^0 (\alpha t)^n e^{-\alpha t} \alpha dt \rightarrow -\alpha^{n+1} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$, un passage à la limite nous donne $\alpha^{n+1} \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt = n!$, ce qui permet de conclure.

(ii) $\hat{f}_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x t} f_\lambda(t) dt = \int_0^{+\infty} t e^{-(\lambda+2i\pi x)t} dt = \frac{1}{(\lambda+2i\pi x)^2}$ d'après le (i), car $\lambda + 2i\pi x \in \Omega$.

(iii) Si \hat{f}_λ n'est pas sommable, alors sa restriction à $\mathbf{R} - [-1, 1]$ n'est pas sommable puisque \hat{f}_λ est continue d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, et donc sommable sur $[-1, 1]$. Comme $|x\hat{f}_\lambda(x)| \geq |\hat{f}_\lambda(x)|$ sur $\mathbf{R} - [-1, 1]$, cela implique que $x\hat{f}_\lambda(x)$ n'est pas sommable sur cet ouvert ni, a fortiori, sur \mathbf{R} .

Si \hat{f}_λ est sommable et si $x\hat{f}_\lambda(x)$ est sommable, alors d'après le (ii) du th. IV.2.5, $\mathcal{F}\hat{f}_\lambda$ est de classe \mathcal{C}^1 et $\mathcal{F}(x\hat{f}_\lambda(x))(t) = \frac{-1}{2i\pi}(\mathcal{F}\hat{f}_\lambda)'(t)$. Maintenant, la formule d'inversion de Fourier dans L^1 , appliquée à f_λ , montre que $(\mathcal{F}\hat{f}_\lambda)(t) = f_\lambda(-t)$. On aboutit à une contradiction puisque f_λ n'est pas dérivable en 0; c'est donc que $x\hat{f}_\lambda(x)$ n'est pas sommable.

(iv) La fonction \hat{f}_λ et sa dérivée sont des $O(|x|^{-2})$ en l'infini. On peut donc lui appliquer la formule de Poisson. Par ailleurs, \hat{f}_λ étant sommable, la formule d'inversion de Fourier dans L^1 appliquée à f_λ montre que $(\mathcal{F}\hat{f}_\lambda)(t) = f_\lambda(-t)$. La formule de Poisson devient donc

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(\lambda + 2i\pi n)^2} &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}_\lambda(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_\lambda(-n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-n\lambda} \\ &= - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\lambda} \right)' = - \left(\frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \right)' = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2} = \frac{e^\lambda}{(e^\lambda - 1)^2}. \end{aligned}$$

(L'interversion de la dérivée et de la série est justifiée par le fait que l'on a affaire à des séries entières (en $e^{-\lambda}$).)

(v) On remarque que $(-1)^n = e^{i\pi n}$. On peut donc évaluer la série en utilisant la formule de Poisson pour $e^{i\pi x} \hat{f}_\lambda(x)$ dont la transformée de Fourier est $t \mapsto f_\lambda(\frac{1}{2} - t)$.

(vi) Si K est un compact de $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$, il existe $R > 0$ tel que $|z| \leq R$, pour tout $z \in K$. Si $|n| > \frac{R}{2\pi}$, on a alors $\left| \frac{1}{(z + 2i\pi n)^2} \right| \leq \frac{1}{(2\pi|n| - R)^2}$, et comme $\sum_{|n| > \frac{R}{2\pi}} \frac{1}{(2\pi|n| - R)^2} < +\infty$, la série est normalement convergente (et donc en particulier convergente en tout point) sur K . On note $f(z)$ la somme de la série. Comme chaque $\frac{1}{(z + 2i\pi n)^2}$ est holomorphe sur $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$, il résulte du th. V.2.11 que f est holomorphe sur $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$. Or elle coïncide avec la fonction holomorphe $z \mapsto \frac{e^z}{(e^z - 1)^2}$ sur \mathbf{R}_+^* . Comme $\mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$ est connexe, il résulte du théorème des zéros isolés que $f(z) - \frac{e^z}{(e^z - 1)^2} = 0$ pour tout $z \in \mathbf{C} - 2i\pi\mathbf{Z}$.

Exercice 5. (i) D'après l'inégalité de Cauchy ((i) de la rem. V.2.8), on a $|g'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \sup_{z \in C(z_0, r)} |g(z)|$, si $z_0 = x_0 + iy_0$. Si $|y_0| \geq M' = 2M$, et si $r = \frac{|y_0|}{2}$, on a $M \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq \frac{3|y_0|}{2}$, pour tout $z \in C(z_0, r)$, et donc $|g(z)| \leq C \left(\frac{3|y_0|}{2} \right)^N$. On en déduit que $|g'(z_0)| \leq C'|y_0|^{N-1}$, avec $C' = 3^N 2^{1-N}$, si $|y_0| \geq M'$.

(ii) Soit $g = f^2 + f'$. Comme f est holomorphe sur $D(0, 1^-) - \{0\}$, impaire, et a un pôle simple de résidu 1 en 0, on a $f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2k+1} z^{2k+1}$ sur $D(0, 1^-)$ (fonction holomorphe sur un disque épointé, n° 2 du § VI.3). On en déduit que $f'(z) = \frac{-1}{z^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (2k+1)a_{2k+1} z^{2k}$, que $f(z)^2 = \frac{1}{z^2} + 2a_1 + \dots$, et que $g(z)$ est holomorphe en 0. Comme elle est périodique de période 1, elle est holomorphe en tous les entiers, et comme f est holomorphe sur $\mathbf{C} - \mathbf{Z}$, elle est holomorphe sur \mathbf{C} tout entier.

De plus, il résulte du (i) que g est un $O(y^{2N})$ et que $g^{(k)}$ est un $O(y^{2N-k})$ pour tout k . On en déduit que $g^{(2N)}$ est bornée sur $\{z, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, |\operatorname{Im}(z)| \geq M_N\}$, si M_N est assez grand. Comme $g^{(2N)}$ est continue (car holomorphe) sur $\{z, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$, et comme $\{z, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, |\operatorname{Im}(z)| \leq M_N\}$ est compact, on en déduit l'existence de C_N tel que $|g^{(2N)}(z)| \leq C_N$, si $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$. La périodicité de $g^{(2N)}$ implique alors que $|g^{(2N)}(z)| \leq C_N$, pour tout $z \in \mathbf{C}$, et le théorème de Liouville permet d'en conclure que $g^{(2N)}$ est constante. On en déduit que g est un polynôme de degré $\leq 2N$, et comme g est périodique, cela implique que g est une constante, ce que l'on cherchait à démontrer.

On aurait pu aussi constater que $h(z) = f(z) - \pi \cotg \pi z$ est holomorphe sur \mathbf{C} , impaire, périodique de période 1, et $O(y^N)$. Les mêmes arguments que ci-dessus permettent alors de montrer que $h = 0$, et donc que $f^2 + f' = -\pi^2$.

ANNEXE D

TRANSPARENTS DE L'AN DERNIER

AMPHI 1

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS (1895-1905)

- Ancêtres : cristallographie (vers 1830) et théorème de la progression arithmétique de Dirichlet (1837, cas commutatif).
- Étude simultanée de plusieurs isomorphismes d'un espace vectoriel.
- Théorie des caractères = analyse de Fourier sur les groupes finis.

1

- D_4 groupe des symétries du carré.
- Si $H \subset G$ est un sous-groupe, $G/H = \{xH, x \in G\}$ est l'ensemble des *classes à droite modulo H*. G opère sur G/H par $g \cdot xH = gxH$.
- Si G fini, $|G| = |H| \cdot |G/H|$ (\Rightarrow Lagrange).
- Si G opère sur X et $x \in X$, alors $G/G_x \rightarrow O_x$ définie par $gG_x \mapsto g \cdot x$ est une bijection. Si G fini, $|G| = |O_x| \cdot |G_x|$.
- G opère sur G par *conjugaison* $g \cdot x = gxg^{-1}$. Les orbites $C_x = G/Z_x$ sont les *classes de conjugaison*; $\text{Conj}(G) = \{\text{des classes de conjugaison}\}$.
 G est commutatif ssi les classes de conjugaison n'ont qu'un élément.
Classes de conjugaison de D_4 .

3

Groupe opérant sur un ensemble

- G un groupe et X un ensemble. G opère sur X , si on a $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times X$ dans X , avec $1 \cdot x = x$ et $g \cdot (g' \cdot x) = gg' \cdot x$.
- Si $x \in X$, l'orbite O_x de x est l'ensemble $\{g \cdot x, g \in G\}$. Si $y = h \cdot x \in O_x$, alors $O_y = \{g \cdot (h \cdot x), g \in G\} = \{gh \cdot x, g \in G\} = \{g \cdot x, g \in G\} = O_x$. Les orbites forment une partition de X .
- Le *stabilisateur* G_x de x est le sous-groupe des $g \in G$ vérifiant $g \cdot x = x$.
- Si V est un espace vectoriel sur K , le groupe $\mathbf{GL}(V)$ des $g : V \rightarrow V$ linéaires bijectives opère sur V (par $g \cdot v = g(v)$).
- S_n opère sur $\{1, \dots, n\}$, stabilisateur de i , $1 \leq i \leq n$, isomorphe à S_{n-1} .

2

Représentations des groupes

- Si G est un groupe, une K -représentation V est un K -espace vectoriel muni d'une action linéaire de G ($v \mapsto g \cdot v$ linéaire pour tout $g \in G$). C'est équivalent à la donnée de $\rho_V : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$, morphisme de groupes (i.e. $\rho_V(gg') = \rho_V(g)\rho_V(g')$), avec $g \cdot v = \rho_V(g)(v)$.
- Représentations de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.
- Action de D_4 sur le carré \mapsto représentation de D_4 (sous-groupe de $\mathbf{GL}(V)$).
- Représentations des groupes finis en cristallographie.
- Rep. des groupes de Lie $U(1)$, $SU(2)$... en physique des particules.

4

- Représentations de $G_{\mathbb{Q}}$, groupe des automorphismes du corps des nombres algébriques. Si $a^p + b^p = c^p$, alors $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$ fournit une $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ -représentation de $G_{\mathbb{Q}}$ trop belle pour exister (Wiles, 1994).
- Étude des objets sur lesquels G agit à travers les représentations de G .
- Étude des groupes : construction (Griess, 1982) du *monstre* de cardinal $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$, dont l'existence était prévue depuis 10 ans, via la construction d'une représentation de dimension 196883 (sans ordinateur !). Point final de la classification des groupes finis simples (1950–198-).

5

- V_1 et V_2 sont *isomorphes* s'il existe $u : V_1 \rightarrow V_2$ linéaire bijectif tel que $u(g \cdot v) = g \cdot u(v)$, pour tout $v \in V_1$. Ceci se traduit par $u \circ \rho_{V_1}(g) = \rho_{V_2}(g) \circ u$ et donc $\rho_{V_1}(g) = u^{-1} \circ \rho_{V_2}(g) \circ u$ (i.e. on passe de ρ_{V_1} à ρ_{V_2} par un changement de base) et donc $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.
- Surprise : V est déterminée par son caractère (à isomorphisme près).

