Invent. Math. 91, 371–389 (1988)

Inventiones mathematicae

Résidu en $s=1$ des fonctions zêta p-adiques

Pierre Colmez
Max-Planck-Institut für Mathematik, Gottfried-Claren-Strasse 26, D-5300 Bonn, Federal Republic of Germany

§ 1. Introduction

Soit F un corps totalement réel, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers, et $\zeta_F(s)$ la fonction zêta de Dedekind de F. $\zeta_F(s)$ est une série de Dirichlet possédant un produit Eulerien $\zeta_F(s)=\prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{(1-N\mathfrak{p}^{-s})}$ qui converge pour $\operatorname{Re}(s)>1$. $\zeta_F(s)$ peut se prolonger en une fonction méromorphe à tout le plan complexe, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s=1$. Le résidu en $s=1$ de $\zeta_F(s)$ est donné par la formule suivante:

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_F(s)=\frac{2^n R_\infty h}{w\sqrt{D}},$$

où h est le nombre de classes de F, R_∞ son régulateur, D son discriminant, $w=2$ le nombre de racines de l'unité contenues dans F et $n=[F:\mathbb{Q}]$.

On sait de plus que si k est un entier positif, $\zeta_F(-k)$ est un nombre rationnel. On possède à l'heure actuelle deux démonstrations de ce fait; l'une, due à Siegel [Si], utilise les formes modulaires de Hilbert et l'autre, due à Shintani [Sh], utilise une décomposition en cônes simpliciaux de $(\mathbb{R}^+)^n$ modulo l'action des unités de $\mathcal{O}_F$. Ces deux démonstrations ont conduit à deux constructions différentes des fonctions zêta p-adiques. Utilisant la méthode de Siegel, Serre [Se 1] a construit une fonction zêta p-adique continue sur $\mathbb{Z}_p-\{1\}$, $\zeta_{F,p}$. Posons $q=4$ si $p=2$, $q=p$ sinon, $E_p(s)=\prod_{\mathfrak{p}\mid p}\left(1-\frac{1}{N\mathfrak{p}^s}\right)$, et soit ϕ la fonction indicatrice d'Euler. $\zeta_{F,p}$ vérifie $\zeta_{F,p}(-k)=\zeta_F(-k)\,E_p(-k)$, pour tout $k\equiv -1\,[\phi(q)]$.

Deligne et Ribet [D-R] ont généralisé cette construction au cas d'une fonction L attachée à un caractère de Dirichlet quelconque de F. Cette construction est en grande partie algébrique et utilise un important bagage de géométrie algébrique. Utilisant la méthode de Shintani [Sh], P. Cassou-Noguès [C-N] et D. Barsky [B] ont donné une construction purement analytique de $\zeta_{F,p}$. Leur démonstration a été reprise et réinterprétée en termes de mesures p-adiques par N. Katz [K].

Le théorème principal de cet article donne une formule pour le résidu en $s=1$ de la fonction zêta p-adique, à savoir:

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\,\zeta_{F,p}(s)=\frac{2^n R_p\, h E_p(1)}{w\sqrt{D}},$$

où R_p est le régulateur p-adique de F. Cette formule était connue dans le cas où F est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ (on en trouve une démonstration dans [Ko] ou [A-F]), et de plus, Serre [Se 2] avait démontré que la valuation p-adique du premier membre était supérieure à celle du second membre. Il est à noter que dans cette expression, R_p et $\sqrt{D}$ ne sont définis qu'au signe près, mais leur quotient est bien défini comme l'ont montré Amice et Fresnel [A-F]. C'est d'ailleurs cette quantité qui apparaîtra naturellement dans les calculs (Lemmes 5.2 à 5.4).

Les paragraphes § 2 et § 3 de cet article sont consacrés à la description d'une variante effective de la méthode de Shintani. Dans le paragraphe § 4, on construit la fonction $\zeta_{F,p}$: la construction ne diffère de celle de P. Cassou-Noguès que par le langage (on utilise le langage des distributions p-adiques de Y. Amice [A]). Le dernièr paragraphe est consacré au calcul du résidu.

§ 2. Méthode de Shintani

On note $\zeta_F(s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$ la fonction zêta associée au corps totalement réel F, où la somme est sur les idéaux de $\mathcal{O}_F$. Notre but maintenant est d'exprimer $\zeta_F(s)$ comme la transformée de Mellin en n variables d'une fonction rationnelle en e^z. Soit $\tau_1, \dots, \tau_n$ les n plongements de F dans $\mathbb{R}$. On considère F comme étant plongé dans $\mathbb{R}^n$ via $\alpha\to(\tau_1(\alpha), \dots, \tau_n(\alpha))$. Un élément de F s'écrit comme un vecteur à n composantes: on multiplie les vecteurs composante par composante. On note $\operatorname{Tr} x$ la somme des composantes de $x\in\mathbb{R}^n$, et $X=(\mathbb{R}^{+*})^n$.

Soit U_p le groupe des unités totalement positives congrues à 1 modulo p. Soit G le groupe des classes de rayon modulo p. On choisit un système de représentants entiers de G. On écrit $\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}$ si $\mathfrak{b}$ est dans la classe de $\mathfrak{a}$. Ceci veut dire qu'il existe $\alpha\in\mathfrak{a}^{-1}$, α totalement positif, $\alpha\equiv 1\,[p]$, tel que $\mathfrak{b}=(\alpha)\,\mathfrak{a}$ (un tel α est défini modulo U_p). Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de G, on définit la fonction zêta partielle

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s)=\sum_{\mathfrak{b}\equiv\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{b})^s}=\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}\sum_{\substack{\alpha\in X/U_p\\ \alpha\in 1+p\mathfrak{a}^{-1}}}\frac{1}{N(\alpha)^s}=\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}\,\frac{1}{[U_p\colon V]}\sum_{\substack{\alpha\in X/V\\ \alpha\in 1+p\mathfrak{a}^{-1}}}\frac{1}{N(\alpha)^s}.$$

La dernière égalité est valable pour tout sous-groupe V d'indice fini de U_p. On a alors la relation $\sum_{\mathfrak{a}\in G}\zeta_{\mathfrak{a}}(s)=\zeta_F(s)\,E_p(s)$. On exprime maintenant la somme sur $\alpha\in X/V$ d'une manière plus commode pour les calculs.

Soit $D=X\cap\left\{z\,\middle|\,\prod_{i=1}^{n} z_i=1\right\}$, et soit V un sous-groupe libre de rang $n-1$ de D. Pour $n-1$ vecteurs de V, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$, et pour chaque $\sigma\in S_{n-1}$, on pose $f_{1,\sigma}=1$ et $f_{i,\sigma}=\prod_{j<i}\varepsilon_{\sigma(j)}$ pour $2\leqq i\leqq n$. On dit que $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ vérifient (H) si:

(i) le groupe multiplicatif engendré par les ε_i est discret et libre de rang $n-1$

(ii) $\forall \sigma \in S_{n-1}$, $\det(f_{1,\sigma}, \dots, f_{n,\sigma})$ est du même signe que $\varepsilon(\sigma)$, la signature de σ.

Lemme 2.1. *Si V est un sous-groupe de D, libre de rang $n-1$, il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in V$ tels que $\forall k \geqq 1$, $\varepsilon_1^k, \dots, \varepsilon_{n-1}^k$ vérifient (H).*

Démonstration. Soit $\operatorname{Log}: X \to \mathbb{R}^n$

$$(x_1, \dots, x_n) \to (\operatorname{Log} x_1, \dots, \operatorname{Log} x_n).$$

Soit H l'hyperplan d'équation $\operatorname{Tr} z = 0$. $\operatorname{Log} V$ est alors un réseau de H. Demander que V', le groupe engendré par $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$, soit d'indice fini dans V revient à demander que $\operatorname{Log} \varepsilon_1, \dots, \operatorname{Log} \varepsilon_{n-1}$ forment une famille libre. Soit $M > 0$. On pose

$$l_i(M) = \left(\frac{-M}{n-1}, \frac{-M}{n-1}, \dots, \frac{-M}{n-1}, M, \frac{-M}{n-1}, \dots, \frac{-M}{n-1}\right),$$

où le M est à la $(i+1)$-ième place. Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme du sup. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et rayon r. Il existe une constante $r(V)$ dépendant uniquement de V telle que pour tout $M > 0$, on puisse choisir $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ dans V de telle sorte que $\operatorname{Log} \varepsilon_i \in B(l_i(M), r(V))$. Les $l_i(M)$ formant une base de H, les $\operatorname{Log} \varepsilon_i$ formeront une famille libre, dés que M est assez grand.

Prenons alors M vérifiant

(i) $M \geqq 2(n-1)^4 r(V)$

(ii) $M > (n-1)^2 \operatorname{Log} n!$

(iii) M assez grand pour que $\operatorname{Log} \varepsilon_i \in B(l_i(M), r(V))$ implique que les ε_i forment une famille libre.

