UNE CORRESPONDANCE DE LANGLANDS LOCALE p-ADIQUE POUR LES REPRÉSENTATIONS SEMI-STABLES DE DIMENSION 2

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous utilisons la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine pour établir une correspondance entre d'une part les représentations semi-stables, irréductibles, de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et d'autre part, des représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ introduites par Breuil. Cette correspondance s'obtient via un lien direct entre (le dual de) la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et le (φ, Γ)-module associé à la représentation de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Abstract. — We use Fontaine's theory of (φ, Γ)-modules to establish a correspondance between 2-dimensional irreducible semi-stable representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ and a family of unitary representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ introduced by Breuil. This correspondance is obtained by establishing a direct link between the (dual of the) representation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and the (φ, Γ)-module attached to the representation of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Table des matières

Introduction

0.1. Notations. — On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ absolu de $\mathbf{Q}_p$. On note $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique qui induit un isomorphisme de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$.

On se fixe aussi une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ (on peut parfois se permettre de remplacer L par une extension finie ; L est donc variablement fixe...), et on note $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{E}^\dagger$) l'anneau de Robba à coefficients dans L (resp. le sous corps de $\mathscr{R}$ constitué des éléments inversibles de $\mathscr{R}$ auquel on rajoute 0). On a donc $\mathscr{R} \supset \mathscr{E}^\dagger \supset \mathscr{O}_L[[T]]$, et $(L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L[[T]])[T^{-1}]$ est dense dans $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ pour leurs topologies respectives. On munit $\mathscr{O}_L[[T]]$, $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues du frobenius φ et de Γ, respectant les structures d'anneaux, en envoyant T sur $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1$, si $\gamma \in \Gamma$. Ces actions commutent entre elles.

0.2. Énoncé des résultats. — Cet article s'inscrit dans le cadre d'une hypothétique correspondance de Langlands p-adique. On établit une bijection naturelle entre, d'une part, les représentations semi-stables **[22]** de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et d'autre part, une famille de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ considérée par Breuil **[4, 5, 6]**.

A torsion près par une puissance du caractère cyclotomique (qui permet de supposer qu'un des poids de Hodge-Tate est nul et l'autre < 0), les L-représentations semi-stables de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sont paramétrées par deux invariants α et $\mathscr{L}$ appartenant à L, où $2v_p(\alpha) = k$ est un entier $\geqslant 2$. Au couple $(\alpha, \mathscr{L})$, on associe le (φ, N)-module filtré $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ qui est le L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par e_1 et e_2, avec $\varphi(e_1) = \alpha e_1$, $\varphi(e_2) = p^{-1}\alpha e_2$, $N(e_1) = e_2$, $N(e_2) = 0$, muni de la filtration décroissante définie par $D^0_{\alpha,\mathscr{L}} = D_{\alpha,\mathscr{L}}$, $D^1_{\alpha,\mathscr{L}} = D^{k-1}_{\alpha,\mathscr{L}} = L \cdot (e_1 - \mathscr{L} e_2)$ et

$D^k_{\alpha,\mathscr{L}} = 0$. Ce (φ, N)-module filtré est admissible et on note $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ la représentation $\mathbf{V}_{\rm st}(D_{\alpha,\mathscr{L}})$ qui est semi-stable [**17**], de dimension 2, de poids de Hodge-Tate 0 et $1-k$. Si $k \geqslant 3$, la représentation $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ est irréductible.

Les représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ considérées par Breuil sont elles aussi paramétrées par deux invariants β et $\mathscr{L}$ appartenant à L, où $k = 2v_p(\beta) + 2$ est un entier $\geqslant 2$. L'espace sur lequel $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ opère est un quotient de l'espace $B(k)$ qui s'obtient naturellement comme une complétion du produit tensoriel de la représentation de Steinberg et de la représentation algébrique $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathbf{Q}_p^2$ et qui peut se réaliser plus concrètement comme l'espace des fonctions « de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ avec un pôle d'ordre au plus $k-2$ en l'infini » modulo celui des polynômes de degré $\leqslant k-2$, l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $B(k)$ provenant de l'action naturelle de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ tordue par un caractère tenant compte de β (voir. § 5.3 pour une formule précise). La représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ainsi obtenue est loin d'être irréductible : si $\mathscr{L} \in L$, on définit le L-espace vectoriel $L(k,\mathscr{L})$ des fonctions de la forme $\ell_{U,\mathscr{L}} = \sum_{u\in U} \lambda_u (x-a_u)^{j_u} \log_{\mathscr{L}}(x-a_u)$, où U est un ensemble fini, les j_u des entiers appartenant à l'intervalle $]\frac{k-2}{2}, k-2]$, les a_u des éléments de $\mathbf{Q}_p$, et les λ_u des éléments de L tels que $\deg(\sum_{u\in U} \lambda_u(x-a_u)^{j_u}) < \frac{k-2}{2}$ (On note $\mathscr{U}(k)$ l'ensemble des $U = \{u = (\lambda_u, j_u, a_u)\}$ vérifiant les conditions précédentes.) ; cet espace est stable sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce qui permet de définir la représentation $B(\beta,\mathscr{L})$ comme le quotient de $B(k)$ par l'adhérence de $L(k,\mathscr{L})$.

Au vu des paramétrisations ci-dessus, il y a une correspondance raisonnable associant $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ et $B(\beta,\mathscr{L})$, avec $\beta = p^{k-1}\alpha^{-1}$. Notre but est de montrer que cette correspondance est en fait bien mieux que raisonnable : on dispose de constructions naturelles donnant une description (cf. th.0.1) du dual $B(\beta,\mathscr{L})^*$ de $B(\beta,\mathscr{L})$ en terme de $V_{\alpha,\mathscr{L}}$, si $\beta = p^{k-1}\alpha^{-1}$. Ces constructions utilisent la théorie des (φ,Γ)-modules de Fontaine [**23, 8**] et permettent de démontrer un certain nombre de résultats conjecturés par Breuil (cor. 0.2). Il est à noter que ces résultats s'étendent sans grand changement aux représentations cristallines de dimension 2 (cf. [**3**]) ainsi qu'aux représentations triangulines (« finite slope ») (cf. [**16**]) dont les représentations attachées aux formes modulaires surconvergentes font partie.

La théorie des (φ,Γ)-modules de Fontaine établit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et la catégorie des $\mathscr{E}^\dagger$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'actions semi-linéaires, commutant entre elles, de φ et Γ, l'action de φ étant étale (i.e. de pente 0). Un (φ,Γ)-module étale est, de plus, naturellement muni d'un inverse à gauche ψ de φ, qui commute à l'action de Γ, et qui joue un rôle très important dans la théorie d'Iwasawa des représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. En particulier, si D est associé à une représentation galoisienne V, alors $D^{\psi=1}$ est naturellement isomorphe au groupe(1) $H^1_{\rm Iw}(\mathbf{Q}_p, V)$ (Fontaine (non rédigé), cf. [**9, 11**]). Si D est un (φ,Γ)-module, on note $\psi^{-\infty}(D)$ l'ensemble des suites $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ d'éléments de D, qui sont bornées(2) et telles que $\psi(w^{(n+1)}) = w^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$. On notera que $D^{\psi=1}$ s'injecte naturellement dans $\psi^{-\infty}(D)$. Le module $\psi^{-\infty}(D)$ admet une structure naturelle de $P(\mathbf{Q}_p)$-module, où $P(\mathbf{Q}_p) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right),\ a \in \mathbf{Q}_p^*, b \in \mathbf{Q}_p\}$, cette action étant définie (cf. § 4.9) en

(1) On a $H^1_{\rm Iw}(\mathbf{Q}_p, V) = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \varprojlim(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^n}), T)$, où T est un résau de V invariant par $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, et la limite projective est prise relativement aux applications de corestriction.
(2) C'est-à-dire incluses dans un $\mathscr{O}_L[[T]]$-module compact

utilisant les actions de ψ, Γ et la structure de $\mathscr{O}_L[[T]]$-module. Notre résultat principal est alors le suivant.

Théorème 0.1. — *Si $k \geqslant 3$, si $v_p(\alpha) = \frac{k}{2}$, et si $\beta = p^{k-1}\alpha^{-1}$, les $P(\mathbf{Q}_p)$-modules $B(\beta, \mathscr{L})^*$ et $\psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$ sont naturellement isomorphes.*

En utilisant des techniques de (φ, Γ)-modules, on en déduit un certain nombre de résultats conjecturés par Breuil.

Corollaire 0.2. — *(i) $B(\beta, \mathscr{L}) \neq 0$.*
(ii) $B(\beta, \mathscr{L})$ est topologiquement irréductible.
(iii) $B(\beta, \mathscr{L})$ est admissible.
(iv) $B(\beta', \mathscr{L}') \cong B(\beta, \mathscr{L})$ si et seulement si $\beta = \beta'$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$.

Remarque 0.3. — (o) La notion d'admissibilité du (iii) est celle introduite par Schneider et Teitelbaum [**33**] : elle signifie que $B(\beta, \mathscr{L})^*$ est de type fini sur $L \otimes_{\mathscr{O}_L} [[\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)]]$.

(i) Breuil et Mézard [**7**] ont démontré les points (i), (ii) et (iii) du cor. 0.2 si $k \leqslant p-1$. Leur démonstration est totalement différente de celle de cet article ; elle repose sur l'étude de la réduction modulo p des objets en présence et a l'avantage d'établir une compatibilité entre la correspondance en caractéristique 0 et celle en caractéristique p. Elle a aussi le bon goût d'être nettement plus géométrique que celle de cet article, et laisse entrevoir la possibilité d'obtenir une réalisation géométrique de la correspondance de Langlands locale p-adique analogue à celle obtenue par Harris et Taylor [**25**] (cf. aussi [**20**]) dans le cas classique.

(ii) Breuil [**5**] a démontré les points (i) et (iv) du cor. 0.2 dans le cas d'une représentation associée à une forme modulaire f. Il a en fait démontré que la représentation $B(\beta, \mathscr{L})$ intervient dans le morceau correspondant à f dans le complété p-adique de la cohomologie de la tour des courbes modulaires, si et seulement si β et $\mathscr{L}$ sont les invariants correspondant à la représentation[(3)] de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à f via la correspondance ci-dessus, ce qui tend à indiquer que cette correspondance est compatible avec une correspondance de Langlands p-adique globale qui reste à définir.

(iii) Le théorème 0.1 a été inspiré par un sous-produit du résultat de Breuil mentionné ci-dessus. Si $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n$ est une forme primitive de poids $k \geqslant 3$ dont le coefficient a_p vaut $p^{(k-2)/2}$, la représentation V_f de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ qui lui est associée est semi-stable de dimension 2 et de poids de Hodge-Tate 0 et $1-k$. On peut donc lui associer, par la recette esquissée ci-dessus, un invariant[(4)] $\mathscr{L}_f$. Par ailleurs, en utilisant la théorie des symboles modulaires, on sait associer à f une fonction L p-adique

$$L_p(f, s) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{k/2} \langle x \rangle^{s-k/2} \, \mu_f, \quad \text{où } \mu_f \in B(k)^* \text{ est vecteur propre de } \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Le théorème de Breuil auquel il a été fait allusion plus haut affirme que $\mu_f \in B(a_p, \mathscr{L}_f)^*$. Par ailleurs, Kato a construit un élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}(f)$ dans $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}, V_f)$, et a montré, en utilisant une loi

(3) C'est la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ construite par Deligne [**18**].

(4) Cet invariant est l'opposé de celui intervenant dans la conjecture de Mazur-Tate-Teiltelbaum [**28**]. Un petit calcul montre que $L_p(f, k/2) = 0$ et une conjecture de Mazur,Tate et Teitelbaum (démontrée depuis, par des méthodes diverses et variées, par Stevens, Kato-Kurihara-Tsuji, Orton, Perrin-Riou, Emerton) prédit que $L_p'(f, k/2) = -\mathscr{L}_f \cdot L(f, k/2)$.

de réciprocité explicite [**26**], que $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}(f)$ permettait de retrouver μ_f en utilisant la machine de Perrin-Riou [**29, 30, 10, 12**]. En réinterprétant la machine de Perrin-Riou en termes de (φ,Γ)-modules [**9, 11**], on en déduit [**15**] le fait que l'élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}(f)$ donne naissance à la distribution μ_f quand on utilise l'isomorphisme $H^1_{\mathrm{Iw}}(\mathbf{Q}_p,V_f)\cong D^\dagger(V_f)^{\psi=1}$ et la recette expliquée dans la prop 0.4 ci-dessous pour construire des distributions sur $\mathbf{Q}_p$ à partir d'éléments de $D^\dagger(V_f)^{\psi=1}$. Tous les résultats mentionnés ci-dessus sont des résultats globaux qui utilisent des objets globaux, mais il est possible d'en dégager le principe purement local selon lequel les éléments de $(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})^{\psi=1}$ fournissent des éléments de $B(\beta,\mathscr{L})^*$ propres sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Une analyse plus détaillée de la situation mène au théorème 0.1.

0.3. Le passage de $B(\beta,\mathscr{L})^*$ à $\psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$. — La démonstration du théorème 0.1 est une longue série de traductions avec un petit calcul au milieu faisant intervenir la formule de Leopoldt pour la valeur en $s=1$ des fonctions L p-adiques attachées aux caractères de Dirichlet. Elle est résumée dans la proposition 0.4 ci-dessous dont l'énoncé va demander un peu de préparation.

Soit μ_{KL} la distribution de Kubota-Leopoldt. Cette distribution est à la base de la construction des fonctions L p-adiques attachées aux caractères de Dirichlet, et sa définition est rappelée au § 3.3. Soit aussi $f_{j,\mathscr{L}}(x,y)$ la fonction de 2 variables définie, si j est un entier $\geqslant 1$, par la formule

$$f_{j,\mathscr{L}}(x,y)=y^j\log_{\mathscr{L}}x+\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\frac{1}{i}x^iy^{j-i}.$$

Finalement, si $\mu\in\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$, et $n\in\mathbf{Z}$, soit[(5)]

$$\ell_\mu^{(n)}=\lim_{m\to+\infty}p^m\psi^{n-m}\Big(\log_{\mathscr{L}}T\cdot\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p}(1+T)^{p^mx}\ \mu\Big),$$

où $\psi:\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}}T]\to\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}}T]$ est l'extension naturelle de l'opérateur $\psi:\mathscr{E}^\dagger\to\mathscr{E}^\dagger$.

Pour comprendre l'énoncé qui suit, il faut encore savoir (prop. 2.17) que la restriction à $\mathbf{Q}_p$ induit un isomorphisme $B(k)^*\cong\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$, où, si u est un nombre réel $\geqslant 0$, on note $\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$ l'espace des distributions globalement d'ordre u sur $\mathbf{Q}_p$, et que l'on a un isomorphisme [**1, 2, 14**]

$$\mathscr{R}[\frac{1}{t},\log_{\mathscr{L}}T]\otimes_L D_{\alpha,\mathscr{L}}=\mathscr{R}[\frac{1}{t},\log_{\mathscr{L}}T]\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}$$

qui permet d'écrire, en utilisant la base e_1,e_2 de $D_{\alpha,\mathscr{L}}$, un élément de $D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}$ sous la forme $w_1\frac{e_1}{t^{k-1}}+w_2\frac{e_2}{t^{k-1}}$, avec $w_1,w_2\in\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}}T]$ (cf. prop. 5.16 pour un énoncé plus précis).

Proposition 0.4. — *Si $\mu\in\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mu\in B(k,\mathscr{L})^*$;

(ii) $\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{U,\mathscr{L}}\,\mu=0$ quel que soit $U\in\mathscr{U}(k)$;

(5) L'existence de la limite demande un peu de travail (cf. prop. 1.17 et lemme 5.18).

(iii) il existe $\lambda \in \mathscr{D}_{\frac{k}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ telle que, quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$, $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ et $0 \leqslant j \leqslant k-2$, on ait (avec $D(b,n) = b + p^n\mathbf{Z}_p$, si $b \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$)

$$p^{n_1} \int_{D(a,n_1)} x^j \, \lambda - p^{n_2} \int_{D(a,n_2)} x^j \, \lambda$$
$$= \int_{\mathbf{Q}_p} \Big(p^{n_1} \int_{D(a-y,n_1)} f_j(x,y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) - p^{n_2} \int_{D(a-y,n_2)} f_j(x,y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) \Big)\, \mu(y).$$

(iv) il existe $\lambda \in \mathscr{D}_{\frac{k}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ telle que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \{1\}$, on ait

$$\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} \eta^{p^n x}(1+T)^{p^n x} \, \lambda \equiv \ell_\mu^{(n)}((1+T)\eta - 1) \bmod T^{k-1}.$$

(v) Il existe $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$ tel que, si on écrit $w^{(n)}$ sous la forme $w_1^{(n)} \frac{e_1}{t^{k-1}} + w_2^{(n)} \frac{e_2}{t^{k-1}}$, alors quel que soit $n \in \mathbf{Z}$,

$$w_1^{(n)} = \beta^{-n} \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} (1+T)^{p^n x} \, \mu.$$

Réciproquement, si $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$, il existe $\mu_w \in \mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ et $\lambda_w \in \mathscr{D}_{\frac{k}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ vérifiant les propriétés (iv) et (v) et, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, on a

$$w_2^{(n)} = \beta^{-n} \frac{p-1}{p^{n+1}} \Big(\ell_{\mu_w}^{(n)}(T) + \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} (1+T)^{p^n x} \, \lambda_w \Big).$$

Remarque 0.5. — (i) L'équivalence entre (i) et (ii) est plus ou moins la définition de $B(\beta,\mathscr{L})^*$.

(ii) L'équivalence entre (ii) et (iii) vient de ce que la fonction $f_j(x,y)$ est une bonne approximation (lemme 3.7) de $y^j \log_{\mathscr{L}} y$. Les intégrales doubles du (iii) qui apparaissent naturellement au cours du calcul ont sûrement une interprétation conceptuelle ; les intégrales équivalentes dans le cas cristallin s'interprètent [**3**] en termes d'opérateurs d'entrelacement. Il est à noter que la fonction $f_j(x,y)$ intervient aussi dans les calculs de Breuil et Mézard.

(iii) L'équivalence entre (iii) et (iv) suit d'un calcul un peu monstrueux dans lequel apparaissent naturellement, quand on essaie d'expliciter $\ell_\mu^{(n)}$, des sommes du type $\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n} - \{1\}} \eta^{-b} \log_{\mathscr{L}}(\eta - 1)$. Le calcul de ces sommes (prop. 3.13) est équivalent à la formule de Leopoldt pour la valeur en $s = 1$ des fonctions L p-adiques attachées aux caractères de Dirichlet.

(iv) L'équivalence entre (iv) et (v) repose sur une description « explicite » de $D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}$ à l'intérieur de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log_{\mathscr{L}} T] \otimes_L D_{\alpha,\mathscr{L}}$. Cette description ([**15**] et prop. 5.15) repose sur les résultats de Berger [**1, 2, 14**] qui permettent de retrouver les invariants classiques fournis par la théorie de Hodge p-adique à partir des (φ,Γ)-modules, sans utiliser les anneaux de Fontaine $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ ou $\mathbf{B}^\dagger$ intervenant dans la définition de ces objets. Tous les calculs se déroulent à l'intérieur de l'anneau de Robba qui se révèle, à l'usage, un anneau très sympathique malgré son aspect peu engageant.

(v) Comme on peut le constater, un élément w de $\psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$ et donc, a fortiori, un élément de $(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})^{\psi=1}$, fournit *deux* distributions μ_w et λ_w sur $\mathbf{Q}_p$. Si $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ est le (φ,N)-module filtré associé à une forme modulaire f, l'élément $\mathbf{z}_{\mathrm{Kato}}(f)$ de Kato nous fournit un élément de w_{Kato} de $(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})^{\psi=1}$et donc deux distributions $\mu_{\mathrm{Kato}}(f)$ et $\lambda_{\mathrm{Kato}}(f)$. Comme nous l'avons signalé plus haut, la distribution $\mu_{\mathrm{Kato}}(f)$ est la distribution donnant naissance à la fonction L p-adique de

f, et qui peut se construire à partir de symboles modulaires. Quelle sont les significations de la distribution $\lambda_{\mathrm{Kato}}(f)$ et de la deuxième fonction L p-adique attachée à f qu'elle permet de définir ?

Pour terminer cette introduction, mentionnons que les calculs effectués pour démontrer la prop. 0.4 permettent aussi de démontrer la prop. 0.6 ci-dessous, ce qui, en utilisant la construction de Kato de la fonction L p-adique attachée à une forme modulaire, fournit une démonstration de la conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum (à l'ordre 1) dans le cas d'un zéro supplémentaire. Cette démonstration n'est pas franchement différente de celle obtenue par Perrin-Riou [**32**] (dont on trouvera une traduction en termes de (φ,Γ)-modules dans [**15**]) ou de celle obtenue par Emerton [**19**].

Proposition 0.6. — *Si* $\alpha = p^{\ell+1}$, *et si* $w \in (D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})^{\psi=1} \subset \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$, *alors*

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \mu_w = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \log y \ \mu_w = -\mathscr{L} \cdot \int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell \mu_w.$$

0.4. Céoukonfaikoi. — L'article est divisé en cinq chapitres dont trois ont vocation à émigrer ailleurs. Le premier est un chapitre de rappels et compléments sur l'anneau de Robba avec, en particulier, une étude un peu poussée de l'action de ψ sur cet anneau. Le second est constitué de rappels sur les distributions sur $\mathbf{Z}_p$ et la transformée d'Amice, et d'extensions aux distributions sur $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. Le quatrième chapitre est consacré à une étude approfondie de l'action de ψ sur un (φ,Γ)-module. Il est inutile pour la démonstration du théorème 0.1, mais est indispensable pour déduire le cor. 0.2 du th. 0.1. Le troisième chapitre est consacré à l'équivalence des points (i) à (iv) de la proposition 0.4 ci-dessus et le cinquième recueille les fruits du travail préparatoire effectué dans les autres.

0.5. Remerciements. — L'élément qui a provoqué le déclic menant aux résultats exposés dans cet article a été la réception de la version préliminaire de [**6**] lors d'un séjour que j'effectuais au Tata Institute de Bombay. Je voudrais en profiter pour remercier Christophe Breuil de m'avoir communiqué ses résultats, le Tata Institute pour les remarquables conditions de travail que j'y ai trouvées, et le CEFIPRA qui a partiellement financé ce séjour à Bombay.

1. L'anneau de Robba et ses sous-objets

1.1. Séries de Laurent

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Nous allons définir dans ce chapitre un certain nombre (et même un nombre certain...) d'anneaux et d'espaces de fonctions analytiques « à valeurs dans L », dont l'anneau de Robba $\mathscr{R}$ des fonctions analytiques sur une couronne infiniment fine de valuation 0, à l'intérieur duquel vivent la plupart des autres objets (à l'exception notable du corps $\mathscr{E}$ des fonctions analytiques sur une couronne vide de valuation 0). Ces espaces interviendront naturellement dans les constructions et les démonstrations de la suite de l'article, mais le lecteur est invité à ignorer ce chapitre qui ne comporte que des résultats purement techniques pas très éclairants.

1.1.1. Le corps $\mathscr{E}$. — Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, avec $a_k \in L$, telles que la suite $(v_p(a_k))_{k\in\mathbf{Z}}$ soit minorée et vérifie $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$. On munit $\mathscr{E}$ de la valuation $v^{\{0\}}$ définie par $v^{\{0\}}(\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k)$, ce qui fait de $\mathscr{E}$ un corps complet pour la valuation $v^{\{0\}}$. On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau des entiers de $\mathscr{E}$ qui est donc l'anneau des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, avec $a_k \in \mathscr{O}_L$, telles que la suite $v_p(a_k)$ vérifie $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k) = +\infty$. Le corps résiduel de $\mathscr{E}$ est $k_L((T))$.

Il faut faire un peu attention à la topologie que l'on met sur $\mathscr{E}$ car il y a deux choix naturels possibles qui ont chacun leur utilité. La *topologie forte* donnée par la valuation $v^{\{0\}}$ rend continue la réduction $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to k_L((T))$ modulo $\mathfrak{m}_L$, si $k_L((T))$ est muni de la topologie discrète.

La *topologie faible* rend continue la réduction $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \to k_L((T))$ modulo $\mathfrak{m}_L$, si $k_L((T))$ est muni de la topologie induite par la valuation v_T ; c'est la topologie obtenue en munissant $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la base de voisinages de 0 donnée par les $p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}} + T^n\mathscr{O}_L[[T]]$, pour $k, n \in \mathbf{N}$ et en munissant $\mathscr{E} = \cup_{m\in\mathbf{N}} p^{-m}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ de la topologie de la limite inductive.

1.1.2. Fonctions analytiques sur des couronnes. — Si $r \in \mathbf{R}$ et $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, on pose $v^{\{r\}}(f) = \inf_{k\in\mathbf{Z}} v_p(a_k) + kr \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si f converge sur le cercle $v_p(x) = r$, c'est-à-dire si $v_p(a_k) + kr$ tend vers $+\infty$ si k tend vers $\pm\infty$, alors $v^{\{r\}}(f) = \inf_{v_p(x)=r} v_p(f(x))$, et on a

$$v^{\{r\}}(fg) = v^{\{r\}}(f) + v^{\{r\}}(g)$$

si f et g convergent sur le cercle $v_p(x) = r$.