Exemples

- Représentations de dimension 1 $\leftrightarrow \eta : G \rightarrow \mathbb{C}^*$ morphismes de groupes (caractères linéaires ; \widehat{G} leur ensemble). Si $V \leftrightarrow \eta$, alors $\chi_V = \eta$.
Représentation triviale $\mathbf{1} \leftrightarrow$ caractère trivial $\eta(g) = 1, \forall g$.

7

Représentations des groupes finis

- G fini, $K = \mathbb{C}$, représentations V de dimension finie $\dim V$. Cas simple servant de modèle à tous les autres.
- *Caractère* χ_V de V défini par $\chi_V(g) = \text{Tr}(\rho_V(g))$, si $g \in G$. C'est la somme des valeurs propres de $\rho_V(g)$ avec multiplicité ou la somme des termes diagonaux de la matrice $R_V(g)$ dans une base quelconque.
- $\chi_V(1) = \text{Tr}(1) = \dim V$.
- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \Rightarrow$
 $\chi_V(ghg^{-1}) = \text{Tr}(\rho_V(g)\rho_V(h)\rho_V(g)^{-1}) = \text{Tr}(\rho_V(h)) = \chi_V(h)$
donc χ_V est constant sur les classes de conjugaison (*fonction centrale*).

6

- *Torsion par un caractère linéaire* $V \otimes \eta : \text{on a } \chi_{V \otimes \eta} = \eta \cdot \chi_V$.
- *Somme directe* $V = V_1 \oplus V_2$, avec $g \cdot (v_1, v_2) = (g \cdot v_1, g \cdot v_2)$. On a $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$. Plus généralement $\oplus m_i V_i$ de caractère $\sum_i m_i \chi_{V_i}$.
- X ensemble fini muni d'une action de G définit une *représentation de permutation* V_X de base les e_x , pour $x \in X$, avec action de G dans cette base donnée par $g \cdot e_x = e_{g \cdot x}$. On a $\chi_{V_X}(g) = |\{x \in X, g \cdot x = x\}|$.

Cas important $X = G$ et $g \cdot x = gx$, *représentation régulière*.

$$\chi_{V_G}(1) = |G| \text{ et } \chi_{V_G}(g) = 0, \text{ si } g \neq 1.$$

8

Décomposition des représentations

- V est *irréductible*, si V n'a pas de sous-espace stable par G autre que V et 0 (\Leftrightarrow pour tout $v \in V - \{0\}$, les $g \cdot v$, pour $g \in G$, engendrent V).
- Action de D_4 sur le carré \mapsto représentation irréductible de D_4 .
- Représentations irréductibles de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Théorème (Maschke, 1899) *Toute représentation V est une somme directe de représentations irréductibles.*

- Cas de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$: diagonalisation simultanée.
- Table des caractères de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ et D_4 .

9

Théorème *Il existe sur V un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ invariant sous l'action de G .*

*On part de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on fait la moyenne $\langle v, v' \rangle_V = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g \cdot v, g \cdot v' \rangle$.

- Démonstration du th. de Maschke (stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable, récurrence sur la dimension).

11

Produits scalaires hermitiens et espaces préhilbertiens

- Un *produit scalaire* $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ sur un \mathbf{C} -espace vectoriel E est une application *sesquilinéaire, symétrique, définie positive*.
- $x \mapsto \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ est une norme sur E .
- $\langle x, y \rangle = 0$ (x, y *orthogonaux*) $\implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy-Schwarz) $\implies (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ continu.
- Si $F \subset E$ de dimension finie et si $(f_j)_{j \in J}$ base orthonormée de F , alors $p_F(x) = \sum_{j \in J} \langle f_j, x \rangle f_j$ (projection orthogonale sur F) et $E = F \oplus F^\perp$.

10

AMPHI 2

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

THÉORIE DES CARACTÈRES

1

Principaux résultats

Théorème (Maschke, 1899) *Toute représentation V est une somme directe de représentations irréductibles.*

• $\text{Irr}(G)$ = ensemble des *caractères irréductibles* (vu aussi comme ensemble des *représentations irréductibles*), $R_{\mathbb{C}}(G)$ espace des fonctions centrales muni de $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi_1(g)} \phi_2(g) = \int_G \overline{\phi_1} \phi_2$.

Théorème (Frobenius, 1897) *Les $\chi \in \text{Irr}(G)$ forment une base orthonormale de $R_{\mathbb{C}}(G)$.*

3

Représentations des groupes finis (G groupe fini)

- Représentation V de G de dimension finie $\dim V \leftrightarrow \rho_V : G \rightarrow \mathbf{GL}(V)$.
- *Caractère* χ_V de V défini par $\chi_V(g) = \text{Tr}(\rho_V(g))$, si $g \in G$. C'est la somme des valeurs propres de $\rho_V(g)$ comptées avec multiplicité ou la somme des termes diagonaux de la matrice $R_V(g)$ dans une base arbitraire.
- χ_V est constant sur les classes de conjugaison (*fonction centrale*).
- $\chi_V(1) = \text{Tr}(1) = \dim V$.
- V_1 et V_2 sont *isomorphes* ($V_1 \cong V_2$) s'il existe $u : V_1 \rightarrow V_2$ linéaire bijectif tel que $u(g \cdot v) = g \cdot u(v)$, pour tout $v \in V_1$. Ceci se traduit par $u \circ \rho_{V_1}(g) = \rho_{V_2}(g) \circ u$ et donc $\rho_{V_1}(g) = u^{-1} \circ \rho_{V_2}(g) \circ u$ et $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.

2

Applications

- $|\text{Irr}(G)| = |\text{Conj}(G)|$.
- $V \cong \bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi_V \rangle W$; donc V est déterminée par son caractère.
- V est irréductible ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.
- La régulière V_G se décompose comme $V_G = \bigoplus_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W) W$, et $\sum_{W \in \text{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$ (formule de Burnside).
- Table des caractères de A_4 .

4

Morphismes de représentations

- $u : V_1 \rightarrow V_2$ linéaire, $g \cdot u$ défini par $(g \cdot u)(v) = g \cdot u(g^{-1} \cdot v)$. D'où une action de G sur $\text{Hom}(V_1, V_2)$ espace des $u : V_1 \rightarrow V_2$ linéaires.
- $\text{Hom}_G(V_1, V_2) = \{u : V_1 \rightarrow V_2, g \cdot u(v) = u(g \cdot v)\}$ est aussi l'ensemble des points fixes de $\text{Hom}(V_1, V_2)$ sous l'action de G .

Proposition $\chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)}(g) = \overline{\chi_{V_1}(g)} \chi_{V_2}(g)$.

- $V_1 = V$ et $V_2 = \mathbf{C} \mapsto$ représentation duale V^* et $\chi_{V^*}(g) = \overline{\chi_V(g)}$.
- * On choisit des bases de V_1 et V_2 dans lesquelles g est diagonal.

5

Le théorème de la progression arithmétique

Théorème (Dirichlet, 1837) Si $(a, D) = 1$, alors il y a une infinité de nombres premiers de la forme $Dn + a$.

- Euler (1737) $\zeta(s) = \sum n^{-s} = \prod (1 - p^{-s})^{-1}$ et $\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = +\infty$, donc $\log \zeta(s) \sim \sum p^{-s} \rightarrow +\infty$ et donc une infinité de nombres premiers.
- Si G est commutatif et $W \in \text{Irr}(G)$, alors $\dim W = 1$ et toute fonction $\phi : G \rightarrow \mathbf{C}$ se décompose comme $\phi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{\phi}(\chi) \chi$, avec $\widehat{\phi}(\chi) = \langle \chi, \phi \rangle$ (formule d'inversion de Fourier).

7

Théorème (Lemme de Schur, 1905) Soient V_1, V_2 irréductibles.

- (i) Si $V_1 \not\cong V_2$, alors $\text{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$.
- (ii) Si $V_1 = V_2$, alors $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ est la droite des homothéties.

Corollaire (i) Soient $V_1 \not\cong V_2$ irréductibles. Si $u \in \text{Hom}(V_1, V_2)$, alors

$$M(u) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \cdot u = 0.$$

(ii) Soit V irréductible. Si $u \in \text{Hom}(V, V)$, alors $M(u) = \frac{\text{Tr}(u)}{\dim V}$.

$$\begin{aligned} * \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_1}(g)} \chi_{V_2}(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\text{Hom}(V_1, V_2)}(g) \\ &\text{est égal à } \text{Tr}(u \mapsto M(u)) \Rightarrow \text{orthonormalité des caractères.} \end{aligned}$$

6

- $G = (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$; $\phi_a : G \rightarrow \mathbf{C}$ avec $\phi_a(a) = 1$ et $\phi_a(x) = 0$ si $x \neq a$.
- Idée : prouver que $\sum \phi_a(p) p^{-s} \rightarrow +\infty$ en $s = 1^+$.

• Caractère de Dirichlet modulo $D =$ caractère linéaire de $G = (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$.

$$* \phi_a = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle \chi, \phi_a \rangle \chi, \text{ et } \langle \mathbf{1}, \phi_a \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi_a(g) = \frac{1}{|G|} \neq 0.$$

Théorème Si $\chi \neq \mathbf{1}$, $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} a$ une limite finie en $s = 1^+$.

• Attendre les fonctions holomorphes pour la démonstration.

$$* \sum_p \frac{\phi_a(p)}{p^s} = \sum_{\chi} \langle \chi, \phi_a \rangle \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 1} \sum_p \frac{\phi_a(p)}{p^s} = +\infty.$$

8

AMPHI 3

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS (FIN)

INTÉGRALE DE LEBESGUE

1

Proposition (i) Si V_1 et V_2 sont des représentations de G , alors $V_1 \otimes V_2$ aussi, avec $g \cdot (x \otimes y) = (g \cdot x) \otimes (g \cdot y)$, pour tous $x \in V_1$ et $y \in V_2$.

(ii) $\chi_{V_1 \otimes V_2}(g) = \chi_{V_1}(g)\chi_{V_2}(g)$.

• $V \otimes V$ se décompose : $V \otimes V = \text{Sym}^2 V \oplus \wedge^2 V$, avec $\text{Sym}^2 V$ espace engendré par les $xy = \frac{1}{2}(x \otimes y + y \otimes x)$ (carré symétrique), et $\wedge^2 V$ espace engendré par les $x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x$ (carré extérieur). De plus

$$\chi_{\text{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)) \quad \chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)).$$

3

Produit tensoriel de représentations

• V_1 de base (e_1, \dots, e_n) et V_2 de base (f_1, \dots, f_m) . On définit $V_1 \otimes V_2$ de base $g_{i,j} = e_i \otimes f_j$, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ et $x \otimes y \in V_1 \otimes V_2$ par

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \otimes \left(\sum_{j=1}^m \mu_j f_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j).$$

Lemme Si $u : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ est bilinéaire, il existe $\tilde{u} : V_1 \otimes V_2 \rightarrow W$ linéaire, unique, tel que $\tilde{u}(x \otimes y) = u(x, y)$, pour tous $x \in V_1, y \in V_2$.