Soit $\Delta = \det(f_{1,id}^k, \dots, f_{n,id}^k)$. Posons $E_i = \exp\left[M\left(1 - \frac{i-2}{n-1}\right)\right]$ et $F_i = \exp\left[-M\left(\frac{i-1}{n-1}\right)\right]$. Alors cette matrice s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_{1,2}^k F_2^k & \beta_{1,3}^k F_3^k & \dots & \beta_{1,n}^k F_n^k \\ 1 & \beta_{2,2}^k E_2^k & \beta_{2,3}^k E_3^k & \dots & \beta_{2,n}^k E_n^k \\ 1 & \beta_{3,2}^k F_2^k & \beta_{3,3}^k E_3^k & \dots & \beta_{3,n}^k E_n^k \\ 1 & \beta_{4,2}^k F_2^k & \beta_{4,3}^k F_3^k & \dots & \beta_{4,n}^k E_n^k \\ & & \dots & & \\ 1 & \beta_{n,2}^k F_2^k & \beta_{n,3}^k F_3^k & & \beta_{n,n}^k E_n^k \end{bmatrix},$$

où, grâce à (i), $e^{\frac{-M}{2(n-1)^3}} \leqq \beta_{i,j} \leqq e^{\frac{M}{2(n-1)^3}}$.

Developpons Δ et isolons le terme diagonal; nous obtenons, en utilisant les majorations précédemment obtenues:

$$\left|\Delta - e^{kM\binom{n}{2}} \prod_{i=2}^{n} \beta_{i,i}^k\right| \leqq (n!-1)\, e^{\frac{kM}{2(n-1)^2}}\, e^{kM\left(\frac{n}{2} - \frac{n}{n-1}\right)}$$

et donc: $\Delta \geqq e^{\frac{kMn}{2}}\left(e^{\frac{-kM}{2(n-1)^2}} - (n!-1)\, e^{\left(\frac{kM}{2(n-1)^2} - \frac{kMn}{n-1}\right)}\right) > 0$ d'après (ii).

On démontre de même que $\det(f^k_{1,\sigma}, \ldots, f^k_{n,\sigma})$ est du même signe que $\varepsilon(\sigma)$, ce qui termine la démonstration du lemme 2-1. □

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ une famille d'éléments de D vérifiant (H), et V le sous-groupe de D engendré par cette famille. Soit J une partie non-vide de $[1, \ldots, n]$, soit $C_{\sigma,J}$ le cône engendré par $\{f_{j,\sigma} \mid j \in J\}$: $C_{\sigma,J} = \sum_{j\in J} (\mathbb{R}^{+*}) f_{j,\sigma}$. On met une relation d'equivalence entre les couples (σ, J) de la manière suivante: $(\sigma, J) \simeq (\sigma', J')$ s'il existe $v \in V$ tel que $C_{\sigma,J} = vC_{\sigma',J'}$.

Lemme 2.2.

$$X/V = \coprod_{\{(\sigma,J)/\simeq\}} C_{\sigma,J} \tag{1}$$

Démonstration. Notons $C_\sigma = C_{\sigma,[1,\ldots,n]}$. Il est démontré dans [C] que sous les hypothèses du Lemme, on a

(i) $vC_\sigma \cap v'C_{\sigma'} \neq \emptyset \Rightarrow v = v'$ et $\sigma = \sigma'$.

(ii) $\bigcup_{\sigma,v} v\bar{C}_\sigma = X$ où $\bar{C}_\sigma$ est l'adhérence de C_σ dans X. Or, $\bar{C}_\sigma = \coprod_J C_{\sigma,J}$. On obtient donc $X = \bigcup_{\{(\sigma,J)/\simeq\},v} vC_{\sigma,J}$. Il suffit donc de prouver que

$$C_{\sigma,J} \cap vC_{\sigma',J'} \neq \emptyset \Rightarrow C_{\sigma,J} = vC_{\sigma',J'},$$

i.e. $(\sigma, J) \simeq (\sigma', J')$. Pour cela, notons $\mathscr{A} = \{\{vf_{1,\sigma}, \ldots, vf_{n,\sigma}\} \mid \sigma \in S_{n-1}, v \in V\}$. Si B est une partie finie de X, notons $\mathscr{A}(B) = \{A \in \mathscr{A} \mid B \subset A\}$ et $C(B)$ le cône engendré par les éléments de B.

Sous-Lemme. *Si $\mathscr{A}(B) \neq \emptyset$, alors*

(1) $C(B) \subset [\bigcup_{A\in\mathscr{A}(B)} \overline{C(A)}]^\circ$, *où $\overline{C(A)}$ est l'adhérence de $C(A)$ dans X, et E° est l'intérieur de E dans X.*

(2) *Soit $x \in C(B)$ et soit $\mathscr{A}(x) = \{A \in \mathscr{A} \mid \forall VU$ voisinage de x, $U \cap C(A) \neq \emptyset\}$. Alors $\mathscr{A}(B) = \mathscr{A}(x)$.*

(3) $B = \bigcap_{A\in\mathscr{A}(B)} A$.

Le résultat cherché se déduit de ce sous-lemme de la manière suivante. Soit $B = \{f_{j,\sigma} \mid j \in J\}$ et $B' = \{vf_{j',\sigma'} \mid j' \in J'\}$. On a $C_{\sigma,J} = C(B)$ et $vC_{\sigma',J'} = C(B')$. Soit $x \in C_{\sigma,J} \cap vC_{\sigma',J'}$. Utilisant le (2) du sous-lemme, on en déduit que $\mathscr{A}(x) = \mathscr{A}(B) = \mathscr{A}(B')$ et en utilisant le (3), on obtient $B = B'$ et donc $C_{\sigma,J} = vC_{\sigma',J'}$.

Démonstration du Sous-Lemme. (3) est évident; on a $\mathscr{A}(B) \subset \mathscr{A}(x)$ de manière évidente et l'inclusion inverse découle de (1). Il n'y a donc en fait que (1) à prouver. Considérons les 3 cas suivants:

a) $\operatorname{card} B = n$. Dans ce cas $\mathscr{A}(B) = \{B\}$ et l'assertion se réduit à $C(B) \subset [\overline{C(B)}]^\circ$. En fait, $C(B) = [\overline{C(B)}]^\circ$.

b) $\operatorname{card} B = n-1$. Dans ce cas $\mathscr{A}(B)$ se compose de deux éléments: $B \cup \{f_1\}$ et $B \cup \{f_2\}$, et le résultat découle du fait que f_1 et f_2 ne sont pas du même côté de l'hyperplan engendré par B, comme on peut le constater en calculant les signes des déterminants correspondants (il faut utiliser le fait que $\det(f_{1,\sigma}, \ldots, f_{n,\sigma})$ est du signe de $\varepsilon(\sigma)$).

c) $\operatorname{card} B \leqq n-2$. Appelons $E(B) = \bigcup_{A\in\mathscr{A}(B)} \overline{C(A)}$. Supposons $C(B) \not\subset E(B)^\circ$ et soit $b \in C(B) - E(B)^\circ$. Soient $\mathscr{A}_1(B)$ (resp. $\mathscr{A}_2(B)$) l'ensemble des parties à $n-1$ éléments des éléments de $\mathscr{A}(B)$ contenant B (resp. ne contenant pas B), $\mathscr{A}_3(B)$ l'ensemble des parties à $n-2$ éléments des éléments de $\mathscr{A}(B)$. Soit $\delta = \inf_{A \in \mathscr{A}_2(B)} d(b, \overline{C(A)})$; δ est strictement positif car $\mathscr{A}_2(B)$ est fini, et si $A \in \mathscr{A}_2(B)$, alors $d(b, \overline{C(A)}) > 0$, car sinon on aurait $b \in \overline{C(A)}$ et $b \in C(B)$ et $C(A \cup B)$ serait inclus dans un hyperplan ce qui est contraire au fait que $\det(f_{1,\sigma}, \ldots, f_{n,\sigma})$ est non nul pour tout σ. Comme $b \notin E(B)^\circ$, il existe x n'appartenant pas à $E(B)$ et vérifiant $d(b, x) < \delta/2$. On peut alors construire une droite Δ passant par x et ayant les propriétés suivantes:

1) si $A \in \mathscr{A}_3(B)$, $\Delta \cap \overline{C(A)} = \emptyset$

2) il existe $A_0 \in \mathscr{A}_1(B)$ tel que $\Delta \cap \overline{C(A)} \neq \emptyset$ et si $A' \in \mathscr{A}_2(B)$ et $\Delta \cap C(A') \neq 0$, alors $\delta_0 = d(x, \Delta \cap \overline{C(A_0)}) < d(x, \Delta \cap \overline{C(A')})$.