Si $r_1 < r_2$, soient $\mathscr{E}^{[r_1,r_2]} \subset \mathscr{E}^{(r_1,r_2]} \subset \mathscr{E}^{]r_1,r_2]}$ les anneaux de séries de Laurent définis par

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}^{[r_1,r_2]} &= \{\text{fonctions analytiques sur la couronne } r_1 \leqslant v_p(T) \leqslant r_2\},\\
\mathscr{E}^{(r_1,r_2]} &= \{\text{fonctions analytiques bornées sur la couronne } r_1 < v_p(T) \leqslant r_2\},\\
\mathscr{E}^{]r_1,r_2]} &= \{\text{fonctions analytiques sur la couronne } r_1 < v_p(T) \leqslant r_2\}.
\end{aligned}$$

Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k \in \mathscr{E}^{(r_1,r_2]}$, on pose

$$v^{[r_1,r_2]} = \inf_{s\in]r_1,r_2[} v^{\{s\}}(f) = \min\big(\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k) + r_1k), \inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k) + r_2k)\big).$$

Les anneaux $\mathscr{E}^{[r_1,r_2]} \subset \mathscr{E}^{(r_1,r_2]}$ sont des anneaux principaux, et $v^{[r_1,r_2]}$ en fait des anneaux de Banach. Quant à $\mathscr{E}^{]r_1,r_2]}$, c'est la limite projective (i.e. l'intersection) des $\mathscr{E}^{[s,r_2]}$ pour $s \in]r_1, r_2[$; c'est donc algébriquement un anneau de Bézout (tout idéal de type fini est un principal) et topologiquement un anneau de Fréchet comme limite projective dénombrable d'anneau principaux de Banach.

1.1.3. L'anneau de Robba. — On définit le sous-corps $\mathscr{E}^\dagger$ des éléments surconvergents de $\mathscr{E}$ comme la réunion des $\mathscr{E}^{(0,r]}$ pour $r > 0$, et l'anneau de Robba $\mathscr{R}$ comme la réunion des $\mathscr{E}^{]0,r]}$ pour $r > 0$, ce qui en fait un anneau de Bézout. On note $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{R}^+$ les intersections respectives de $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ avec $L[[T]]$. On a aussi $\mathscr{E}^+ = \mathscr{O}_L[[T]][\frac{1}{p}]$ et on aurait pu noter $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{R}^+$ respectivement $\mathscr{E}^{(0,+\infty]}$ et $\mathscr{E}^{]0,+\infty]}$.

On note $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ l'anneau des entiers de $\mathscr{E}^{(0,r]}$ pour la valuation $v^{[0,r]}$. Alors, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} \cap \mathscr{E}^{(0,r]} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$. On définit la *topologie faible* sur $\mathscr{E}^{(0,r]}$ en munissant $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$ de la topologie induite par la valuation $v^{\{r\}}$ pour laquelle il est complet, et on munit $\mathscr{E}^{(0,r]} = \cup_{m\in\mathbf{N}} p^{-m}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$ de la topologie de la limite inductive. La grande différence entre les topologies forte et faible est que T^k tend, quand k tend vers $+\infty$, vers 0 pour la topologie faible mais pas pour la topologie forte.

Lemme 1.1. — *Si $x \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]} \cap p^i \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $s \in]0, r[$, alors*

$$v^{\{s\}}(x) \geqslant i \cdot \inf\Big(\frac{1}{2}, \frac{r-s}{2s}\Big).$$

Démonstration. — Si $x = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$, les hypothèses se traduisent par

$$v_p(a_k) \geqslant i \quad \text{et} \quad v_p(a_k) + kr \geqslant 0, \text{ quel que soit } k \in \mathbf{Z}.$$

On en déduit les inégalités

$$v_p(a_k) + ks \geqslant \begin{cases} i + ks \geqslant \frac{i}{2} & \text{si } k \geqslant -\frac{i}{2s}, \\ v_p(a_k) + kr - k(r-s) \geqslant i\frac{r-s}{2s} & \text{si } k \leqslant -\frac{i}{2s}, \end{cases}$$

qui permettent de conclure.

1.1.4. éléments d'ordre fini. — Si $u \geqslant 0$, un élément $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$ de $\mathscr{R}$ est *d'ordre fini* s'il existe $u \geqslant 0$ tel que la suite de terme général $v_p(a_k) + u\frac{\log k}{\log p}$, $k \geqslant 1$, soit minorée. Si $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k$ est d'ordre fini, et si u_f est la borne inférieure de l'ensemble U_f des $u \geqslant 0$ tels que la suite de terme général $v_p(a_k) + u\frac{\log k}{\log p}$, $k \geqslant 1$, soit minorée, on dit que *l'ordre* $\mathrm{ord}(f)$ *de* f est u_f si $u_f \in U_f$ et que $\mathrm{ord}(f) = u_f^+$ si $u_f \notin U_f$. On remarquera qu'un élément de $\mathscr{R}$ est d'ordre 0 si et seulement s'il appartient à $\mathscr{E}^\dagger$, ce qui fournit un moyen de récupérer $\mathscr{E}^\dagger$ à l'intérieur de $\mathscr{R}$.

Si u est un réel $\geqslant 0$, on note $\mathscr{R}_u^+$ l'ensemble des éléments d'ordre $\leqslant u$ de $\mathscr{R}^+$. On munit $\mathscr{R}_u^+$ de la valuation v_u définie par

$$v_u(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k) = \inf_{k \in \mathbf{N}} \Big(v_p(a_k) + u\frac{\log(1+k)}{\log p}\Big),$$

ce qui en fait un espace de Banach.

Lemme 1.2. — *La valuation v_u est équivalente à la valuation v'_u définie par*

$$v'_u(f) = \inf_{\frac{u}{\log p} \geqslant s > 0} \Big(v^{\{s\}}(f) - \frac{u}{\log p}\log s\Big).$$

Démonstration. — Si $f(T) = \sum_{k \in \mathbf{N}} a_k T^k \in \mathscr{R}_u^+$, on a

$$v'_u(f) = \inf_{\frac{u}{\log p} \geqslant s > 0} \Big(\inf_{k \in \mathbf{N}} \Big(v_p(a_k) + ks - \frac{u}{\log p}\log s\Big)\Big) = \inf_{k \in \mathbf{N}} \Big(v_p(a_k) + \inf_{\frac{u}{\log p} \geqslant s > 0} \Big(ks - \frac{u}{\log p}\log s\Big)\Big)$$

La fonction $s \mapsto ks - \frac{u}{\log p}\log s$ atteint son minimum en $\frac{u}{k\log p}$ si $k > 0$. L'expression ci-dessus est donc aussi égale à

$$\min\Big(v_p(a_0) - \frac{u}{\log p}\log\frac{u}{\log p}, \inf_{k \geqslant 1} \big(v_p(a_k) + \frac{u}{\log p}(1 + \log k - \log\frac{u}{\log p}))\Big).$$

Le résultat s'en déduit.

Si $u>0$ et $r>0$, on note $\mathscr{E}_u^{]0,r]}\subset\mathscr{E}^{]0,r]}$ l'ensemble des éléments d'ordre $\leqslant u$; on munit cet espace de la valuation $v_u^{[0,r]}$ définie par

$$v_u^{[0,r]}(f)=\inf_{s\in]0,r]}\Big(v^{\{s\}}(f)-\frac{u}{\log p}\log\frac{s}{r}\Big)$$

qui en fait un espace de Banach.

Lemme 1.3. — *Il existe $C(u,r)\geqslant 0$ tel que, si $f\in\mathscr{R}_u^+$, alors*

$$v_u(f)-C(u,r)\leqslant v_u^{[0,r]}(f)\leqslant v_u(f)+C(u,r).$$

Démonstration. — Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que l'on a

$$v_u^{[0,r]}(f)=\min\Big(\inf_{k\leqslant\frac{u}{r\log p}}\big(v_p(a_k)+kr\big),\inf_{k\geqslant\frac{u}{r\log p}}\big(v_p(a_k)+\frac{u}{\log p}(1+\log k-\log\frac{u}{r\log p})\big)\Big).$$

Le résultat s'en déduit.

Lemme 1.4. — *Si $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$ appartient au sous-espace de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ des séries sans terme positif* (i.e. $a_k=0$ si $k\geqslant 0$), *alors $v_u^{[0,r]}(f)=v^{[0,r]}(f)=v^{\{r\}}(f)$.*

Démonstration. — C'est immédiat.

Corollaire 1.5. — *Il existe $C'(u,r)\geqslant 0$ telle que, si $f\in\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ et $x\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}\cap p^i\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors*

$$v_u^{[0,r/2]}(xf)\geqslant v_u^{[0,r]}(f)+\frac{i}{2}-C'(u,r).$$

Démonstration. — Il suffit de revenir à la définition de $v_u^{[0,r/2]}$, d'utiliser le lemme 1.5 et la formule $v^{\{s\}}(xf)=v^{\{s\}}(x)+v^{\{s\}}(f)$.

1.2. Les opérateurs φ et ψ, et l'action de Γ

On munit les anneaux $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ d'un frobenius φ : c'est un endomorphisme de L-algèbres, continu, envoyant T sur $(1+T)^p-1$. On munit aussi $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ d'une action continue de $\Gamma=\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$ respectant les structures de L-algèbres, en envoyant T sur $(1+T)^{\chi(\gamma)}-1$, où χ est le caractère cyclotomique. Les actions de φ et Γ commutent entre elles.

Les $(1+T)^i$, pour $0\leqslant i\leqslant p-1$ forment une base de $\mathscr{E}$ sur $\varphi(\mathscr{E})$ et de $\mathscr{R}$ sur $\varphi(\mathscr{R})$, ce qui nous permet de définir un inverse à gauche ψ de φ qui commute à l'action de Γ, en posant

$$\psi\Big(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)\Big)=x_0.$$

L'application ψ envoie $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ dans $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$; elle induit donc un morphisme k_L-linéaire $\psi: k_L((T))\to k_L((T))$.

Par ailleurs, comme la trace de $(1+T)^i$ sur $\varphi(\mathscr{E})$ ou $\varphi(\mathscr{R})$ est égale à p si $i=0$ et à 0 si $1\leqslant i\leqslant p-1$, on a aussi, si $A=\mathscr{E},\mathscr{R}$ et $f\in A$,

$$\psi(f)=p^{-1}\varphi^{-1}\big(\mathrm{Tr}_{A/\varphi(A)}(f)\big).$$

De plus, si $f\in\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$, alors $f((1+T)\eta-1)$ définit un élément de $\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$, et on a

$$\psi(f)\big((1+T)^p-1\big)=\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}f\big((1+T)\eta-1\big).$$

Remarque 1.6. — φ a tendance à diminuer la couronne de convergence d'un élément de $\mathscr{R}$, ce qui fait que ψ, qui en est un inverse à gauche, a tendance à améliorer la convergence. Une illustration frappante de ce phénomène se trouve dans la proposition 1.11. On en verra une autre manifestation dans le §5.2.

1.2.1. Estimées préliminaires

Lemme 1.7. — *Si $k \geqslant 0$, alors $\psi(T^k) = \sum_{i=0}^{[\frac{k}{p}]} b_{k,i}T^i$ avec $b_{k,i} \in \mathbf{Z}$ et $v_p(b_{k,i}) \geqslant [\frac{k}{p}] - i$.*

Démonstration. — Soit $\ell = [\frac{k}{p}]$. Écrivons k sous la forme $k = p\ell + r$; on a donc $0 \leqslant r \leqslant p-1$. Si $0 \leqslant j \leqslant k$, soit $a_{k,j} = \binom{k}{j} \cdot \frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p} \eta^j(\eta-1)^{k-j}$. On a $a_{k,j} = 0$ si $p\ell+1 \leqslant j \leqslant k$ et $a_{k,j} = (-1)^r\binom{p\ell+r}{r}$ est de valuation 0 si $j = p\ell$. Par ailleurs, si $j \leqslant k-1$, alors $a_{k,j}$ est la trace de $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_p)$ à $\mathbf{Q}_p$ de $\binom{k}{j} \cdot \frac{1}{p}\eta^j(\eta-1)^{k-j}$ qui est de valuation $\geqslant \frac{k-j}{p-1} - 1$. Comme la valuation de $a_{k,j}$ est un entier, on en déduit le fait que, si on pose

$$w(j) = \begin{cases} +\infty & \text{si } j \geqslant p\ell+1,\\ 0 & \text{si } k-(p-1) \leqslant j \leqslant p\ell,\\ i & \text{si } k-(i+1)(p-1) \leqslant j \leqslant k-i(p-1)-1,\end{cases}$$

alors $v_p(a_{k,j}) \geqslant w(j)$.

Maintenant, si on pose $G = \psi(T^k)$, on obtient

$$G((1+T)^p-1) = \frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}((1+T)\eta-1)^k = \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}T^j.$$

Comme le membre de droite est un polynôme de degré $\leqslant k$ en $1+T$, cela implique que G est un polynôme de degré $\leqslant \ell$ et on peut donc l'écrire sous la forme $\sum_{i=0}^{\ell} b_{k,i}T^{\ell}$. Par ailleurs, l'image du disque $v_p(T) \geqslant \frac{1}{p-1}$ par l'application $T \mapsto (1+T)^p-1$ est le disque $v_p(T) \geqslant \frac{p}{p-1}$; on en déduit la suite d'(in)égalités :

$$\begin{aligned} v_p(b_{k,i}) + i\frac{p}{p-1} &\geqslant \inf_{v_p(X)\geqslant\frac{p}{p-1}} \sum_{i=0}^{\ell} b_{k,i}X^i = \inf_{v_p(T)\geqslant\frac{1}{p-1}} \sum_{j=0}^{k} a_{k,j}T^j \\ &= \inf_{0\leqslant j\leqslant k} v_p(a_{k,j}) + \frac{j}{p-1} \geqslant \inf_{0\leqslant j\leqslant k} w(j) + \frac{j}{p-1} = \frac{k}{p-1} - 1.\end{aligned}$$

Finalement, cela implique que $v_p(b_{k,i})$ est supérieure ou égale au plus petit entier $\geqslant \frac{k-ip}{p-1} - 1$. Maintenant, si $i \leqslant \ell - 1 = [\frac{k}{p}] - 1$, on a

$$\frac{k-ip}{p-1} - 1 \geqslant \frac{k-([\frac{k}{p}]-1)}{p-1} - i - 1 \geqslant [\frac{k}{p}] - i + \frac{1}{p-1} - 1,$$

ce qui permet de conclure si $i \leqslant \ell-1$, et comme $b_{k,\ell} = (-1)^r\binom{p\ell+r}{r}$ est de valuation 0, cela termine la démonstration du lemme.

Lemme 1.8. — *Si $k \leqslant -1$, alors $\psi(T^k) = \sum_{i=k}^{[\frac{k}{p}]} b_{k,i}T^i$, avec $b_{k,i} \in \mathbf{Z}$ et $v_p(b_{k,i}) \geqslant \frac{k}{p-1} - 1 - \frac{p}{p-1}i$.*

Démonstration. — On a
$$\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}\frac{1}{(1-(1+T)\eta)^k}=\frac{\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}(\sum_{i=0}^{p-1}A_i(\eta)T^i)^k}{(1-(1+T)^p)^k},$$
avec
$$\sum_{i=0}^{p-1}A_i(\eta)T^i=1+(1+T)\eta+\cdots(1+T)^{p-1}\eta^{p-1}=\prod_{\zeta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{\eta\}}(1-\zeta-\zeta T).$$
La première de ces formules montre que $A_i\in\mathbf{Z}[X]$, et la seconde, en utilisant la minoration $v_p(\zeta-1)\geqslant\frac{1}{p-1}$, que $v_p(A_i(\eta))\geqslant 1-\frac{i}{p-1}$. On peut donc écrire $(\sum_{i=0}^{p-1}A_i(\eta)T^i)^k$ sous la forme $\sum_{i=0}^{k(p-1)}A_{k,i}(\eta)T^i$ avec $A_{k,i}\in\mathbf{Z}[X]$ et $v_p(A_{k,i}(\eta))\geqslant k-\frac{i}{p-1}$. Soit alors $a_{k,i}=\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}A_{k,i}(\eta)$. Il résulte de ce qui précède que
$$a_{k,i}\in\mathbf{Z}\quad\text{et}\quad v_p(a_{k,i})\geqslant k-[\frac{i}{p-1}]-1.$$
Par ailleurs, le polynôme $\sum_{i=0}^{k(p-1)}a_{k,i}T^i$ étant invariant par $T\mapsto(1+T)\eta-1$ si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_p$, il peut s'écrire sous la forme $\sum_{j=0}^{[\frac{k(p-1)}{p}]}c_{k,j}((1+T)^p-1)^j$. En comparant, comme au cours de la démonstration du lemme 1.7 la norme du sup. de ces deux polynômes sur le disque $v_p(T)\geqslant\frac{1}{p-1}$, on en déduit la minoration
$$v_p(c_{k,j})\geqslant\inf_{0\leqslant i\leqslant k(p-1)}v_p(a_{k,i})+\frac{i}{p-1}-j\frac{p}{p-1}\geqslant k-j\frac{p}{p-1}-1.$$
Comme $\psi(T^{-k})=\sum_{j=0}^{[\frac{k(p-1)}{p}]}c_{k,j}T^{j-k}=\sum_{i=-k}^{[\frac{-k}{p}]}b_{-k,i}$, avec
$$b_{-k,i}=c_{k,i+k}\quad\text{et}\quad v_p(b_{-k,i})\geqslant k-(i+k)\frac{p}{p-1}-1=\frac{-k}{p-1}-1-\frac{p}{p-1}i,$$
cela permet de conclure.

1.2.2. Amélioration de la convergence par ψ

Lemme 1.9. — *Si $x\in k_L((T))$ vérifie $v_T(x)\leqslant -2$, alors $v_T(\psi(x))>v_T(x)$.*

Démonstration. — Soit $n_0=v_T(x)\leqslant -2$. On peut donc écrire x sous la forme $x=\sum_{n=n_0}^{+\infty}x_nT^n$, avec $x_n\in k_L$ si $n\geqslant n_0$ et $x_{n_0}\neq 0$. On a alors $\psi(x)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}x_n\psi(T^n)$. Écrivant n sous la forme $n=pm+a$ avec $0\leqslant a\leqslant p-1$, on obtient $\psi(T^n)=\psi(T^{pm}((1+T)-1)^a)=(-1)^aT^m$. En particulier, si $n\geqslant n_0$, alors $v_T(\psi(T^n))\geqslant v_T(\psi(T^{n_0}))=[\frac{n_0}{p}]>n_0$ car $n_0\leqslant -2$. Ceci permet de conclure.

Proposition 1.10. — *Si $\alpha\in L$ vérifie $v_p(\alpha)\leqslant 0$ et si $x\in\mathscr{R}$ est tel que $\psi(x)-\alpha x\in\mathscr{R}^+$, alors $x\in\mathscr{R}^+$ (resp. $x\in\mathscr{R}^+\oplus L\cdot\frac{1}{T}$) si $\alpha\neq 1$ (resp. si $\alpha=1$).*

Démonstration. — Écrivons x sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$ et posons $y=\sum_{k\leqslant -2}a_kT^k\in\mathscr{E}^\dagger$. Si $y\neq 0$, on peut s'arranger, quitte à multiplier x par un élément de L pour que $\inf_{k\leqslant -2}v_p(a_k)=0$. Comme $\psi(T^{-1})=T^{-1}$ et $\psi(T^k)\in\mathscr{R}^+$ si $k\geqslant 0$, on voit que
$$y-\alpha^{-1}\psi(y)=\alpha^{-1}(\alpha x-\psi(x))+(\alpha^{-1}-1)a_0T^{-1}+\sum_{k\geqslant 0}a_k(\alpha^{-1}\psi(T^k)-T^k)\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}^\dagger}\cap T^{-1}\mathscr{R}^+=T^{-1}\mathscr{O}_L[[T]].$$

En réduisant le tout modulo $\mathfrak{m}_L$, on en déduit l'inégalité $v_T(\overline{y}-\overline{\alpha}\psi(\overline{y}))\geqslant 1$, ce qui est en contradiction avec le lemme précédent et le fait que $v_T(\overline{y})\leqslant -2$. On en déduit la nullité de y et le résultat.

Proposition 1.11. — *Si $\alpha\in L$ vérifie $v_p(\alpha)\leqslant 0$ et si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\mathscr{E}^{]0,r]}$ telle que l'on ait $\psi(x_{n+1})=\alpha x_n$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$, alors on a $x_n\in\mathscr{R}^+$ (resp. $x_n\in\mathscr{R}^+\oplus L\cdot\frac{1}{T}$) si $v_p(\alpha)<0$ (resp. si $v_p(\alpha)=0$), quel que soit $n\in\mathbf{N}$.*

Démonstration. — Écrivons x_n sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_{n,k}T^k$ et posons $y_n=\sum_{k\leqslant -1}a_{n,k}T^k\in\mathscr{E}^\dagger$. Comme $\psi(T^k)$ ne fait intervenir que des puissances positives (resp. strictement négatives) de T si $k\geqslant 0$ (resp. si $k\leqslant -1$), il existe $r>0$ tel que la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit une suite bornée d'éléments de $\mathscr{E}^{(0,r]}$ vérifiant $\psi(y_{n+1})=\alpha y_n$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$. Soit C la borne inférieure des $v_p(a_{n,k})$ pour $n\in\mathbf{N}$ et $k\leqslant -2$. Comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, C n'est pas égal à $-\infty$ et, si $C\neq+\infty$, il existe $k_0\leqslant -2$ tel que l'on ait $v_p(a_{n,k})>C$ si $k<k_0$, et $n_0\in\mathbf{N}$ tel que $v_p(a_{n_0,k_0})=C$. Le lemme 1.8, la relation $\psi(x_{n+1})=\alpha x_n$ et le fait $k_0\leqslant -2$ nous fournissent les inégalités

$$C=v_p(a_{n_0,k_0})>-v_p(\alpha)+v_p(a_{n_0+1,k_0})\geqslant C,$$

ce qui conduit à une contradiction. On a donc $a_{n,k}=0$ quels que soient $n\in\mathbf{N}$ et $k\leqslant -2$, ce qui, au vu de la formule $\psi(T^{-1})=T^{-1}$, permet de conclure.

1.2.3. Action de ψ sur les éléments surconvergents

Soit $s:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ la fonction définie par $s(r)=r+1$ si $r\geqslant\frac{1}{p-1}$ et $s(r)=pr$ si $r\leqslant\frac{1}{p-1}$.

Proposition 1.12. — *Si $r>0$, alors ψ induit un morphisme de $\mathscr{E}^{(0,r]}$ sur $\mathscr{E}^{(0,s(r)]}$, continu pour la topologie faible, et on a $v^{\{s(r)\}}(\psi(f))\geqslant v^{\{r\}}(f)-1$ si $f\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$.*

Démonstration. — Si $k\geqslant 0$, alors $v^{\{r\}}(T^k)=v^{\{r\}}(\psi(T^k))=0$ quel que soit $r>0$ comme on le constate aisément en utilisant le lemme 1.7. Par ailleurs, il résulte du lemme 1.8 que, si $k\leqslant -1$,

$$v^{\{s(r)\}}(\psi(T^k))\geqslant\inf_{k\leqslant i\leqslant[\frac{k}{p}]}\frac{k}{p-1}-1-\frac{p}{p-1}i+s(r)i.$$

• si $r\geqslant\frac{1}{p-1}$, alors $s(r)\geqslant\frac{p}{p-1}$ et le maximum est atteint pour $i=k$ et vaut $-1+kr=v^{\{r\}}(T^k)-1$.
• si $r\leqslant\frac{1}{p-1}$, alors $s(r)=pr\leqslant\frac{p}{p-1}$ et le maximum est atteint pour $i=[\frac{k}{p}]$ et vaut

$$\frac{k}{p-1}-1+(pr-\frac{p}{p-1})[\frac{k}{p}]\geqslant\frac{k}{p-1}-1+(pr-\frac{p}{p-1})\frac{k}{p}=v^{\{r\}}(T^k)-1.$$

Ceci permet de conclure.

Si $b\in\mathbf{Z}$, notons $\tau^{\leqslant b}$ l'application $g=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k\mapsto\tau^{\leqslant b}(g)=\sum_{k\leqslant b}a_kT^k$. La restriction de $\tau^{\leqslant b}$ à $\mathscr{E}^{(0,r]}$ est un endomorphisme continu pour la topologie faible.

Lemme 1.13. — *Si $r>0$, il existe $b\leqslant -1$ tel que, quel que soit $f\in\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$, on ait $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b}\circ\psi(f))\geqslant v^{\{r\}}(f)$.*

Démonstration. — On a $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b}\circ\psi(T^k))=+\infty$ si $k>b$ et, si $k\leqslant b$, le lemme 1.8 nous fournit la minoration

$$v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b}\circ\psi(T^k))\geqslant\inf_{k\leqslant i\leqslant\inf(b,[\frac{k}{p}])}\frac{k}{p-1}-1-\frac{pi}{p-1}+ri.$$

• Si $r \geqslant \frac{p}{p-1}$, ce minimum est atteint en $i = k$ et est $\geqslant rk$ quel que soit $b \leqslant -1$. On a donc $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b} \circ \psi(T^k)) \geqslant v^{\{r\}}(T^k)$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$ et on peut prendre $b = -1$.
• Si $r \leqslant \frac{p}{p-1}$, ce minimum est atteint en $i = \inf(b, [\frac{k}{p}])$ est est supérieur ou égal à

$$rk + \sup\Big(r\frac{1-p}{p}k - 1, \frac{k}{p-1} - 1 - rk + \Big(r - \frac{p}{p-1}\Big)b\Big).$$

Il suffit alors de prendre b assez petit pour que $(\frac{p}{p-1} - r)b \leqslant k(\frac{1}{p-1} - r) - 1$ si $k \in [-\frac{p}{r(p-1)}, -1]$ pour que l'on ait $v^{\{r\}}(\tau^{\leqslant b} \circ \psi(T^k)) \geqslant v^{\{r\}}(T^k)$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$. Ceci permet de conclure.