• Propriété universelle (\Rightarrow Indépendance du choix des bases).

• $V^* \otimes V^* = \{\text{formes bilinéaires sur } V\}$; $(\lambda_1 \otimes \lambda_2)(x, y) = \lambda_1(x)\lambda_2(y)$.

2

Représentations induites

• $H \subset G$ sous-groupe et V une représentation de H .

$$\text{Ind}_H^G V = \{\phi : G \rightarrow V, \phi(hx) = h \cdot \phi(x), \text{ si } h \in H \text{ et } x \in G\}$$

est une représentation de G , avec $(g \cdot \phi)(x) = \phi(xg)$. L'induction est fondamentale pour l'étude des représentations de G (cf. annexe B3).

Théorème Si $W = \text{Ind}_H^G V$, alors $\dim W = [G : H] \dim V$ et

$$\chi_W(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{s \in G, sgs^{-1} \in H} \chi_V(sgs^{-1}).$$

Théorème (réciprocité de Frobenius) Si $W' \in \text{Irr}(G)$, la multiplicité de W' dans $\text{Ind}_H^G V$ est égale à $\langle \chi_{W'}, \chi_V \rangle_H$.

4

Ensembles de mesure nulle

- $\overline{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. (Toute série dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ a une somme.)
- Dans \mathbf{R}^m , dalle élémentaire $D_{r,k} = \prod_{i=1}^m [2^{-r}k_i, 2^{-r}(k_i + 1)[$.
- Mesure (de Lebesgue) $\lambda(D_{r,k}) = 2^{-rm}$.
- Mesure extérieure $\lambda^+(A)$ de $A \subset \mathbf{R}^m$ (notion purement théorique).
- $\lambda^+(\cup_i A_i) \leq \sum_i \lambda^+(A_i)$, si $i \in I$ dénombrable.
- A est de mesure nulle si $\lambda^+(A) = 0$.

5

Fonctions mesurables

- Soit $e_{r,k} = \mathbf{1}_{D_{r,k}}$. Une fonction en escalier est une combinaison linéaire (finie) des $e_{r,k}$, pour $r \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}^m$.
- $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$ est mesurable si elle est limite simple p.p. de fonctions en escalier.
- λf , $f + g$ et fg sont mesurables si f et g le sont et $\lambda \in \mathbf{C}$.
- Une fonction continue est mesurable.
- Une limite simple p.p. de fonctions mesurables est mesurable.
- Toute fonction (raisonnable) est mesurable (Solovay 1966).

7

- Un ensemble dénombrable est de mesure nulle.
- L'ensemble de Cantor est non dénombrable et de mesure nulle.
- Ensemble de Besicovich (hérisson fractal) et problème de Kakeya.
- Une propriété p est vraie p.p. si $\{x, \overline{p}(x)\}$ est de mesure nulle.

Théorème (Borel-Cantelli) Si $\lambda^+(A_n) \leq a_n$ et $\sum a_n < +\infty$, alors presque tout x n'appartient qu'à un nombre fini de A_n .

6

Intégration des fonctions positives

Théorème Il existe $f \mapsto \int f$ de $\text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$ dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ vérifiant :

- Si $f = \sum a_{r,k} e_{r,k}$ est en escalier, alors $\int f = \sum 2^{-rm} a_{r,k}$.
- $\int af + bg = a \int f + b \int g$, si $a, b > 0$ (linéarité).
- $\int f = 0$ ssi $f = 0$ p.p.
- $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$.
- Le théorème de convergence monotone :
Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ croissante, $f_n \in \text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$, alors $\int \lim f_n = \lim \int f_n$.

8

- $\int \sum u_n = \sum \int u_n$, si $u_n \in \text{Mes}(\mathbf{R}^m, \overline{\mathbf{R}}_+)$.
- La linéarité et le théorème de CV monotone sont fondamentaux.
- Le (i) équivaut à l'invariance par translation.
- $X \subset \mathbf{R}^m$ est *mesurable* si $\mathbf{1}_X$ est mesurable : tout ensemble (raisonnable) est mesurable. Si X est mesurable, on définit sa *mesure de Lebesgue* $\lambda(X) = \int_{\mathbf{R}^m} \mathbf{1}_X$, et on montre que $\lambda(X) = \lambda^+(X)$.
- Intégration vs théorie de la mesure.

9

Le théorème de convergence dominée

- $X \subset \mathbf{R}^m$ mesurable. $\mathcal{L}^1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbf{C}, f \text{ sommable}\}$.

Théorème Soient $X \subset \mathbf{R}^m$ mesurable, $f_n \in \text{Mes}(X)$, pour $n \in \mathbf{N}$, avec :

il existe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ telle que $|f_n| \leq g$ p.p., $\forall n$ (domination);

$f_n \rightarrow f$ p.p.

Alors f est sommable, $\lim \int |f - f_n| = 0$ et $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ est continue et $F' = f$, alors $\int_{[a,b]} f = F(b) - F(a)$ (permet de calculer des intégrales !)
- Théorème de convergence dominée pour les séries.

11

Intégrale de Lebesgue

- $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$, mesurable, est *sommable* si $\int |f| < +\infty$.
- Soit $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$ l'espace vectoriel des fonctions sommables et $\|f\|_1 = \int |f|$.
- Si f est sommable, on pose (avec $\text{Re}^+(z) = \sup(\text{Re}(z), 0)$)

$$\int f = \int \text{Re}^+(f) - \int \text{Re}^+(-f) + i \int \text{Re}^+(-if) - i \int \text{Re}^+(if),$$

(on a $z = \text{Re}^+(z) - \text{Re}^+(-z) + i\text{Re}^+(-iz) - i\text{Re}^+(iz)$).

- $f \mapsto \int f$ est linéaire sur $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$ et $|\int f| \leq \int |f| = \|f\|_1$.

10

Théorème (Fubini sur $\mathbf{N} \times X$) Soit $u_n \in \mathcal{L}^1(X)$, pour $n \in \mathbf{N}$, avec $\sum_n \|u_n\|_1 < +\infty$.

(i) La série $\sum u_n(t)$ converge absolument p.p. et la somme g est sommable.

(ii) On a $g = \sum u_n$ dans $\mathcal{L}^1(X)$ et, en particulier, $\int_X g = \sum \int_X u_n$.

$$*h(t) = \sum_n |u_n(t)|.$$

* $\int h(t) = \sum_n \int |u_n| < +\infty \implies A = \{t, h(t) = +\infty\}$ de mesure nulle.

* $S(t) = \sum_n u_n(t)$ si $t \notin A$, 0 sinon.

* Théorème de CV dominée : $\int |S - \sum_{i \leq n} u_i| \rightarrow 0$.

Corollaire Si $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^1(X)$, il existe φ telle que $f_{\varphi(n)} \rightarrow f$ p.p.

12

AMPHI 4

INTÉGRALE DE LEBESGUE (SUITE)

1

Espaces vectoriels normés

• Une *norme* $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbf{R}$ sur un \mathbf{K} -espace vectoriel E , est une application vérifiant $\|x\| = 0$ ssi $x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Alors $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance.

• $u : (E, \| \cdot \|_E) \rightarrow (F, \| \cdot \|_F)$ linéaire est continue ssi il existe C tel que $\|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E$, pour tout $x \in E$. On pose

$$\|u\| = \inf\{C, \|u(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \forall x\} = \sup_{x \in E - \{0\}} \|x\|_E^{-1} \|u(x)\|_F.$$

• $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont *équivalentes* sur E si $\text{id} : (E, \| \cdot \|_1) \rightarrow (E, \| \cdot \|_2)$ est continue ainsi que son inverse (ssi $C^{-1} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1, \forall x \in E$).

3

Rappels

• Une fonction est *mesurable* si elle est limite simple p.p. d'une suite de fonctions en escalier (en pratique, toute fonction est mesurable).

• Si f est positive, mesurable, $\int f \in \overline{\mathbf{R}}_+$.

• Si $u_n \geq 0$, alors $\int \sum u_n = \sum \int u_n$ (CV monotone).

• f *sommable* si $\int |f| < +\infty$, et $\int f \in \mathbf{C}$.

• Si $|f_n| \leq h$ et $f_n \rightarrow f$ p.p., avec h sommable, alors $\int f_n \rightarrow \int f$ (CV dominée).

• Si $\int |u_n| < +\infty$, alors $\sum u_n$ CV p.p. et $\int \sum u_n = \sum \int u_n$ (Fubini).

2

• Un EVN $(E, \| \cdot \|)$ complet est un *espace de Banach*.

• Il suffit de vérifier $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|x_n\| < +\infty \implies \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n$ converge dans E .

• Ex : $\mathcal{C}_b(X)$, muni de $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$ (norme de la convergence uniforme), et $\mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$ est fermé dans $\mathcal{C}_b(\mathbf{R}^m)$, donc est complet.

Théorème Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes, E est complet et la boule unité est toujours compacte.

• Totalement faux en dimension infinie ; choix d'une norme dicté par le problème.

• Ex : $\mathcal{C}([0, 1], \| \cdot \|_1)$ pas complet, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.

4

Espaces de Hilbert

- Un produit scalaire $\langle x, y \rangle$ sur un \mathbb{C} -espace vectoriel E est une application sesquilinéaire, symétrique, définie positive.
- $x \mapsto \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ est une norme sur E .
- $\langle x, y \rangle = 0$ (x, y orthogonaux) $\implies \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
- $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ (Cauchy-Schwarz) $\implies \langle x, y \rangle \mapsto \langle x, y \rangle$ continu.
- Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est préhilbertien ; c'est un espace de Hilbert s'il est complet.

5

Bases hilbertiennes (= bases orthonormales).

- Si E est un Hilbert (séparable), une base hilbertienne de E est une famille orthonormale $(e_i)_{i \in I}$ (I dénombrable) engendrant un sous-espace dense.

Théorème (i) E admet des bases hilbertiennes.

(ii) Si $(e_i)_{i \in I}$ en est une, $x \mapsto (\langle e_i, x \rangle)_{i \in I}$ est une isométrie $E \cong \ell^2(I)$.

- $x \in E \implies \sum_i |\langle e_i, x \rangle|^2 = \|x\|^2$ (Bessel-Parseval).
- $(x_i)_{i \in I} \in \ell^2(I) \implies \sum_i x_i e_i \rightarrow x$ dans E et $\langle e_i, x \rangle = x_i$, pour tout i .

7

- Un \mathbb{C} -EV de dimension n muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ($\cong \mathbb{C}^n$ muni de $\overline{x_1}y_1 + \dots + \overline{x_n}y_n$).