En effet, pour vérifier 1), il suffit de prendre Δ non contenue dans un nombre fini d'hyperplans. Pour vérifier 2), il suffit de prendre Δ suffisamment proche de la droite (b, x) (voir la définition de δ et de x) et en dehors de ce nombre fini d'hyperplans. $E(B)$ étant fermé, il existe $y \in E(B) \cap \Delta$ tel que $d(y, x) \leqq \delta_0$ et $[x, y[\cap E(B) = \emptyset$. On déduit alors des propriétés 1) et 2) vérifiées par Δ, que si $A \in \mathscr{A}_3(B) \cup \mathscr{A}_2(B)$, $y \notin \overline{C(A)}$; et comme

$$E(B) = \bigcup_{A \in \mathscr{A}(B)} C(A) \bigcup_{\mathscr{A} \in \mathscr{A}_1(B)} C(A) \bigcup_{A \in \mathscr{A}_2(B)} C(A) \bigcup_{A \in \mathscr{A}_3(B)} \overline{C(A)},$$

il existe $A \in \mathscr{A}(B) \cup \mathscr{A}_1(B)$ tel que $y \in C(A)$. De plus $[x, y[\cap E(B) = \emptyset$ implique $y \notin E(B)^\circ$, mais ceci est en contradiction avec $y \in C(A)$ car $C(A)$ est ouvert si $A \in \mathscr{A}(B)$ et $C(A) \subset E(A)^\circ \subset E(B)^\circ$ si $A \in \mathscr{A}_1(B)$ d'après b). Et donc $C(B) \subset E(B)^\circ$, ce qui termine la démonstration du sous-lemme et donc du Lemme 2.2. □

D'après un théorème de Dirichlet, U_p est un sous-groupe discret et libre de range $n-1$ de D, donc par le Lemme 2.1, il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1} \in U_p$ vérifiant (H). Notons V le sous-groupe de U_p engendré par $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$. Il est sous-entendu à partir de maintenant que tous les objets que l'on considère dépendent de V; nous n'indiquerons pas cette dépendance par un indice supplémentaire pour ne pas surcharger les notations.

Soit $D_{\sigma,J} = \{y \in C_{\sigma,J} \mid y = \sum_{j \in J} x_j p f_{j,\sigma}, 0 < x_j \leqq 1\}$. La somme sur $\alpha \in X/V$, $\alpha \in 1 + p\mathfrak{a}^{-1}$ s'exprime comme la somme sur $\alpha \in \coprod_{(\sigma,J)} [(1 + p\mathfrak{a}^{-1}) \cap C_{\sigma,J}]$. Posons $D_{\sigma,J,\mathfrak{a}} = [D_{\sigma,J} \cap (1 + p\mathfrak{a}^{-1})]$. Alors $D_{\sigma,J,\mathfrak{a}}$ est fini et on a:

$$[(1 + p\mathfrak{a}^{-1}) \cap C_{\sigma,J}] = \coprod_{y \in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}}} (y + \sum_{j \in J} \mathbb{N} p f_{j,\sigma}).$$

Afin de trouver la fonction rationnelle de e^z qu'on cherche, on rappelle l'égalité:

$$\frac{1}{N(\alpha)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)^n} \int_X e^{-(\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n)} \prod_{i=1}^n (z_i^{s-1} \, dz_i). \tag{2}$$

On a pour chaque cône la relation:

$$\sum_{\alpha \in C_{\sigma,J} \cap (1 + p\mathfrak{a}^{-1})} \frac{1}{N(\alpha)^s} = \frac{1}{\Gamma(s)^n} \sum_{\{m_j \mid j \in J, m_j \in \mathbb{N}\}} \sum_{y \in D_{\sigma,J,\bullet}} \int_X F_{y,m,\sigma,J}(z) \prod_{i=1}^n (z_i^{s-1} \, dz_i),$$

où, écrivant $\alpha = y + p \sum_{j\in J} m_j f_{j,\sigma}$, on a posé

$$F_{y,m,\sigma,J}(z) = e^{-\operatorname{Tr} yz - p[\sum_{j\in J} m_j \operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z]}.$$

On pose

$$F_{y,\sigma,J}(z) = \sum_{\{m_j \mid j\in J,\, m_j\in\mathbb{N}\}} F_{y,m,\sigma,J}(z) = e^{-\operatorname{Tr} yz}\left[\prod_{j\in J} \frac{1}{1-e^{-p\operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z}}\right].$$

On définit finalement $F_{\mathfrak{a},\sigma}(z) = \sum_J \sum_{y\in D_{\sigma,J,\bullet}} F_{y,\sigma,J}(z)$, J décrivant les parties de $\{1, \ldots, n\}$ telles que (σ, J) est dans l'ensemble des représentants de la relation d'équivalence $\simeq$. On obtient:

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s) = \frac{1}{[U_p : V]} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s} \frac{1}{\Gamma(s)^n} \sum_{\sigma\in S_{n-1}} \int_X F_{\mathfrak{a},\sigma}(z) \prod_{i=1}^n (z_i^{s-1}\, dz_i), \tag{3}$$

l'échange des signes $\sum$ et $\int$ se justifiant par la convergence absolue de toutes les sommes considérées.

Soit $\beta\in\mathcal{O}_F$ tel que (1) $\beta \equiv 1\,[p]$. (2) $\mathcal{O}_F/(\beta) \simeq \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, où $b = N((\beta))$.

Soit $\mathfrak{D}$ la différente de $\mathcal{O}_F$. Il existe alors $v\in\mathfrak{D}^{-1}\beta^{-1}$ tel que $\operatorname{Tr} v = c/b$ avec $(b, c) = 1$. On obtient:

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s)(b^{1-s}-1) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \frac{1}{[U_p : V]} \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{\substack{\alpha\in 1+p\mathfrak{a}^{-1}\\ \alpha\in X/V}} \frac{e^{2i\pi \operatorname{Tr}(\alpha\mu v)}}{N(\alpha)^s}.$$

Cette égalité se déduit immédiatement du Théorème 4 de [C-N] en tenant compte du fait que $\zeta_{\mathfrak{a}(\beta)^{-1}}(s) = \zeta_{\mathfrak{a}}(s)$, dans les notations de ce théorème. Posons $\xi_{i,\sigma,\mu} = e^{2i\pi \operatorname{Tr}(\mu v p f_{i,\sigma})}$. $\xi_{i,\sigma,\mu}$ est une racine b-ième de l'unité différente de 1 pour $1 \leqq \mu \leqq b-1$.

Lemme 2.3. *Posons* $G_{y,\sigma,J,\mu}(z) = \dfrac{e^{-\operatorname{Tr}(yz)} e^{2i\pi \operatorname{Tr}(y\mu v)}}{\prod_{j\in J} [1 - \xi_{j,\sigma,\mu} e^{-p\operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z}]}$, *et*

$$G_{\mathfrak{a}}(z) = \sum_{\mu=1}^{b-1} \sum_{(\sigma,J)} \sum_{y\in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}}} G_{y,\sigma,J,\mu}(z).$$

Alors

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s)(b^{1-s}-1) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \frac{1}{[U_p : V]} \frac{1}{\Gamma(s)^n} \int_X G_{\mathfrak{a}}(z) \prod_{i=1}^n (z_i^{s-1}\, dz_i). \tag{4}$$

Le gros avantage de l'expression (4) sur la (3) est que comme $\xi_{j,\sigma,\mu} \neq 1$, $G_{\mathfrak{a}}(z)$ est C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^n$, contrairement à $F_{\mathfrak{a},\sigma}(z)$ qui a une singularité en 0. Le désavantage est que le facteur $(b^{1-s}-1)$ fait disparaître le pôle en $s=1$. On utilisera donc l'expression (4) pour l'interpolation p-adique et l'expression (3) pour le calcul du résidu.

§ 3. Prolongement analytique et valeurs aux entiers négatifs

Lemme 3.1. *Soit $\phi(z)$ une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, C^∞ à décroissance rapide à l'infini. Posons $F(\phi, s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \phi(z)\, z^{s-1}\, dz$. Alors $F(\phi, s)$ est définie pour* $\operatorname{Re}(s)>0$ *et admet un prolongement analytique à tout le plan complexe. De plus pour tout k entier positif, $F(\phi, -k)=(-1)^k\left(\frac{d}{dz}\right)^k \phi(z)\Big|_{z=0}$.*

Ce résultat est classique: voir par exemple [Schwartz, tome 1, p. 43].

Lemme 3.2. *Soit $\phi(z)$ une fonction C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^n$ à décroissance rapide à l'infini. Posons $F(\phi, s_1, \ldots, s_n)=\int_X \phi(z)\prod_{i=1}^n\left[\frac{z_i^{s_i-1}}{\Gamma(s_i)}\, dz_i\right]$. Alors $F(\phi, s_1, \ldots, s_n)$ est définie pour* $\operatorname{Re}(s_i)>0$ *et admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}^n$. De plus pour tout n-uple $(k_1, \ldots, k_n)\in\mathbb{N}^n$, $F(\phi, -k_1, \ldots, -k_n)=\left[\prod_{i=1}^n\left(-\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{k_i}\right]\phi(z)\Big|_{z=0}$.*

Démonstration. Ce lemme est une conséquence presque immédiate du précédent.