Proposition 1.14. — *Si $f \in \mathscr{E}^{(0,r]}$, alors la suite $\psi^n(f)$, $n \in \mathbf{N}$, est bornée dans $\mathscr{E}^{(0,r]}$ pour la topologie faible.*

Démonstration. — Écrivons $\psi^n(f)$ sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{n,k}T^k$. Quitte à multiplier f par un élément de L, on peut supposer que $a_{0,k} \in \mathscr{O}_L$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$. On a alors $a_{n,k} \in \mathscr{O}_L$ quels que soient $k \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. En particulier, si on fixe b, la suite $\sum_{k>b} a_{n,k}T^k$, $n \in \mathbf{N}$, est bornée dans $\mathscr{E}^{(0,r]}$, et il suffit de prouver qu'il en est de même de la suite $\sum_{k\leqslant b} a_{n,k}T^k$, $n \in \mathbf{N}$. Or on a $\sum_{k\leqslant b} a_{n,k}T^k = \tau^{\leqslant b} \circ \psi^n(f)$, et, si $b \leqslant -1$, $\tau^{\leqslant b} \circ \psi = \tau^{\leqslant b} \circ \psi \circ \tau^{\leqslant b}$ car $\psi(T^k)$ ne fait intervenir que des T^i avec $i > b$ si $k > b$ (cf. lemme 1.8). Ceci permet d'écrire $\sum_{k\leqslant b} a_{n,k}T^k$ sous la forme $(\tau^{\leqslant b} \circ \psi)^n(f)$ et le lemme 1.13 permet de conclure.

1.2.4. Action de ψ sur les éléments d'ordre fini

Proposition 1.15. — *La restriction de ψ à $\mathscr{R}_u^+$ est un endomorphisme continu de $\mathscr{R}_u^+$ et il existe $C(u) \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $v_u(\psi^n(f)) \geqslant v_u(f) - nu - C(u)$ quels que soient $f \in \mathscr{R}_u^+$ et $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Soit $A \geqslant \sup(\frac{1}{p}, \frac{u}{\log p})$. La valuation $v_{u,A}$ définie par

$$v_{u,A}(\sum_{k=0}^{+\infty} a_kT^k) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k) + a\frac{\log(A+k)}{\log p}$$

est équivalente à v_u car $k \mapsto \log(A+k) - \log(1+k)$ est bornée.

En reprenant les notations du lemme 1.7, on obtient, si $k \in \mathbf{N}$,

$$v_{u,A}(\psi(T^k)) = \inf_{i\leqslant[\frac{k}{p}]} v_p(b_{k,i}) + a\frac{\log(A+i)}{\log p} \geqslant \inf_{i\leqslant[\frac{k}{p}]} [\frac{k}{p}] - i + a\frac{\log(A+i)}{\log p}.$$

La fonction $x \mapsto -x + a\frac{\log(A+x)}{\log p}$ est décroissante pour $x > \frac{u}{\log p} - A$ et donc le minimum ci-dessus est atteint en $i = [\frac{k}{p}]$ puisque $\frac{u}{\log p} - A < 0$ par hypothèse. On obtient donc

$$v_{u,A}(\psi(T^k)) - v_{u,A}(T^k) \geqslant \frac{u}{\log p} \cdot \frac{\log(A + [\frac{k}{p}])}{\log(A+k)} = -a + \frac{u}{\log p} \cdot \frac{\log(pA + p[\frac{k}{p}])}{\log(A+k)} \geqslant -a$$

car $pA + p[\frac{k}{p}] \geqslant A + k$ puisque $A \geqslant \frac{1}{p}$ par hypothèse. Ceci implique que l'on a $v_{u,A}(\psi(f)) \geqslant v_{u,A}(f) - a$ quel que soit $f \in \mathscr{R}_u^+$ et une récurrence immédiate montre que l'on a

$$v_{u,A}(\psi^n(f)) \geqslant v_{u,A}(f) - na$$

quel que soit $f \in \mathscr{R}_u^+$. La valuation v_u étant équivalente à $v_{u,A}$, ceci permet de conclure.

Proposition 1.16. — *Soit* $u \geqslant 0$. *Si* $f \in \mathscr{E}_u^{]0,r]}$ *et si* $\beta \in L$ *vérifie* $v_p(\beta) > u$, *la suite de terme général* $\beta^n \psi^n(f)$ *tend vers* 0 *dans* $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ *et* $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^n \psi^n(f)$ *est un élément de* $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ *vérifiant* $g - \beta\psi(g) = f$.

Démonstration. — Si $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, soit $f_1 = \sum_{k\leqslant -1} a_k T^k \in \mathscr{E}^{(0,r]}$ et $f_2 = \sum_{k\geqslant 0} a_k T^k \in \mathscr{R}_u^+$. La suite $\psi^n(f_1)$ est bornée dans $\mathscr{E}^{(0,r]}$ muni de la topologie faible d'après la prop. 1.14 ; elle l'est donc aussi dans $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ d'après le lemme 1.4, ce qui implique que $\beta^n\psi^n(f_1)$ tend vers 0 dans $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ puisque $v_p(\beta) > u \geqslant 0$. Par ailleurs, $v_u(\psi^n(f_2)) \geqslant v_u(f_2) - nu - C(u)$ d'après la prop. 1.15, ce qui implique, puisque $v_p(\beta) > a$, que $\beta^n\psi^n(f_1)$ tend vers 0 dans $\mathscr{R}_u^+$ et donc aussi dans $\mathscr{E}_u^{]0,r]}$ d'après le lemme 1.3. On en déduit le résultat.

1.3. L'anneau $\mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log T]$

Soit $t = \log(1+T)$. C'est un élément de $\mathscr{R}^+$ vérifiant $\varphi(t) = pt$ et $\gamma(t) = \chi(\gamma)t$ si $\gamma \in \Gamma$. Les actions de φ, Γ et ψ s'étendent donc naturellement à l'anneau $\mathscr{R}[\frac{1}{t}]$.

On étend l'action de φ et Γ sur $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}[\log T]$ par les formules

$$\varphi(\log T) = \log\varphi(T) = p\log T + \log\frac{\varphi(T)}{T^p} \quad \text{et} \quad \gamma(\log T) = \log\gamma(T) = \log T + \log\frac{\gamma(T)}{T},$$

ces formules ayant un sens car la série définissant $\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$ converge dans $\mathscr{E}^\dagger$ et celle définissant $\log\frac{\gamma(T)}{T}$ dans $\mathscr{R}$ vers un élément d'ordre 1. On munit aussi $\mathscr{R}[\log T]$ de l'unique $\mathscr{R}$-dérivation N telle que $N(\log T) = -\frac{p}{p-1}$. L'opérateur ψ s'étend lui aussi de manière unique à $\mathscr{R}[\log T]$ en un inverse à gauche de φ : si $f \in \mathscr{R}$ et $k \in \mathbf{N}$, alors

$$\begin{aligned}\psi(f\cdot(p\log T)^k) =& \psi\big(f\cdot\big(\log\varphi(T) - \log\frac{\varphi(T)}{T^p}\big)^k\big)\\ =& \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i}\binom{k}{i}(\log T)^i\psi\big(f\cdot\big(\log\frac{\varphi(T)}{T^p}\big)^{k-i}\big).\end{aligned}$$

On définit *l'ordre* $\operatorname{ord}(f)$ d'un élément $f = \sum_{i=0}^k t^{-a_i} f_i (\log T)^i$ de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log T]$ par la formule

$$\operatorname{ord}(f) = \sup_{0\leqslant i\leqslant k}(\operatorname{ord}(f_i) + i - a_i).$$

Comme $\operatorname{ord}(tf) = \operatorname{ord}(f) + 1$ si $f \in \mathscr{R}$, cette définition ne dépend pas des choix des f_i et a_i intervenant dans la décomposition de f.

Proposition 1.17. — *Soit* $u \geqslant 0$. *Si* $F = (F^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite d'éléments de* $\mathscr{R}_u^+$ *vérifiant*

(i) $\psi(F^{(n+1)}) = F^{(n)}$, *si* $n \in \mathbf{N}$,

(ii) il existe $C \in \mathbf{R}$ *tel que* $v_u(F^{(n)}) \geqslant nu + C$ *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$,

alors $p^m\psi^{m-n}(F^{(m)}\log T)$ *tend, quand* m *tend vers* $+\infty$, *vers une limite* $\ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n)}$ *vérifiant, quel que soit* $n \in \mathbf{N}$,

$$\psi(\ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n+1)}) = \ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n)} \quad \text{et} \quad \ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n)} - p^n F^{(n)}\log T \in \mathscr{E}_u^{]0,1]}.$$

Démonstration. — Par définition, si $G \in \mathscr{R}$, on a

$$\begin{aligned} p\psi(G\log T) =& \psi(G\log\varphi(T)) - \psi(G\log\frac{\varphi(T)}{T^p}) \\ =& \psi(G)\log T - \psi(G\log\frac{\varphi(T)}{T^p}). \end{aligned}$$

On en déduit la formule

$$p^{m+1}\psi^{m+1-n}(F^{(m+1)}\log T) - p^m\psi^{m-n}(F^{(m)}\log T) = p^m\psi^{m-n}(F^{(m+1)}\log\frac{\varphi(T)}{T^p}).$$

Comme $\log\frac{\varphi(T)}{T^p} \in \mathscr{E}^{(0,1/p]}$, on en déduit, en utilisant les prop. 1.12 et 1.15, ainsi que la minoration $v_u(F^{(m)}) \geqslant mu + C$, l'appartenance de $\psi(F^{(m)}\log\frac{\varphi(T)}{T^p})$ à $\mathscr{E}_u^{]0,1]}$ et la convergence vers 0 de $p^m\psi^m(F^{(m+1)}\log\frac{\varphi(T)}{T^p})$. Le résultat s'en déduit via la formule

$$\begin{aligned} p^{m+1}\psi^{m+1-n}(F^{(m+1)}\log T) =& p^nF^{(n)}\log T + \sum_{k=0}^{m-n} p^{n+k}\psi^k(p\psi(F^{(n+k+1)}\log T) - F^{(n+k)}\log T) \\ =& p^nF^{(n)}\log T + \sum_{k=0}^{m-n} p^{n+k}\psi^k(F^{(n+k+1)}\log\frac{\varphi(T)}{T^p}) \end{aligned}$$

2. Distributions sur $\mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$

L'objet de ce chapitre est de fournir une « description » de l'espace $B(k)^*$ des distributions d'ordre $\leqslant \frac{k-2}{2}$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ avec un zéro d'ordre au moins $k-2$ en l'infini et qui s'annule sur les polynômes de degré $\leqslant k-2$. Une telle distribution est complètement déterminée (cf. prop 2.17) par sa restriction à $\mathbf{Q}_p$, et comme $\mathbf{Q}_p = \cup p^{-n}\mathbf{Z}_p$, on peut décrire les éléments de $B(k)^*$ comme une famille de distributions sur $\mathbf{Z}_p$ vérifiant des conditions de recollement et une condition de croissance à l'infini. Il n'est donc pas très difficile de traduire les résultats classiques (prop. 2.1, 2.2 et 2.3 dues à Mahler, Amice, Barsky, Vishik... et dont on peut trouver les démonstrations dans [**13**] par exemple) dont on dispose pour les distributions sur $\mathbf{Z}_p$, en une description de $B(k)^*$.

Soit $n \in \mathbf{Z}$. Si $a \in \mathbf{Q}_p$, on note $D(a,n)$ la boule $a+p^n\mathbf{Z}_p$ et $D(\infty,n) = \{\infty\}\cup\{x \in \mathbf{Q}_p, v_p(x) \leqslant -n\}$ de telle sorte que $D(\infty,n)$ est l'image de $D(a,n)$ par $x \mapsto \frac{1}{x-a}$.

2.1. Espaces de fonctions

2.1.1. Fonctions de classe $\mathscr{C}^u$. — On note $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des fonctions continues à valeurs dans L. Muni de la valuation $v_{\mathscr{C}^0}$ définie par

$$v_{\mathscr{C}^0}(\phi) = \inf_{x\in\mathbf{Z}_p} v_p(\phi(x)),$$

cet espace est un espace de Banach.

Si $\phi \in \mathscr{C}^0$ et $k \in \mathbf{N}$, on définit le k-ième coefficient de Mahler de ϕ par

$$a_k(\phi) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\phi(k-i).$$

Proposition 2.1. — *Si $\phi \in \mathscr{C}^0$, alors*
(i) $\lim_{k\to+\infty} a_k(\phi) = 0$ *;*
(ii) $\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\phi)\binom{x}{k}$ *;*
(iii) $v_{\mathscr{C}^0}(\phi) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi))$.

Si $u \geqslant 0$, on définit l'ensemble des fonctions de classes $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Z}_p$ comme l'ensemble des fonctions ϕ dont les coefficients de Malher sont tels que $\lim_{k\to+\infty} v_p(a_k(\phi)) - u\frac{\log(1+k)}{\log p} = +\infty$. Muni de la valuation $v_{\mathscr{C}^u}$ définie par

$$v_{\mathscr{C}^u}(\phi) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi)) - u\frac{\log(1+k)}{\log p},$$

cet espace est un espace de Banach. La terminologie est justifiée par le résultat suivant.

Proposition 2.2. — *Si $u \in \mathbf{N}$, alors ϕ est de classe $\mathscr{C}^u$ si et seulement si la fonction de $u+1$ variables*

$$\phi(x, h_1, \dots, h_u) = \frac{1}{h_1 \cdots h_u}\Big(\sum_{I\subset\{1,\dots,u\}} (-1)^{u-|I|}\phi\Big(x + \sum_{i\in I} h_i\Big)\Big)$$

se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p^{u+1}$, auquel cas la fonction $\phi(x, 0, \dots, 0)$ est la dérivée u-ième de ϕ au sens usuel.

2.1.2. Fonctions localement analytiques. — Si $h \in \mathbf{N}$, soit $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des fonctions de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$ analytiques sur $a + p^h\mathbf{Z}_p$ quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. Si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$, alors, quel que soit $x_0 \in \mathbf{Z}_p$, on peut développer ϕ sous la forme

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x_0)\big(\frac{x - x_0}{p^h}\big)^k,$$

où $a_k(x_0)$ est une suite d'éléments de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers 0 quand k tend vers $+\infty$. On munit $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$ de la valuation v_{LA_h} définie par la formule

$$v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{x_0\in\mathbf{Z}_p, k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(x_0)),$$

ce qui en fait un espace de Banach p-adique. Si S est un système de représentants de $\mathbf{Z}_p$ modulo $p^h\mathbf{Z}_p$, alors $v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{x_0\in S, k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(x_0))$. Par ailleurs, on peut décrire $v_{\mathrm{LA}_h}(\mathbf{Z}_p)$ en utilisant les coefficients de Mahler de ϕ :

Proposition 2.3. — *Si $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$ et si $\phi = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k(\phi)\binom{x}{k}$ est le développement de Mahler de ϕ, alors*

$$v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_k(\phi)) - v_p([\frac{k}{p^h}]!).$$

On note $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des fonctions localement analytiques sur $\mathbf{Z}_p$. Comme $\mathbf{Z}_p$ est compact, c'est la réunion des $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$ pour $h \in \mathbf{N}$, et on munit $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ de la topologie de la limite inductive.

Proposition 2.4. — *Si $u \geqslant 0$, il existe $C(u)$ tel que, quel que soit $h \in \mathbf{N}$ et $\phi \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$, on ait*

$$v_{\mathscr{C}^u}(\phi) \geqslant v_{\mathrm{LA}_h}(\phi) - uh - C(u).$$

Démonstration. — En utilisant la prop. 2.3, on obtient la minoration
$$v_{\mathscr{C}^u}(\phi)-v_{\mathrm{LA}_h}(\phi)\geqslant \inf_{k\in\mathbf{N}} v_p([\frac{k}{p^h}]!)-u\frac{\log(1+k)}{\log p}.$$
Comme $v_p(a!)=\frac{a-S_p(a)}{p-1}$, si $S_p(a)$ est la somme des chiffres du développement de a en base p, on en déduit la minoration $v_p(a!)\geqslant \frac{a}{p-1}-\frac{\log(a+1)}{\log p}$, et écrivant k sous la forme $k=p^ha+b$, avec $0\leqslant b\leqslant p^h-1$, la minoration
$$\begin{aligned} v_p([\frac{k}{p^h}]!)-u\frac{\log(1+k)}{\log p} &= v_p(a!)-u\frac{\log(p^ha+b+1)}{\log p}\\ &\geqslant \frac{a}{p-1}-\frac{\log(a+1)}{\log p}-uh-u\frac{\log(a+1)}{\log p}, \end{aligned}$$
ce qui montre que l'on peut prendre pour $C(u)$ le minimum de $\frac{a}{p-1}-(1+u)\frac{\log(a+1)}{\log p}$ pour $a\geqslant 0$.

2.1.3. La fonction logarithme. — Si $\mathscr{L}\in L$, on note $\log_{\mathscr{L}}:\mathbf{C}_p^*\to\mathbf{C}_p$ l'unique fonction localement analytique dont la dérivée est x^{-1} et qui vérifie les équations fonctionnelles
$$\log_{\mathscr{L}}(xy)=\log_{\mathscr{L}}x+\log_{\mathscr{L}}y \text{ quels que soient } x,y\in\mathbf{C}_p^* \quad\text{et}\quad \log_{\mathscr{L}}p=\mathscr{L}.$$

Lemme 2.5. — *Si $j\in\mathbf{N}$, la fonction $\mathbf{1}_{p^{h-1}\mathbf{Z}_p^*}\cdot x^j\log_{\mathscr{L}}x$ est localement analytique modulo $p^h\mathbf{Z}_p$ et on a*
$$v_{\mathrm{LA}_h}(\mathbf{1}_{p^{h-1}\mathbf{Z}_p^*}\cdot x^j\log_{\mathscr{L}}x)\geqslant j(h-1)+\inf(0,v_p(\mathscr{L})).$$

Démonstration. — Si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, la restriction de cette fonction à $p^{h-1}a+p^h\mathbf{Z}_p$ est égale à
$$p^{j(h-1)}\Big(a+p(\frac{x-p^{h-1}a}{p^h})\Big)^j\Big(\log_{\mathscr{L}}p^{h-1}a+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\cdot\frac{p^i}{a^i}(\frac{x-p^{h-1}a}{p^h})^i\Big),$$
ce qui permet de conclure compte tenu du fait que $\frac{(-1)^{i-1}p^i}{i\,a^i}\in\mathbf{Z}_p$ et tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$.

Corollaire 2.6. — *Si $u\geqslant 0$ et j est un entier $>u$, alors*

(i) $x^j\log_{\mathscr{L}}x$ est de classe $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Z}_p$;

(ii) si $\alpha\in L$, $v_p(\alpha)=u$, la suite de fonctions $\alpha^n\mathbf{1}_{p^n\mathbf{Z}_p}\cdot(p^{-n}x)^j\log_{\mathscr{L}}x$, $n\in\mathbf{N}$, est bornée dans $\mathscr{C}^u(\mathbf{Z}_p)$.

Démonstration. — Il suffit d'écrire $\mathbf{1}_{p^n\mathbf{Z}_p}\cdot x^j\log_{\mathscr{L}}x$ sous la forme $\sum_{h\geqslant n+1}\mathbf{1}_{p^{h-1}\mathbf{Z}_p^*}\cdot x^j\log_{\mathscr{L}}x$ et d'utiliser les minorations du lemme 2.5 et de la proposition 2.4 pour conclure.

2.2. Distributions sur $\mathbf{Z}_p$

2.2.1. Transformée d'Amice. — Une distribution sur $\mathbf{Z}_p$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$. On note $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des distributions sur $\mathbf{Z}_p$. Comme $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ est la limite inductive des $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$ qui sont des Banach, $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ est la limite projective des duaux des $\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$; c'est donc un espace de Fréchet.

Si $\mu\in\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ et $\phi\in\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, on note indifféremment
$$\int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\mu=\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\,\mu=\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\,\mu(x)$$

la valeur de la forme linéaire μ sur ϕ.

A une distribution μ, on associe sa *transformée d'Amice* $\mathscr{A}_\mu(T)$ qui est une série formelle définie par

$$\mathscr{A}_\mu(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_X \binom{x}{n} \mu \Big) \cdot T^n = \int_X (1+T)^x \, \mu.$$

Proposition 2.7. — *L'application $\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu(T)$ induit un isomorphisme d'espaces de Fréchet de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ sur $\mathscr{R}^+$.*

Démonstration. — C'est une traduction de la proposition 2.3.

2.2.2. Exemples de distributions

• Masses de Dirac. Si $a \in \mathbf{Z}_p$, on note δ_a la masse de Dirac en a ; elle est définie par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \, \delta_a = \phi(a) \quad \text{et donc} \quad \mathscr{A}_{\delta_a}(T) = (1+T)^a.$$

• Dérivée $\mathrm{d}\mu$ d'une distribution μ ; elle est définie par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi'(x) \, \mu \quad \text{et donc} \quad \mathscr{A}_{\mathrm{d}\mu}(T) = \log(1+T) \cdot \mathscr{A}_\mu(T).$$

• Convolée $\lambda * \mu$ de deux distributions λ et μ ; elle est définie par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi \ \lambda * \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x+y) \ \lambda(x) \Big) \mu(y) \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\lambda * \mu} = \mathscr{A}_\lambda \mathscr{A}_\mu.$$

• Action de $\mathbf{Z}_p^*$. On fait agir $a \in \mathbf{Z}_p^*$ sur une distribution μ par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \, \mu \star a = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(ax) \, \mu \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\mu \star a} = \gamma_a(\mathscr{A}_\mu), \text{ si } \gamma_a \in \Gamma \text{ est tel que } \chi_{\mathrm{cycl}}(\gamma_a) = a.$$

• Multiplication par une fonction localement analytique. Si $f \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, la distribution $f\mu$ est la forme linéaire $\phi \mapsto \int_{\mathbf{Z}_p} f\phi \, \mu$.

• Multiplication par x. Elle se traduit au niveau des transformées d'Amice, par la formule

$$\mathscr{A}_{x\mu} = \partial \mathscr{A}_\mu, \quad \text{avec } \partial = (1+T)\frac{d}{dT}.$$

• Division par x. Le résultat n'est bien défini qu'à addition d'un multiple de la masse de Dirac en 0. La transformée d'Amice de $x^{-1}\mu$ est alors une primitive de $(1+T)^{-1}\mathscr{A}_\mu(T)$, le choix de la constante d'intégration correspondant à l'indétermination mentionnée ci-dessus.

• Restriction à un ouvert compact : c'est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ouvert compact. Si $n \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathbf{Z}_p$, la fonction caractéristique de $D(b,n)$ est $x \mapsto p^{-n} \sum_{\eta^{p^n}=1} \eta^{-b}\eta^x$. Cela se traduit, au niveau des transformées d'Amice, par la formule

$$\mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{D(b,n)}(\mu)}(T) = p^{-n} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b} \mathscr{A}_\mu((1+T)\eta - 1).$$

• Si $k \geqslant 1$ et $F \in \mathscr{R}^+$, notons $\partial^{-k}F$ une solution G de l'équation différentielle $\partial^k G = F$, ce qui fait que $\partial^{-k}F$ n'est bien déterminé qu'à addition près d'un polynôme de degré $\leqslant k-1$ en $\log(1+T)$.

Proposition 2.8. — *Soient $n \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{Z}_p$ et $k \in \mathbf{Z}$. On a alors*

$$\int_{D(b,n)} x^k \, \mu = p^{-n} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b} \partial^k \mathscr{A}_\mu(\eta - 1),$$

si $k \geqslant 0$ ou si $k \leqslant -1$ et $b \notin p^n \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des discussions précédentes. Si $k \leqslant -1$, l'indépendance du membre de droite par rapport au choix de $\partial^k \mathscr{A}_\mu$ suit de ce que $\log \eta = 0$ si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}$ et de ce que $\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{-b} = 0$ si $b \notin p^n \mathbf{Z}_p$.

• L'opérateur ψ. Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$, on note $\psi(\mu)$ la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \, \psi(\mu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-1}x) \, \mu \quad \text{et on a} \quad \mathscr{A}_{\psi(\mu)} = \psi(\mathscr{A}_\mu).$$

2.2.3. Distributions tempérées. — Si $u \geqslant 0$, une distribution est dite d'ordre u s'il existe $C \in \mathbf{R}$ telle que, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{N}$, on ait

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} (x-a)^j \, \mu \Big) \geqslant C + n(j-u).$$

On note $\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$ l'espace des distributions d'ordre u. Muni de la valuation $v_{\mathscr{D}_u}$ définie par

$$v_{\mathscr{D}_u}(\mu) = \inf_{a \in \mathbf{Z}_p,\, n,j \in \mathbf{N}} v_p\Big(\int_{D(a,n)} (x-a)^j \, \mu \Big) - n(j-u) = \inf_{h \in \mathbf{N}} \inf_{f \in \mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)} v_p\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} f \, \mu \Big) - v_{\mathrm{LA}_h}(f) + uh,$$

$\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$ est un espace de Banach qui s'identifie naturellement au dual de $\mathscr{C}^u(\mathbf{Z}_p)$. Autrement dit, on peut étendre une distribution d'ordre u en une forme linéaire continue sur $\mathscr{C}^u(\mathbf{Z}_p)$. En termes de transformées d'Amice, cela se traduit de la manière suivante.