- L'espace ℓ^2 des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_n |a_n|^2 < +\infty$, muni du produit scalaire $\langle (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle = \sum_n \overline{a_n} b_n$.

$$* |a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) - (|a| - |b|)^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2).$$

$$* x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \sum_k \|x^{(k)}\|_2 < +\infty.$$

$$* |x_n^{(k)}| \leq \|x^{(k)}\|_2 \text{ donc } \sum_k x_n^{(k)} \rightarrow y_n \text{ et } |y_n| \leq \sum_k |x_n^{(k)}|.$$

$$* \sum_n (\sum_k |x_n^{(k)}|)^2 = \sum_{k_1, k_2} \langle |x^{(k_1)}|, |x^{(k_2)}| \rangle \leq \sum_{k_1, k_2} \|x^{(k_1)}\|_2 \|x^{(k_2)}\|_2 = (\sum_k \|x^{(k)}\|_2)^2, \text{ donc } y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2.$$

$$* \|y - \sum_{k < k_0} x^{(k)}\|_2^2 \leq (\sum_{k \geq k_0} \|x^{(k)}\|_2)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } k_0 \rightarrow +\infty.$$

6

L'espace $L^1(X)$

$$* \|f\|_1 = \int_X |f|. \text{ On a } \|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

$$* \|f\|_1 = 0 \text{ ssi } f = 0 \text{ p.p. En particulier, } \|f\|_1 \text{ n'est pas une norme.}$$

$$* \text{Deux fonctions égales p.p. sont considérées comme égales } \longrightarrow L^1(X).$$

Si $f \in L^1(X)$, on ne peut pas parler de $f(x_0)$.

$$* f \mapsto \int f \text{ bien définie sur } L^1(X), \text{ linéaire, continue.}$$

Théorème ($L^1(X), \|\cdot\|_1$) est un Banach.

- Grande force de l'intégrale de Lebesgue.

8

Théorème X ouvert $\implies \text{Esc}(X), \mathcal{C}_c(X)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ denses dans $L^1(X)$.

• Démonstration de résultats pour $L^1(X)$ via des fonctions compréhensibles.

* $X = \cup_n D_n$ réunion croissante.

* $\phi \in L^1(X)$, $\phi_n(x) = \phi(x)$ si $x \in D_n$ et $|\phi(x)| \leq n$, et $\phi_n(x) = 0$ sinon.

* $\phi_n \rightarrow \phi$ dans $L^1(X)$ (CV dominée).

* il existe $f_n \in \text{Esc}(D_n)$, avec $\int |f_n - \phi_n| \leq 2^{-n}$.

* Existence de fonctions \mathcal{C}^∞ plateaux.

9

Comparaison des différents modes de convergence

$X \subset \mathbf{R}^m$ et f_n , pour $n \in \mathbf{N}$ et f des fonctions de X dans \mathbf{C} .

• Convergence uniforme \implies convergence simple \implies convergence p.p.

• Convergence p.p. + domination \implies convergence dans $L^1(X)$ ou $L^2(X)$

(th. de CV dominée).

• Convergence dans $L^1(X)$ ou $L^2(X) \implies$ sous-suites convergent p.p.

• Convergence dans $L^2(X) \implies$ convergence dans $L^1(X)$ si $\lambda(X) < +\infty$ (Cauchy-Schwarz).

11

L'espace $L^2(X)$

• $|(f+g)^2| \leq 2|f^2| + 2|g^2|$ et $2|fg| \leq |f^2| + |g^2|$.

• $\mathcal{L}^2(X) = \{f : X \rightarrow \mathbf{C}, f^2 \text{ sommable}\}$, espace vectoriel.

• $\langle f, g \rangle = \int \bar{f}g$ forme sesquilinéaire positive. On pose $\|f\|_2 = \langle f, f \rangle^{1/2}$.

• On a $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ et $\|f\|_2 = 0$, ssi $f = 0$ p.p.

• Deux fonctions égales p.p. sont considérées comme égales $\longrightarrow L^2(X)$.

Théorème (i) $(L^2(X), \|\cdot\|_2)$ est un Hilbert.

(ii) Si $f_n \rightarrow f$ dans $L^2(X)$, il existe φ telle que $f_{\varphi(n)} \rightarrow f$ p.p.

(iii) Si X est ouvert, $\text{Esc}(X), \mathcal{C}_c(X)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ sont denses dans $L^2(X)$.

10

Théorème (Fubini) (i) Si $f : \mathbf{R}^{n+m} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$ est mesurable, alors

$y \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx$ et $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy$ sont mesurables et

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy \right) dx.$$

(ii) Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^{n+m})$, alors $f(\cdot, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ et $f(x, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^m)$ p.p. ;

$y \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx$ et $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy$ sont sommables, et

$$\int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbf{R}^{n+m}} f = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) dy \right) dx.$$

• Théorème de (semi-)existence et méthode de calcul.

12

Changement de variable

- Ω ouvert de \mathbf{R}^m , $\varphi : \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ difféomorphisme (φ et φ^{-1} sont \mathcal{C}^1).

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_m)).$$

- Le jacobien $J_\varphi(x) = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)$; on a $J_\varphi(x) \neq 0$.

Théorème Si f est mesurable sur $\varphi(\Omega)$, alors $f \circ \varphi$ est mesurable sur Ω et f est sommable ssi $x \mapsto f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)|$ est sommable sur Ω et

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) |J_\varphi(x)| dx.$$

- Cas de la dimension 1 et d'une application affine.

13

Dérivation sous le signe somme

Théorème Soit $f : I \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$, avec $I \subset \mathbf{R}$ intervalle, vérifiant :

- $t \mapsto f(x, t)$ sommable, $\forall x \in I$;
- Il existe $A \subset \mathbf{R}^m$ de mesure nulle et h sommable, tels que, pour tous $x \in I$ et $t \notin A$, on ait $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq h(t)$.

Alors $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt$ est dérivable sur I , de dérivée $\int_{\mathbf{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

- La dérivabilité est une propriété locale, donc on peut diminuer I .

15

Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème X espace métrique, $x_0 \in X$, et $f : X \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$, telle que

- $t \mapsto f(x, t)$ mesurable, $\forall x \in X$;
- $x \mapsto f(x, t)$ continue en x_0 , si $t \notin A(x_0)$, avec $A(x_0)$ de mesure nulle ;
- il existe h sommable, telle que $|f(x, t)| \leq h(t)$, si $t \notin A(x)$, avec $A(x)$ de mesure nulle.

Alors $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt$ est continue en x_0 .

* $y_n \rightarrow x_0$, $g_n(t) = f(y_n, t)$, $g(t) = f(x_0, t)$

* $|g_n| \leq h$ et $g_n \rightarrow g$ p.p. $\Rightarrow \int g_n \rightarrow \int g$ (CV dominée).

14

- Si $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose

$$|\ell| = \ell_1 + \dots + \ell_n \quad \text{et} \quad \partial^\ell = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\ell_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\ell_n}.$$

Théorème Soient $f : \Omega \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C}$, avec $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ouvert, et $k \in \mathbf{N}$.

S'il existe $A \subset \mathbf{R}^m$ de mesure nulle et h sommable, tels que, pour tous $x \in \Omega$, $|\ell| \leq k$ et $t \notin A$, on ait $|\partial^\ell f(x, t)| \leq h(t)$.

Alors $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur Ω , et si $|\ell| \leq k$,

$$\partial^\ell \int_{\mathbf{R}^m} f(x, t) dt = \int_{\mathbf{R}^m} \partial^\ell f(x, t) dt.$$

16

AMPHI 5
TRANSFORMÉE DE FOURIER

1

Comparaison des différents modes de convergence

$X \subset \mathbf{R}^m$, convergence de f_n vers f sur X .

- Convergence uniforme \implies convergence simple \implies convergence p.p.
- Convergence p.p. + domination \implies convergence dans $L^1(X)$ ou $L^2(X)$ (th. de CV dominée).
- Convergence dans $L^1(X)$ ou $L^2(X) \implies$ sous-suites convergeant p.p.
- Convergence dans $L^2(X) \implies$ convergence dans $L^1(X)$ si $\lambda(X) < +\infty$ (Cauchy-Schwarz).

3

Principaux résultats d'intégration

- Théorème de convergence dominée
- Ensembles de mesure nulle (ou *négligeables*) et th. de Borel-Cantelli.
- Intégration des fonctions positive et théorème de convergence monotone.
- Complétude des espaces $L^1(X)$ et $L^2(X)$, si $X \subset \mathbf{R}^m$.
- X ouvert $\implies E_{sc}(X)$, $\mathcal{C}_c(X)$ et $\mathcal{C}_c^\infty(X)$ denses dans $L^1(X)$ et $L^2(X)$.
- Théorème de Fubini et formule du changement de variable.
- Continuité et dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

2

Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbf{R}^m)$

Cadre naturel $L^2(\mathbf{R}^m)$ ou distributions (l'an prochain).

- Si $x = (x_1, \dots, x_m)$ et $t = (t_1, \dots, t_m)$, on pose $x \cdot t = \sum_i x_i t_i$.
- Si $f \in L^1(\mathbf{R}^m)$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^m} e^{-2i\pi x \cdot t} f(t) dt$.
- $f \mapsto \hat{f}$ linéaire continue de $L^1(\mathbf{R}^m)$ dans $(\mathcal{B}(\mathbf{R}^m), \|\cdot\|_\infty)$ ($\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$).
- Notations : $\mathcal{F}f$ au lieu de \hat{f} et $\overline{\mathcal{F}f}(x) = \hat{f}(-x)$.
- $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{[a,b]})(x) = \int_a^b e^{-2i\pi tx} dt = \frac{e^{-2i\pi ax} - e^{-2i\pi bx}}{2i\pi x}$ appartient à $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$.

4

- Translation : $\mathcal{F}(f(t+b))(x) = e^{2i\pi x \cdot b} \hat{f}(x)$.
- Dilatation : $\mathcal{F}(f(at))(x) = |a|^{-m} \hat{f}(a^{-1}x)$.
- Multiplication par un caractère : $\mathcal{F}(e^{2i\pi c \cdot t} f(t))(x) = \hat{f}(x - c)$.
- Si $f \in \text{Esc}(\mathbf{R}^m)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$.

Théorème (Riemann-Lebesgue) Si $f \in L^1(\mathbf{R}^m)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$.

- * $f \mapsto \hat{f}$ est continue de $L^1(\mathbf{R})$ dans $(\mathcal{B}(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.
- * $\text{Esc}(\mathbf{R})$ est dense dans $L^1(\mathbf{R})$.

5

L'inversion de Fourier

- G groupe localement compact commutatif (e.g. fini, \mathbf{R}/\mathbf{Z} ou \mathbf{R}^m) et \widehat{G} groupe des caractères linéaires unitaires continus ($\chi_1 \chi_2(g) = \chi_1(g) \chi_2(g)$).