Corollaire: *Prenons $s_1=\ldots=s_n=s$ et $\phi(z)=G_\mathfrak{a}(z)$. On en déduit que $\zeta_\mathfrak{a}(s)(b^{1-s}-1)$ admet un prolongement analytique à tout le plan complexe et de plus si k est un entier positif, on a:*

$$\frac{[U_p : V]}{N(\mathfrak{a})^k}\,\zeta_\mathfrak{a}(-k)(b^{-k-1}-1)=(-1)^{nk}\left[\prod_{i=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{k}\right] G_\mathfrak{a}(z)\Big|_{z=0}.$$

Lemme 3.3. *Soit $\mathscr{L}=(L_1, \ldots, L_n)$ une famille de formes linéaires à coefficients réels positifs, et soit $f(z)$ une fonction de la forme $\frac{\phi(z)}{L_1(z)\ldots L_n(z)}$, où $\phi(z)$ est une fonction C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^n$, à décroissance rapide à l'infini. Alors la fonction $H(\phi, \mathscr{L}, s)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\Gamma(s)^n}\int_X f(z)\prod_{i=1}^n (z_i^{s-1}\, dz_i)$ converge pour* $\operatorname{Re}(s)>1$ *et se prolonge méromorphiquement à tout le plan complexe. De plus, si on pose pour $1\leqq i\leqq n$:*

$$K_{k,i}=\left\{(k_1, \ldots, k_n)\,\Big|\, \sum_{j=1}^n k_j=n(k+1) \quad et \quad 0\leqq k_j\leqq k \;\; si \;\; j\neq i\right\},$$

et on appelle $\mathbf{k}$ les éléments de $K_{k,i}$, on peut définir les objets suivants:

$$\Delta_\mathbf{k}=\left[\prod_{j=1}^n\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\right)^{k_j}\right]\Big|_{z=0},$$

$$L_{l,i}(u)=\frac{1}{u_i}\left[L_l(u_1 u_i, \ldots, u_i, \ldots, u_n u_i)\right] \quad pour \quad 1\leqq l\leqq n,$$

$$et \quad \alpha_{\mathbf{k},\mathscr{L}}=\frac{k!}{k_i!}\prod_{j\neq i} C_k^{k_j}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{k-k_j}\left[\prod_{l=1}^n\frac{1}{L_{l,i}(u)}\right]\Big|_{u=0},$$

et on obtient

$$H(\phi, \mathscr{L}, -k)=T_{k,\mathscr{L}}(\phi).$$

où $T_{k,\mathscr{L}}$ *est la distribution* $\dfrac{(-1)^{nk}}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mathbf{k}\in K_{k,i}}\alpha_{\mathbf{k},\mathscr{L}}\Delta_{\mathbf{k}}$.

Démonstration. Soit $Y=\left\{z\in(\mathbb{R}^+)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} z_i=1\right\}$. Soit $(\psi_i)_{1\leqq i\leqq n}$ une famille de fonctions C^∞ sur Y vérifiant:

(i) $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(z)=1\ \forall z\in Y$.

(ii) $\psi_i(z)=0$ s'il existe $j\neq i$ tel que $z_j\geqq 2z_i$.

Prolongeons ψ_i à $(\mathbb{R}^+)^n-\{0\}$ en posant $\psi_i(\lambda z)=\psi_i(z)\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$. On peut remarquer que les conditions (i) et (ii) impliquent en particulier que $\psi_i(z)=1$ si $j\neq i\Rightarrow z_j\leqq z_i/2$. De plus ψ_i est C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^n-\{0\}$. On peut alors écrire pour $\operatorname{Re}(s)>1$:

$$H(\phi, \mathscr{L}, s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(s)^n}\int_X\frac{\phi(z)\,\psi_i(z)}{\prod_l L_l(z)}\prod_{i=1}^{n}(z_i^{s-1}\,dz_i).$$

Effectuons alors le changement de variable $z_i=u_i$, $z_j=u_i u_j$ pour $j\neq i$ dans la i-ième intégrale. Posons

$$\phi_i(u)=\frac{\phi(u_i u_1, \dots, u_i u_{i-1}, u_i, u_i u_{i+1}, \dots, u_i u_n)\,\psi_i(u_1, \dots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \dots, u_n)}{\prod_l L_{l,i}(u)}.$$

On obtient $H(\phi, \mathscr{L}, s)=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\Gamma(s)^n}\int_X\phi_i(u)\prod_{j\neq i}(u_j^{s-1}\,du_j)\,u_i^{ns-n-1}\,du_i$. $\phi_i(u)$ est alors une fonction C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^n$ et à décroissance rapide à l'infini. En effet $\psi_i(u)=0$ s'il existe $j\neq i$ tel que $u_j\geqq 2$, ce qui nous donne la décroissance rapide suivant u_j; celle suivant u_i est assurée par la décroissance rapide de $\phi(u_1 u_i, \dots, u_i, \dots, u_n u_i)$. On a alors:

$$H(\phi, \mathscr{L}, s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Gamma(ns-n)}{\Gamma(s)}F(\phi_i, s, \dots, s, ns-n, s, \dots, s).$$

On obtient donc un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec au plus des pôles simples aux pôles de $\dfrac{\Gamma(ns-n)}{\Gamma(s)}$. De plus, si k est un entier positif, on a

$$H(\phi, \mathscr{L}, -k)=\frac{(-1)^{nk}}{n}\,\frac{k!}{(nk+n)!}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)^{nk+n}\prod_{j\neq i}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{k}\right]\phi_i(u)\bigg|_{u=0}.$$

On obtient le résultat final après des calculs sans mystère en utilisant la formule de Leibnitz pour la dérivée d'un produit et en observant que

$\psi_i(u_1, \ldots, u_{i-1}, 1, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ étant égale à 1 dans un voisinage de 0, toutes ses dérivées sont nulles à l'origine. □

Corollaire. *Posons* $\phi_{\mathfrak{a},\sigma}(z) = \left[\prod_{i=1}^{n} (\operatorname{Tr} f_{i,\sigma} z)\right] F_{\mathfrak{a},\sigma}(z)$. $\phi_{\mathfrak{a},\sigma}(s)$ *est alors* C^∞ *sur* $(\mathbb{R}^+)^n$ *à décroissance rapide à l'infini. Ecrivant*

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(s) = \frac{1}{[U_p : V]} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} \frac{1}{\Gamma(s)^n} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \int_X \frac{\phi_{\mathfrak{a},\sigma}(z)}{\prod_{i=1}^{n} \operatorname{Tr} f_{i,\sigma} z} \prod_{i=1}^{n} (z_i^{s-1}\, dz_i)$$

et appliquant le Lemme 3.3, *on obtient le prolongement méromorphe de* $\zeta_{\mathfrak{a}}(s)$ *et une formule explicite pour* $\zeta_{\mathfrak{a}}(-k)$ *beaucoup plus compliquée que la précédente mais qui nous sera plus utile pour déterminer le résidu de la fonction zêta p-adique.*

§ 4. Distributions p-adiques

Soit p un nombre premier. Fixons un plongement τ de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$. Soient $\tau_1, \ldots, \tau_n$ les n plongements de F dans $\bar{\mathbb{Q}}$. On considère F comme étant plongé dans $\mathbb{C}_p^n$ de la manière suivante:

$$\begin{array}{ccccc} F \to & \bar{\mathbb{Q}}^n & \to & \mathbb{C}_p^n \\ \alpha \to & (\tau_1(\alpha), \ldots, \tau_n(\alpha)) & \to & (\tau \circ \tau_1(\alpha), \ldots, \tau \circ \tau_n(\alpha)). \end{array}$$

Soit X l'adhérence p-adique de $\mathcal{O}_F$ dans $\mathbb{C}_p^n$. On fixe une base $g_1, \ldots, g_n$ de $\mathcal{O}_F$ sur $\mathbb{Z}$: X est alors isomorphe à $\mathbb{Z}_p^n$. Si $x \in X$ on dispose de deux écritures différentes pour x: la première provient de l'inclusion de X dans $\mathbb{C}_p^n$, et on écrit $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Pour l'autre, on écrit $x = y_1 g_1 + \ldots + y_n g_n$, où $y_i \in \mathbb{Z}_p$.

Pour tout $h \in \mathbb{N}$, soit LA_h l'espace des fonctions analytiques sur $a + p^h X$ pour tout $a \in X$, et LA l'espace des fonctions localement analytiques sur X. X étant compact, on a $LA = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} LA_h$. Si f appartient à LA_h, $f(x)$ s'écrit au voisinage de $a = (a_1, \ldots, a_n)$:

$$f(x) = \sum_{k_1, \ldots, k_n} b_{k_1, \ldots, k_n} \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{k_i}.$$

On pose $\|f\|_h = \sup_{a, k_1, \ldots, k_n} |p^{h(k_1 + \ldots + k_n)} b_{k_1, \ldots, k_n}|_p$ et on munit LA de la topologie induite par cette famille de normes. Soit LA' le dual de LA. Si $T \in LA'$, on associe à T une série caractéristique $F_T(z) = T(e^{\operatorname{Tr} zx})$, qu'on note en général $\int_X e^{\operatorname{Tr} zx}\, dT$. On pose aussi $G_T(w) = \int_X \prod_{i=1}^{n} (1 + w_i)^{y_i}\, dT$. Cette construction des distributions p-adiques sur X rappelle celle des mesures sur X: si on considère l'espace des fonctions continues à la place de LA, muni de la norme du sup, on obtient la construction classique des mesures.

Remarque. $F_T(z) = G_T(e^{\operatorname{Tr} g_1 z} - 1, \ldots, e^{\operatorname{Tr} g_n z} - 1)$.

Théorème [Y. Amice]. *Soit* $B(0, 1^-)$ *la boule ouverte de centre* 0 *et rayon* 1 *dans* $\mathbb{C}_p$: $B(0, 1^-) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z|_p < 1\}$. *Soit* $T \in LA'$. *Alors* $G_T(w)$ *est une série entière en* $w_1, \ldots, w_n$ *qui converge pour* $w \in B(0, 1^-)^n$. *Réciproquement, si* $G(w)$ *est une série entière convergeante pour* $w \in B(0, 1^-)^n$, *alors il existe* $T \in LA'$ *telle que* $G = G_T$.