Proposition 2.9. — *L'application $\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu$ induit un isomorphisme d'espaces de Banach* (mais pas forcément une isométrie) *de $\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$ muni de la valuation $v_{\mathscr{D}_u}$ sur $\mathscr{R}_u^+$ muni de la valuation v_u.*

Finalement, le résultat suivant est très utile pour construire des distributions d'ordre u.

Proposition 2.10. — *Si h est un entier $> u-1$, et si μ est une forme linéaire à valeurs dans L sur les fonctions localement polynomiales de degré $\leqslant h$ telle qu'il existe une constante C telle que, quels que soient $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$, on ait*

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} (x-a)^h \, \mu \Big) \geqslant C + n(h-u),$$

alors μ s'étend de manière unique en une distribution d'ordre u sur $\mathbf{Z}_p$ et il existe $C(h,u)$ tel que l'on ait

$$v_{\mathscr{D}_u}(\mu) - C(h,u) \leqslant \inf_{a \in \mathbf{Z}_p,\, n \in \mathbf{N}} v_p\Big(\int_{D(a,n)} (x-a)^h \, \mu \Big) - n(h-u) \leqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu) + C(h,u).$$

2.3. Distributions sur $\mathbf{Q}_p$

2.3.1. Distributions sur $\mathbf{Q}_p$ et familles de distributions sur $\mathbf{Z}_p$. — Une distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$ est un élément du dual $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$ de l'espace $\mathrm{LA}_c(\mathbf{Q}_p)$ des fonctions localement analytiques à support compact dans $\mathbf{Q}_p$. Si μ est une telle distribution, et si $n \in \mathbf{N}$, on note $\mu^{(n)}$ l'élément de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p)$ défini par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, \mu^{(n)} = \int_{D(0,-n)} \phi(p^n x)\mu,$$

si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$. Il n'est pas difficile de vérifier que l'on a $\psi(\mu^{(n+1)}) = \mu^{(n)}$ si $n \in \mathbf{N}$. Réciproquement, si $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille de distributions sur $\mathbf{Z}_p$ vérifiant $\psi(\mu_{n+1}) = \mu_n$ si $n \in \mathbf{N}$, alors il existe une unique distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$ telle que l'on ait $\mu^{(n)} = \mu_n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$: si $\phi \in \mathrm{LA}_c(\mathbf{Q}_p)$ est à support dans $D(0,-n)$, alors $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x)\,\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-n}x)\mu_n$, la relation $\psi(\mu_{n+1}) = \mu_n$ permettant de montrer que $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(p^{-n}x)\mu_n$ ne dépend pas du choix de n tel que ϕ soit à support dans $D(0,-n)$. On note $\mathscr{A}_\mu^{(n)}$ la transformée d'Amice de $\mu^{(n)}$, et on définit la transformée d'Amice $\mathscr{A}_\mu$ de μ par la formule $\mathscr{A}_\mu = (\mathscr{A}_\mu^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$.

Proposition 2.11. — *L'application $\mu \mapsto \mathscr{A}_\mu$ qui, à une distribution sur $\mathbf{Q}_p$ associe sa transformée d'Amice induit une bijection de $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$ sur l'ensemble des suites $F = (F^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}^+$ vérifiant $\psi(F^{(n+1)}) = F^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est une simple traduction du résultat correspondant sur $\mathbf{Z}_p$.

On munit $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$ d'une action de $P(\mathbf{Q}_p) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{pmatrix},\ a \in \mathbf{Q}_p^*, b \in \mathbf{Q}_p\}$ en posant

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x)\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{pmatrix} \star \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(ax+b)\,\mu.$$

Si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $p^n a \in \mathbf{Z}_p$ et $p^n b \in \mathbf{Z}_p$, et si ϕ est une fonction à support dans $\mathbf{Z}_p$, on a

$$\int_{D(0,-n)} \phi(p^n x)\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{pmatrix} \star \mu = \int_{D(0,-n-v_p(a))} \phi(p^n ax + p^n b)\mu,$$

ce qui, appliqué à $\phi(x) = (1+T)^x$, nous donne

$$\mathscr{A}^{(n)}_{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\star\mu}(T) = (1+T)^{p^n b}\mathscr{A}_\mu^{(n+v_p(a))}((1+T)^{p^{-v_p(a)}a} - 1),\ \text{si } n \geqslant \sup(-v_p(a), -v_p(b)).$$

On remarquera que, si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$, et si $n \in \mathbf{Z}$, alors $\mu^{(n)}$ est aussi donné par la formule

$$\mu^{(n)} = \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \star (\mathrm{Res}_{D(0,-n)}\mu) = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \star \mu).$$

Proposition 2.12. — *Si μ est une distribution sur $\mathbf{Q}_p$, si $b \in \mathbf{Q}_p$ et si $m \in \mathbf{Z}$, alors quel que soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $bp^n \in \mathbf{Z}_p$ et $n+m \in \mathbf{N}$, on a*

$$p^m \int_{D(-b,m)} (x+b)^j\,\mu = p^{-(j+1)n} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+m}}} \partial^j((1+T)^{bp^n}\mathscr{A}_\mu^{(n)}(T))_{|T=\eta-1}.$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}p^m\int_{D(-b,m)}(x+b)^j\,\mu =&p^{-(j+1)n}p^{n+m}\int_{D(-bp^n,m+n)}(x+p^nb)^j\,\mu^{(n)}\\ =&p^{-(j+1)n}p^{n+m}\int_{D(0,m+n)}x^j\,\mu^{(n)}*\delta_{bp^n}\\ =&p^{-(j+1)n}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+m}}}\partial^j((1+T)^{bp^n}\mathscr{A}_\mu^{(n)}(T))_{|T=\eta-1}.\end{aligned}$$

2.3.2. Distributions tempérées sur $\mathbf{Q}_p$. — Une distribution μ sur $\mathbf{Q}_p$ est *d'ordre* u si $\mu^{(n)}$ est d'ordre u quel que soit $n\in\mathbf{N}$; elle est *globalement d'ordre* u si elle est d'ordre u et s'il existe $C_u(\mu)\in\mathbf{R}$ telle que, quel que soit $n\in\mathbf{N}$, on ait $v_{\mathscr{D}_u}(\mu^{(n)})\geqslant nu+C_u(\mu)$. On note $\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$ l'espace des distributions globalement d'ordre u sur $\mathbf{Q}_p$ que l'on munit de la valuation $v_{\mathscr{D}_u}(\mu)$ définie par

$$v_{\mathscr{D}_u}(\mu)=\inf_{n\in\mathbf{N}}v_{\mathscr{D}_u}(\mu^{(n)})-nu,$$

ce qui en fait un espace de Banach. On a aussi

$$v_{\mathscr{D}_u}(\mu)=\inf_{a\in\mathbf{Q}_p,\,n\in\mathbf{Z},\,0\leqslant i\leqslant N}\Big(v_p\Big(\int_{D(a,n)}(x-a)^i\,\mu\Big)-(i-u)n\Big)\quad\text{quel que soit l'entier } N>u-1.$$

On en déduit la formule

$$v_{\mathscr{D}_u}(\begin{pmatrix}p^m&0\\0&1\end{pmatrix}\star\mu)=v_{\mathscr{D}_u}(\mu)+mu\quad\text{quel que soit } m\in\mathbf{Z}.$$

Lemme 2.13. — *Si μ est une distribution globalement d'ordre u sur $\mathbf{Q}_p$, si $n\in\mathbf{Z}$, si $i\in\mathbf{Z}$ et si $a,b\in L$, alors*

$$\begin{aligned}&v_p\Big(\int_{D(\infty,n)-D(\infty,n+1)}x^i\,\mu\Big)\geqslant(u-i)n+v_{\mathscr{D}_u}(\mu)-u,\\ &v_p\Big(\int_{D(\infty,n)-D(\infty,n+1)}x^i\log_{\mathscr{L}}(x)\,\mu\Big)\geqslant(u-i)n+v_{\mathscr{D}_u}(\mu)-u+\inf(0,v_p(\mathscr{L})).\end{aligned}$$

Démonstration. — On a $D(\infty,n)-D(\infty,n+1)=p^{-n}\mathbf{Z}_p^*$ et donc

$$\begin{aligned}\int_{D(\infty,n)-D(\infty,n+1)}x^i(a\log_{\mathscr{L}}(x)+b)\,\mu=&\int_{\mathbf{Z}_p^*}(p^{-n}x)^i(a\log_{\mathscr{L}}(p^{-n}x)+b)\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}\star\mu\\ =&p^{-in}\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i(a\log_{\mathscr{L}}x+(b-an\mathscr{L}))\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}\star\mu.\end{aligned}$$

On en déduit les minorations

$$\begin{aligned}&v_p\Big(\int_{D(\infty,n)-D(\infty,n+1)}x^i\,\mu\Big)\geqslant-in+v_{\mathscr{D}_u}(\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}\star\mu)+v_{\mathrm{LA}_1}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}\cdot x^i)-u\\ &v_p\Big(\int_{D(\infty,n)-D(\infty,n+1)}x^i\log_{\mathscr{L}}(x)\,\mu\Big)\geqslant-in+v_{\mathscr{D}_u}(\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}\star\mu)+v_{\mathrm{LA}_1}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}\cdot x^i(\log_{\mathscr{L}}x-n\mathscr{L}))-u,\end{aligned}$$

et le résultat suit de ce que $v_{\mathscr{D}_u}(\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}\star\mu)=v_{\mathscr{D}_u}(\mu)+nu$ et

$$v_{\mathrm{LA}_1}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}\cdot x^i)\geqslant0\quad\text{et}\quad v_{\mathrm{LA}_1}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}\cdot x^i\log_{\mathscr{L}}x)\geqslant\inf(0,v_p(\mathscr{L})).$$

2.3.3. Extensions à $\mathbf{Q}_p$ de vecteurs propres de l'opérateur ψ. —

Proposition 2.14. — *Soit $\alpha \in L^*$ avec $v_p(\alpha) \geqslant 0$. Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p$ vérifiant l'équation fonctionnelle $\psi(\mu) = \alpha^{-1}\mu$, alors il existe une unique distribution $\widetilde{\mu}$ sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p$ est μ et qui vérifie l'équation fonctionnelle $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} = \alpha\widetilde{\mu}$. De plus, si μ est d'ordre $v_p(\alpha)$, alors $\widetilde{\mu}$ est globalement d'ordre $v_p(\alpha)$.*

Démonstration. — Commençons par constater que, si $\widetilde{\mu}$ est une distribution sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $D(0,1) \subset \mathbf{Z}_p$ est nulle et qui vérifie $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} = \alpha\widetilde{\mu}$, alors

$$\mathrm{Res}_{D(0,-n)}\widetilde{\mu} = \left(\begin{smallmatrix} p^{-n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mathrm{Res}_{D(0,1)}(\left(\begin{smallmatrix} p^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu})) = \alpha^{n+1}\left(\begin{smallmatrix} p^{-n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mathrm{Res}_{D(0,1)}\widetilde{\mu} = 0,$$

ce qui implique que $\widetilde{\mu}$ est identiquement nulle. On en déduit l'unicité d'une distribution $\widetilde{\mu}$ vérifiant les conditions de la proposition. Passons à son existence.

Si $n \in \mathbf{N}$, soit $\mu_n = \alpha^n\mu$. Comme $\psi(\mu_{n+1}) = \mu_n$, il existe une unique distribution $\widetilde{\mu}$ sur $\mathbf{Q}_p$ telle que l'on ait $\widetilde{\mu}^{(n)} = \mu_n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Par construction, la restriction de $\widetilde{\mu}$ à $\mathbf{Z}_p$ est $\mu_0 = \mu$, et on a, quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{D(0,-n)}(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} - \alpha\widetilde{\mu}) &= \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\left(\begin{smallmatrix} p^{n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} - \alpha\widetilde{\mu})) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\widetilde{\mu}^{(n+1)} - \alpha\widetilde{\mu}^{(n)}) = \left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star (\alpha^{n+1}\mu - \alpha^{n+1}\mu) = 0.\end{aligned}$$

Ceci prouve que $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \widetilde{\mu} - \alpha\widetilde{\mu}$ est identiquement nulle et donc que $\widetilde{\mu}$ vérifie les conditions demandées.

Finalement, si $u = v_p(\alpha)$ et si μ est d'ordre u, alors $v_{\mathscr{D}_u}(\widetilde{\mu}^{(n)}) - nu = v_{\mathscr{D}_u}(\alpha^n\mu) - nu = v_{\mathscr{D}_u}(\mu)$, ce qui prouve que $\widetilde{\mu}$ est globalement d'ordre u sur $\mathbf{Q}_p$.

2.4. Distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$

Une fonction ϕ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ est *méromorphe* à l'infini s'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que la restriction de ϕ à $D(\infty, n)$ soit de la forme $\phi(x) = P(x) + \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i$, où P est un polyôme et $\sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i$ converge sur $D(\infty, n)$. On dit que ϕ *a un pôle d'ordre* $\leqslant k$ si P est de degré $\leqslant k$. Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ l'espace des fonctions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ qui sont localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p$ et sont méromorphes avec un pôle d'ordre $\leqslant k$ à l'infini.

On note $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ le dual de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$. Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$, on note μ_1 la restriction de μ à $\mathbf{Z}_p$ et μ_2 la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mu_2 = \int_{D(\infty,0)} x^k\phi(1/x)\ \mu.$$

On note aussi ι_k l'involution de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)\,\iota_k(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^k\phi(1/x)\ \mu.$$

On a alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_2) = \iota_k(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_1))$, et réciproquement, si on part de deux distributions μ_1, μ_2 sur $\mathbf{Z}_p$ dont les restrictions à $\mathbf{Z}_p^*$ vérifient la condition ci-dessus, alors on peut recoller μ_1 et μ_2 en un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$. Par contre, il n'est en général pas possible d'étendre une distribution sur $\mathbf{Q}_p$ en un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$; il y a une condition de croissance à l'infini.

2.4.1. Distributions tempérées sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$. — On dit que $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ est d'ordre $\leqslant u$ si les distributions μ_1 et μ_2 ci-dessus appartiennent à $\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$. On note $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ l'ensemble des éléments d'ordre$\leqslant u$ de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$, et on munit $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ de la valuation $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}$ définie par

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu) = \inf(v_{\mathscr{D}_u}(\mu_1), v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2))$$

qui en fait un espace de Banach. On peut aussi voir $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ comme le dual de $\mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^u$ avec un pôle d'ordre au plus k en l'infini, i.e. des fonctions ϕ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p$ est de classe $\mathscr{C}^u$ et telles que la restriction à $\mathbf{Z}_p - \{0\}$ de $x \mapsto x^k\phi(1/x)$ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Z}_p$.

Proposition 2.15. — *Si μ est une distribution globalement d'ordre u sur $\mathbf{Q}_p$, l'intégrale*

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi\,\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{D(0,-n)} \phi\,\mu$$

converge si ϕ est une fonction méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ avec un pôle d'ordre $< u$. De plus, si $i < u$ est un entier, alors $\int_{\mathbf{Q}_p} x^i\,\mu = 0$.

Démonstration. — Pour montrer que l'intégrale converge, il s'agit de vérifier que si $\sum_{i<u} a_i x^i$ converge sur $D(\infty, n_0)$ et donc si $v_p(a_i) - in_0$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers $-\infty$, alors la série double $\sum_{n\geqslant n_0}\sum_{i<u}\int_{D(\infty,n)-D(\infty,n+1)} a_i x^i\,\mu$ converge, ce qui est une conséquence immédiate de la minoration du lemme 2.13. Maintenant, si $i \in \mathbf{N}$, on a $v_p(\int_{D(0,-n)} x^i\mu) \geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu) + (i-u)(-n)$ qui tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$ si $i < u$; on en déduit la nullité de $\int_{D(0,-n)} x^i\mu$, ce qui conclut la démonstration de la proposition.

Proposition 2.16. — *Si $u \geqslant 0$, si μ est une distribution globalement d'ordre u sur $\mathbf{Q}_p$ et si $k \in \mathbf{N}$, alors μ a un unique prolongement $\mu_{(k)} \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ tel que l'on ait*

(a) $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi\,\mu_{(k)} = \lim_{n\to+\infty}\int_{D(0,-n)} \phi(x)\,\mu$ si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ a un pôle d'ordre $< u$ à l'infini ;

(b) $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} x^i\,\mu_{(k)} = 0$ si $0 \leqslant i \leqslant k$.

De plus, $\mu_{(k)}$ est d'ordre $\leqslant u' = \sup(u, k-u)$ et on a $v_{\mathscr{D}_{u'}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu_{(k)}) \geqslant v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - u$.

Démonstration. — L'existence et l'unicité de $\mu_{(k)}$ sont des conséquences directes de la prop. 2.15. Pour calculer l'ordre de $\mu_{(k)}$, il s'agit de calculer celui de la distribution μ' sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\mu' = \int_{D(\infty,0)} x^k\phi(1/x)\mu_{(k)},$$

et pour ce faire, il s'agit de minorer $v_p(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu')$, pour $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}$. Il y a deux cas.

- $n > v_p(a)$. Dans ce cas, on a

$$\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i\mu' = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi_{a,n,i}\,\mu, \quad \text{avec } \phi_{a,n,i}(x) = \mathbf{1}_{D(a^{-1},n-2v_p(a))}(x)\cdot x^{k-i}(\frac{1-ax}{p^n})^i.$$

On a $\phi_{a,n,i} \in \mathrm{LA}_{n-2v_p(a)}(\mathbf{Q}_p)$, et écrivant x^{k-i} et $(\frac{1-ax}{p^n})^i$ sous la forme

$$x^{k-i} = a^{i-k}\Big(1 + (p^{n-2v_p(a)}a)\frac{x-a^{-1}}{p^{n-2v_p(a)}}\Big)^{k-i} \quad \text{et} \quad (\frac{1-ax}{p^n})^i = a^i p^{-2iv_p(a)}(\frac{x-a^{-1}}{p^{n-2v_p(a)}})^i,$$

on obtient la minoration

$$v_{\mathrm{LA}_{n-2v_p(a)}}(\phi_{a,n,i}) \geqslant (i-k)v_p(a) + iv_p(a) - 2iv_p(a) = -kv_p(a).$$

On en déduit la minoration

$$\begin{aligned} v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu'\Big) \geqslant & v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) + v_{\mathrm{LA}_{n-2v_p(a)}}(\phi_{a,n,i}) - u(n-2v_p(a)) \\ \geqslant & v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - un + (2u-k)v_p(a) \\ \geqslant & v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - \sup(u,k-u)n. \end{aligned}$$

- $n \leqslant v_p(a)$. On a alors $D(a,n) = D(0,n)$ et donc

$$\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu' = \int_{D(\infty,n)} x^{k-i}(\frac{1-ax}{p^n})^i\,\mu_{(k)} = \sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(\frac{-a}{p^n})^j\int_{D(\infty,n)} x^{k-j}\,\mu_{(k)}.$$

On en déduit la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu'\Big) \geqslant \inf_{0\leqslant j\leqslant i} v_p\Big(\int_{D(\infty,n)} x^{k-j}\,\mu_{(k)}\Big).$$

Par ailleurs, on déduit du lemme 2.13, si $i<0$ et $n\geqslant 0$, la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(\infty,n)} x^i\,\mu_{(k)}\Big) \geqslant (u-i)n + v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - u \geqslant (u-k)n + v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - u.$$

Finalement, si $0\leqslant i\leqslant k$, on a $\int_{D(\infty,n)} x^i\,\mu_{(k)} = -\int_{D(0,1-n)} x^i\,\mu$ et donc

$$v_p\Big(\int_{D(\infty,n)} x^i\,\mu_{(k)}\Big) \geqslant (1-n)(i-u) + v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) \geqslant (u-k)n + v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - u.$$

Ce qui précède permet de montrer que μ' est d'ordre $\leqslant u' = \sup(u,k-u)$ et $v_{\mathscr{D}_{u'}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu') \geqslant v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - u$, ce qui permet de conclure.

2.5. L'espace $B(k)$ et son dual

2.5.1. Définition. — Soit k un entier >2. Soit $B(k)$ le quotient de l'espace de $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$ par l'espace des polynômes de degré $\leqslant k-2$. Le dual $B(k)^*$ de $B(k)$ est donc l'ensemble des $\mu\in\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$ vérifiant $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} x^i = 0$ si $0\leqslant i\leqslant k-2$.

Proposition 2.17. — *Si $\mu\in B(k)^*$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)\in\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ et l'application $\mu\mapsto\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ induit un isomorphisme d'espaces de Banach de $B(k)^*$ sur $\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$.*

Démonstration. — Comme d'habitude, si $\mu\in\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$, on note μ_1 la restriction de μ à $\mathbf{Z}_p$ et μ_2 la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\mu_2 = \int_{D(\infty,0)} x^{k-2}\phi(1/x)$, ce qui fait de μ_1 et μ_2 des éléments de $\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Z}_p)$. Les calculs à faire pour démontrer que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ est globalement d'ordre $\frac{k-2}{2}$ sur $\mathbf{Q}_p$ sont identiques à ceux effectués pour démontrer la proposition 2.16. Ces calculs nous fournissent, si $0\leqslant i\leqslant k-2$, $a\in\mathbf{Q}_p$ et $n\in\mathbf{N}$, les minorations

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\,\mu\Big) \geqslant \begin{cases} v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mu_1) - n\frac{k-2}{2} & \text{si } a\in\mathbf{Z}_p \text{ et } n\geqslant 0,\\ v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mu_2) - n\frac{k-2}{2} & \text{si } a\notin\mathbf{Z}_p \text{ et } n> v_p(a),\\ v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mu_2) - n\frac{k-2}{2} - \frac{k-2}{2} & \text{si } n<0 \text{ et } n\leqslant v_p(a).\end{cases}$$

On en déduit le fait que $\mu \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ est une application linéaire de $B(k)^*$ dans $\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$. D'après la proposition 2.16, cette application linéaire est bijective et son inverse est continue, ce qui permet de conclure.

2.5.2. Action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — On fait agir $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$ par la formule

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi(x)\, g \star_k \mu = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} (cx+d)^{k-2} \phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)\ \mu.$$

Comme $x \mapsto (cx+d)^{k-2}\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)$ appartient à $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$ si $\phi \in \mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$, cela implique que cette action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ laisse stables $\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$ et $B(k)^*$.

Proposition 2.18. — *Il existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tous $\mu \in B(k)^*$ et $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ on ait*

$$v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(g \star_k \mu) \geqslant v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu) - C + \frac{k-2}{2} v_p(\det g).$$

Démonstration. — Il est clair sur la définition de $v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}$ que $v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \star_k \mu\big) = v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu)$ si $\mu \in \mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$. Par ailleurs, un calcul immédiat montre que l'on a

$$v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)}\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \star_k \mu\big) = v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)}(\mu) + \frac{k-2}{2} v_p(ad),$$

si $\mu \in \mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$. Ceci permet de conclure car, d'une part, $\mu \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ est un isomorphisme d'espaces de Banach (prop 2.17) de $B(k)^*$ sur $\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ et, d'autre part, tout élément de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ s'écrit comme un produit d'au plus trois éléments de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Corollaire 2.19. — *Si $\mu \in B(k)^*$, alors*

$$v_{B(k)^*}(\mu) = \inf_{g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(g \star_k \mu) - \frac{k-2}{2} v_p(\det g)$$

est fini. De plus, $v_{B(k)^*}$ est une valuation sur $B(k)^*$, équivalente à la valuation $v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}$ et, si $\mu \in B(k)^*$ et $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, on a

$$v_{B(k)^*}(g \star_k \mu) = v_{B(k)^*}(\mu) + \frac{k-2}{2} v_p(\det g).$$

Il est, en général, assez difficile de décrire la transformée d'Amice de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(g \star_k \mu)$, mais cela ne pose pas de problème si g est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ car l'action $\star_k$ coïncide avec celle introduite au § 2.3.

3. Une description de l'espace $B(k, \mathscr{L})^*$

Ce chapitre est consacré à la démonstration de l'équivalence des points (i), (ii), (iii) et (iv) de la prop. 0.4 de l'introduction (c'est une combinaison des prop. 3.4, 3.12, 3.19, 3.20, et du cor. 3.21). Le point crucial est le calcul de la prop. 3.19 qui repose sur la formule de Leopoldt (prop. 3.13).

3.1. Préliminaires

Une fonction ϕ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ est $\log_{\mathscr{L}}$-*méromorphe* à l'infini s'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que la restriction de ϕ à $D(\infty, n)$ soit de la forme $\phi(x) = \phi_0(x) + Q(x)\log_{\mathscr{L}} x$, où ϕ_0 est méromorphe à l'infini et Q est un polynôme. On dit que ϕ *a un pôle d'ordre* $\leqslant k$ si ϕ_0 a un pôle d'ordre $\leqslant k$ et Q est de degré $\leqslant k$. Si $k \in \mathbf{N}$, on note $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k, \mathscr{L}))$ l'espace des fonctions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ qui sont localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p$ et sont $\log_{\mathscr{L}}$-méromorphes avec un pôle d'ordre $\leqslant k$ à l'infini.