- Proposition** (i) Si $G = \mathbf{R}$, alors $\widehat{G} = \{e^{2i\pi x t}, x \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}$.
(ii) Si $G = \mathbf{R}^m$, alors $\widehat{G} = \{e^{2i\pi x \cdot t}, x \in \mathbf{R}^m\} \cong \mathbf{R}^m$.
(iii) Si $G = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, alors $\widehat{G} = \{e^{2i\pi n t}, n \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}$.

- $\phi : G \rightarrow \mathbf{C}$, transformée de Fourier $\hat{\phi} : \widehat{G} \rightarrow \mathbf{C}$ avec $\hat{\phi}(\chi) = \int_G \bar{\chi} \phi$.
- Fonction caractéristique en probabilités.
- Inversion de Fourier : $\phi = \int_{\widehat{G}} \hat{\phi}(\chi) \chi$ (si normalisation de \int_G et $\int_{\widehat{G}}$).

7

Transformée de Fourier et dérivation

La transformée de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini ainsi que dérivation et multiplication par un polynôme.

Théorème (i) Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^m)$, et si $\partial^\ell f \in L^1(\mathbf{R}^m)$, pour tout $|\ell| \leq k$, alors $(1 + \|x\|^2)^{k/2} \hat{f}(x) \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m)$ et

$$\mathcal{F}(\partial^\ell f)(x) = (2i\pi x)^\ell \hat{f}(x), \text{ si } |\ell| \leq k.$$

(ii) Si $(1 + \|t\|^2)^{k/2} f(t) \in L^1(\mathbf{R}^m)$, alors $\hat{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^m)$ et

$$\partial^\ell \hat{f} = \mathcal{F}((-2i\pi t)^\ell f(t)), \text{ si } |\ell| \leq k.$$

6

- Groupes finis : $\int_G \phi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)$ et $\int_{\widehat{G}} \psi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \psi(\chi)$, et $\phi = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \hat{\phi}(\chi) \chi$, si $\hat{\phi}(\chi) = \int_G \bar{\chi} \phi$ (base orthonormée de \mathbf{C}^G).

Théorème (i) Base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$: les $e^{2i\pi n t}$, pour $n \in \mathbf{Z}$.

(ii) Si $f \in L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ (en particulier, si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$), et si $n \in \mathbf{Z}$, soit

$$c_n(f) = \langle e^{2i\pi n t}, f \rangle = \int_0^1 f(t) e^{-2i\pi n t} dt,$$

alors $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n t} \rightarrow f$ dans $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ et $\sum_n |c_n(f)|^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$.

- Étude de $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n t} \rightarrow f(t)$ très difficile en général.

Proposition Si $\phi \in \mathcal{C}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ et si $\sum |c_n(\phi)| < +\infty$ (en particulier, si ϕ est \mathcal{C}^1), alors $\phi(t) = \sum c_n(\phi) e^{2i\pi n t}$, pour tout t .

8

La formule de Poisson

• $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m), (1 + \|t\|^2)^N \partial^\ell f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}^m), \forall \ell, N\}$,
(espace de Schwartz, contient $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^m)$).

Théorème (i) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, alors $\sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)$.

(ii) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, et si Λ est un réseau de \mathbf{R}^m , alors

$$\sum_{\omega \in \Lambda} f(\omega) = \text{vol}(\Lambda)^{-1} \sum_{\omega \in \Lambda^*} \hat{f}(\omega).$$

• $f \in \mathcal{S}$ peut être affaibli : pour $m = 1$, il suffit (par exemple) que $f \in \mathcal{C}^1$
et $f, f' = O(t^{-2})$ en $|t| = \infty$.

* $F(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n + t)$ est somme de sa série de Fourier (e.g. en 0).

Inversion de Fourier dans \mathcal{S} et L^1

Théorème \mathcal{F} est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$.

* Formule de Poisson pour $f(t) = \phi(u + 2^r t)$ et $r \rightarrow \infty$.

Théorème (i) Si $f, g \in L^1(\mathbf{R}^m)$, alors $\int_{\mathbf{R}^m} g \hat{f} = \int_{\mathbf{R}^m} f \hat{g}$.

(ii) Si $u \in L^1(\mathbf{R}^m)$, et si $\hat{u} \in L^1(\mathbf{R}^m)$, alors $u = \overline{\mathcal{F}} \hat{u}$ p.p.

* Fubini pour $h(x, t) = g(x)f(t)e^{-2i\pi x \cdot t}$ pour le (i).

* $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R}^m)$. Le (i) pour $f = \mathcal{F}u$ et $g = \phi$ (et $\overline{\mathcal{F}}$ au lieu de \mathcal{F}) puis

$f = u$ et $g = \overline{\mathcal{F}}\phi$ donne $\int (\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}u - u)\phi = 0$.

AMPHI 6

FONCTIONS HOLOMORPHES

Ω ouvert de \mathbf{C} dans tout ce qui suit.

1

- f est *holomorphe* sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $F_{z_0} \in \mathbf{C}[[T]]$ de rayon de convergence $r > 0$, tel que $f(z) = F_{z_0}(z - z_0)$, si $|z - z_0| < r$.
- Un polynôme ou $\exp(\lambda z)$, pour $\lambda \in \mathbf{C}$ sont holomorphes sur \mathbf{C} .
- Produit et somme de deux fonctions holomorphes sont holomorphes.
- * $(FG)(z) = F(z)G(z)$ et $(F + G)(z) = F(z) + G(z)$, si $|z| < \rho(F), \rho(G)$.
- f holomorphe et ne s'annulant pas $\Rightarrow 1/f$ holomorphe.
- la composée de deux fonctions holomorphes et l'inverse d'une bijection holomorphe sont holomorphes.

3

Séries entières (ou formelles)

- L'anneau $\mathbf{K}[[T]] = \{F(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n\}$.
- $F'(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} T^n$, $\frac{1}{k!} F^{(k)}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} T^n$.
- $K = \mathbf{C}$: rayon de convergence $\rho(F)$ de $F \in \mathbf{C}[[T]]$.
- La fonction $z \mapsto F(z)$, pour $z \in D(0, \rho(F)^-)$.
- $$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} z_0^k \right) (z - z_0)^n, \quad \text{si } |z_0| + |z - z_0| < \rho(F).$$
- F est *dérivable au sens complexe* : $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = F'(z_0)$.

2

Premières propriétés

- *ordre du zéro* $v_{z_0}(f) \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ d'une fonction holomorphe : si $f(z - z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, alors $v_{z_0}(f) = \inf\{n, a_n \neq 0\}$.

Théorème (des zéros isolés) Soit f holomorphe sur Ω connexe. Si $f \neq 0$, et si $f(z_0) = 0$, il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$, si $0 < |z - z_0| < r$.

- * z_0 est un zéro non isolé ssi $f = 0$ sur $D(z_0, r^-)$, avec $r > 0$ (condition ouverte) ssi $f^{(n)}(z_0) = 0$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$ (condition fermée).

4

• *Unicité du prolongement analytique* : si $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe et si $\Omega' \supset \Omega$, avec Ω' connexe, il existe au plus une $\tilde{f} : \Omega' \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe avec $\tilde{f}|_{\Omega} = f$.

• Exemples : $\sum_{n \in \mathbf{N}} z^n$ et $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} n^{-z}$.

Théorème (Principe du maximum) $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, Ω connexe. Si $|f|$ admet un maximum local en $z_0 \in \Omega$, alors f est constante sur Ω .

• Une fonction holomorphe atteint son maximum au bord.

5

Théorème (Formule de Cauchy) $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, tels que $D(z_0, r) \subset \Omega$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad \text{si } |z - z_0| < r.$$

• holomorphe $\Leftrightarrow \mathcal{C}^1$ au sens complexe \Leftrightarrow vérifie la formule de Cauchy.

• f est somme de sa série de Taylor sur tout disque contenu dans Ω .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw \right) (z - z_0)^n, \quad \text{si } |z - z_0| < r.$$

7

Intégration le long d'un chemin

• Un chemin γ dans Ω est une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, continue, \mathcal{C}^1 par morceaux. $\gamma(a)$ est l'origine et $\gamma(b)$ l'extrémité de γ .

• $\lg(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ est la longueur de γ .

• $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ et $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \lg(\gamma) \cdot \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$.

• Longueur et intégrale le long de γ sont invariantes par reparamétrage.

• Le cercle $C(z_0, r)$ parcouru dans le sens direct (longueur $2\pi r$) : $t \in [0, 1]$,

$$t \mapsto z_0 + re^{2i\pi t}, \quad \int_{C(z_0, r)} f(z) dz = 2i\pi r \int_0^1 f(z_0 + re^{2i\pi t}) e^{2i\pi t} dt.$$

• Le segment $[a, b]$ (longueur $|b - a|$) : $t \in [0, 1]$,

$$t \mapsto a + t(b - a), \quad \int_{[a, b]} f(z) dz = (b - a) \int_0^1 f(a + t(b - a)) dt.$$

6

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq r^{-n} \sup_{w \in C(z_0, r)} |f(w)|, \quad \text{inégalité de Cauchy.}$$

Si $K \subset U \subset \bar{U} \subset \Omega$, avec K compact et U ouvert,

$$\sup_{z \in K} |f^{(n)}(z)| \leq M(K, U, n) \sup_{z \in U} |f(z)|.$$

• Liouville : f holomorphe et bornée sur $\mathbf{C} \Rightarrow f$ constante.

• d'Alembert-Gauss : \mathbf{C} est algébriquement clos.

8

Séries et produits infinis de fonctions holomorphes

Théorème u_n , pour $n \in \mathbf{N}$, holomorphes sur Ω ; $\sum_n u_n \rightarrow f$ uniformément (resp. normalement) sur tout compact de Ω , alors f est holomorphe, et $\sum_n u_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformément (normalement) sur tout compact, $\forall k$.

- Même énoncé avec une suite convergeant uniformément sur tout compact.
- *Formule de Cauchy + inversion de limite et intégrale.

Théorème u_n , pour $n \in \mathbf{N}$, holomorphes sur Ω , telles que $\sum_n u_n$ converge normalement sur tout compact. Alors $\prod_n (1 + u_n) \rightarrow f$, uniformément sur tout compact, f est holomorphe et $v_z(f) = \sum_n v_z(1 + u_n)$, si $z \in \Omega$.

9

Structure locale des fonctions holomorphes

Théorème f holomorphe non constante sur Ω connexe, $z_0 \in \Omega$, $m = v_{z_0}(f - f(z_0))$. Alors il existe $\Omega \supset U \ni z_0$ ouvert, $r > 0$, et $\varphi : U \rightarrow D(0, r^-)$ biholomorphe, tels que $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$, si $z \in U$.

- $m = 1$: théorème d'inversion locale.
- f est une application ouverte.
- f holomorphe injective $\Rightarrow f$ biholomorphe de Ω sur $f(\Omega)$.