Remarque. Si en fait $G(w)$ est une série entière à coefficients bornés, T est une mesure sur X et réciproquement.

Lemme 4.1. *Soit* $k_1, \ldots, k_n$ *des entiers positifs et* $T \in LA'$. *Alors on a*

$$\int_X \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}\, dT = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^{k_i} F_T(z)\Big|_{z=0}.$$

Démonstration. La démonstration est évidente: il suffit de développer $e^{\operatorname{Tr} zx}$ en série entière.

Soit $F_{y,\sigma,J}(z) = e^{-\operatorname{Tr} yz} \prod_{j \in J} \frac{1}{1 - e^{-p \operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z}}$ et $\phi_{y,\sigma,J}(z) = \left(\prod_{i=1}^{n} \operatorname{Tr} f_{i,\sigma} z\right) F_{y,\sigma,J}(z)$, comme au § 2.

Lemme 4.2. *Il existe* $T_{y,\sigma,J} \in LA'$ *telle que* $F_{T_{y,\sigma,J}}(z) = \phi_{y,\sigma,J}(z)$.

Démonstration. Soit $w_i = e^{\operatorname{Tr} g_i z} - 1$ et $G_{y,\sigma,J}(w) = \phi_{y,\sigma,J}(z)$. On pose $f_{i,\sigma} = \sum_{l=1}^{n} c_{i,l,\sigma}\, g_l$, où $c_{i,l,\sigma} \in \mathbb{Z}$ car les g_i forment une base de $\mathcal{O}_F$ sur $\mathbb{Z}$.

$$\text{On obtient alors: } e^{\operatorname{Tr} f_{i,\sigma} z} = \prod_{i=1}^{n} (1 + w_l)^{c_{i,l,\sigma}} \tag{1}$$

$$\text{et } \operatorname{Tr} f_{i,\sigma} z = \sum_{l=1}^{n} c_{i,l,\sigma} \operatorname{Log}(1 + w_l). \text{ Ceci nous donne:} \tag{2}$$

$$\frac{\operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z}{1 - e^{-p \operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z}} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left[\prod_{l=1}^{n} (1 + w_l)^{-p c_{j,l,\sigma}} - 1\right]^{k-1}. \tag{3}$$

Cette expression converge pour $w \in B(0, 1^-)^n$. De plus, pour tout

$$x \in F \cap X,\ e^{\operatorname{Tr} xz} = \prod_{i=1}^{n} (1 + w_i)^{y_i} \quad \text{avec } y_i \in \mathbb{Z}_p. \tag{4}$$

Mais comme $\phi_{y,\sigma,J} = e^{-\operatorname{Tr} yz} \prod_{j \notin J} (\operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z) \prod_{j \in J} \left(\frac{\operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z}{1 - e^{-p \operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z}}\right)$, cette expression converge pour $w \in B(0, 1^-)^n$ car $e^{-\operatorname{Tr} yz}$ le fait par (4), $\prod_{j \notin J} \operatorname{Tr} f_{j,\sigma} z$ le fait par (2), et le reste par (3). □

Corollaire. *Il existe* $T_{\mathfrak{a},\sigma} \in LA'$ *telle que* $F_{T_{\mathfrak{a},\sigma}}(z) = \phi_{\mathfrak{a},\sigma}(z)$.

Lemme 4.2 bis. *Il existe une mesure* $\lambda_{y,\sigma,J,\mu}$ *sur* X *telle que*

$$F_{\lambda_{y,\sigma,J,\mu}}(z) = G_{y,\sigma,J,\mu}(z),$$

où $G_{y,\sigma,J,\mu}$ *est la fonction défine au Lemme* 2.3.

Démonstration. La seule chose à changer par rapport à la démonstration du Lemme 4.2 est qu'il faut prouver que $\dfrac{1}{1-\xi_{\sigma,j,\mu}\prod_{i=1}^{n}(1+w_i)^{c_{i,l,\sigma}}}$ est à coefficients bornés. Pour cela il suffit de le prouver pour $\dfrac{1}{1-\xi(1+w)}$ où ξ est une racine de l'unité d'ordre divisant b (donc premier à p). Mais ce dernier résultat est évident.

Corollaire. *Il existe une mesure $\lambda_{\mathfrak{a}}$ sur X telle que $F_{\lambda_{\mathfrak{a}}}(z)=G_{\mathfrak{a}}(z)$.*

Définition. Soit U un ouvert-compact de X, et T une distribution sur X. On dit que T est à support dans U si quelque soit $\phi\in LA$ telle que $\phi\,|\,U=0$, alors $T(\phi)=0$.

Lemma 4.3. *La distribution $T_{y,\sigma,J}$ est à support dans $1+pX$.*

Démonstration. Soit μ_r la distribution $\dfrac{1}{p^{\#J(r+1)}}\sum_{\substack{m_j=0\\ j\in J}}^{p^r-1}\delta_{-y-p\sum_{j\in J}m_j f_{j,\sigma}}$, où δ_x est la masse de Dirac au point x, et $\# J$ est le cardinal de J. Soit $T_r=\mu_r*\left[\mathop{*}_{j\notin J}\dfrac{1}{p^{r+1}}(\delta_0-\delta_{-p^{r+1}f_{j,\sigma}})\right]$, où $*$ représente la convolution des distributions (en particulier, pour les masses de Dirac, $\delta_x*\delta_y=\delta_{x+y}$). T_r est de manière évidente à support dans $1+pX$ car $y\equiv 1\,[p]$. Or,

$$G_{T_r}(z)=\left[\prod_{j\in J}\frac{1-e^{-p^{r+1}\operatorname{Tr}f_{j,\sigma}z}}{p^{r+1}(1-e^{-p\operatorname{Tr}f_{j,\sigma}z})}\right]\left[\prod_{j\in J}\frac{1-e^{-p^{r+1}\operatorname{Tr}f_{j,\sigma}z}}{p^{r+1}}\right]e^{-\operatorname{Tr}yz}$$

et donc $\lim_{r\to\infty}G_{T_r}(z)=G_{T_{y,\sigma,J}}(z)$. $T_{y,\sigma,J}$ est donc limite de distributions à support dans $1+pX$, donc est à support dans $1+pX$. □

Corollaire. *$T_{\mathfrak{a},\sigma}$ est à support dans $1+pX$.*

Lemme 4.3 bis. *$\lambda_{\mathfrak{a}}$ est à support dans $1+pX$.*

La démonstration de ce lemme est à peu près identique à celle du Lemme 4.3.

Lemme 4.4. *Soit k un entier >0 et $\psi(x)$ la fonction caractéristique de $1+pX$. On obtient:*

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(-k)(b^{-k-1}-1)=\frac{(-1)^{nk}}{[U_p:V]}N(\mathfrak{a})^k\int_X\psi(x)\prod_{i=1}^{n}x_i^k\,d\lambda_{\mathfrak{a}}.$$

Démonstration. Utilisant le Lemme 4.1 et la formule obtenue au corollaire du Lemme 3.2, on obtient;

$$\zeta_{\mathfrak{a}}(-k)(b^{-k-1}-1)=\frac{(-1)^{nk}}{[U_p:V]}N(\mathfrak{a})^k\int_X\prod_{i=1}^{n}x_i^k\,d\lambda_{\mathfrak{a}}.$$

Le lemme s'en déduit en utilisant le Lemme 4.3 bis. □

L'application $k \to \psi(x) \prod_{i=1}^{n} x_i^k$ peut se prolonger en une application continue de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans les applications continues sur X. Si l'on fixe $k_0 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, l'application $k \to N(\mathfrak{a})^k$ pour $k \equiv k_0[\phi(q)]$ peut se prolonger par continuité à $\mathbb{Z}_p$ ainsi que $k \to b^{-k-1}$, et si $k \equiv k_0[\phi(q)]$, $(-1)^{nk} = (-1)^{nk_0}$. On obtient alors comme corollaire:

Théorème [Cassou-Noguès]. *Soit $k_0 \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$. Il existe un application continue $\zeta_{\mathfrak{a},p,k_0}$ de $\mathbb{Z}_p - \{1\}$ dans $\mathbb{C}_p$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \equiv k_0[\phi(q)]$, on ait $\zeta_{\mathfrak{a},p,k_0}(-k) = \zeta_{\mathfrak{a}}(-k)$. De plus $\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_{\mathfrak{a},p,k_0}(s)$ existe et vaut $\frac{1}{\operatorname{Log}_p b}\frac{(-1)^{nk_0}}{[U_p : V]}\omega(N(\mathfrak{a}))^{k_0}\langle N(\mathfrak{a})\rangle^{-1}\int_X \prod_{i=1}^{n} x_i^{-1}\, d\lambda_{\mathfrak{a}}$, où $\omega(x)$ est le caractère de Teichmüller, $\langle x\rangle = x/\omega(x)$ et Log_p est le logarithme p-adique.*

La suite de l'article va être consacrée à trouver une expression plus explicite de cette limite. On se bornera à traiter le cas $k_0 = -1$ et on notera $\zeta_{a,p}$ au lieu de $\zeta_{a,p,-1}$. On posera aussi $\zeta_{F,p} = \sum_{a\in G}\zeta_{a,p}$. Alors $\zeta_{F,p}$ est une fonction continue de $\mathbb{Z}_p - \{1\}$ dans $\mathbb{C}_p$ vérifiant $\zeta_{F,p}(-k) = \zeta_F(-k)\,E_p(-k)$ si k est un entier positif congru à -1 modulo $\phi(q)$.