Proposition 3.1. — *Soit $u \geqslant 0$. Si $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$, l'intégrale*

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi\, \mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{D(0,-n)} \phi\, \mu$$

converge si ϕ est une fonction $\log_{\mathscr{L}}$-méromorphe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ avec un pôle d'ordre $< u$.

Démonstration. — Compte-tenu de la prop. 2.15, il suffit de prouver que, si $i < u$, alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} \int_{D(\infty,n) - D(\infty,n+1)} x^i \log_{\mathscr{L}}(x)\, \mu$ converge, ce qui est une conséquence immédiate de la minoration du lemme 2.13.

Remarque 3.2. — Si i est un entier $< u$, et si $\phi(x) = x^i \log_{\mathscr{L}} x$, alors, d'après le cor. 2.6, la restriction à $\mathbf{Z}_p$ de $\phi'(x) = x^k \phi(1/x) = -x^{k-i} \log_{\mathscr{L}} x$ est de classe $\mathscr{C}^{k-u}$. En particulier, si $k \geqslant 2u$, alors $\phi \in \mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ et, si $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$, alors $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi \mu_{(k)}$ est bien défini. Par ailleurs, toujours d'après le cor. 2.6, la fonction $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} \cdot \phi'$ est somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (\mathbf{1}_{D(0,n)} - \mathbf{1}_{D(0,n+1)}) \cdot \phi'(x)$ dans $\mathscr{C}^{k-u}(\mathbf{Z}_p)$, ce qui permet de montrer que l'on a

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi \mu_{(k)} = \lim_{n \to +\infty} \int_{D(0,-n)} \phi \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi \mu.$$

En d'autre termes, les deux définition naturelles pour $\int \phi\mu$ coïncident si $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$, si $k \geqslant 2u$, et si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))(k, \mathscr{L})$ a un pôle d'ordre $< u$.

3.2. Une première caractérisation de $B(k, \mathscr{L})^*$

Lemme 3.3. — *Les fonctions $\mathbf{1}_{D(\infty,0)} \cdot x^j \log_{\mathscr{L}} x$, pour $0 \leqslant j < \frac{k-2}{2}$ et $\mathbf{1}_{D(\infty,0)} \cdot (x - pa)^{k-2} \log_{\mathscr{L}}(x - pa)$, $a \in \{0, 1, \ldots, k-1+[-\frac{k}{2}]\}$, forment une base d'un supplémentaire de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2))$ dans $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2, \mathscr{L}))$.*

Démonstration. — Exercice.

Soit $\mu \in B(k)^*$. La fonction $\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p} \cdot (x-a)^{k-2} \log_{\mathscr{L}}(x-a)$ est de classe $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}$ quel que soit $a \in \mathbf{Z}_p$. On note $\mu_{\mathscr{L}}$ l'extension de μ à $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2, \mathscr{L}))$ définie par

$$\int_{D(\infty,0)} x^j \log_{\mathscr{L}} x\ \mu_{\mathscr{L}} = \lim_{n \to +\infty} \int_{D(0,-n)-D(0,1)} x^j \log_{\mathscr{L}} x\ \mu, \quad \text{si } 0 \leqslant j < \frac{k-2}{2},$$

$$\int_{D(0,\infty)} (x-pa)^{k-2} \log_{\mathscr{L}}(x-pa)\ \mu_{\mathscr{L}} = -\int_{D(0,1)} (x-pa)^{k-2} \log_{\mathscr{L}}(x-pa)\ \mu \quad \text{si } a \in \{0, 1, \ldots, k-1+[-\frac{k}{2}]\}.$$

L'existence et l'unicité[6] d'une telle extension est assurée par le lemme 3.3.

[6]Cette unicité est un peu illusoire puisque $\mu_{(k,\mathscr{L})}$ dépend de la base d'un supplémentaire de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$ dans $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k, \mathscr{L}))$ que l'on a choisie ; en particulier, $\mu_{(k,\mathscr{L})}$ n'a rien de naturel sauf si $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \ell_{U,\mathscr{L}} \mu_{(k)} = 0$ quel que soit $U \in \mathscr{U}(k)$. Comme c'est justement le cas qui nous intéresse, cela n'est pas très grave.

Proposition 3.4. — *Si $\mu \in B(k)^*$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{U,\mathscr{L}}\mu = 0$ quel que soit $U \in \mathscr{U}(k)^0 = \{U \in \mathscr{U}(k),\ P_U = 0\}$.
(ii) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{U,\mathscr{L}}\mu = 0$ quel que soit $U \in \mathscr{U}(k)$. (i.e. $\mu \in B(k,\mathscr{L})^*$.)
(iii) $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} (x-a)^j \log_{\mathscr{L}}(x-a)\ \mu_{\mathscr{L}} = 0$ quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$ et $j > r$.

Démonstration. — Commençons par prouver l'implication (i)⇒(ii). On a

$$P_U(X) = \sum_{i=0}^{k-2} b_{U,i}\frac{X^i}{i!}, \quad \text{avec } b_{U,i} = \sum_{u\in U} \lambda_u \binom{j_u}{i}(-a_u)^{j_u-i}.$$

L'appartenance de U à $\mathscr{U}(k)$ se traduit par la nullité des $b_{U,i}$ pour $i \geqslant \frac{k-2}{2}$, et la linéarité de l'intégration couplée avec le fait que $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{U,\mathscr{L}}\mu = 0$ quel que soit $U \in \mathscr{U}(k)^0$, nous donne l'existence d'éléments $\beta_i(\mu)$, $i < \frac{k-2}{2}$ tels que l'on ait $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{U,\mathscr{L}}\mu = \sum_{i<\frac{k-2}{2}} \beta_i(\mu) b_{U,i}$ quel que soit $U \in \mathscr{U}(k)$. De plus, on montre en prenant un nombre fini de fonctions de la forme $\ell_{U,\mathscr{L}}$ engendrant un supplémentaire de l'espace engendré par les $\ell_{U,\mathscr{L}}$, pour $U \in \mathscr{U}(k)^0$, qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $v_p(\beta_i(\mu)) \geqslant C + v_{B(k)^*}(\mu)$ quel que soient i et μ. Par ailleurs, comme $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} P(x)\mu = 0$ si P est un polynôme de degré $\leqslant k$, on a

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \ell_{U,\mathscr{L}}(y)\mu = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \ell_{U,\mathscr{L}}(p^{-n}y)\ \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star_k \mu = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \ell_{U_n,\mathscr{L}}(y)\ \left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star_k \mu$$

où $U_n = \{(p^n a_u, j_u, p^{-nj_u}\lambda_u),\ u \in U\}$. Un petit calcul montre que $b_{U_n,i} = p^{-ni} b_{U,i}$, ce qui nous fournit la relation $\beta_i(\mu) = p^{-ni}\beta_i(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star_k \mu)$ et donc la minoration

$$v_p(\beta_i(\mu)) = -in + v_p(\beta_i(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star_k\mu)) \geqslant -in + C + v_{B(k)^*}(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star_k\mu) = (\frac{k-2}{2} - i)n + C + v_{B(k)^*}(\mu).$$

Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour faire tendre cette quantité vers $+\infty$ et démontrer la nullité de $\beta_i(\mu)$ si $i < \frac{k-2}{2}$. On en déduit l'implication (i)⇒(ii).

L'implication (ii)⇒(iii) suit de ce que l'on a imposé à $\mu_{\mathscr{L}}$ de s'annuler sur un supplémentaire de l'espace engendré par les $\ell_{U,\mathscr{L}}$, pour $U \in \mathscr{U}(k)^0$.

Finalement, l'implication (iii)⇒(i) étant une trivialité, ceci permet de conclure.

3.3. La distribution de Kubota-Leopoldt

Soit μ_{KL} la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ dont la transformée d'Amice est $T^{-1}\log_{\mathscr{L}}(1+T) + \log_{\mathscr{L}}(1+T)$; c'est une distribution d'ordre 1.

Proposition 3.5. — $\psi(\mu_{\mathrm{KL}}) = p^{-1}\mu_{\mathrm{KL}}$.

Démonstration. — Il suffit de prouver l'énoncé correspondant sur les transformées d'Amice, et celui-ci découle des identités suivantes

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}\Big(\frac{\log_{\mathscr{L}}((1+T)\eta)}{(1+T)\eta - 1} + \log_{\mathscr{L}}((1+T)\eta)\Big) &= \log_{\mathscr{L}}(1+T)\Big(\frac{1}{p}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p}\Big(\frac{1}{(1+T)\eta-1}+1\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{p}\log_{\mathscr{L}}(1+T)^p\Big(\frac{1}{(1+T)^p-1}+1\Big).\end{aligned}$$

On note encore μ_{KL} l'unique distribution (cf. prop. 2.14) sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p$ est μ_{KL} et qui vérifie l'équation fonctionnelle $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu_{\mathrm{KL}} = p\,\mu_{\mathrm{KL}}$. Elle est globalement d'ordre 1, et c'est ce que l'on peut imaginer de plus ressemblant à la mesure de Haar comme le montre le lemme suivant.

Lemme 3.6. — *Si $n \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Q}_p$, alors $\int_{D(b,n)} \mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}$.*

Démonstration. — Si $b \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\int_{D(b,n)} \mu_{\mathrm{KL}} = p^{-n}\Big(1 + \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^n}^*} \eta^{-b}\Big(\frac{\log_{\mathscr{L}} \eta}{\eta - 1} + \log_{\mathscr{L}} \eta\Big)\Big) = p^{-n}$$

puisque $\log_{\mathscr{L}} \eta = 0$ quel que soit $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}^*$. Ceci permet de conclure si $b \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$; le cas général s'en déduit via l'équation fonctionnelle $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu_{\mathrm{KL}} = p\, \mu_{\mathrm{KL}}$ qui implique que l'on a

$$\int_{p^m X} \phi(p^{-m}x)\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-m} \int_X \phi \mu_{\mathrm{KL}}$$

quels que soient X ouvert compact de $\mathbf{Q}_p$, $m \in \mathbf{Z}$ et ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur X.

On étend μ_{KL} en une forme linéaire sur $\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p) \oplus L \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(x) \log_{\mathscr{L}} x$ en posant

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \log_{\mathscr{L}} x \mu_{\mathrm{KL}} = \gamma_{p,\mathscr{L}}, \quad \text{avec } \gamma_{p,\mathscr{L}} = \gamma_p + \frac{\mathscr{L}}{p-1} \text{ et } \gamma_p = \frac{p}{p-1} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \log_{\mathscr{L}} x\, \mu_{\mathrm{KL}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} p \int_{p\mathbf{Z}_p} \log_{\mathscr{L}}(p^{-1}x)\, \mu_{\mathrm{KL}} &= -\, p \int_{p\mathbf{Z}_p} \mathscr{L}\, \mu_{\mathrm{KL}} + p \int_{\mathbf{Z}_p} \log_{\mathscr{L}} x\, \mu_{\mathrm{KL}} - p \int_{\mathbf{Z}_p^*} \log_{\mathscr{L}} x\, \mu_{\mathrm{KL}} \\ &= -\, \mathscr{L} + p\Big(\gamma_p + \frac{\mathscr{L}}{p-1}\Big) - p\frac{p-1}{p}\gamma_p = \gamma_p + \frac{\mathscr{L}}{p-1} = \int_{\mathbf{Z}_p} \log_{\mathscr{L}} x \mu_{\mathrm{KL}}. \end{aligned}$$

L'équation fonctionnelle $\int_{p^m X} \phi(p^{-m}x)\mu_{\mathrm{KL}} = p^{-m} \int_X \phi\mu_{\mathrm{KL}}$ s'étend donc à $\mathrm{LA}(\mathbf{Q}_p) \oplus L \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(x) \log_{\mathscr{L}} x$.

3.4. Convergence d'intégrales

Rappelons que, si j est un entier $\geqslant 1$, on a défini la fonction $f_{j,\mathscr{L}}$ par

$$f_{j,\mathscr{L}}(x, y) = y^j \log_{\mathscr{L}} x + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \frac{1}{i} x^i y^{j-i}.$$

Soit $J = \mathbf{Z}[\frac{1}{p}] \cap [0, 1[$; c'est un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$. Si $a \in \mathbf{Q}_p$, si $b \in J$, si $j \in \mathbf{N}$ et si μ est une distribution sur $\mathbf{Q}_p$, on note $J_{\mathscr{L}}(\mu, j, b, a)$ la valeur de l'intégrale

$$\int_{D(b+a,0)} \Big((y-a)^j \log_{\mathscr{L}}(y-a) - \int_{D(a-y,0)} f_{j,\mathscr{L}}(x, y-a)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\, \mu(y)$$

quand celle-ci est définie.

Lemme 3.7. — *Si $j \geqslant 1$ et $v_p(x+y) > v_p(y)$, alors*

$$f_{j,\mathscr{L}}(x, y) - y^j \log_{\mathscr{L}} y = -\sum_{m=1}^{+\infty} y^{-m} \frac{(x+y)^{j+m}}{j+m}.$$

Démonstration. — On a
$$\log(1-u)+\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i}\binom{j}{i}(u-1)^i=-\sum_{m=j+1}^{+\infty}\frac{u^m}{m},$$
comme on le constate aisément en dérivant les deux membres. Il suffit alors de poser $u=\frac{x+y}{y}$ et de multiplier les deux membres par y^j.

Lemme 3.8. — *Si $j\in\mathbf{N}$, il existe une constante $C_1(j)$ telle que l'on ait*
$$v_p(J_{\mathscr{L}}(\mu,j,b,a))\geqslant -v_p(b)+v_{B(k)^*}(\mu)+C_1(j),$$
quels que soient $a\in\mathbf{Q}_p$, $b\in J-\{0\}$ et $\mu\in B(k)^*$.

Démonstration. — On a $J_{\mathscr{L}}(\mu,j,b,a)=J_{\mathscr{L}}((\begin{smallmatrix}1&-a\\0&1\end{smallmatrix})\star_k\mu,j,b,0)$ et $v_{B(k)^*}((\begin{smallmatrix}1&-a\\0&1\end{smallmatrix})\star_k\mu)=v_{B(k)^*}(\mu)$, ce qui permet de se ramener au cas $a=0$. ar ailleurs, le lemme 3.7 montre que l'on a
$$J_{\mathscr{L}}(\mu,j,b,0)=\sum_{m=1}^{+\infty}(j+m)^{-1}c_{m,j}\quad\text{avec}\quad c_{m,j}=\int_{(x,y)\in D(-b,0)\times D(b,0)}y^{-m}(x+y)^{j+m}\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\mu(y).$$
En écrivant $(x+y)^{j+m}$ sous la forme
$$(x+b+y-b)^{j+m}=\sum_{i=0}^{j+m}\binom{j+m}{i}(x+b)^{j+m-i}(y-b)^i,$$
et y^{-m} sous la forme
$$y^{-m}=(b+y-b)^{-m}=b^{-m}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\binom{-m}{\ell}\Big(\frac{y-b}{b}\Big)^{\ell}\Big),$$
on obtient
$$y^{-m}=b^{-m}\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{j+m}b^{-\ell}\binom{j+m}{i}\binom{-m}{\ell}(x+b)^{j+m-i}(y-b)^{\ell+i}\Big).$$
On en déduit, en utilisant la minoration $v_p(b^{-\ell}\binom{j+m}{i}\binom{-m}{\ell})\geqslant -\ell v_p(b)\geqslant -\ell$, la convergence de la série
$$\Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{j+m}b^{-\ell}\binom{j+m}{i}\binom{-m}{\ell}\int_{(x,y)\in D(-b,0)\times D(b,0)}(x+b)^{j+m-i}(y-b)^{\ell+i}\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\mu(y),$$
et la minoration
$$v_p(c_{m,j})\geqslant v_{\mathscr{D}_1}(\mu_{\mathrm{KL}})+v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu))-mv_p(b).$$
On en déduit la convergence de la série $\sum_{m=1}^{+\infty}(j+m)^{-1}c_{m,j}$ ainsi que la minoration
$$\begin{aligned}v_p(J_{\mathscr{L}}(\mu,j,b,0))\geqslant&\,v_{\mathscr{D}_1}(\mu_{\mathrm{KL}})+v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu))+\inf_{m\geqslant1}(-mv_p(b)-v_p(m+j))\\ \geqslant&-v_p(b)+v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu))+\big(v_{\mathscr{D}_1}(\mu_{\mathrm{KL}})+\inf_{m\geqslant1}(m-1-v_p(m+j))\big).\end{aligned}$$
Comme $\inf_{m\geqslant1}(m-1-v_p(m+j))$ est fini, on déduit l'existence de $C_1(j)$ de l'équivalence des valuations $v_{B(k)^*}$ et $v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}\circ\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ sur $B(k)^*$ (cf. th. 2.17 et cor. 2.19).

Lemme 3.9. — *Si $\mu \in B(k)^*$ et si $j > \frac{k-2}{2}$, alors $J_{\mathscr{L}}(\mu, j, 0, a)$ existe quel que soit $a \in \mathbf{Q}_p$ et il existe $C_0(j)$ tel que l'on ait*

$$v_p(J_{\mathscr{L}}(\mu, j, 0, a)) \geqslant v_{B(k)^*}(\mu) + C_0(j)$$

quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$ et $\mu \in B(k)^*$.

Démonstration. — On peut se ramener au cas $a = 0$ comme dans la démonstration du lemme 2.12. On se retrouve donc à intégrer sur $\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ la fonction $\phi_j(x, y) = y^j \log_{\mathscr{L}} y - f_{j,\mathscr{L}}(x, y)$ contre la distribution $\mu_{\mathrm{KL}}(x)\, \mu(y)$, et il existe une constante $C_k(\phi_j)$ telle que l'on ait $v_p(I(0)) \geqslant C(\phi_j) + v_{B(k)^*}(\mu)$; on peut donc prendre $C_0(j) = C_k(\phi_j)$.

Proposition 3.10. — *Si $\mu \in B(k)^*$, si $j > \frac{k-2}{2}$, si $n \in \mathbf{Z}$ et si $a \in \mathbf{Q}_p$, l'intégrale*

$$I_{\mathscr{L}}(\mu, j, n, a) = \int_{\mathbf{Q}_p} \Big((y-a)^j \log_{\mathscr{L}}(y-a) - p^n \int_{D(a-y,n)} f_{j,\mathscr{L}}(x, y-a)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) \Big)\, \mu(y)$$

converge, et, si $C(j) = \inf(C_1(j), C_0(j))$, alors

$$v_p(I_{\mathscr{L}}(\mu, j, n, a)) \geqslant (j - \frac{k-2}{2})n + C(j) + v_{B(k)^*}(\mu).$$

Démonstration. — On a $I_{\mathscr{L}}(\mu, j, 0, a) = \sum_{b \in J} J_{\mathscr{L}}(\mu, j, b, a)$, et les lemmes 3.8 et 3.9 montrent que la série converge et que la minoration à démontrer est valable si $n = 0$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} z^j \log_{\mathscr{L}} z - p^n \int_{D(-z,n)} f_{j,\mathscr{L}}(x, z)\, \mu_{\mathrm{KL}} &= p^n \int_{D(-z,n)} (z^j \log_{\mathscr{L}} z - f_{j,\mathscr{L}}(x, z))\, \mu_{\mathrm{KL}} \\ &= \int_{D(-zp^{-n},0)} (z^j \log_{\mathscr{L}} z - f_{j,\mathscr{L}}(xp^n, z))\, \mu_{\mathrm{KL}}, \end{aligned}$$

et comme

$$v^j \log_{\mathscr{L}} v - f_{j,\mathscr{L}}(u, v) = p^{jn} \big((vp^{-n})^j \log_{\mathscr{L}}(vp^{-n}) - f_{j,\mathscr{L}}(up^{-n}, vp^{-n}) \big),$$

on en déduit la formule

$$I_{\mathscr{L}}(\mu, j, n, a) = p^{jn} I_{\mathscr{L}}(\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star_k \mu, j, 0, p^{-n}a)$$

qui permet, en utilisant la relation $v_{B(k)^*}(\left(\begin{smallmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star_k \mu) = v_{B(k)^*}(\mu) - n\frac{k-2}{2}$, de déduire le cas général du cas $n = 0$.

3.5. La distribution $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$

Si $k \in \mathbf{N}$ et $u \geqslant 0$, on note $\mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k, \mathscr{L}))$ l'espace des fonctions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ qui sont somme d'un élément de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k, \mathscr{L}))$ et d'un élément de $\mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k))$.

Soit $\mu \in B(k)^*$, et soit $\mu_{\mathscr{L}}$ son extension à $\mathscr{C}^{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(k-2, \mathscr{L}))$ définie au § 3.2 (cf. aussi la remarque 3.2).

Lemme 3.11. — *(i) Si $a\in\mathbf{Q}_p$, si $n\in\mathbf{Z}$ et si m est un entier $\leqslant v_p(a)$, les trois termes de la somme*
$$\int_{D(0,m)}\Big(\int_{D(a-y,n)} f_j(x,y)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\,\mu_{\mathscr{L}}(y)$$
$$-\lim_{n\to+\infty}\int_{D(0,-n)-D(0,m)}\Big(p^{-n}y^j\log_{\mathscr{L}}(y-a)-\int_{D(a-y,n)} f_j(x,y)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\,\mu_{\mathscr{L}}(y)$$
$$+\int_{D(\infty,1-m)} p^{-n}y^j\log_{\mathscr{L}}(y-a)\,\mu_{\mathscr{L}}(y),$$
sont bien définis et le résultat ne dépend pas du choix de m.

(ii) Il existe une unique distribution algébrique $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ sur les fonctions à support compact dans $\mathbf{Q}_p$, localement polynomiales de degré $\leqslant k-2$, telle que, si $a\in\mathbf{Q}_p$, si $n\in\mathbf{Z}$ et $j\in\{0,1,\dots,k-2\}$, on ait
$$\int_{D(a,n)} x^j\,\ell_{\mathscr{L}}(\mu)=\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}\Big(\int_{D(a-y,n)} f_j(x,y)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\,\mu_{\mathscr{L}}(y),$$
le membre de droite étant défini comme la somme apparaissant dans le (i).

Démonstration. — Dans les deux premiers termes, on aurait pu remplacer $\mu_{\mathscr{L}}$ par μ, et la proposition 3.10 montre que la limite définissant le second de ces termes existe ; l'existence des deux autres termes ne pose pas de problème et l'indépendance par rapport au choix de m suit de la linéarité de $\mu_{\mathscr{L}}$. Finalement, on a $\sum_{j=0}^{p-1}\mathbf{1}_{D(a+p^nj-y,n+1)}=\mathbf{1}_{D(a-y,n)}$, ce qui permet de vérifier la linéarité de $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$.

Proposition 3.12. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ se prolonge en une distribution globalement d'ordre $\frac{k}{2}$ sur $\mathbf{Q}_p$;

(ii) $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}(x-a)^j\log_{\mathscr{L}}(x-a)\mu_{\mathscr{L}}=0$ quels que soient $a\in\mathbf{Q}_p$ et $j>\frac{k-2}{2}$.

(iii) $\mu\in B(k,\mathscr{L})^*$.

Démonstration. — L'équivalence entre (ii) et (iii) a déja été établie (prop. 3.4) ; établissons celle entre (i) et (ii). La proposition 3.10 nous fournit la minoration
$$v_p\Big(\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} p^{-n}(y-a)^j\log_{\mathscr{L}}(y-a)\,\mu_{\mathscr{L}}-\int_{D(a,n)}(x-a)^j\ell_{\mathscr{L}}(\mu)\Big)\geqslant v_{B(k)^*}(\mu)+C(j)+(j-\frac{k}{2})n,$$
quels que soient $a\in\mathbf{Q}_p$, $n\in\mathbf{Z}$ et $\frac{k-2}{2}<j\leqslant k-2$. En particulier, si $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}(x-a)^{k-2}\log_{\mathscr{L}}(x-a)\,\mu_{\mathscr{L}}=0$ quel que soit $a\in\mathbf{Q}_p$, alors
$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(x-a)^{k-2}\,\ell_{\mathscr{L}}(\mu)\Big)\geqslant v_{B(k)^*}(\mu)+C(k-2)+(k-2-\frac{k}{2})n,$$
quels que soient $a\in\mathbf{Q}_p$ et $n\in\mathbf{Z}$, et comme $k-2>\frac{k}{2}$, cela implique que $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ est d'ordre $\frac{k}{2}$ d'après la proposition 2.10.

Réciproquement, si $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ est d'ordre $\frac{k}{2}$, alors quel que soit $n\in\mathbf{N}$,
$$v_p\Big(\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}(y-a)^j\log_{\mathscr{L}}(y-a)\,\mu_{\mathscr{L}}\Big)\geqslant(j-\frac{k-2}{2})n+\inf(v_{B(k)^*}(\mu)+C(j),v_{\mathscr{D}_{\frac{k}{2}}}(\ell_{\mathscr{L}}(\mu))),$$
et il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ pour en déduire la nullité de $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}(y-a)^j\log_{\mathscr{L}}(y-a)\,\mu_{\mathscr{L}}$ quand $j>\frac{k-2}{2}$.

3.6. La formule de Leopoldt

Proposition 3.13. — *Si $b\in\mathbf{Z}_p$, alors*

$$\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\rm KL}=p^{-n}\Big(\gamma_{p,\mathscr L}+\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^n}}\eta^{-b}\log_{\mathscr L}(\eta-1)\Big).$$

Démonstration. — Si $b\in p^n\mathbf{Z}_p$, on a

$$\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\rm KL}=\int_{D(0,n)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\rm KL}=p^{-n}\int_{\mathbf{Z}_p}\log_{\mathscr L}(p^nx)\,\mu_{\rm KL}=p^{-n}(\gamma_{p,\mathscr L}+n\mathscr L),$$
$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^n}}\eta^{-b}\log_{\mathscr L}(\eta-1)=\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^n}}\log_{\mathscr L}(\eta-1)=\log_{\mathscr L}\Big(\prod_{\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^n}}(\eta-1)\Big)=\log_{\mathscr L}p^n=n\mathscr L,$$

ce qui permet de démontrer la formule souhaitée dans ce cas.