11

Fonctions holomorphes définies par une intégrale

Théorème $X \subset \mathbf{R}^m$ mesurable, et $F : \Omega \times X \rightarrow \mathbf{C}$, avec

- $z \mapsto F(z, t)$ holomorphe sur Ω , pour tout $t \in X$;
- pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et $g \in \mathcal{L}^1(X)$, tels que $D(z_0, r) \subset \Omega$ et $|F(z, t)| \leq g(t)$, si $|z - z_0| \leq r$ et $t \in X$.

Alors $f(z) = \int_X F(z, t) dt$ est holomorphe sur Ω et, pour tout k ,

$$f^{(k)}(z) = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^k F(z, t) dt.$$

- *Formule de Cauchy + Fubini.

10

Coupures dans le plan complexe et logarithme

- $z \mapsto e^z$ est biholomorphe de $\{z, \alpha < \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\alpha}$.
- $\log_\alpha : \mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\alpha} \rightarrow \{z, \alpha < \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$ inverse de \exp : une détermination du logarithme.
- $\log_{-\pi} : \mathbf{C} - \mathbf{R}_- \rightarrow \{z, -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$: détermination principale du logarithme.
- On écrit simplement $\log z$, et sa dérivée est $1/z$, mais \log est multivaluée.
- Si $s \in \mathbf{C}$, on pose $z^s = \exp(s \log z)$; fonction multivaluée si $s \notin \mathbf{Z}$.

12

AMPHI 7

FORMULES DE CAUCHY ET DES RESIDUS

Ω ouvert de \mathbf{C} dans tout ce qui suit.

1

Vocabulaire de topologie algébrique

- $\Omega \subset \mathbf{C}$ est *contractile* (homotope à un point) s'il existe $u : [0, 1] \times \Omega \rightarrow \Omega$ continue, avec $u(0, z) = z$ et $u(1, z) = z_0$.
- contractile \Rightarrow connexe par arcs ; étoilé \Rightarrow contractile.
- \mathbf{C} privé d'une demi-droite est étoilé ; $\mathbf{C} - \{z_0\}$ non contractile.
- Un *lacet* dans Ω est un chemin (\mathcal{C}^1 par morceaux) fermé : $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$, avec $\gamma(0) = \gamma(1)$, ou $\gamma : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \Omega$, ou $\gamma : \mathbf{S}^1 \rightarrow \Omega$.
- 2 lacets γ_0, γ_1 sont *homotopes*, s'il existe $u : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, continue, avec $u(0, t) = \gamma_0(t)$, $u(1, t) = \gamma_1(t)$, et $u(s, 0) = u(s, 1)$, si $s \in [0, 1]$.

3

Coupsures dans le plan complexe et logarithme

- $z \rightarrow e^z$ est biholomorphe de $\{z, \alpha < \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\alpha}$.
- $\log_\alpha : \mathbf{C} - \mathbf{R}_+ e^{i\alpha} \rightarrow \{z, \alpha < \text{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$ une détermination du logarithme : $\log z = \log |z| + i \arg_\alpha z$.
- $\log_{-\pi} : \mathbf{C} - \mathbf{R}_- \rightarrow \{z, -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$: *détermination principale du logarithme*.
- $\log_{-\pi} z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ sur $D(1, 1^-)$.
- On écrit simplement $\log z$, et sa dérivée est $1/z$, mais \log est multivaluée.

2

- Un lacet est *contractile* dans Ω s'il est homotope à un lacet constant (automatique si Ω est contractile).
- Cercle dans $\mathbf{C} - \{z_0\}$, lacets sur la sphère et le tore. Point de départ de la topologie algébrique créée par Poincaré (Analysis in situ).

Théorème Soit f de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe sur Ω . Si γ_0, γ_1 sont des lacets homotopes dans Ω , alors $\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz$.

- Si γ est contractile dans Ω , alors $\int_\gamma f(z) dz = 0$.

4

Théorème (Formule de Cauchy) $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ de classe \mathcal{C}^1 au sens complexe, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$, tels que $D(z_0, r) \subset \Omega$.

- $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw$, si $|z - z_0| < r$.
- Si $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$, alors $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$.
- $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, pour tout z tel que $D(z_0, |z - z_0|) \subset \Omega$.

• holomorphe $\Leftrightarrow \mathcal{C}^1$ au sens complexe \Leftrightarrow vérifie la formule de Cauchy.

5

- Valuation $v_{z_0}(f) \in \mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ de f en z_0 .
- Holomorphe en z_0 si $v_{z_0}(f) \geq 0$, méromorphe en z_0 si $v_{z_0}(f) \neq -\infty$, pôle d'ordre $k \in \mathbf{N}$ si $v_{z_0}(f) = -k$, singularité essentielle (pôle d'ordre infini) si $v_{z_0}(f) = -\infty$.

Proposition • f holomorphe en $z_0 \Leftrightarrow f$ est bornée autour de z_0 .

- f méromorphe non holomorphe $\Leftrightarrow |f| \rightarrow +\infty$ quand $z \rightarrow z_0$.
- f admet une singularité essentielle $\Leftrightarrow f(D(z_0, r) - \{z_0\})$ dense dans \mathbf{C} .
- f est méromorphe sur Ω si f est méromorphe en tout point de Ω .

7

Fonctions holomorphes sur un disque épointé ; résidus

Théorème f holomorphe sur $D(z_0, R^-) - \{z_0\}$. Si

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw, \text{ où } 0 < r < R,$$

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ holomorphe sur } D(z_0, R^-),$$

$$h(z) = \sum_{n < 0} a_n (z - z_0)^n \text{ holomorphe sur } \mathbf{C} - \{z_0\},$$

$$f(z) = g(z) + h(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z - z_0)^n \text{ (série de Laurent).}$$

• h et a_{-1} sont la partie singulière et le résidu $\text{Res}(f, z_0)$ de f en z_0 .

6

Primitives et indice d'un lacet par rapport à un point

- f holomorphe sur Ω , une primitive F de f est une fonction vérifiant $F' = f$.
- Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ est un chemin, alors $\int_\gamma f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.
- Il y a toujours une primitive localement ou si Ω est contractile.

Proposition Ω connexe, f holomorphe sur Ω . Alors f admet une primitive F sur Ω ssi $\int_\gamma f(z) dz = 0$ pour tout lacet γ dans Ω .

- Une fonction f , holomorphe sur Ω contractile, et ne s'annulant pas, admet un logarithme holomorphe : $h = \int \frac{f'}{f}$ vérifie $e^h = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

8

• $\int_{C(z_0, r)} \frac{dz}{z-z_0} = 2i\pi \neq 0$, donc $1/(z-z_0)$ n'admet pas de primitive sur $C - \{z_0\}$ qui n'est donc pas contractile (ainsi que $D(z_0, R^-) - \{z_0\}$).

• Si γ est un lacet dans C et $z_0 \notin \gamma$, alors $I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z-z_0} \in \mathbf{Z}$; c'est l'indice de γ par rapport à z_0 (le nombre de tours de γ autour de z_0).

Proposition (Détermination visuelle de l'indice) Soit γ un lacet dans C . Alors $I(\gamma, z) = 0$ à l'infini, et si on franchit γ en un point simple non anguleux, alors $I(\gamma, z)$ augmente de 1 si γ arrive de la gauche, et diminue de 1 si γ arrive de la droite.

9

Quelques applications

• Des tas d'applications parfois très astucieuses à des calculs d'intégrales.

• $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0, R)} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)} \rightarrow$ Liouville.

• $\zeta(2) = \pi^2/6$ en intégrant $1/z^2(e^z - 1)$ sur le carré de sommets $(2N+1)\pi(\pm 1 \pm i)$.

Proposition (localisation des zéros d'une fonction holomorphe)

$D(z_0, r) \subset \Omega$ et f holomorphe sur Ω ne s'annulant pas sur $C(z_0, r)$.
Alors $\frac{1}{2i\pi} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ est le nombre de zéros de f dans $D(z_0, r)$.

11

La formule des résidus

Théorème $F \subset \Omega$ fini, f holomorphe sur $\Omega - F$, γ un lacet contractile dans Ω , ne rencontrant pas F , alors

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in F} I(\gamma, a) \text{Res}(f, a).$$

* $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_{a,n} (z-a)^n$, si $a \in F$ et $|z-a| < r_a$.

* $g_a = \sum_{n \leq -2} c_{a,n} (z-a)^n$ a une primitive G_a sur $C - \{a\}$.

* $f - \sum_{a \in F} g_a - \sum_{a \in F} \frac{c_{a,-1}}{z-a}$ holomorphe sur Ω .

10

AMPHI 8

SÉRIES DE DIRICHLET ET FONCTION ZETA DE RIEMANN

- Principe du maximum, zéros isolés, unicité du prolongement analytique.
- Inégalités de Cauchy et convergence de la série de Taylor dans un disque d'holomorphic maximal.
- Construction de fonctions holomorphes (séries, produits et intégrales).
- Multivaluation du logarithme.
- Formule des résidus (contient la formule de Cauchy et l'invariance par homotopie de l'intégrale sur un lacet).

1

La fonction ζ dans le demi-plan $\text{Re}(s) > 1$

Théorème (i) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ est holomorphe sur $\text{Re}(s) > 1$.
 (ii) Si $\text{Re}(s) > 1$, le produit $\prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ est convergent et égal à $\zeta(s)$.

- Un produit infini $\prod_{i \in I} u_i$, avec $u_i \in \mathbf{C}$, est convergent s'il existe I_0 fini avec $u_i \neq 0$ si $i \notin I_0$ et $\sum_{i \notin I_0} |\log u_i| < +\infty$ ($\Leftrightarrow \sum_{i \in I} |u_i - 1| < +\infty$).

$$\prod_{i \in I} u_i = \left(\prod_{i \in I_0} u_i \right) \cdot \exp\left(\sum_{i \notin I_0} \log u_i \right);$$

en particulier $\prod_{i \in I} u_i = 0$ ssi il existe i tel que $u_i = 0$.

- ζ ne s'annule pas sur $\text{Re}(s) > 1$.

3

Premières propriétés des séries de Dirichlet

- $L(\mathbf{a}, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-s}$, s variable complexe, $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1}$, $a_n \in \mathbf{C}$.
- CV quelque part $\Leftrightarrow a_n = O(n^c)$. Abscisse de CV absolue σ_{abs} .

Théorème • $L(\mathbf{a}, s)$ est holomorphe sur $\text{Re}(s) > \sigma_{\text{abs}}$.

- $L^{(k)}(\mathbf{a}, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (-\log n)^k n^{-s}$, si $\text{Re}(s) > \sigma_{\text{abs}}$.

Théorème (Landau) Si $a_n \geq 0$, pour tout n , alors $L(\mathbf{a}, s)$ ne peut se prolonger analytiquement dans aucun voisinage de $\sigma = \sigma_{\text{abs}}$.

*holomorphe sur $D(\sigma, 3\varepsilon^-) \implies L(\mathbf{a}, \sigma - \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} L^{(k)}(\mathbf{a}, \sigma + \varepsilon) \frac{(-2\varepsilon)^k}{k!}$.