On introduit ici quelques lemmes techniques qui serviront au calcul du résidu.

Soit $P_{k,\mathcal{L},i}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mathbf{k}\in K_{k,i}} \alpha_{\mathbf{k},\mathcal{L}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{k_j}$, où $\alpha_{\mathbf{k},\mathcal{L}}$ est la quantité définie au Lemme 3.3. On pose

$$L_l(z) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{l,j} z_j \quad \text{et} \quad L_{l,i}(z) = \alpha_{l,i}(1 + \sum_{j\neq i} \beta_{l,i,j} z_j)$$

avec $\beta_{l,i,j} = \frac{\alpha_{l,j}}{\alpha_{l,i}}$.

Lemme 4.5. *Soit $A_i = \prod_{l=1}^{n} \alpha_{l,i}$, et soit $\mathbf{t} = (t_{i,j})$ une famille d'entiers positifs ou nuls pour $l = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, n$. Posons*

$$\nabla^{\mathbf{t}} = \prod_{l,j\neq i} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_{l,i,j}}\right)^{t_{l,j}} \Bigg|_{\beta_{l,i,j}=1}.$$

Posons aussi

$$a_j(\mathbf{t}) = \sum_{l=1}^{n} t_{l,j}, \qquad s(\mathbf{t}) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{j\neq i} t_{l,j} = \sum_{j\neq i} a_j(\mathbf{t})$$

et

$$\lambda(\mathbf{t}) = \frac{\prod_{l=1}^{n} (\sum_{j\neq i} t_{i,j})! \prod_{j\neq i} a_j(\mathbf{t})!}{(n-1+s(\mathbf{t}))!}$$

Alors on a:

$$\nabla^{\mathbf{t}}[A_i P_{k,\mathscr{L},i}(x)] = \lambda(\mathbf{t}) \int_0^{x_i} u^{n-1+s(\mathbf{t})}(x_i-u)^k \prod_{j\neq i} (C_k^{a_j(\mathbf{t})}(x_j-u)^{k-a_j(\mathbf{t})}(-1)^{a_j(\mathbf{t})})\,du.$$

Démonstration. Posons $\square^{\mathbf{k}} = \prod_{j\neq i}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{k-k_j}\Big|_{u=0}$, et $\mu(\mathbf{k}) = \frac{k!}{k_i!}\prod_{j\neq i} C_k^{k_j}$. *Alors* $\alpha_{\mathbf{k},\mathscr{L}} = \mu(\mathbf{k})\,\square^{\mathbf{k}}\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{1}{L_{l,i}(u)}\right)$. On obtient:

$$\nabla^{\mathbf{t}}[A_i\,\alpha_{\mathbf{k},\mathscr{L}}] = \mu(\mathbf{k})\,\nabla^{\mathbf{t}}\,\square^{\mathbf{k}}\left[\prod_{l=1}^{n}\frac{\alpha_{l,i}}{L_{l,i}(u)}\right] = \mu(\mathbf{k})\,\square^{\mathbf{k}}\,\nabla^{\mathbf{t}}\left[\prod_{l=1}^{n}\frac{\alpha_{l,i}}{L_{l,i}(u)}\right]$$

$$= \mu(\mathbf{k})\,\square^{\mathbf{k}}\left[\prod_{j\neq i} u_j^{a_j(\mathbf{t})}\right]\left[\frac{(-1)^{s(\mathbf{t})}\prod_{l=1}^{n}(\sum_{j\neq i} t_{l,j})!}{(1+\sum_{j\neq i} u_j)^{n+s(\mathbf{t})}}\right].$$

Or, pour n'importe quelle fonction $\phi(u)$, C^∞ dans un voisinage de 0, $\square^{\mathbf{k}}\phi(u)$ est égal à $\prod_{j\neq i}(k-k_j)! \times$ terme en $\prod u_j^{k-k_j}$ dans le developpement de $\phi(u)$, et donc

$$\square^{\mathbf{k}}\prod_{j\neq i} u_j^{a_j}\,\phi(u) = \prod_{j\neq i}\frac{(k-k_j)!}{(k-k_j-a_j)!}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)^{k-k_j-a_j}\phi(u)\Big|_0.$$

Donc

$$\nabla^{\mathbf{t}}[A_i\,\alpha_{\mathbf{k},\mathscr{L}}] = \mu(\mathbf{k})\,\lambda(\mathbf{t})\left[\prod_{j\neq i} C_{k-k_j}^{a_j(\mathbf{t})}(-1)^{k-k_j}\right][k_i-k-1]!.$$

On obtient alors

$$\nabla^{\mathbf{t}}[A_i P_{k,\mathscr{L},i}(x)] = \lambda(\mathbf{t})\sum_{\mathbf{k}}\mu(\mathbf{k})\left[\prod_{j\neq i} C_{k-k_j}^{a_j(\mathbf{t})}(-1)^{k-k_j}x_j^{k_j}\right][k_i-k-1]!\,x_i^{k_i}.$$

Dérivant alors $k+1$ fois par rapport à x_i, on obtient:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{k+1}\nabla^{\mathbf{t}}[A_i P_{k,\mathscr{L},i}(x)] = \lambda(\mathbf{t})\,k!\sum_{\mathbf{k}}\prod_{j\neq i}\left[C_k^{k_j} C_{k-k_j}^{a_j(\mathbf{t})} x_j^{k_j}(-x_i)^{k-k_j}\right]x_i^{n-1}$$

$$= \lambda(\mathbf{t})\,k!\prod_{j\neq i}\left[C_k^{a_j(\mathbf{t})}(-x_i)^{a_j(\mathbf{t})}(x_j-x_i)^{k-a_j(\mathbf{t})}\right]x_i^{n-1} \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda(\mathbf{t})\,k!\,Q_{k,i,\mathbf{t}}(x).$$

L'avant-dernière égalité provient de la formule:

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^{k-i} C_{k-1}^{a}\,x^i y^{k-i} = \frac{y^a}{a!}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a (x+y)^k = C_k^a\,y^a(x+y)^{k-a}.$$

Pour terminer la démonstration constatons que la valuation de $\nabla^{\mathbf{t}}[A_i P_{k,\mathscr{L},i}(x)]$ en x_i est supérieure à $n(k+1)-(n-1)k = n+k \geqq k+1$ et donc:

$$V^{\mathbf{t}}[A_i P_{k,\mathscr{L},i}(x)] = \int_0^{x_i}\int_0^{u_0}\dots\int_0^{u_{k-1}} \lambda(\mathbf{t})\,k!\,Q_{k,i,\mathbf{t}}(x_1,\dots,x_{i-1},u_k,x_{i+1},\dots,x_n)\,du_k\dots du_1\,du_0$$

$$= \int_0^{x_i}\int_{u_{k-1}}^{x_i}\dots\int_{u_1}^{x_i} \lambda(\mathbf{t})\,k!\,Q_{k,i,\mathbf{t}}(x_1,\dots,u_k,\dots,x_n)\,du_0\dots du_{k-1}\,du_k$$

$$\cdot \int_0^{x_i} \lambda(\mathbf{t})\,Q_{k,i,\mathbf{t}}(x_1,\dots,u_k,\dots,x_n)(x_i-u_k)^k\,du_k. \quad \square$$

On passe maintenant à l'étude p-adique de $P_{k,\mathscr{L},i}$. Notons par $\|\dots\|$ la norme sur LA_1.

Lemme 4.6. *Posons $k(m) = -1+(p-1)p^m$, pour m un entier suffisamment grand. Alors*

$$\left\| \frac{(k(m)+1)\,V^{\mathbf{t}} P_{k(m),\mathscr{L},i}(x)}{\prod_{l,j}(t_{l,j})!} \right\| \leqq n p^{\frac{n-1+s(\mathbf{t})}{p-1}} \left|\frac{1}{A_i}\right|_p.$$

Démonstration. Soit

$$P(u,x) = u^{n-1+s(\mathbf{t})}(x_i-u)^{k(m)} \prod_{j\neq i} C_{k(m)}^{a_j(\mathbf{t})}(x_j-u)^{k(m)-a_j(\mathbf{t})}.$$