Supposons maintenant $b\in\mathbf{Z}_p-p^n\mathbf{Z}_p$. Si $a\in\mathbf{Z}_p^*$, soit λ_a la distribution dont la transformée d'Amice est $\frac{a}{(1+T)^a-1}-\frac{1}{T}$; c'est en fait une mesure, et un petit calcul de transformées d'Amice montre que l'on a

$$\mu_{\rm KL}\star a-\mu_{\rm KL}={\rm d}\lambda_a.$$

On en déduit la formule

$$\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,(\mu_{\rm KL}\star a-\mu_{\rm KL})=\int_{D(b,n)}x^{-1}\,\lambda_a.$$

Par ailleurs, la transformée d'Amice de $x^{-1}\lambda_a$ est, à constante près, égale à $\log_{\mathscr L}((1+T)^a-1)-\log_{\mathscr L}T-(a-1)\log_{\mathscr L}(1+T)$ et donc

$$\int_{D(b,n)}x^{-1}\,\lambda_a=p^{-n}\Big(\log_{\mathscr L}a+\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^n}}\eta^{-b}(\log_{\mathscr L}(\eta^a-1)-\log_{\mathscr L}(\eta-1))\Big).$$

Maintenant, si on revient à la définition de l'opération $\mu\mapsto\mu\star a$, on obtient

$$\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,(\mu_{\rm KL}\star a-\mu_{\rm KL})=\frac{\log_{\mathscr L}a}{p^n}+\int_{D(a^{-1}b,n)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\rm KL}-\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\rm KL}.$$

En comparant les deux formules ci-dessus pour $\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,(\mu_{\rm KL}\star a-\mu_{\rm KL})$, on en déduit le fait qu'il existe une constante $C(n,k)$, pour $0\leqslant k\leqslant n-1$ telle que l'on ait

$$\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\rm KL}=p^{-n}\Big(C(n,k)+\sum_{\eta^{p^n}=1,\,\eta\neq1}\eta^{-b}\log_{\mathscr L}(\eta-1)\Big)\quad\text{si } b\in\mathbf{Z}_p\text{ et }v_p(b)=k.$$

Fixant alors k et sommant sur un système de représentants de $p^k\mathbf{Z}_p^*$ modulo $p^n\mathbf{Z}_p$, on obtient

$$\int_{p^k\mathbf{Z}_p^*}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\rm KL}=p^{-n}\Big((p-1)p^{n-k-1}C(n,k)+\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^n}}\log_{\mathscr L}(\eta-1)\sum_{b\in p^k\mathbf{Z}_p^*/p^n\mathbf{Z}_p}\eta^{-b}i\Big).$$

Comme

$$\sum_{b\in p^k\mathbf{Z}_p^*/p^n\mathbf{Z}_p}\eta^{-b}=\begin{cases}0 & \text{si }\eta\notin\boldsymbol{\mu}_{p^{k+1}}\,;\\ -p^{n-k-1} & \text{si }\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{k+1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^k}\,;\\ p^{n-k}-p^{n-k-1} & \text{si }\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^k},\end{cases}$$

on obtient

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}^*}\log_{\mathscr L}(\eta-1)\sum_{b\in(p^k\mathbf{Z}_p^*)/p^n\mathbf{Z}_p}\eta^{-b}=p^{n-k}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^k}^*}\log_{\mathscr L}(\eta-1)-p^{n-k-1}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{k+1}}^*}\log_{\mathscr L}(\eta-1)$$
$$=p^{n-k}\log_{\mathscr L}p^k-p^{n-k-1}\log_{\mathscr L}p^{k+1}=p^n\mathscr L(kp^{-k}-(k+1)p^{-(k+1)}),$$

et comme par ailleurs,

$$\int_{p^k\mathbf{Z}_p^*}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\mathrm{KL}}=\int_{D(0,k)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\mathrm{KL}}-\int_{D(0,k+1)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\mathrm{KL}}=(p^{-k}-p^{-(k+1)})\gamma_{p,\mathscr L}+\mathscr L(kp^{-k}-(k+1)p^{-(k+1)}),$$

on en déduit $C(n,k)=\gamma_{p,\mathscr L}$, ce qui permet de conclure.

Proposition 3.14. — *Soient $c_{0,\mathscr L}=\int_{\mathbf{Z}_p}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\mathrm{KL}}$ et, si $i\geqslant 1$, $c_{i,\mathscr L}=\int_{\mathbf{Z}_p}\frac{x^i}{i}\mu_{\mathrm{KL}}$. Alors, si $n\in\mathbf{N}$ et $b\in\mathbf{Z}_p$,*

$$c_{i,\mathscr L}+\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}^*}\eta^{-b}\partial^i\log_{\mathscr L}(\eta-1)=\begin{cases}p^n\int_{D(b,n)}\log_{\mathscr L}x\,\mu_{\mathrm{KL}} & \text{si } i=0\,;\\ p^n\int_{D(b,n)}\frac{x^i}{i}\,\mu_{\mathrm{KL}} & \text{si } i\geqslant 1.\end{cases}$$

Démonstration. — Si $i=0$, c'est une réécriture de la prop. 3.13. Si $i\geqslant 1$, on a

$$p^n\int_{D(b,n)}\frac{x^i}{i}\,\mu_{\mathrm{KL}}-\int_{\mathbf{Z}_p}\frac{x^i}{i}\mu_{\mathrm{KL}}=\frac{1}{i}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}^*}\eta^{-b}\partial^i\big(T^{-1}\log_{\mathscr L}(1+T)+\log_{\mathscr L}(1+T)\big)_{|T=\eta-1}.$$

Or, si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^n}^*$, $\partial^j\log_{\mathscr L}(1+T)_{|T=\eta-1}$ vaut 0 si $j\neq 1$ et 1 si $i=1$. On en déduit, en utilisant la formule de Leibnitz, l'identité

$$\partial^i\big(T^{-1}\log_{\mathscr L}(1+T)+\log_{\mathscr L}(1+T)\big)_{|T=\eta-1}=i\partial^{i-1}(T^{-1}+1)_{|T=\eta-1}=i\partial^i\log_{\mathscr L}(\eta-1),$$

ce qui permet de conclure.

Remarque 3.15. — La distribution μ_{KL} est intimement liée à la fonction zêta de Kubota-Leopoldt et aux fonctions L p-adiques des caractères de Dirichlet de conducteur une puissance de p. Un petit calcul montre que, si $\chi:(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^*\to\overline{\mathbf{Q}}_p^*$ est un tel caractère et si $k\in\mathbf{N}$, alors

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*}\chi(x)x^k\,\mu_{\mathrm{KL}}=(-1)^{k-1}kL^{\{p\}}(\chi,1-k),$$

où $L^{\{p\}}(\chi,s)$ est la fonction L complexe de χ privée de son facteur d'Euler en p. En particulier, si χ est un caractère pair, alors la fonction L p-adique $L_p(\chi,s)$ associée à χ est donnée par la formule

$$L_p(\chi,s)=\frac{1}{s-1}\int_{\mathbf{Z}_p^*}\chi(x)\langle x\rangle^{1-s}\,\mu_{\mathrm{KL}},$$

et la proposition 3.13 est équivalente à la formule de Leopoldt pour $L_p(\chi,1)$.

Si $j\in\mathbf{N}$, définissons la fonction $h_{j,\mathscr L,m}(z)$, pour $z\in\mathbf{Z}_p$, par la formule

$$h_{j,\mathscr L,m}(z)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}z^{j-i}\Big(c_{i,\mathscr L}+\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}^*}\eta^z\partial^i\log_{\mathscr L}(\eta-1)\Big),$$

Proposition 3.16. — *Si $m \in \mathbf{N}$, si $y \in p^{-m\mathbf{Z}_p}$, et si $n \in \mathbf{Z}$ vérifie $n+m \geqslant 0$, alors*
$$p^{-jm} h_{j,\mathscr{L},m+n}(p^m y) = m\mathscr{L} y^j + p^n \int_{D(-y,n)} f_{j,\mathscr{L}}(x,y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x).$$

Démonstration. — On déduit de la proposition 3.14 la formule
$$h_{j,\mathscr{L},m+n}(z) = p^{m+n} \int_{D(-z,m+n)} f_{j,\mathscr{L}}(x,z)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) = p^n \int_{D(-p^{-m}z,n)} f_{j,\mathscr{L}}(p^m x, z)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x),$$
et comme
$$p^{-jm} f_{j,\mathscr{L}}(p^m u, p^m v) = f_{j,\mathscr{L}}(u,v) + m\mathscr{L} v^j,$$
on a
$$\begin{aligned} p^{-jm} h_{j,\mathscr{L},m+n}(p^m y) =& p^n \int_{D(-y,n)} p^{-jm} f_{j,\mathscr{L}}(p^m x, p^m y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) \\ =& p^n \int_{D(-y,n)} \Big(f_{j,\mathscr{L}}(x,y) + m\mathscr{L} y^j\Big)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x) \\ =& m\mathscr{L} y^j + p^n \int_{D(-y,n)} f_{j,\mathscr{L}}(x,y)\, \mu_{\mathrm{KL}}(x). \end{aligned}$$

3.7. La transformée d'Amice de la distribution $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$

Soit $\mu \in B(k)^*$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $\mu^{(n)}$ la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ défini par
$$\mu^{(n)} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}\big(\left(\begin{smallmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star_k \mu\big).$$

Lemme 3.17. — *Si $F_\mu^{(n)}$ est la transformée d'Amice de $\mu^{(n)}$, alors la suite de terme général $p^m \psi^{m-n}(F_\mu^{(m)} \log_{\mathscr{L}} T)$ a une limite $\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)}$ dans $\mathscr{R}[\log_{\mathscr{L}} T]$ et $\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)} \in p^n F^{(n)} \log_{\mathscr{L}} T + \mathscr{E}_{\frac{k}{2}}^{]0,1]}$.*

Démonstration. — On a $\psi(\mu^{(n+1)}) = \mu^{(n)}$ et donc $\psi(F_\mu^{(n+1)}) = F_\mu^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. De plus, comme μ est globalement d'ordre $\frac{k-2}{2}$, il existe C_0 tel que l'on ait $v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mu^{(n)}) \geqslant n\frac{k-2}{2} + C$, ce qui implique que $F_\mu^{(n)} \in \mathscr{R}^+_{\frac{k-2}{2}}$ et qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que l'on ait $v_{\frac{k-2}{2}}(F_\mu^{(n)}) \geqslant n\frac{k-2}{2} + C$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. La proposition 1.17 permet de conclure.

Remarque 3.18. — L'appartenance de $\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)}$ à $p^n F^{(n)} \log_{\mathscr{L}} T + \mathscr{E}_{\frac{k}{2}}^{]0,1]}$ implique que $\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)}$ est analytique autour de T si $0 < v_p(T) \leqslant 1$; en particulier, $\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)}$ peut se développer en série entière autour de $\eta - 1$ si $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty}^*$.

Proposition 3.19. — *Si $b \in \mathbf{Q}_p$, si $n_1 \geqslant n_2 \in \mathbf{Z}_p$ et si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $bp^n \in \mathbf{Z}_p$ et $n+n_1, n+n_2 \in \mathbf{N}$, alors*
$$\begin{aligned} p^{-(1+j)n} \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_2}}} & \partial^j\big((1+T)^{bp^n} \ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)}\big)_{|T=\eta-1} \\ & = p^{n_1} \int_{D(-b,n_1)} (x+b)^j \ell_{\mathscr{L}}(\mu) - p^{n_2} \int_{D(-b,n_2)} (x+b)^j \ell_{\mathscr{L}}(\mu). \end{aligned}$$

Démonstration. — Comme $\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)} = \lim_{m\to+\infty} p^m\psi^{m-n}(F_\mu^{(m)}\log_{\mathscr{L}} T)$, et comme $\psi\partial = p\partial\psi$, on a

$$\begin{aligned}\partial^j((1+T)^{bp^n}\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)})_{|T=\eta-1} &= \lim_{m\to+\infty} p^m\partial^j\big(\psi^{m-n}\big((1+T)^{bp^m}F_\mu^{(m)}\log_{\mathscr{L}} T\big)\big)_{|T=\eta-1}\\ &= p^n\lim_{m\to+\infty} p^{(1-j)(m-n)}\psi^{m-n}\big(\partial^j\big((1+T)^{bp^m}F_\mu^{(m)}\log_{\mathscr{L}} T\big)\big)_{|T=\eta-1}\\ &= p^n\lim_{m\to+\infty} p^{-j(m-n)}\sum_{\zeta^{p^{m-n}}=\eta}\partial^j\big((1+T)^{bp^m}F_\mu^{(m)}\log_{\mathscr{L}} T\big)_{|T=\zeta-1},\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}&p^{-(1+j)n}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_2}}}\partial^j((1+T)^{bp^n}\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)})_{|T=\eta-1}\\ &\qquad= \lim_{m\to+\infty} p^{-jm}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{m+n_1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^{m+n_2}}}\partial^j\big((1+T)^{bp^m}F_\mu^{(m)}\log_{\mathscr{L}} T\big)_{|T=\eta-1}.\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}\partial^j\big((1+T)^{bp^m}F_\mu^{(m)}\log_{\mathscr{L}} T\big)_{|T=\eta-1} &= \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\partial^i\log_{\mathscr{L}}(\eta-1)\partial^i((1+T)^{bp^m}F_\mu^{(m)})_{|T=\eta-1}\\ &= \int_{\mathbf{Z}_p}\Big(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\partial^i\log_{\mathscr{L}}(\eta-1)x^{j-i}\eta^x\Big)\mu^{(m)} * \delta_{bp^m}.\end{aligned}$$

Rappelons que l'on a introduit la fonction $h_{j,\mathscr{L},m}$ définie, pour $z\in\mathbf{Z}_p$, par

$$h_{j,\mathscr{L},m}(z) = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}z^{j-i}\Big(c_{i,\mathscr{L}} + \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^m}^*}\eta^z\partial^i\log_{\mathscr{L}}(\eta-1)\Big).$$

Ceci nous permet de réécrire la somme apparaissant ci-dessus sous la forme

$$\begin{aligned}p^{-jm}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{m+n_1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^{m+n_2}}}\partial^j((1+T)^{bp^m}F_\mu^{(m)}\log_{\mathscr{L}} T)_{|T=\eta-1} &= p^{-jm}\int_{\mathbf{Z}_p}(h_{j,\mathscr{L},m+n_1}(y) - h_{j,\mathscr{L},m+n_2}(y))\,\mu^{(m)} * \delta_{bp^m}\\ &= \int_{D(0,-m)} p^{-jm}(h_{j,\mathscr{L},m+n_1}(p^m(y+b)) - h_{j,\mathscr{L},m+n_2}(p^m(y+b)))\mu\\ &= \int_{D(0,-m)}\Big(p^{n_1}\int_{D(-b-y,n_1)} f_{j,\mathscr{L}}(x,y+b)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x) - p^{n_2}\int_{D(-b-y,n_2)} f_{j,\mathscr{L}}(x,y+b)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\,\mu(y),\end{aligned}$$

la dernière égalité se déduisant de la proposition 3.16. En regroupant les formules que nous venons de démontrer et en passant à la limite quand $m\to+\infty$, on en déduit l'identité

$$\begin{aligned}&p^{-(1+j)n}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_2}}}\partial^j((1+T)^{bp^n}\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)})_{|T=\eta-1}\\ &\quad= \int_{\mathbf{Q}_p}\Big(p^{n_1}\int_{D(-b-y,n_1)} f_{j,\mathscr{L}}(x,y+b)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x) - p^{n_2}\int_{D(-b-y,n_2)} f_{j,\mathscr{L}}(x,y+b)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\,\mu(y).\end{aligned}$$

qui permet de conclure au vu de la définition de la distribution $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$.

Proposition 3.20. — *Soient $k > 2$ et $\mu \in B(k)^*$.*

(i) Si $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ se prolonge en une distribution globalement d'ordre $\frac{k}{2}$ sur $\mathbf{Q}_p$, et si $G = (G^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est la transformée d'Amice de $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$, alors

(a) $\psi(G^{(n+1)}) = G^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

(b) $G^{(n)} \in \mathscr{R}^+_{\frac{k}{2}}$ et il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que $v_{\frac{k}{2}}(G^{(n)}) \geqslant C + \frac{k}{2}n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

(c) $G^{(n)}((1+T)\eta-1) \equiv \ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)}((1+T)\eta-1)$ mod. T^{k-1} quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^\infty}$.

(ii) Réciproquement, s'il existe une suite $G = (G^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}^+_{\frac{k}{2}}$ vérifiant les conditions (a), (b) et (c) ci-dessus, alors $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ se prolonge en une distribution globalement d'ordre $\frac{k}{2}$ sur $\mathbf{Q}_p$ et G est la transformée d'Amice de $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$.

Démonstration. — Supposons que $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ se prolonge en une distribution globalement d'ordre $\frac{k}{2}$ sur $\mathbf{Q}_p$, et soit $G = (G^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ la transformée d'Amice de $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$. Alors G vérifie les conditions (a) et (b). Par ailleurs, en regroupant les propositions 2.8 et 3.19, on montre que

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_2}}} \partial^j\big((1+T)^{bp^n}(\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)} - G^{(n)})\big)_{|T=\eta-1} = 0$$

quels que soient $0 \leqslant j \leqslant k-2$, $b \in \mathbf{Q}_p$, $n_1 \geqslant n_2 \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $n+n_1, n+n_2 \in \mathbf{N}$ et $bp^n \in \mathbf{Z}_p$. Soit $a \in \mathbf{Z}_p$ et $m \in \mathbf{N}$. Appliquant ce qui précède à $n_2 = -m$, $b = ap^{-n}$ et $n_1 = m-n$, on en déduit que

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^m}} \partial^j\big((1+T)^a(\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)} - G^{(n)})\big)_{|T=\eta-1} = 0$$

quels que soient $0 \leqslant j \leqslant k-2$, $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n, m \in \mathbf{N}$. On en déduit, par récurrence sur j, que l'on a $\partial^j\big(\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)} - G^{(n)}\big)_{|T=\eta-1} = 0$ quel que soient $n \in \mathbf{N}$, $\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^\infty}$ et $0 \leqslant j \leqslant k-2$. Ceci termine la démonstration du (i).

Passons à celle du (ii). Les deux premières conditions satisfaites par G se traduisent par l'existence d'une distribution μ_G, globalement d'ordre $\frac{k}{2}$ sur $\mathbf{Q}_p$, dont G est la transformée d'Amice. Quant à la troisième, elle se traduit, en utilisant les propositions 2.8 et 3.19, par le fait que l'on a

$$p^{n_1}\int_{D(a,n_1)}(x-a)^j\mu_G - p^{n_2}\int_{D(a,n_2)}(x-a)^j\mu_G = p^{n_1}\int_{D(a,n_1)}(x-a)^j\ell_{\mathscr{L}}(\mu) - p^{n_2}\int_{D(a,n_2)}(x-a)^j\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$$

quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$, $0 \leqslant j \leqslant k-2$ et $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$. Cette dernière condition est équivalente à

$$p^n\int_{D(a,n)}(x-a)^j\mu_G - \int_{D(0,0)}(x-a)^j\mu_G = p^n\int_{D(a,n)}(x-a)^j\ell_{\mathscr{L}}(\mu) - \int_{D(0,0)}(x-a)^j\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$$

quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$, $0 \leqslant j \leqslant k-2$ et $n \in \mathbf{Z}$, comme on peut le montrer en utilisant l'identité

$$\begin{aligned}\big(p^n\mathbf{1}_{D(a,n)}(x) - \mathbf{1}_{D(0,0)}(x)\big)(x-a)^j &= \big(p^n\mathbf{1}_{D(a,n)}(x) - p^m\mathbf{1}_{D(a,m)}(x)\big)(x-a)^j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-a)^{j-i}\big(p^m\mathbf{1}_{D(0,m)}(x) - \mathbf{1}_{D(0,0)}(x)\big)x^i\end{aligned}$$

valable si $m \leqslant v_p(a)$ de telle sorte que $D(a,m) = D(0,m)$. On en déduit, si $U \in \mathscr{U}(k)^0$, la formule

$$\sum_{u\in U}\lambda_u\int_{D(a_u,n)}(x-a_u)^{j_u}\,\mu_G = \sum_{u\in U}\lambda_u\int_{D(a_u,n)}(x-a_u)^{j_u}\,\ell_{\mathscr{L}}(\mu).$$

Maintenant, le fait que μ_G est globalement d'ordre $\frac{k}{2}$ nous fournit la minoration

$$v_p\Big(\sum_{u\in U}\lambda_u\int_{D(a_u,n)}(x-a_u)^{j_u}\,\mu_G\Big)\geqslant v_{\mathscr{D}_{\frac{k}{2}}}(\mu_G)+\inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u))+n\inf_{u\in U}(j_u-\frac{k}{2}),$$

tandis que la proposition 3.10 nous fournit la minoration

$$v_p\Big(p^{-n}\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{U,\mathscr{L}}\mu-\sum_{u\in U}\lambda_u\int_{D(a_u,n)}(x-a_u)^{j_u}\,\ell_{\mathscr{L}}(\mu)\Big)\geqslant v_{B(k)^*}(\mu)+\inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u))+\inf_{u\in U}(C(j_u)+(j_u-\frac{k}{2})n).$$

On en déduit, quel que soit $n\in\mathbf{N}$, la minoration

$$v_p\Big(\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{U,\mathscr{L}}\mu\Big)\geqslant n\inf_{u\in U}(j_u-\frac{k-2}{2})+\inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u))+\inf(v_{\mathscr{D}_{\frac{k}{2}}}(\mu_G),v_{B(k)^*}(\mu)+\inf_{u\in U}C(j_u)).$$

Comme $\inf_{u\in U}(j_u-\frac{k-2}{2})>0$, Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour faire tendre le membre de droite vers $+\infty$ et en déduire la nullité de $\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{U,\mathscr{L}}\mu$ si $U\in\mathscr{U}(k)^0$. Ceci permet de montrer, en utilisant les prop. 3.4 et 3.12, que $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ se prolonge en une distribution globalement d'ordre $\frac{k}{2}$ sur $\mathbf{Q}_p$.

Finalement, on déduit du (i) que, si $H=(H^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est la transformée d'Amice de $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$, alors $H^{(n)}-G^{(n)}$ est un élément de $\mathscr{R}^+$ d'ordre $\frac{k}{2}$ s'annulant à l'ordre $k-1$ en tous les éléments de $\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}^*$. La seconde de ces propriétés se traduit par la divisibilité de $H^{(n)}-G^{(n)}$ par $(T^{-1}\log(1+T))^{k-1}$ qui est donc d'ordre $\geqslant k-1$ ou est nul. Comme $\frac{k}{2}<k-1$, on en déduit $H^{(n)}-G^{(n)}=0$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$, ce qui montre que G est la transformée d'Amice de $\ell_{\mathscr{L}}(\mu)$ et termine la démonstration de la proposition.

Corollaire 3.21. — *Si $\mu\in B(k)^*$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mu\in B(k,\mathscr{L})^*$.

(ii) Il existe une suite $G=(G^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}^+_{\frac{k}{2}}$ vérifiant les conditions

(a) $\psi(G^{(n+1)})=G^{(n)}$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$,

(b) il existe $C\in\mathbf{R}$ tel que $v_{\frac{k}{2}}(G^{(n)})\geqslant C+\frac{k}{2}n$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$,

(c) $G^{(n)}((1+T)\eta-1)\equiv\ell_{\mathscr{L}}(F_\mu)^{(n)}((1+T)\eta-1)$ mod. T^{k-1} quels que soient $n\in\mathbf{N}$ et $\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}^*$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des propositions 3.12 et 3.20.

4. (φ,Γ)-modules

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'action de ψ sur un (φ,Γ)-module, et en particulier, à la définition des modules $D^\sharp$ et $\psi^{-\infty}(D)$ qui jouent un rôle primordial dans cet article. Beaucoup des résultats qui suivent étaient connus de Fontaine (non rédigé) et Herr [**24**].

4.1. Réseaux et treillis

Définition 4.1. — Si A est un anneau complet pour une valuation discrète, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et si D est un A-module de type fini, on définit la dimension $\dim_A D$ de D sur A par la formule

$$\dim_A D=\dim_{A/\mathfrak{m}}D/\mathfrak{m}D.$$

Si D est libre de rang d sur A, alors $\dim_A D = d$, et dans le cas général, le théorème de structure des modules sur les anneaux principaux montre que, si $\dim_A D = d$, alors il existe $r \in \{0, \dots, d\}$, $k_{r+1}, \dots, k_d \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $e_1, \dots, e_d \in D$, tels que

$$D = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_r \oplus (A/\mathfrak{m}^{k_{r+1}})e_{r+1} \cdots \oplus (A/\mathfrak{m}^{k_d})e_d.$$

Définition 4.2. — (i) Si D est un $k_L((T))$-(resp. un $\mathscr{E}$)-espace vectoriel de dimension finie d, un *réseau* de D est un sous-$k_L[[T]]$-(resp. $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$)-module de type fini de D contenant une base de D ; comme $k_L[[T]]$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$) est un anneau de valuation discrète, un réseau de D est libre de rang d sur $k_L((T))$ (resp. sur $\mathscr{E}$).