2

La fonction Γ d'Euler

Théorème La fonction $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$, si $\text{Re}(s) > 0$, admet un prolongement méromorphe sur \mathbf{C} , holomorphe sur $\mathbf{C} - (-\mathbf{N})$, vérifiant l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.

- Formule des compléments : $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$.
- Formule de Stirling : sur $|\arg(s)| \leq \alpha < \pi$, quand $|s| \rightarrow +\infty$,
 $\log \Gamma(s) = s \log s - s + \frac{1}{2}(\log 2\pi - \log s) + O_\alpha(s^{-1})$.
- $\frac{1}{\Gamma(s)}$ holomorphe sur \mathbf{C} .

4

Prolongement de ζ au plan complexe

Théorème (i) ζ admet un prolongement méromorphe à \mathbf{C} , holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

(ii) Si $\frac{z}{e^z - 1} = \sum B_n \frac{z^n}{n!}$, alors $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} \in \mathbf{Q}$.

• Les B_n sont les nombres de Bernoulli.

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_{2n+1} = 0, \text{ si } n \geq 1, B_{12} = \frac{-691}{2730}$$

5

Fonctions L de Dirichlet $L(\chi, s)$.

• Caractère de Dirichlet modulo $D = \text{caractère linéaire de } (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$.

On note $\text{Dir}(D)$ leur ensemble ; $\chi : (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \rightarrow \mathbf{C}^*$ est aussi vu comme $\chi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}^*$, de période D , avec $\chi(n) = 0$, si $(n, D) \neq 1$.

• $L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n)n^{-s}$ (fonction L de Dirichlet).

• Si χ est trivial, alors $L(\chi, s) = \zeta(s) \prod_{p|D} (1 - p^{-s})$.

Théorème (i) Si χ est non trivial, $L(\chi, s)$ converge absolument sur le demi-plan $\text{Re}(s) > 1$ et possède un prolongement holomorphe à \mathbf{C} .

(ii) $L(\chi, s)$ se factorise $L(\chi, s) = \prod_p (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$, si $\text{Re}(s) > 1$.

7

* Si $\text{Re}(s) > 1$, alors $\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} t^{s-2} dt$.

* $g(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ (holomorphe en dehors de $2i\pi\mathbf{Z} - \{0\}$) et $t^N g^{(k)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, pour tous $N, k \in \mathbf{N}$.

Proposition (i) Si f est \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+ et $t^N f^{(k)}(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, pour tous N, k , alors $M(f, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt$ est holomorphe sur $\text{Re}(s) > 0$, admet un prolongement holomorphe à \mathbf{C} .

(ii) $M(f, -k) = (-1)^k f^{(k)}(0)$, si $k \in \mathbf{N}$.

• $(s-1)\zeta(s) = M(g, s-1)$.

6

$$*L(\chi, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{b=1}^D \chi(b) e^{-bt}}{1 - e^{-Dt}} t^s \frac{dt}{t}$$

* $\sum_{b=1}^D \chi(b) = \varphi(D) \langle \mathbf{1}, \chi \rangle = 0$: orthogonalité des caractères de $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$.

Théorème $L(\chi, 1) \neq 0$, si χ est non trivial.

* Si $L(\chi, 1) = 0$, alors $F(s) = \prod_{\chi} L(\chi, s)$ est holomorphe sur \mathbf{C} .

* Si $\text{Re}(s) > 1$, alors $F(s) = \prod_{p \nmid D} \frac{1}{(1 - p^{-m_p s})^{\varphi(D)/m_p}}$ est une série de Dirichlet à coefficients entiers positifs \Rightarrow contradiction avec le th. de Landau.

• Application au théorème de la progression arithmétique.

8

L'équation fonctionnelle de la fonction ζ

Théorème La fonction ζ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \text{avec } \xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

• En dehors de $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, zéros triviaux en $-2n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Hypothèse de Riemann (1858) : tous les zéros dans la bande critique sur $\operatorname{Re}(s) = 1/2$.

* Si $\operatorname{Re}(s) > 1$, $2\xi(s) = \int_0^{+\infty} (g(t) - 1)t^{s/2} dt/t$, où $g(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}$.

* transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ est $e^{-\pi x^2}$, celle de $e^{-\pi t x^2}$ est $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi t^{-1} x^2}$.

* Formule de Poisson : $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(t^{-1})$.

* On coupe l'intégrale en 1 et on fait le changement $t \mapsto t^{-1}$ sur $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} 2\xi(s) &= \int_1^{+\infty} (g(t) - 1)t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} (t^{1/2}g(t) - 1)t^{-s/2} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^{+\infty} (g(t) - 1)(t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t} - \left(\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s} \right). \end{aligned}$$

AMPHI 9

THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS

1

La conjecture d'Artin

• Si $\rho : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ morphisme de groupes, fonction L d'Artin

$$L(\rho, s) = \prod_p \frac{1}{1 + b_{p,1}p^{-s} + \dots + b_{p,d}p^{-ds}},$$

où $b_{p,d} \neq 0$ sauf pour un nombre fini de p ,

les zéros de $1 + b_{p,1}T + \dots + b_{p,d}T^d$ sont des racines de l'unité.

Si $\frac{1}{1 + b_{p,1}T + \dots + b_{p,d}T^d} = 1 + a(p)T + a(p^2)T^2 + \dots$,

alors $L(\rho, s) = \sum a_n n^{-s}$, avec $a_n = \prod a(p^{f_p})$ si $n = \prod p^{f_p}$.

• $L(\rho, s)$ série de Dirichlet holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$.

• Si $d = 1$ et $\rho(g) = 1$ pour tout $g \in G_{\mathbb{Q}}$, alors $L(\rho, s) = \zeta(s)$.

3

La fonction ζ dans le plan complexe

Théorème (i) $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(ii) Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, le produit $\prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ est convergent et égal à $\zeta(s)$.

(iii) $\zeta'(s)/\zeta(s) = - \sum_p \sum_{\nu \geq 1} (\log p) p^{-\nu s}$.

• ζ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Théorème ζ admet un prolongement méromorphe à \mathbb{C} , holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.

• Hyp. de Riemann (1858) : $\zeta(s) = 0$ et $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

• Existence d'un prolongement = petit miracle.

2

Conjecture (Artin 1923) si ρ est irréductible et non triviale, $L(\rho, s)$ admet un prolongement holomorphe à \mathbb{C} .

• Argument probabiliste : devrait s'arrêter à $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

• OK si $d = 1$: $L(\rho, s) = L(\chi, s)$ avec χ caractère de Dirichlet (Kronecker(1853)-Weber(1886)).

• Presque OK si $d = 2$ (Khare-Wintenberger octobre 2008).

• Gigantesque programme (Langlands 1968) pour d quelconque.

4

La stratégie de la preuve du théorème des nombres premiers

Théorème $\pi(x) = |\{p \in \mathcal{P}, p \leq x\}| \sim x / \log x$.

- Argument heuristique d'Euler (1707-83), tables de Gauss (1777-1855).
- Démonstration en 1896 (Hadamard et de la Vallée Poussin) suivant une stratégie de Riemann (1858).
- Démonstration élémentaire en 1949 (Erdős et Selberg).
- $\sum_{n \leq x} a_n$ relié à $\sum a_n n^{-s}$, mais $\sum_{p \in \mathcal{P}} p^{-s}$ pas agréable.
- $-\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_n \Lambda(n)n^{-s}$, et $\Lambda(n) = \log p$, si $n = p^\nu$, = 0 sinon.
- $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, $\psi_1(x) = \int_0^x \psi(t) dt = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)(x - n)$

5

Non annulation sur la droite $\text{Re}(s) = 1$

Lemme Si $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, et si $|z| < \inf(1, |\alpha|^{-1}, |\beta|^{-1}, |\alpha\beta|^{-1})$, alors

$$\frac{1 - \alpha\beta z^2}{(1 - z)(1 - \alpha z)(1 - \beta z)(1 - \alpha\beta z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \dots + \alpha^n)(1 + \dots + \beta^n)z^n.$$

Proposition Si $t \in \mathbf{R}$, alors $F(s) = \zeta(2s)^{-1} \zeta(s)^2 \zeta(s + it) \zeta(s - it)$ est une série de Dirichlet à coefficients positifs.

- Théorème de Landau \Rightarrow contradiction en $s = 1/2$, si $\zeta(1 + it) = 0$.

7

* $\pi(x) \sim x / \log x \Leftrightarrow \psi(x) \sim x \Leftrightarrow \psi_1(x) \sim x^2 / 2$.

* Si $x > 1$, alors $\psi_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$.

* $\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}x + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \sum_{\zeta(\rho)=0, \text{Im}(\rho)<2} \frac{v_\rho(\zeta)x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}$

et $\sum_{\zeta(\rho)=0, \text{Im}(\rho)<2} \frac{v_\rho(\zeta)}{\rho(\rho+1)}$ est absolument convergente.

* ζ ne s'annule pas pour $\text{Re}(s) \geq 1$.

• Hypothèse de Riemann $\Rightarrow \psi_1(x) - x^2/2 = O(x^{3/2}) \Rightarrow$ terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

6

Une formule intégrale pour ψ_1

• Si $x > 1$, alors $\psi_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds$.

* $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\Lambda(n)n^{-s}x^{s+1}}{s(s+1)} \right| = \frac{|\zeta'(2)/\zeta(2)|x^3}{|s(s+1)|}$, si $\text{Re}(s) = 2$

et $\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left| \frac{ds}{s(s+1)} \right| = \int_{\mathbf{R}} \frac{dt}{|2+it||3+it|} < +\infty$

donc $\frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Lambda(n) \frac{x^{s+1}n^{-s}}{s(s+1)} ds$.

* On conclut par un calcul de résidus.

8

L'équation fonctionnelle de la fonction ζ , Riemann (1858)

Théorème *La fonction ζ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin(\pi s/2) \cdot \zeta(1-s).$$

$$\xi(s) = \xi(1-s), \quad \text{avec } \xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s).$$

• En dehors de la *bande critique* $0 \leq \text{Re}(s) \leq 1$, zéros triviaux en $-2n$, $n \in \mathbf{N}^*$.