Alors $P(u,x)$ est un polynôme à coefficients entiers en $u, x_1, \dots, x_n$ de degré $n(k(m)+1)-1$ en u. Donc, après intégration, on va obtenir un polynôme de la forme

$$\sum_{\mathbf{k},\,k_i \leqq n(k(m)+1)} \left(\frac{1}{k_i}\right) \beta_{\mathbf{k}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{k_j}$$

où $\beta_{\mathbf{k}}$ est entier, et donc $\left|\frac{(k(m)+1)\,\beta_{\mathbf{k}}}{k_i}\right|_p \leqq np$. Ceci nous donne

$$|A_i|_{p^\times} \left\| \frac{(k(m)+1)\,V^{\mathbf{t}} P_{k(m),\mathscr{L},i}(x)}{\prod_{l,j}(t_{l,j})!} \right\| \leqq \left|\frac{\lambda(\mathbf{t})}{\prod_{l,j}(t_{l,j})!}\right|_{p\times np} \leqq n p^{\frac{n-1+s(\mathbf{t})}{p-1}+1},$$

car $\dfrac{\prod_{l=1}^{n}(\sum_{j\neq i} t_{l,j})!\prod_{j\neq i} a_j(\mathbf{t})!}{\prod_{l,j}(t_{l,j})!}$ est entier et $\left|\dfrac{1}{(n-1+s(\mathbf{t}))!}\right|_p \leqq p^{\frac{n-1+s(\mathbf{t})}{p-1}}$. $\square$

Lemme 4.7. *Soit $\psi(x)$ la fonction caractéristique de $1+pX$. Alors*

$$\left\|\psi(x)\left[A_i(k(m)+1)\,V^{\mathbf{t}} P_{k(m),\mathscr{L},i}(x) - (-1)^{s(\mathbf{t})+n-1}\frac{\lambda(\mathbf{t})}{n}\prod_{j\neq i}(-1)^{a_j(\mathbf{t})} C_{k(m)}^{a_j(\mathbf{t})}\right]\right\|$$
$$\leqq n(p-1)(n+s(\mathbf{t})) \times |(k(m)+1)\,\lambda(\mathbf{t})|_p$$

Démonstration.

$$A_i V^{\mathbf{t}} P_{k(m),\mathscr{L},i}(x) = \lambda(t)\int_0^{x_i} u^{n-1+s(\mathbf{t})}(x_i-u)^{k(m)} \prod_{j\neq i}[C_{k(m)}^{a_j(\mathbf{t})}(x_j-u)^{k(m)-a_j(\mathbf{t})}(-1)^{a_j(\mathbf{t})}]\,du.$$

Ecrivant alors $u=(u-1)+1$ et $x_j-u=(x_j-1)+(1-u)$ et développant, on obtient, écrivant k pour $k(m)$, s pour $s(\mathbf{t})$ et a_j pour $a_j(\mathbf{t})$:

$$A_i V^{\mathbf{t}} P_{k,\mathscr{L},i}(x)$$
$$=\lambda(\mathbf{t})\sum_{r=0}^{n-1+s} C_{n-1+s}^r(-1)^{n-1+s-r}\sum_{b=0}^{nk-s} Q_b(x-1)\int_0^{x_i}(1-u)^{n(k+1)-1-r-b}\,du,$$

où $Q_b(x-1)$ est un polynôme à coefficients entiers, homogène de degré b en les (x_j-1). Ceci nous donne:

$$A_i V^{\mathbf{t}} P_{k,\mathscr{L},i}=\lambda(\mathbf{t})\sum_{r=0}^{n-1+s} C_{n-1+s}^r(-1)^{n-1+s-r}\sum_{b=0}^{nk-s} Q_b(x-1)\frac{1-(1-x_i)^{n(k+1)-r-b}}{n(k+1)-r-b}$$
$$=\lambda(\mathbf{t})\left[(-1)^{n-1+s}\prod_{j\neq i}(C_k^{a_j}(-1)^{a_j})\frac{1-(1-x_i)^{n(k+1)}}{n(k+1)}+\text{termes avec } r+b\geqq 1\right].$$

Pour obtenir le résultat, notons que $\psi(x)\neq 0\Rightarrow|x_j-1|\leqq p^{-1}$ pour tout j et donc que $\|\psi(x)\,Q_b(x-1)\|\leqq p^{-b}$. Etant donné la grande divisibilité de $k+1$ par p, on obtient $\left|\frac{1}{n(k+1)-(r+b)}\right|\leqq n(p-1)(r+b)\leqq n(p-1)(n-1+s-b)$ et le résultat découle alors de la majoration évidente $p^{-b}(n-1+s+b)\leqq n+s$. □

Lemme 4.8. *Supposons que $\beta_{l,i,j}\equiv 1\,[q]$ pour tout l, j, et posons*

$$F_i(\mathscr{L})=\sum_{\mathbf{t}}\lambda(\mathbf{t})(-1)^{s(\mathbf{t})}\prod_{l,j}\frac{(\beta_{l,i,j}-1)^{t_{l,j}}}{(t_{l,j})!}.$$

Alors

$$\lim_{m\to+\infty}(k(m)+1)\,\psi A_i P_{k(m),\mathscr{L},i}=\frac{(-1)^{n-1}}{n}F_i(\mathscr{L})\,\psi,$$

la limite étant prise pour la topologie de LA_1.

Le lemme est immédiat à partir de la formule

$$A_i P_{k(m),\mathscr{L},i}(x)=\sum_{\mathbf{t}}\prod_{j,l}\frac{(\beta_{l,i,j}-1)^{t_{l,j}}}{t_{l,j}!}V^{\mathbf{t}}(A_i P_{k(m),\mathscr{L},i}(x))$$

et des majorations obtenues aux Lemmes 4.6 et 4.7 (il faut aussi utiliser le fait que quand m tend vers $+\infty$, $(-1)^a C_{k(m)}^a$ tend vers 1 p-adiquement).

Corollaire. *Soit T une distribution à support dans $1+pX$, et soit $P_{k,\mathscr{L}}=\sum_{i=1}^{n} P_{k,\mathscr{L},i}$. Alors*

$$\lim_{m\to\infty}(k(m)+1)\int_X P_{k(m),\mathscr{L}}(x)\,dT=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}a_0(T)\sum_{i=1}^{n}\frac{F_i(\mathscr{L})}{A_i}$$

où $a_0(T)=\int_X dT$ est le terme constant de la série caractéristique associée à T.

§ 5. Calcul du résidu

Soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ une famille de vecteurs de U_p remplissant les conditions du Lemme 2.1. Notes V_r le sous-groupe de U_p engendré par $\{\varepsilon_1^{p^r}, \ldots, \varepsilon_{n-1}^{p^r}\}$. On pose $f_{i,\sigma,r} = f_{i,\sigma}^{p^r}$, où $f_{i,\sigma}$ est le vecteur défini avant le Lemme 2.1. Soit $\mathscr{L}_{\sigma,r}$ la famille de formes linéaires $(\operatorname{Tr} f_{i,\sigma,r} z)$ pour $1 \leqq i \leqq n$. On rajoute aussi un indice r à tous les objets définis après les Lemmes 2.2 et 4.1 et dans le corollaire du Lemme 4.2, pour indiquer que le rôle sous-entendu de V est ici joué explicitement par V_r.

Lemme 5.1. $\zeta_{\mathfrak{a}}(-k) = \dfrac{N(\mathfrak{a})^k}{[U_p : V_r]} \sum_{\sigma} \int_X P_{k,\mathscr{L}_{\sigma,r}}(x)\, dT_{\mathfrak{a},\sigma,r}$.

Démonstration. La démonstration est une conséquence directe de la formule pour $\zeta_{\mathfrak{a}}(-k)$ donnée dans le corollaire du Lemme 3.3, et du Lemme 4.1.

Lemme 5.2. *Soit* $\Delta_{\sigma,r} = \det(f_{1,\sigma,r}, \ldots, f_{n,\sigma,r})$. *Alors*

$$a_0(T_{\mathfrak{a},\sigma,r}) = \frac{\varepsilon(\sigma)\,\Delta_{\sigma,r}}{p^n N(\mathfrak{a}^{-1}) \sqrt{D}}.$$

Le signe de $\sqrt{D}$ *est determiné par le fait que* $a_0(T_{\mathfrak{a},\sigma,r})$ *est un rationnel positif.*

Démonstration. On a

$$a_0(T_{\mathfrak{a},\sigma,r}) = \lim_{z \to 0} \phi_{\mathfrak{a},\sigma,r}(z).$$

Or,

$$\phi_{\mathfrak{a},\sigma,r} = \sum_J \sum_{y \in D_{\sigma,J,\mathfrak{a},r}} \phi_{y,\sigma,J,r}(z)$$

où

$$\phi_{y,\sigma,J,r}(z) = e^{-\operatorname{Tr} yz} \prod_{j \in J} \frac{1}{1 - e^{-p \operatorname{Tr} f_{j,\sigma,r} z}} \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Tr} f_{i,\sigma,r}\, z.$$

Il est clair que si $J \neq [1, \ldots, n]$, $\lim_{z \to 0} \phi_{y,\sigma,J,r}(z) = 0$ et si $J = [1, \ldots, n]$, $\lim_{z \to 0} \phi_{y,\sigma,J,r}(z) = \dfrac{1}{p^n}$. Donc $a_0(T_{\mathfrak{a},\sigma,r}) = \dfrac{1}{p^n} \# D_{\sigma,[1,\ldots,n],\mathfrak{a},r}$. Par définition $D_{\sigma,[1,\ldots,n],\mathfrak{a},r} = D_{\sigma,[1,\ldots,n],r} \cap 1 + p\mathfrak{a}^{-1}$ et comme $D_{\sigma,[1,\ldots,n],r}$ est un domaine fondamental de $\mathbb{R}^n$ pour l'action du réseau Λ engendré par $pf_{1,\sigma,r}, \ldots, pf_{n,\sigma,r}$, et $p\mathfrak{a}^{-1}$ est un réseau de $\mathbb{R}^n$ contenant Λ, on a

$$p^n a_0(T_{\mathfrak{a},\sigma,r}) = [p\mathfrak{a}^{-1} : \Lambda] = \frac{\operatorname{vol} \Lambda}{\operatorname{vol} p\mathfrak{a}^{-1}} = \frac{|\det(pf_{1,\sigma,r}, \ldots, pf_{n,\sigma,r})|}{N(p\mathfrak{a}^{-1}) \operatorname{vol} \mathcal{O}_F}$$

$$= \frac{p^n \varepsilon(\sigma)\,\Delta_{\sigma,r}}{p^n N(\mathfrak{a}^{-1}) \sqrt{D}}. \quad \square$$