(ii) Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini, un *treillis* M de D est un sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module fermé de D dont l'image de M dans D/pD est un réseau et celle dans D/p^kD est de type fini sur $\mathscr{O}_L[[T]]$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$.

(iii) Si D est un $\mathscr{E}$-espace vectoriel de dimension finie, alors un *treillis* de D est un treillis d'un réseau de D.

Remarque 4.3. — Si M est un treillis de D, alors l'application naturelle de M dans $\varprojlim M/(M \cap p^kD)$ est un isomorphisme, et comme $M/(M \cap p^kD)$ est un $\mathscr{O}_L[[T]]$ module de type fini, cela implique que M, muni de la topologie induite par la topologie faible sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, est compact comme limite projective de compacts.

Exemple 4.4. — Si M est un treillis de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, il existe des suites strictement croissantes d'entiers $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbf{N}}$ avec $a_0 = 0$, telles que l'on ait

$$M = \sum_{i=0}^{+\infty} p^{a_i} T^{-b_i} \mathscr{O}_L[[T]].$$

Lemme 4.5. — *Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de torsion, et si $M \subset N$ sont des treillis de D, alors N/M est un $\mathscr{O}_L$-module de longueur finie.*

Démonstration. — Exercice.

Lemme 4.6. — *Soit D un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini, et soient $M \supset N$ des treillis de D. Si $f : M \to M$ est $\mathscr{O}_L$-linéaire, surjective, avec $f(N) \subset N$, alors f induit une bijection de M/N sur lui-même.*

Démonstration. — Comme M et N sont des treillis, on a $M/N = \varprojlim M/(N + p^kM)$ et chacun des $M/(N + p^kM)$ est un $\mathscr{O}_L$-module de type fini sur lequel f induit une surjection $\mathscr{O}_L$-linéaire et donc une bijection. Ceci permet de conclure.

Proposition 4.7. — *Si D et D' sont des $\mathscr{E}$-espaces vectoriels de dimension finie, si M est un treillis d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D, et si $h : M \to D'$ est un morphisme continu de $\mathscr{O}_L[[T]]$-modules, alors h s'étend de manière unique en un morphisme de $\mathscr{E}$-espaces vectoriels de D dans D'.*

Démonstration. — Soit d la dimension de D. Comme M est un treillis de D, il existe $e_1, \dots, e_d \in M$ formant une base de D sur $\mathscr{E}$, tels que M soit inclus dans $N = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{\mathscr{E}}e_d$. L'unicité d'un prolongement de h à D est immédiate car on doit avoir $h(x_1e_1 + \cdots + x_de_d) = x_1h(e_1) + \cdots + x_dh(e_d)$ si $x_1, \dots, x_d \in \mathscr{E}$. Pour montrer l'existence d'un tel prolongement, il suffit de montrer que l'on a $h(x) = x_1h(e_1) + \cdots + x_dh(e_d)$ si $x = x_1e_1 + \cdots + x_de_d \in M$.

Soit N' le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de D' engendré par $h(M)$. Comme M est compact et h continue, N' est inclus dans un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D'. Maintenant, comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/(p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}+\mathscr{O}_L[[T]])$ est de T-torsion, il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que l'on ait $T^n x_i = y_i + z_i$ avec $y_i\in\mathscr{O}_L[[T]]$ et $z_i\in p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Posons $y=\sum_{i=1}^d y_ie_i$ et $z=\sum_{i=1}^d z_ie_i$. Comme h est $\mathscr{O}_L[[T]]$-linéaire, on a $T^nh(x)=h(T^nx)=h(y)+h(z)=h(z)+\sum_{i=1}^d y_ih(e_i)$. Par ailleurs, comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/(p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}+\mathscr{O}_L[[T]])$ est de T-torsion, il en est de même de $(M\cap p^kN)/p^kM$ et il existe $m\in\mathbf{N}$ tel que $T^mz\in p^kM$, ce qui implique $h(z)=T^{-m}h(T^mz)\in p^kN'$. On a donc

$$h(x)-\sum_{i=1} x_ih(e_i)=T^{-n}\Big(h(z)-\sum_{i=1}^{d} z_ih(e_i)\Big)\in p^kN'.$$

Comme ceci est vrai pour tout $k\in\mathbf{N}$ et comme N' est séparé pour la topologie p-adique, c'est donc que $h(x)-\sum_{i=1}x_ih(e_i)=0$, ce qu'il fallait démontrer.

4.2. Résidus et dualité

Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini, on note $D^\vee$ le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module $D^\vee=\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D,\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Si D est de torsion, alors $D^\vee$ est aussi de type fini et l'application naturelle de D dans $(D^\vee)^\vee$ est un isomorphisme. (Si D n'est pas de torsion, alors $D^\vee$ n'est plus de type fini, mais est une limite inductive de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules de torsion de type fini et l'application naturelle de D dans $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}((D^\vee),\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ est encore un isomorphisme.)

Si D est un $\mathscr{E}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $D^*=\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(D,\mathscr{E})$ le dual de D.

Si M est un $\mathscr{O}_L$-module topologique, on note $M^\wedge$ l'ensemble des applications $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de M dans $L/\mathscr{O}_L$.

Si $x=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k\in\mathscr{E}$, on pose

$$\mathrm{Res}(x\,dT)=a_{-1}\in L.$$

L'application Res envoie $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ dans $\mathscr{O}_L$ et donc induit une application $\mathrm{Res}:\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\to L/\mathscr{O}_L$.

On note $[\ ,\ ]: D^\vee\times D\to L/\mathscr{O}_L$ la forme bilinéaire donné par la formule

$$[x,y]=\mathrm{Res}\Big(\langle x,y\rangle\frac{dT}{1+T}\Big).$$

Lemme 4.8. — *Si D est un module de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors l'application $x\mapsto(y\mapsto[x,y])$ induit un isomorphisme de $D^\vee$ sur $D^\wedge$.*

Démonstration. — Comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est de valuation discrète, il suffit de traiter le cas $D=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Soit $e_k:\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\to\mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules envoyant 1 sur p^{-k}. Alors $e_k\in D^\vee$ et $D^\vee=(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}})\cdot e_k$. Maintenant, si $f:D\to L/\mathscr{O}_L$ est $\mathscr{O}_L$-linéaire continue, il existe $m_0\in\mathbf{N}$ tel que l'on ait $f(T^m)=0$ si $m\geqslant m_0$. Ceci implique que la série $(1+T)\big(\sum_{m\in\mathbf{Z}}T^{-m-1}f(T^m)\big)\cdot e_k$ converge dans $D^\vee$. La somme y de cette série est l'unique élément de $D^\vee$ vérifiant $[y,T^m]=f(T^m)$ quel que soit $m\in\mathbf{Z}$, et par continuité, c'est aussi l'unique élément de $D^\vee$ vérifiant $[y,x]=f(x)$ quel que soit $x\in D$. Ceci permet de conclure.

Proposition 4.9. — *Si D est $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini, alors l'application naturelle $D\to(D^\vee)^\wedge$ est un iomorphisme.*

Démonstration. — Il suffit de traiter les cas $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Le cas de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est une conséquence directe du lemme 4.8 ; le cas de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ s'en déduit par passage à la limite :

$$(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{\vee})^{\wedge} = \big(\varinjlim p^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\big)^{\wedge} = \varprojlim \big(p^{-k}\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\big)^{\wedge} = \varprojlim \mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}.$$

Définition 4.10. — Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de torsion, et si M est un treillis de D, on note M^* le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $D^{\vee}$ constitués des $x \in D^{\vee}$ tels que $[x, y] = 0$ quel que soit $y \in M$.

Lemme 4.11. — *Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de torsion, et si M est un treillis de D, alors M^* est un treillis de $D^{\vee}$.*

Démonstration. — Écrivons D sous la forme $D = \oplus_{i=1}^d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^{k_i}\mathscr{O}_{\mathscr{E}})f_i$. Comme M est un treillis de D, il existe $a \geqslant b \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\oplus_{i=1}^d T^a\mathscr{O}_L[[T]]\cdot f_i \subset M \subset \oplus_{i=1}^d T^b\mathscr{O}_L[[T]]\cdot f_i.$$

Soit $f_i^{\vee} \in D^{\vee}$ l'homomorphisme envoyant f_i sur p^{-k_i} et f_j sur 0 si $j \neq i$. On a alors $D^{\vee} = \oplus_{i=1}^d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^{k_i}\mathscr{O}_{\mathscr{E}})f_i^{\vee}$. Maintenant, $\mathrm{Res}(xy\frac{dT}{1+T}) = 0$ quel que soit $y \in (\mathscr{O}_L/p^k\mathscr{O}_L)[[T]]$ si et seulement si $x \in (\mathscr{O}_L/p^k\mathscr{O}_L)[[T]]$; on en déduit les inclusions

$$\oplus_{i=1}^d T^{-b}\mathscr{O}_L[[T]]\cdot f_i^{\vee} \subset M \subset \oplus_{i=1}^d T^{-a}\mathscr{O}_L[[T]]\cdot f_i^{\vee}.$$

Finalement, comme $[x, ay] = [ax, y]$, si $a \in \mathscr{O}_L[[T]]$, cela implique que M^* est un $\mathscr{O}_L[[T]]$-module, et donc un treillis de D au vu des inclusions ci-dessus. Ceci permet de conclure.

Lemme 4.12. — *Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de torsion, et si M est un treillis de D, alors $\iota : D^{\vee} \to D^{\wedge}$ induit un isomorphisme de M^* sur* $\mathrm{Hom}(D/M, L/\mathscr{O}_L)$.

Démonstration. — Par définition de M^*, la restriction de ι à M^* se factorise en une application injective $\iota_M : M^* \to \mathrm{Hom}(D/M, L/\mathscr{O}_L)$. Maintenant, M étant un treillis de D et D étant de torsion, M est ouvert dans D, et D/M est un $\mathscr{O}_L$-module discret, ce qui fait que $\mathrm{Hom}(D/M, L/\mathscr{O}_L)$ s'identifie naturellement au sous-ensemble des $x \in D^{\wedge}$ tels que $[x, y] = 0$ quel que soit $y \in M$. La surjectivité de ι permet de conclure à celle de ι_M

Lemme 4.13. — *Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de torsion, si I est un ensemble fini, et si M_i, $i \in I$ sont des treillis de D, alors il existe un treillis M' de D, contenant les M_i, $i \in I$, tel que $D/M_i = D/M' \oplus M'/M_i$ quel que soit $i \in I$.*

Démonstration. — Écrivons D sous la forme $D = \oplus_{j=1}^d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^{k_j}\mathscr{O}_{\mathscr{E}})f_j$. Il existe alors $b \in \mathbf{Z}$ tel que $M_i \subset \oplus_{j=1}^d T^b\mathscr{O}_L[[T]]\cdot f_j$, et on peut prendre $M' = \oplus_{j=1}^d T^b\mathscr{O}_L[[T]]\cdot f_j$.

Proposition 4.14. — *Si D est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de torsion, et si $M_1 \subset M_2$ sont des treillis de D, alors*

$$\mathrm{lg}_{\mathscr{O}_L}(M_1^*/M_2^*) = \mathrm{lg}_{\mathscr{O}_L}(M_2/M_1).$$

Démonstration. — Choisissons un treillis M' de D contenant M_1 et M_2, tel que $D/M_1 = D/M' \oplus M'/M_1$ et $D/M_2 = D/M' \oplus M'/M_2$. En utilisant le lemme 4.12, on voit que l'on est ramené à prouver que

$$\mathrm{lg}_{\mathscr{O}_L}(\mathrm{Hom}(M'/M_1, L/\mathscr{O}_L)/\mathrm{Hom}(M'/M_2, L/\mathscr{O}_L)) = \mathrm{lg}_{\mathscr{O}_L}(M_2/M_1),$$

ce qui est clair puisque tous les modules en présence sont de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$ qui est un anneau de valuation discrète.

4.3. φ-modules

Rappelons que l'on a muni $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ et $\mathscr{E}$ d'une action continue d'un frobenius φ, respectant la structure de $\mathscr{O}_L$-algèbre de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et envoyant T sur $(1+T)^p-1$. En particulier, l'action induite sur $k_L((T))$ est k_L-linéaire et envoie T sur T^p.

Définition 4.15. — (i) Un *φ-module D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$* est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de type fini muni d'une action semi-linéaire de φ. Un φ-module D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ tué par p est aussi appelé un *φ-module sur $k_L((T))$*. Un tel module est *étale* si $\varphi(D)$ engendre D comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module ; l'action de φ est alors injective.

(ii) Un *φ-module D sur $\mathscr{E}$* est un $\mathscr{E}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de φ. Un tel module est *étale* s'il possède un réseau stable par φ qui est étale.

Remarque 4.16. — (i) Un φ-module D sur $k_L((T))$ est étale si et seulement si, pour une (et donc pour toute) base $e_1,\dots,e_d$ de D sur $k_L((T))$, la matrice de $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$ dans cette base appartient à $\mathbf{GL}_d(k_L((T)))$.

(ii) Un φ-module D sur $\mathscr{E}$ est étale si et seulement si il existe une base $e_1,\dots,e_d$ de D sur $\mathscr{E}$ telle que la matrice de $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$ dans cette base appartienne à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$.

Lemme 4.17. — *Soient $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathfrak{m}_L$, et soit D un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.*
(i) Si $P=1+a_{n-1}X+\cdots a_0X^n$, alors $D^{P(\varphi)=0}=0$.
(ii) Si $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots a_0$, alors $D^{P(\varphi)=0}=0$.

Démonstration. — Dans le premier cas, l'injectivité de $P(\varphi)$ suit de ce que $P(\varphi)=1$ mod. $\mathfrak{m}$ et donc que $P(\varphi)$ est injectif sur $\mathfrak{m}^kD/\mathfrak{m}^{k+1}D$ quel que soit $k\in\mathbf{N}$. Dans le second cas, cette injectivité est une conséquence de la congruence $P(\varphi)=\varphi^n$ mod. $\mathfrak{m}$ et de ce que D est étale, ce qui implique que φ^n est injectif sur $\mathfrak{m}^kD/\mathfrak{m}^{k+1}D$ quel que soit $k\in\mathbf{N}$.

Lemme 4.18. — *Si $P\in\mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors P peut s'écrire de manière unique sous la forme $P=uP^+P^0P^-$, où $u\in\mathscr{O}_L^*$, et*

$$\begin{aligned}
P^+(X)=&X^k+a_{k-1}X^{k-1}+\cdots+a_0\quad \text{avec } a_i\in\mathfrak{m}_L \text{ si } 0\leqslant i\leqslant k-1,\\
P^0(X)=&X^\ell+b_{\ell-1}X^{\ell-1}+\cdots+b_0\quad \text{avec } b_i\in\mathscr{O}_L, \text{ si } 0\leqslant i\leqslant \ell-1, \text{ et } b_0\in\mathscr{O}_L^*\\
P^-(X)=&1+c_{m-1}X+\cdots+c_0X^m\quad \text{avec } c_i\in\mathfrak{m}_L \text{ si } 0\leqslant i\leqslant m-1.
\end{aligned}$$

Démonstration. — C'est parfaitement classique : si P est de degré n et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sont les racines de P, alors

$$P^+(X)=\prod_{v_p(\alpha_i)>0}(X-\alpha_i),\quad P^0(X)=\prod_{v_p(\alpha_i)=0}(X-\alpha_i),\quad \text{et}\quad P^-(X)=\prod_{v_p(\alpha_i)<0}(1-\alpha_i^{-1}X).$$

Corollaire 4.19. — *Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, si $P\in\mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, et si P^0 est le polynôme défini ci-dessus, alors $D^{P(\varphi)=0}=D^{P^0(\varphi)=0}$*

Lemme 4.20. — *Si M un treillis de D stable par φ, et si $P\in\mathscr{O}_L[X]$ vérifie $P(0)\in\mathscr{O}_L^*$, alors l'application naturelle $M^{P(\varphi)=0}\to(M/TM)^{P(\varphi)=0}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'injectivité suit de ce que φ est topologiquement nilpotent sur TM et de l'hypothèse $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. Pour montrer la surjectivité, décomposons M/TM sous la forme $M/TM = N_1 \oplus N_2$, où N_1, N_2 sont stables sous l'action de φ qui agit de manière nilpotente sur N_1 et de manière bijective sur N_2. Soit α l'inverse de φ sur N_2, et soit $s : N_2 \to M$ une section $\mathscr{O}_L$-linéaire de la réduction modulo T. Si $x \in N_2$, et $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\varphi^{n+1}(s(\alpha^{n+1}(x))) - \varphi^n(s(\alpha^n(x))) = \varphi^n(\varphi(s(\alpha^{n+1}(x))) - s(\alpha^{n+1}(\varphi(x))) \in \varphi^n(T)M,$$

ce qui montre que la suite de terme général $\varphi^n(s(\alpha^n(x)))$ converge dans M vers une limite $\iota(x)$ dont la réduction modulo T est x. Par ailleurs, ι est $\mathscr{O}_L$-linéaire et un passage à la limite montre que l'on a $\varphi \circ \iota = \iota \circ \varphi$. Ceci montre que M contient un sous-$\mathscr{O}_L$-module, stable par φ, isomorphe à N_2 en tant que φ-module. On en déduit le résultat.

Lemme 4.21. — *Soit D un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et soit $P \in \mathscr{O}_L[X]$ dont l'image dans $k_L[X]$ n'est pas nulle. Alors, si $\dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D = r$, alors $\dim_{\mathscr{O}_L} D^{P(\varphi)=0} \leqslant r$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer P par P^0, ce qui, d'après le cor. 4.19, ne change pas $D^{P(\varphi)=0}$, on peut supposer que P est unitaire et $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. Commençons par supposer que D est de torsion tué par p^k. Comme $\mathscr{O}_L[X]/(P, p^k)$ est un anneau fini, et comme X en est une unité (grâce à la condition $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$), il existe un entier $n > 0$ tel que P divise $X^n - 1$ dans $(\mathscr{O}_L/p^k\mathscr{O}_L)[X]$. Soit $N = D^{\varphi^n=1}$. On a alors $D^{P(\varphi)=0} \subset M$, et il suffit de prouver que $\dim_{\mathscr{O}_L} M \leqslant r$. Soit $e_1, \dots, e_s$ une famille d'éléments de M tels qu'il existe une relation du type $\sum_{i=1}^s x_i e_i = 0$, avec $x_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et au moins un des $x_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^*$. On peut supposer que la relation ci-dessus est minimale et, quitte à renuméroter les e_i, que $x_1 = 1$. En appliquant φ^n à la relation ci-dessus, et en utilisant la minimalité de cette relation, on en déduit l'appartenance de $\varphi^n(x_i) - x_i$ à $\mathfrak{m}_L\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ si $i \geqslant 2$. En notant $\overline{x}_i$ l'image de x_i dans $k_L((T))$, cette appartenance se traduit par celle de $\overline{x}_i$ à $k_L((T))^{\varphi^n=1} = k_L$. On voit donc que les images de $e_1, \dots, e_s$ dans $M/\mathfrak{m}_L M$ sont liées sur k_L, ce qui permet de conclure car, si $s > r$, alors il existe une relation du type ci-dessus si $\dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D = r$.

Corollaire 4.22. — *Soit $P \in \mathscr{O}_L[X]$ non nul.*

(i) Si D est un φ-module étale, libre de rang d sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $D^{P(\varphi)=0}$ est un $\mathscr{O}_L$-module, libre de rang $\leqslant d$.

(i) Si D est un φ-module étale, de dimension d sur $\mathscr{E}$, alors $D^{P(\varphi)=0}$ est un L-espace vectoriel de dimension $\leqslant d$.

4.4. L'opérateur ψ

Soit D un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Comme les $(1+T)^i$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$ forment une base de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ sur $\varphi(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, on peut écrire tout élément x de D de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(x_i),$$

ce qui nous permet de définir un opérateur $\psi : D \to D$ par la formule $\psi(x) = x_0$; c'est un inverse à gauche de φ (i.e. $\psi(\varphi(x)) = x$) qui va jouer un rôle primordial dans la suite.

Remarque 4.23. — Si $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)$, alors $x_i = \psi((1+T)^{-i}x)$. En particulier, $x \in \varphi(D)$ si et seulement si $\psi((1+T)^{-i}x) = 0$ si $1 \leqslant i \leqslant p-1$.

Proposition 4.24. — *Si $x \in \mathscr{E}$, alors*
$$\mathrm{Res}\Big(\psi(x)\frac{dT}{1+T}\Big) = \mathrm{Res}\Big(x\frac{dT}{1+T}\Big).$$

Démonstration. — Si $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$, on a $\psi \circ \partial = p\partial \circ \psi$. Ceci implique que, si $x = \partial y$, alors $x\frac{dT}{1+T} = dy$ et $\psi(x)\frac{dT}{1+T} = pd\psi(y)$. On en déduit la formule
$$\mathrm{Res}\Big(\psi(x)\frac{dT}{1+T}\Big) = \mathrm{Res}\Big(x\frac{dT}{1+T}\Big) = 0$$
si $x = (1+T)^{-1}T^{k-1}$, et $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Comme par ailleurs, $\psi(T^{-1}) = T^{-1}$, cela permet de conclure.

Lemme 4.25. — *(i) Si D est un φ-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et $x, y \in D$, alors $\psi(\varphi(x)y) = x\psi(y)$.*

(ii) Si D_1, D_2 sont des φ-modules sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, si $x \in D_1$ et si $y \in D_2$, alors $\psi(\varphi(x)\otimes y) = x\otimes\psi(y)$.

(iii) Si D est un φ-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, si $D^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}(D, \mathscr{E}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, si $x \in D^\vee$ et $y \in D$, alors $\psi(\langle\varphi(x), y\rangle) = \langle x, \psi(y)\rangle$.

Démonstration. — La démonstration étant la même dans les trois cas, nous nous contenterons de traiter le (ii). Si $y = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(y_i)(1+T)^i$, alors $\varphi(x)\otimes y = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi(x\otimes y_i)(1+T)^i$ et donc
$$\psi(\varphi(x)\otimes y) = x\otimes y_0 = x\otimes\psi(y).$$

Corollaire 4.26. — *Si $x \in D^\vee$ et $y \in D$, alors*
$$[x, \varphi(y)] = [\psi(x), y].$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la prop. 4.24 et du lemme 4.25.

4.5. Le module $D^\sharp$

Lemme 4.27. — *Soit D un φ-module étale et de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et soit M un treillis de D. Alors*

(i) $\psi(M)$ est un $\mathscr{O}_L[[T]]$-module ;

(ii) si $\varphi(M) \subset M$, alors $\psi(M) \supset M$;

(iii) si le $\mathscr{O}_L[[T]]$-module engendré par $\varphi(M)$ contient M, alors $\psi(M) \subset M$;

(iv) si $\psi(M) \subset M$, alors $\psi(T^{-1}M) \subset T^{-1}M$ et, quel que soit $x \in D$, il existe $n(x, M) \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x) \in T^{-1}M$ si $n \geqslant n(x, M)$.

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $\varphi(a) \in \mathscr{O}_L[[T]]$ si $a \in \mathscr{O}_L[[T]]$ et de ce que $a\psi(x) = \psi(\varphi(a)x)$. Le (ii) est une conséquence de l'identité $\psi(\varphi(x)) = x$. Pour démontrer le (iii), considérons une famille génératrice $e_1, \dots, e_d$ de M sur $\mathscr{O}_L[[T]]$. L'hypothèse selon laquelle le $\mathscr{O}_L[[T]]$-module engendré par $\varphi(M)$ contient M signifie que l'on peut écrire tout élément x de M sous la forme $x_1\varphi(e_1)+\dots+x_d\varphi(e_d)$, avec $x_1, \dots, x_d \in \mathscr{O}_L[[T]]$. On a alors $\psi(x) = \psi(x_1)e_1+\dots+\psi(x_d)e_d$ et comme $\psi(\mathscr{O}_L[[T]]) \subset \mathscr{O}_L[[T]]$, cela montre que $\psi(x) \subset M$, ce qui prouve le (iii). Passons au (iv). Si $y \in M$ et si k est un entier $\geqslant 1$, on a $\psi(\varphi^k(T)^{-1}y) = \varphi^{k-1}(T)^{-1}\psi(y)$, ce qui montre que $\psi(\varphi^k(T)^{-1}M) \subset \varphi^{k-1}(T)^{-1}M$ si $k \geqslant 1$. Comme de plus $\psi(T^{-1}M) \subset \psi(\varphi(T)^{-1}M) \subset T^{-1}M$ et comme $D = \cup_{k\in\mathbf{N}}\varphi^k(T)^{-1}M$, cela permet de conclure.

Lemme 4.28. — *Si D est un φ-module étale et de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, il existe des treillis N_0, N_1 de D vérifiant*
$$\varphi(N_0) \subset N_0 \subset N_1 \subset \mathscr{O}_L[[T]] \cdot \varphi(N_1).$$

Démonstration. — Soient $e_1, \dots, e_d \in D$ dont les images modulo p forment une base de D/pD sur $k_L((T))$. Alors $e_1, \dots, e_d$ et $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)$ sont des familles génératrices de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Si D est tué par p^k, il existe des matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$, éléments de $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}/p^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$ telles que l'on ait
$$\varphi(e_i) = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} e_j \quad \text{et} \quad e_i = \sum_{j=1}^{d} b_{i,j}\varphi(e_j), \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant d.$$
On peut alors trouvers $n \in \mathbf{N}$ tel que $(\varphi(T)/T)^{np^k}A$ et $(\varphi(T)/T)^{np^k}B$ soient à coefficients dans $\mathscr{O}_L[[T]]/p^k\mathscr{O}_L[[T]]$, et il suffit de prendre pour N_0 (resp. N_1) le $\mathscr{O}_L[[T]]$-module engendré par $T^{np^k}e_1, \dots T^{np^k}e_d$ (resp. par $T^{-np^k}e_1, \dots T^{-np^k}e_d$).