La fonction ζ en dehors de la bande critique

La formule de Stirling et les équations fonctionnelles

$$\zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin(\pi s/2) \cdot \zeta(1-s)$$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log(2\pi) + \frac{\pi \cos(\pi s/2)}{2 \sin(\pi s/2)} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

Impliquent les majorations

$$|\zeta(a+it)| \leq C(a)|t|^{(1/2)-a}, \text{ si } a \leq -1 \text{ et } |t| \geq 1.$$

$$|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq C + \log|s|, \text{ si } \text{Re}(s) \leq -1 \text{ et } |s+2k| \geq 1/2, \text{ si } k \in \mathbf{N}.$$

- * Si $\text{Re}(s) > 1$, $2\xi(s) = \int_0^{+\infty} (g(t) - 1)t^{s/2} dt/t$, où $g(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\pi n^2 t}$.
- * transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ est $e^{-\pi x^2}$, celle de $e^{-\pi t x^2}$ est $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\pi t^{-1} x^2}$.
- * Formule de Poisson : $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} g(t^{-1})$.
- * On coupe l'intégrale en 1 et on fait le changement $t \mapsto t^{-1}$ sur $[0, 1]$.

$$2\xi(s) = \int_1^{+\infty} (g(t) - 1)t^{s/2} \frac{dt}{t} + \int_1^{+\infty} (t^{1/2}g(t) - 1)t^{-s/2} \frac{dt}{t}$$

$$= \int_1^{+\infty} (g(t) - 1)(t^{s/2} + t^{(1-s)/2}) \frac{dt}{t} - \left(\frac{2}{1-s} + \frac{2}{s} \right).$$

La fonction ζ dans la bande critique

- Proposition** (i) $\sum_{n \leq \text{Im}(\rho) \leq n+1} v_\rho(\zeta) = O(\log n)$.
- (ii) Il existe $C > 0$, et $t_n \in [n, n+1]$, pour tout n assez grand, tels que $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq C(\log n)^2$, si $s \in [2+it_n, -1+it_n]$.

Lemme $F(s) = (s+11)^{-12}(s-1)\zeta(s)$ est bornée dans $B = \{s, -10 \leq \text{Re}(s) \leq 2\}$.

- * Bornée par M sur $\text{Re}(s) = 2$ et $\text{Re}(s) = -10$.
- * $|F(s)| \leq C' e^{c|\text{Im}(s)|}$, si $s \in B \Rightarrow e^{\varepsilon s^2} F(s) \rightarrow 0$ quand $|\text{Im}(s)| \rightarrow +\infty$.
- * Principe du maximum $\Rightarrow |e^{\varepsilon s^2} F(s)| \leq e^{100\varepsilon} M$, pour tous $s \in B$ et $\varepsilon > 0$.

Lemme Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , $R > 0$ tel que $D(0, R) \subset \Omega$, et h holomorphe sur Ω , avec $h(0) = 0$. Soit $A = \sup_{|s|=R} \operatorname{Re}(h(s))$. Alors

$$\left| \frac{h^{(k)}(s)}{k!} \right| \leq \frac{4AR}{(R - |s|)^{k+1}}, \text{ si } k \in \mathbf{N} \text{ et } |s| < R.$$

Lemme Soient Ω un ouvert de \mathbf{C} , $R > 0$ tel que $D(0, 3R) \subset \Omega$, et f holomorphe sur Ω , avec $f(0) = 1$. Soit $M = \sup_{s \in D(0, 3R)} |f(s)|$, et soit Y l'ensemble des zéros de f dans $D(0, R)$. Alors :

$$\sum_{\rho \in Y} v_{\rho}(f) \leq \frac{\log M}{\log 2} \quad \text{et} \quad \left| \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\rho \in Y} \frac{v_{\rho}(f)}{s - \rho} \right| \leq \frac{4R \log M}{(R - |s|)^2}, \text{ si } |s| < R.$$

INDEX

Index terminologique

- adèle, 53
- base
 - hilbertienne, 31, 32, 62, 63
- borélien, 38
- caractère
 - Dirichlet, 15, 110, 111
 - irréductible, 11, 12
 - linéaire, 4, 14, 21, 55, 56, 59, 62
 - orthogonalité, 12, 14
 - représentation, 3–5, 7, 11, 23, 24
 - table, 15
 - unitaire continu, 53
- chemin, 73
- coefficient
 - de Fourier, 61, 63
- compacité, 28, 30, 34, 51, 53, 73, 76–80, 88, 89, 94, 103
- compacité locale, 40
- complétion, 47, 68
- complétude, 27–30, 33, 45, 46, 49, 68
- connexité, 71, 72, 86, 91, 94, 99
 - composante connexe, 94
- constante γ d'Euler, 103, 115
- contractile, 85, 86, 88, 92, 100
- convergence
 - en moyenne, 42
 - en moyenne quadratique, 46
 - normale, 27
 - simple p.p., 37
 - uniforme, 30
- convolution, 88
- cycle, 3, 16–18
- dénombrable, 30, 35
- demi-plan de Poincaré, 86
- densité, 31, 36, 47, 49, 52, 57, 60, 63, 68
- difféomorphisme, 50
- distribution, 57, 66, 105
- dollar, 117
 - million de, 110
- équivalence
 - normes, 28
- espace
 - de Banach, 27–30, 45
 - de Hilbert, 30, 46
- espace fonctionnel
 - \mathcal{C} , \mathcal{C}_b ou \mathcal{C}_c , 30, 57
 - \mathcal{L}^1 ou L^1 , 41, 42, 44–48, 51, 52, 56–58, 66, 105
 - \mathcal{L}^2 ou L^2 , 45–47
 - Schwartz \mathcal{S} , 64
- étoilé, 85, 88, 92
- facteur d'Euler, 107
- fonction
 - analytique, 70, 72
 - centrale, 3, 10–12, 15, 24
 - de carré sommable, 27, 45, 46
 - Γ d'Euler, 53, 103, 104, 110
 - holomorphe, 70–72, 76–78, 80, 82–84, 86, 88, 91–95, 97–100, 102, 103, 105, 108, 109, 119, 121, 126, 127, 131
 - méromorphe, 98, 99, 102, 103, 108, 119, 121
 - mesurable, 36, 42, 47, 49, 51, 53, 80
 - sommable, 41–43, 54, 56, 57, 66, 80, 81, 95, 105, 120
 - θ de Jacobi, 147
- fonction L
 - Dirichlet, 111, 118, 121
- fonction zêta
 - de Riemann, 101, 107–110, 116, 118, 120, 121, 131
- forme
 - alternée, 74
 - bilinéaire, 20, 22
 - différentielle, 74, 86
 - de Jordan, 7
 - linéaire, 20, 34, 74
 - modulaire, 146
 - sesquilinéaire, 46
- formule
 - de Burnside, 14, 19
 - de Cauchy, 75, 77, 79, 80, 85, 89, 93, 97
 - du changement de variable, 51

- explicite, 122, 132
- de réciprocity de Frobenius, 24
- de Gauss, 104
- $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, 52
- d'inversion de Fourier, 15, 53
- de Poisson, 64
- des résidus, 85, 95, 100, 119, 122, 129
- de Stirling, 121, 123
- de Stokes, 86

- inégalité
 - Cauchy, 77, 78
 - Cauchy-Schwarz, 29, 46
 - ultramétrique, 68
- indice d'un lacet par rapport à un point, 93, 94, 119
- intégrale
 - de Cauchy, 33
 - de Lebesgue, 33, 34, 39
 - de Riemann, 33, 34
- jacobien, 50
 - matrice jacobienne, 50
- lacet, 73
- limite
 - projective, 68
- mesurabilité, 36
- mesure
 - de Lebesgue, 39, 40
 - extérieure d'un ensemble, 35
 - nulle (ensemble de), 35
- nombre
 - algébrique, 35
 - de Bernoulli, 108
 - irrationnel, 35
 - premier, 115–117
 - premier de Mersenne, 115
 - premier régulier, 108
 - rationnel, 35, 108
 - transcendant, 35
- opérateur
 - entrelacement, 6
 - moyenne, 6
- orthonormalisation de Schmidt, 31

- partie finie de Hadamard, 105
- polynôme
 - binomial, 68
- primitive, 91, 92, 100
- produit scalaire, 9, 11, 30, 46, 60, 63
- produit tensoriel, 13, 20–22, 62
- prolongement analytique, 71, 72, 102, 104–106, 108, 111
- propriété universelle, 20

- quotient
 - espace topologique, 59
 - espace vectoriel, 45, 46, 60
 - groupe, 59

- représentation, 1
 - duale, 6
 - fidèle, 2
 - induite, 23, 24
 - irréductible, 8–14, 16, 18, 19, 25
 - isomorphisme, 7
 - de permutation, 5, 18
 - régulière, 5, 12, 14, 19, 23
 - sous-représentation, 7
 - triviale, 4, 6

- série
 - de Dirichlet, 101–107, 111, 120, 131
 - entière, 67–72, 76, 77
 - formelle, 67, 68
 - de Fourier, 53, 62, 64
 - de Laurent, 98
 - de Taylor, 69, 76, 77
- sommabilité
 - fonction, 41
 - série, 28
- somme directe
 - de représentations, 4

- table des caractères, 15, 16, 18, 134, 135, 153
- topologie
 - algébrique, 85
 - séparée, 45, 46
- transformée de Fourier, 53
 - dans \mathcal{S} , 64–66
 - dans L^1 , 56, 57, 66
 - distribution, 64

groupes finis, 15
transformée de Mellin
sur \mathbf{R} , 105
tribu, 37
borélienne, 38
ultramétrique, 68

Énoncés mathématiques

- application ouverte, 83
- Baire (lemme de), 36
- Banach-Tarski (paradoxe de), 37
- Bateman-Horn (conjecture de), 116, 117
- Bessel-Parseval (identité de), 32
- Borel-Cantelli (théorème de), 36
- Borel-Carathéodory (théorème de), 127
- Burnside (formule de), 14, 19, 151, 155
- Cauchy (formule intégrale de), 75
- Cauchy (inégalité de), 77
- continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, 53, 94
- convergence dominée, 33, 43, 44, 47, 53–55, 77, 89, 107, 132
- convergence dominée pour les séries, 44
- convergence monotone, 42, 44
- dérivation sous le signe somme, 54, 55, 58
- densité de \mathcal{C}_c dans L^1 , 47
- Erdős (problème d'), 117
- Fatou (lemme de), 42
- Fermat
 - grand théorème de, 108
 - nombre premiers de la forme $4n + 1$, 118
- Fischer-Riesz (théorème de), 46
- Fourier (formule d'inversion), 65, 66
- Fubini (sur $\mathbf{N} \times X$), 44
- Fubini (théorème de), 33, 48, 49, 66, 81
- holomorphic
 - fonctions définies par une intégrale, 80, 81, 106, 110
 - produits de fonctions holomorphes, 79
 - séries de fonctions holomorphes, 78, 80, 103, 152, 156
- inversion globale, 83
- inversion locale pour les fonctions holomorphes, 81, 83
- Jordan (théorème de), 93
- Lagrange
 - théorème des 4 carrés, 146
- Landau (théorème de), 102, 112, 131
- Liouville (théorème de), 77
- Maschke (théorème de), 9
- moyenne (propriété de la), 77
- nombre premiers, 115–117, 120, 130, 132
- orthonormalité des caractères, 11
- Poisson (formule de), 64
- principe du maximum, 67, 73, 126, 127
- progression arithmétique, 15, 112, 115, 117
- représentation conforme, 86
- Riemann (hypothèse de), 110
- Riemann-Lebesgue (théorème de), 56
- Schur (lemme de), 10, 136
- théorème fondamental
 - de l'algèbre, 78
 - de l'analyse, 43, 86
- zéros isolés, 71, 99