Corollaire. *Utilisant le corollaire du lemme* 4.8, *on obtient:*

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} & (k(m)+1)\,\zeta_{\mathfrak{a}}(-k(m)) \\ &=(-1)^n N(\mathfrak{a})^{-1}\frac{1}{[U_p\colon V_r]}\sum_{\sigma\in S_{n-1}} a_0(T_{\mathfrak{a},\sigma,r})\left[\prod_{i=1}^{n} F_i(\mathscr{L}_{\sigma,r})\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right] \\ &=(-1)^n N(\mathfrak{a})^{-1}\sum_{\sigma\in S_{n-1}}\frac{\varepsilon(\sigma)\,\Delta_{\sigma,r}}{p^n N(\mathfrak{a})^{-1}\sqrt{D}[U_p\colon V_r]}\left[\prod_{i=1}^{n} F_i(\mathscr{L}_{\sigma,r})\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right].\end{aligned}$$

Remarque. Le membre de gauche est indépendant de r et est égal à l'opposé du résidu en $s=1$ de la fonction zêta p-adique partielle $\zeta_{a,p}$. Pour obtenir une expression satisfaisante du résidu, on va faire tendre r vers $+\infty$.

Soit V un sous-groupe multiplicatif libre de rang $n-1$ de $X\cap\left\{z\in(\mathbb{C}_p^*)^n \,\middle|\, \prod_{i=1}^{n} z_i=1\right\}$. On définit le régulateur p-adique de V de la manière suivante. On choisit $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ une base de V, et on note $\gamma_i=(\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,n})$. $R_p(V)$ sera alors le déterminant $n-1\times n-1$ de la matrice $[\mathrm{Log}_p\,\gamma_{i,j+1}]$, $1\leqq i\leqq n-1$, $1\leqq j\leqq n-1$. $R_p(V)$ n'est défini qu'au signe près. Si V' est un sous-groupe d'indice fini de V, on a la relation: $R_p(V')=\pm[V\colon V']\,R_p(V)$.

Lemme 5.3. $\Delta_{\sigma,r}\equiv n\varepsilon(\sigma)\,p^{(n-1)r}R_p(V_0)[p^{nr-1}]$.

Remarque. Ceci fixe un choix de signe pour $R_p(V_0)$, de la même manière que le Lemme 4.8 en fixe un pour $\sqrt{D}$. Il est facile de voir que ces signes dépendent de l'ordre de $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ mais que leur rapport n'en dépend pas!

Démonstration. On a $f_{i,\sigma,r}\equiv 1+p^r\sum_{j<i}\mathrm{Log}_p\,\varepsilon_{\sigma(j)}[p^{2r-1}]$. Ecrivons alors le déterminant $\Delta_{\sigma,r}$ et effectuons les opérations suivantes: on commence par retirer la première colonne aux autres et ensuite on ajoute toutes les lignes à la première. Le déterminant devient:

$$\begin{bmatrix} n & 0\ \ldots\ 0 \\ 1 & \\ 1 & p^r B \\ 1 & \end{bmatrix}$$

où tous les termes sont écrits modulo p^{2r-1} et $B=B_1\times B_2\times B_3$:

$$B_1=\begin{bmatrix}\mathrm{Log}_p\,\tau_2(\varepsilon_1)\ldots\mathrm{Log}_p\,\tau_2(\varepsilon_{n-1}) \\ \\ \mathrm{Log}_p\,\tau_n(\varepsilon_1)\ldots\mathrm{Log}_p\,\tau_n(\varepsilon_{n-1})\end{bmatrix},$$

B_2 est la matrice de permutation de σ échangeant les colonnes, et

$$B_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

On a donc:

$$\begin{aligned}\Delta_{\sigma,r} &\equiv n p^{(n-1)r} \det B_1 \det B_2 \det B_3 [p^{nr-1}] \\ &\equiv n p^{(n-1)r} R_p(V_0)\, \varepsilon(\sigma) [p^{nr-1}]. \quad \square\end{aligned}$$

Lemme 5.4. $\lim\limits_{r\to m} \dfrac{\varepsilon(\sigma)\Delta_{\sigma,r}}{[U_p: V_r]} = n R_p(U_p)$.

Démonstration. $[U_p: V_r] = p^{(n-1)r}[U_p: V_0]$ et $R_p(V_0) = [U_p: V_0]\, R_p(U_p)$.

Corollaire. $\lim\limits_{k\to -1} (k+1)\,\zeta_{a,p}(-k) = \dfrac{-R_p(U_p)}{p^n \sqrt{D}}$.

Démonstration. $\lim\limits_{r\to\infty} F_i(\mathscr{L}_{\sigma,r}) = \lambda(\mathbf{0}) = \dfrac{1}{(n-1)!}$, comme on peut s'en rendre compte a partir de la définition de $F_i(\mathscr{L})$ et le corollaire découle immédiatement du corollaire du Lemme 5.2 et du Lemme 5.4.

Corollaire. *Soit h_p^+ le cardinal du groupe de classes de rayons modulo p. Alors* $\lim\limits_{s\to 1} (s-1)\,\zeta_{F,p}(s) = \dfrac{h_p^+ R_p(U_p)}{p^n \sqrt{D}}$.

Lemme 5.5. *Soit h le nombre de classes de F. Soit E le groupe des unités globale de E, on a la décomposition de E suivante: $E = W \times U$ où W est le groupe des racines de l'unité de $\mathcal{O}_F$ et U un groupe libre de rang $n-1$ contenant U_p. On a alors les relations*:

$$R_p = R_p(U) = [U: U_p]^{-1} \times R_p(U_p) \quad \text{et} \quad h_p^+ = 2^n \frac{h \times \#(\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F)^*}{[U: U_p]\, w} = 2^n \frac{h p^n E_p(1)}{[U: U_p]\, w},$$

où w est le cardinal de W (ici $w=2$).

Démonstration. La définition de G nous donne la suite exacte

$$0 \to \{1, -1\}^n \times (\mathcal{O}_F/p\mathcal{O}_F)^*/(E/U_p) \to G \to Cl(\mathcal{O}_F) \to 0.$$

et on en tire la deuxième égalité, la première égalité étant une conséquence immédiate de la définition du régulateur.

On obtient alors comme corollaire le

Théorème. $\lim\limits_{s\to 1} (s-1)\,\zeta_{F,p}(s) = \dfrac{2^n h R_p E_p(1)}{w\sqrt{D}}$.

Bibliographie

[A] Amice, Y.: Duals. Proceedings of the conference on p-adic analysis [1978-Nijmegen]; pp. 1–15. Nijmegen, Mathematische Institut Katholische Universität, 1978

[A-F] Amice, Y., Fresnel, J.: Fonctions zêta p-adiques des corps de nombres algébriques abéliens reéls. Acta Arith. Warzawa **20**, 353–384 (1972)

[B] Barsky, D.: Fonctions zêta p-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels. Groupe d'études d'analyse ultramétrique, 1977–1978; errata 1978–1979

[C-N] Cassou-Noguès, P.: Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques. Invent. Math. **51**, 29–59 (1979)

[C] Colmez, P.: Valeurs spéciales de fonctions L attachées à des caractères de Hecke de type A_0 d'une extension d'un corps quadratique imaginaire. (à paraître)

[D-R] Déligne, P., Ribet, K.: Values of Abelian L-functions at negative integers over totally real fields. Invent. Math. **59**, 227–286 (1980)

[K] Katz, N.: Another look at p-adic L-functions for totally real fields. Math. Ann. **255**, 33–43 (1981)

[Ko] Koblitz, N.: *P-adic Analysis: A Short Course on Recent Work.* London Math. Lecture Notes, Series 46. Cambridge University Press: Cambridge London New York (1980)

[Sc] Schwartz, L.: *Théorie des distributions.* Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg IX. Hermann: Paris 1957

[Se 1] Serre, J.-P.: Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques. Dans: Modular functions of one variable III (1972). Antwerpen 191–268. (Lect. Notes Math., vol. 350). Springer: Berlin Heidelberg New York

[Se 2] Serre, J.-P.: Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres. C.R. Acad. Sci. Paris **287**, 83–126 (1978), série A

[Sh] Shintani, T.: On evaluation of zêta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers. J. Fac. of Sci., University of Tokyo, Section 2, **23**, 393–417 (1976)

[Si] Siegel, C.L.: Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen. Göttingen Nach. **3**, 15–56 (1970)

Oblatum 28-III-1987 & 3-IX-1987