Proposition 4.29. — *Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, Il existe un unique treillis $D^\sharp$ de D vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) quels que soient $x \in D$ et $k \in \mathbf{N}$, il existe $n(x,k) \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^kD$ si $n \geqslant n(x,k)$;

(ii) ψ induit une surjection de $D^\sharp$ sur lui-même.

De plus,

(iii) si N est un treillis de D et $k \in \mathbf{N}$, il existe $n(N,k)$ tel que $\psi^n(N) \subset D^\sharp$ si $n \geqslant n(N,k)$;

(iv) si N est treillis de D stable par ψ tel que ψ induise une surjection de N sur lui-même, alors $N \subset D^\sharp$ et $D^\sharp/N$ est tué par T.

Démonstration. — Commençons par établir l'unicité d'un tel module. Si M_1 et M_2 sont deux tels modules, alors $M_1 + M_2$ en est un autre, ce qui permet, quitte à remplacer M_1 par $M_1 + M_2$, de supposer $M_1 \supset M_2$. Mais alors l'application induite par ψ sur M_1/M_2 est $\mathscr{O}_L$-linéaire, surjective d'après la propriété (i) et nilpotente d'après la propriété (ii). Comme M_1/M_2 est de type fini sur $\mathscr{O}_L$, cela implique $M_1 = M_2$; d'où l'unicité.

Passons à la démonstration de l'existence de $D^\sharp$. Commençons par supposer que D est de torsion, et choisissons (cf. lemme 4.28) deux treillis N_0, N_1 de D vérifiant $\varphi(N_0) \subset N_0 \subset N_1 \subset \mathscr{O}_L[[T]] \cdot \varphi(N_1)$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $M_n = \psi^n(N_0)$. C'est un sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module de D d'après le (i) du lemme 4.27. Par ailleurs, comme $\varphi(N_0) \subset N_0$, le (ii) du lemme 4.27 montre que la suite M_n est croissante. La combinaison des (a) et (c) ci-dessus et du (ii) du lemme 4.27 montrant que l'on a $M_n \subset N_1$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la suite M_n est stationnaire et sa limite M_∞ est un treillis de D vérifiant $\psi(M_\infty) = M_\infty$.

Soit $M'_n = \psi^n(T^{-1}M_\infty)$. Il résulte du (iv) du lemme 4.27 que la suite M'_n est une suite décroissante de treillis de D contenant M_∞ ; sa limite M'_∞ est donc un treillis de D contenant M_∞ et vérifie $\psi(M'_\infty) = M'_\infty$ par construction. Comme de plus, le (iv) du lemme 4.27 dit que, si $x \in D$, il existe $n(x) \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $\psi^n(x) \in T^{-1}M_\infty$ si $n \geqslant n(x)$, et comme il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $M'_m = M'_\infty$, on a $\psi^{m+n}(x) \in M'_\infty$ quel que soit $n \geqslant n(x)$. Tout ceci montre que M'_∞ vérifie les propriétés (i) et (ii) requises pour $D^\sharp$.

On a donc établi l'existence et l'unicité de $D^\sharp$; reste à établir les propriétés (iii) et (iv). Pour la (iii), il suffit de remarquer que, si M est un treillis de D, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que M soit inclus dans $\varphi^k(T)^{-1}D^\sharp$, que $\varphi^k(T)^{-1}D^\sharp$ est stable par ψ, et que ψ est nilpotente sur le $\mathscr{O}_L$-module $\varphi^k(T)^{-1}D^\sharp/D^\sharp$ qui est de longueur finie. Pour la (iv), on commence par remarquer que, si $\psi(N) = N$, alors $N + D^\sharp$ vérifie les propriétés (i) et (ii) et donc que $N + D^\sharp = D^\sharp$, ou encore $N \subset D^\sharp$. Finalement, l'unicité de $D^\sharp$ et les arguments permettant de le construire à partir de M_∞ (cf. ci-dessus), montrent que, si N est un treillis de D vérifiant $\psi(N) = N$, alors la suite $\psi^n(T^{-1}N)$ est décroissante et $D^\sharp$ en est la limite, ce qui montre que $D^\sharp \subset T^{-1}N$ et permet de conclure dans le cas où D est de torsion.

Maintenant, si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $k \in \mathbf{N}$, on peut appliquer ce qui précède à $D_k = D/p^kD$. L'application naturelle $D_{k+1} \to D_k$ induit alors une application naturelle $D^\sharp_{k+1} \to D^\sharp_k$. Celle-ci est surjective car d'une part l'image de $D^\sharp_{k+1}$ est un treillis de D_k stable par ψ sur lequel ψ est surjectif et donc $D^\sharp_k/\mathrm{Im}(D^\sharp_{k+1})$ est tué par T et donc de type fini sur $\mathscr{O}_L$, et d'autre part, ψ est surjective sur $D^\sharp_k/\mathrm{Im}(D^\sharp_{k+1})$ (car elle l'est sur $D^\sharp_k$) et nilpotente (car elle est nilpotente sur $D_{k+1}/D^\sharp_{k+1}$). Soit alors M_k l'ensemble des $x \in D$ dont l'image dans D_k appartient à $D^\sharp_k$, et soit $M = \cap_{k\in\mathbf{N}} M_k$. La discussion précédente montre que M est un treillis de D vérifiant $(M + p^kD)/p^kD = D^\sharp_k$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$, ce qui permet de montrer que M vérifie les propriétés (i)-(iv) demandées, et conclut la démonstration.

Remarque 4.30. — Si $k \in \mathbf{N}$, alors $(D/p^kD)^\sharp = D^\sharp/(D^\sharp \cap p^kD)$ comme le montre la fin de la démonstration de la proposition. On fera attention au fait qu'en général l'application naturelle $D^\sharp/p^kD^\sharp \to (D/p^kD)^\sharp$ n'est pas un isomorphisme (i.e. n'est pas injective).

Lemme 4.31. — *Si $x \in D$, alors il existe un treillis M de D contenant tous les $\psi^n(x)$, pour $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Si $k \in \mathbf{N}$, alors $p^kD + D^\sharp$ contient tous les $\psi^n(x)$, pour $n \geqslant n(x, k)$, ce qui montre que $M = D^\sharp + \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathscr{O}_L[[T]]\psi^n(y)$ est un treillis de D.

Exemple 4.32. — (i) Si $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors $D^\sharp = T^{-1}\mathscr{O}_L[[T]]$.

(ii) Si $D = \mathscr{E}$, alors on peut décomposer $D^\sharp$ sous la forme $D^\sharp = L\cdot T^{-1} \oplus \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, en identifiant $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ à $\mathscr{O}_L[[T]][\frac{1}{p}]$ grâce à la transformée d'Amice.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) et de la théorie d'Amice. Pour démontrer le (i), constatons que $\mathscr{O}_L[[T]]$ est un treillis de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ stable par ψ et par φ, ce qui implique que $\psi : \mathscr{O}_L[[T]] \to \mathscr{O}_L[[T]]$ est surjective. D'après la proposition 4.29, ceci implique que $\mathscr{O}_L[[T]] \subset \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^\sharp \subset T^{-1}\mathscr{O}_L[[T]]$, et comme $\psi(T^{-1}) = T^{-1}$, cela permet de conclure.

4.6. φ-modules surconvergents

Définition 4.33. — (i) Un *φ-module* D, libre de rang d sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est *surconvergent* s'il existe $r(D) \in]0, \frac{1}{p-1}[$ et une base $e_1, \dots, e_d$ de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ telle que la matrice de $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)$ dans cette base appartienne à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r(D)/p]}[\frac{1}{T}])$.

(ii) Un *φ-module* D sur $\mathscr{E}$ est *surconvergent* s'il possède un réseau D_0 stable par φ qui est surconvergent. Tout réseau stable par φ est alors surconvergent.

Remarque 4.34. — Un φ-module surconvergent est en particulier étale.

Proposition 4.35. — *(i) Si D est un φ-module surconvergent sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, si $e_1, \dots, e_d$ est une base de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ telle que la matrice de $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_d)$ dans cette base appartienne à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r(D)/p]}[\frac{1}{T}])$, et si $r \in]0, r(D)]$, le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$-module $D^{(0,r]}$ de D engendré par $e_1, \dots, e_d$ est le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$-module M de type fini de D, tel que $\varphi(M)$ soit inclus dans le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r/p]}[\frac{1}{T}]$-module engendré par M ; en particulier, il ne dépend pas de la base $e_1, \dots, e_d$.*

(ii) Si D est un φ-module surconvergent sur $\mathscr{E}$, si $r \in]0, r(D)]$, alors $D^{(0,r]} = L \otimes_{\mathscr{O}_L} D_0^{(0,r]}$ ne dépend pas choix du réseau D_0 de D stable par φ.

Définition 4.36. — Un φ-module étale D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est un $\mathscr{E}^\dagger$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de φ telle que le φ-module $\mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D$ soit étale sur $\mathscr{E}$.

Remarque 4.37. — L'application $D \mapsto \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D$ induit une équivalence de catégorie de la catégorie des φ-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ sur celle des φ-modules surconvergents sur $\mathscr{E}$, le foncteur inverse étant $D \mapsto \cup_{r>0} D^{(0,r]}$.

Proposition 4.38. — *Si D est un φ-module étale surconvergent sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, il existe une base $f_1, \dots, f_d$ de $D^{(0,r(D)]}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r(D)]}[\frac{1}{T}]$ telle que le sous-module M engendré par $f_1, \dots, f_d$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r(D)]}$ vérifie la condition $\psi(M) \subset M$.*

Démonstration. — Soit $r = r(D)$. Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $D^{(0,r]}$ sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}]$. Par définition de $r(D)$, il existe $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \in \mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}[\frac{1}{T}])$ telle que l'on ait $e_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j}\varphi(e_j)$, si $1 \leqslant i \leqslant d$. Soit $b \in \mathbf{N}$ tel que $v^{[0,r]}(a_{i,j}) + (p-1)br \geqslant 1$ quels que soient $1 \leqslant i, j \leqslant d$, et soit $f_i = T^{-b} f_i$. On a alors

$$f_i = \sum_{j=1}^d b_{i,j}\varphi(f_j), \quad \text{avec } b_{i,j} = (T^{-1}\varphi(T))^b a_{i,j},$$

et $v^{(0,r/p]}(b_{i,j}) = bv^{[0,r]}(T^{-1}\varphi(T)) + v_p(a_{i,j}) = (p-1)br + v_p(a_{i,j}) \geqslant 1$. Montrons que les f_i, $1 \leqslant i \leqslant d$ que nous venons de construire conviennent. Soit M le sous-module qu'ils engendrent sur l'anneau des entiers de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$. Si $x \in M$, on peut écrire x sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^d x_i f_i = \sum_{j=1}^d y_j \varphi(f_j), \quad \text{avec } y_j = \sum_{i=1}^d b_{i,j} x_i,$$

et $x_i \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ vérifie $v^{(0,r]}(x_i) \geqslant 0$ et donc $y_j \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r/p]}$ vérifie $v^{(0,r/p]}(y_j) \geqslant 1$. Ceci nous donne $\psi(x) = \sum_{j=1}^d \psi(y_j) f_j$ et, d'après la prop. 1.12, $\psi(y_j) \in \mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$ vérifie $v^{(0,r]}(\psi(y_j)) \geqslant 0$. On en déduit l'inclusion $\psi(M) \subset M$ qui permet de conclure.

Corollaire 4.39. — *Si D est un φ-module étale surconvergent sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, libre de rang d, il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r(D)]}$-module M de $D^{(0,r(D)]}$, libre de rang d, tel que $M \supset D^\sharp$.*

Démonstration. — Soient $r = r(D)$ et $f_1, \dots, f_d \in D^{(0,r]}$ fournis par la proposition 4.38, et soit M' le sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^{(0,r]}$-module de $D^{(0,r]}$ par $f_1, \dots, f_d$. Alors M' est un treillis de D contenu dans $D^{(0,r]}$, tel que $\psi(M') \subset M'$. Comme $D^\sharp$ est un treillis de D, si $k \in \mathbf{N}$, il existe $n(M', k)$ tel que $D^\sharp \subset \varphi^{n(M',k)}(T)^{-1}M' + p^k D$. En appliquant $\psi^{n(M',k)}$ à cette inclusion, on en déduit, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, l'inclusion $D^\sharp \subset T^{-1}M' + p^k D$, ce qui montre que l'on peut prendre $M = T^{-1}M'$.

4.7. L'action de ψ sur $D^\sharp$

Lemme 4.40. — *L'application naturelle* $\iota : D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \to \varprojlim_k (D/p^kD)^\sharp/P(\psi)(D/p^kD)^\sharp$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la remarque 4.30, on a $(D/p^kD)^\sharp = D^\sharp/(D^\sharp \cap p^kD)$, et donc

$$(D/p^kD)^\sharp/P(\psi)(D/p^kD)^\sharp = D^\sharp/((D^\sharp \cap p^kD) + P(\psi)D^\sharp).$$

Comme $D^\sharp$ est complet, on en déduit la surjectivité de ι. Maintenant, si $x \in D^\sharp$ est dans le noyau de ι, alors, quel que soit $k \in \mathbf{N}$, on peut écrire x sous la forme $x = p^k y_k + P(\psi)z_k$, avec $y_k \in D$ et $z_k \in D^\sharp$. Comme $D^\sharp$ est compact, on peut extraire de la suite z_k une sous-suite convergeant vers $z \in D^\sharp$, et un passage à la limite montre que l'on a $x = P(\psi)z$. On en déduit l'injectivité de ι, ce qui permet de conclure.

Lemme 4.41. — *Soient* $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{m}_L$, *et soit* D *un* φ*-module étale sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.
(i) Si $P = 1 + a_{n-1}X + \cdots a_0X^n$, *alors* $D/P(\psi)D = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp = 0$.
(ii) Si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots a_0$, *alors* $D/P(\psi)D = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp = 0$.

Démonstration. — Soit $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\mathscr{O}_L$ définie par

$$(1 + a_{n-1}X + \cdots a_0X^n)\big(\sum_{i=0}^{+\infty} b_iX^i\big) = 1 \quad \text{dans } \mathscr{O}_L[[X]].$$

Comme $v_p(a_i) > 0$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$, cela implique que $v_p(b_i)$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$. On en déduit le fait que $\sum_{i=0}^{+\infty} b_i\psi^i$ est un inverse de $P(\psi)$ sur D et $D^\sharp$, ce qui démontre la surjectivité dans le premier cas.

Dans le second, en écrivant $P(\psi)$ sous la forme $P(\psi) = \psi^n(1 + a_{n-1}\varphi + \cdots + a_0\varphi^n)$, on voit que $P(\psi)$ est un inverse à gauche de $\Theta = \varphi^n \sum_{i=0}^{+\infty} b_i\varphi^i$ sur D ; on en déduit la surjectivité de $P(\psi)$ sur D.

Soit maintenant M un treillis de D stable par φ. (on a donc $M \subset D^\sharp$ d'après la prop. 4.29). Comme M est stable par φ, on en déduit les inclusions $\Theta(M) \subset M$ et $P(\psi)M \supset M$. Soit $N = D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$. C'est un quotient de $D^\sharp/M$ et donc un $\mathscr{O}_L$-module compact. Par ailleurs, ψ est surjectif sur N car il l'est sur $D^\sharp$, et topologiquement nilpotent car N est tué par $P(\psi)$ et les racines de P sont de valuation > 0. On en déduit la nullité de N, ce qui permet de conclure.

Corollaire 4.42. — *Si* D *est un* φ*-module étale sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, *si* $P \in \mathscr{O}_L[X]$ *a une image non nulle dans* $k_L[X]$, *et si* P^0 *est le polynôme défini dans le lemme 4.18, alors*

$$D/P(\psi)D = D/P^0(\psi)D \quad \text{et} \quad D^\sharp/P(\psi)D^\sharp = D^\sharp/P^0(\psi)D^\sharp.$$

Proposition 4.43. — *Si* D *est un* φ*-module étale sur* $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, *et si* $P \in \mathscr{O}_L[X]$ *a une image non nulle dans* $k_L[X]$, *l'inclusion* $D^\sharp \subset D$ *induit un isomorphisme* $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \cong D/P(\psi)D$.

Démonstration. — Le corollaire 4.42 montre que les deux $\mathscr{O}_L$-modules considérés ne changent pas si on remplace P par P^0, ce qui permet de se ramener au cas où P est unitaire et $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. On peut alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, écrire X sous la forme $X = PQ_n + X^nR_n$, avec $Q_n, R_n \in \mathscr{O}_L[X]$.

Si $x \in D$, on peut écrire x sous la forme $x = z_n + P(\psi)y_n$, avec $z_n = R_n(\psi)\cdot(\psi^n(x))$ et $y_n = (Q_n(\psi)(x)$. Comme le sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module de D engendré par les $\psi^n(x)$, $n \in \mathbf{N}$, est contenu dans un treillis de D (cf. lemme 4.31), on peut extraire de (z_n, y_n) une sous-suite convergeant vers $(z,y) \in D^2$, et on a $x = z + P(\psi)y$. Par ailleurs, si k est fixé, on a $\psi^n(x) \in D^\sharp + p^k D$ et donc $z_n \in D^\sharp + p^k D$ si n est assez grand. On en déduit l'appartenance de z à $D^\sharp + p^k D$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$, ce qui implique que $z \in D^\sharp$ et termine la démontration de la surjectivité de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \to D/P(\psi)D$.

Soit $x \in D^\sharp \cap P(\psi)D$. Soit $y \in D$ tel que $x = P(\psi)y$. Si $P = X^k + \cdots + a_0$, soit $M + D^\sharp + \mathscr{O}_L[[T]]y + \cdots + \mathscr{O}_L[[T]]\psi^{k-1}(y)$. Par construction, M est un treillis de D, contenant $D^\sharp$, stable par ψ car $P(\psi)y \in D^\sharp$. De plus, ψ est surjectif sur M car, si $z \in D^\sharp$ vérifie $\psi^k(z) = x$, on a

$$y = -a_0^{-1} = \psi(a_1 y + a_2\psi(y) + \cdots + \psi^{k-1}(y) - z).$$

Par construction de $D^\sharp$, ceci implique $M = D^\sharp$. On en déduit l'appartenance de y à $D^\sharp$ et l'injectivité de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \to D/P(\psi)D$, ce qui permet de conclure.

Lemme 4.44. — *Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors*

$$TD^\sharp \subset P(\psi)D^\sharp \subset D^\sharp.$$

Démonstration. — L'inclusion $P(\psi)D^\sharp \subset D^\sharp$ est immédiate. Pour démontrer l'inclusion $TD^\sharp \subset P(\psi)D^\sharp$, le cor. 4.42 permet de se ramenener au cas où P est unitaire et $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. Soit alors $(b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de $\mathscr{O}_L$ définie par

$$X^{\deg P} P(1/X)\Big(\sum_{k=0} b_k X^k\Big) = 1 \quad (\text{dans } \mathscr{O}_L[[X]]).$$

Commençons par suposer que D est de torsion. Soit $x \in D^\sharp$, et soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi(\varphi^n(T)D^\sharp) = \varphi^{n+1}(T)\varphi(D^\sharp) \subset T\varphi^n(T)D^\sharp$. Comme $\psi : D^\sharp \to D^\sharp$ est surjectif, on peut trouver $y \in D^\sharp$ tel que $x = \psi^n(y)$ et on a $Tx = \psi^n(\varphi^n(T)y)$. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k \varphi^{k+\deg P}(\varphi^n(T)y)$ converge alors dans $D^\sharp$ (et même dans $\varphi^n(T)D^\sharp$) et sa somme z vérifie $P(\psi)z = \varphi^n(T)y$. On a donc $Tx = P(\psi)(\psi^n(z))$, ce qui permet de conclure, si D est de torsion.

Dans le cas général, il résulte de ce qui précède que, si $x \in TD^\sharp$, et si $k \in \mathbf{N}$, il existe $y_k \in D^\sharp$ et $z_k \in D$ tels que l'on ait $x = P(\psi)y_k + p^k z_k$. On peut alors extraire de y_k une sous-suite convergent vers $y \in D^\sharp$, et un passage à la limite dans D montre que $x = P(\psi)y$, ce qui permet de conclure.

Proposition 4.45. — *Si D est un φ-module étale de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors*

$$\lg_{\mathscr{O}_L} D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \leqslant \lg_{\mathscr{O}_L}(D^\vee)^{P(\varphi)=0}.$$

Démonstration. — Quitte à remplacer P par P^0 ce qui ne change pas les objets considérés, on peut supposer que P est unitaire et $P(0) \in \mathscr{O}_L^*$. Notons M_1 et M_2 respectivement les treillis $D^\sharp$ et $P(\psi)D^\sharp$ de D. D'après le lemme 4.44, on a $T^{-1}M_2 \supset M_1 \supset M_2$. Si $i = 1,2$, soit M_i^* le treillis de $D^\vee$ défini par : « $x \in M_i^*$ si et seulement si $[x,y] = 0$ quel que soit $y \in M_i$ ». On a donc $M_2^* \supset M_1^* \supset TM_2^*$.

Comme $[\varphi(x),y] = [x,\psi(y)]$, la surjectivité de $\psi : M_i \to M_i$ entraine la stabilité de M_i^* sous l'action de φ. Par ailleurs, comme $[x,P(\psi)y] = [P(\varphi)x,y]$ et $P(\psi)M_1 = M_2$, on voit que, si

$x \in M_2^*$, alors $[P(\varphi)x, y] = 0$ quel que soit $y \in M_1$ et donc que $P(\varphi)$ tue M_2^*/M_1^*. On en déduit les inégalités

$$\lg_{\mathscr{O}_L} M_1/M_2 = \lg_{\mathscr{O}_L} M_2^*/M_1^* \leqslant \lg_{\mathscr{O}_L}(M_2^*/TM_2^*)^{P(\varphi)=0} = \lg_{\mathscr{O}_L}(M_2^*)^{P(\varphi)=0} \leqslant \lg_{\mathscr{O}_L}(D^\vee)^{P(\varphi)=0},$$

la première (in)égalité provenant de la prop. 4.14, la seconde provenant de ce que M_2^*/M_1^* est un quotient de M_2^*/TM_2^* tué par $P(\varphi)$, (En posant $A = M_1^*/TM_2^*$, $B = M_2^*/TM_2^*$ et $C = M_2^*/M_1^*$, on a la suite exacte $0 \to A \to B \to C \to 0$, d'où l'on déduit la suite exacte

$$0 \to A^{P(\varphi)=0} \to B^{P(\varphi)=0} \to C^{P(\varphi)=0} \to A/P(\varphi)A,$$

et les inégalités

$$\begin{aligned}\lg_{\mathscr{O}_L} B^{P(\varphi)=0} &= \lg_{\mathscr{O}_L} A^{P(\varphi)=0} + \lg_{\mathscr{O}_L} C^{P(\varphi)=0} - \lg_{\mathscr{O}_L}(\mathrm{Im}\big(C^{P(\varphi)=0} \to A/P(\varphi)A)\big)\\ &\geqslant \lg_{\mathscr{O}_L} A^{P(\varphi)=0} + \lg_{\mathscr{O}_L} C - \lg_{\mathscr{O}_L} A/P(\varphi)A = \lg_{\mathscr{O}_L} C.)\end{aligned}$$

la troisième suivant du lemme 4.20, et la dernière étant une évidence. Ceci permet de conclure.

Théorème 4.46. — *Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $P \in \mathscr{O}_L[X]$ a une image non nulle dans $k_L[X]$, alors l'application $\iota : D \to (D^\vee)^\wedge$ induit des isomorphismes*

$$D^{P(\psi)=0} \cong (D^\vee/P(\varphi)D^\vee)^\wedge \quad \text{et} \quad D/P(\psi)D \cong ((D^\vee)^{P(\varphi)=0})^\wedge.$$

Démonstration. — Le $\mathscr{O}_L$-module $(D^\vee/P(\varphi)D^\vee)^\wedge$ s'identifie, via ι^{-1} au sous-ensemble des éléments x de D tels que l'on ait $[x, P(\varphi)y] = 0$ quel que soit $y \in D^\vee$. Comme $[x, P(\varphi)y] = [P(\psi)x, y]$, cet ensemble est aussi l'ensemble des $x \in D$ tel que, quel que soit $y \in D^\vee$, on ait $[P(\psi)x, y]$ c'est-à-dire $D^{P(\psi)=0}$. On en déduit le premier isomorphisme.

Comme $[x, P(\varphi)y] = [P(\psi)x, y]$, la restriction de $\iota(x)$ à $(D^\vee)^{P(\varphi)=0}$ est nulle si $x \in P(\psi)D$, et donc ι induit une application k_L-linéaire de $D/P(\psi)D$ dans $((D^\vee)^{P(\varphi)=0})^\wedge$. Si D est de torsion, le $\mathscr{O}_L$-module $(D^\vee)^{P(\varphi)=0}$ est de longueur finie d'après le lemme 4.21 et cette application est surjective d'après la prop. 4.9, et la surjectivité de l'application naturelle $(D^\vee)^\wedge \to ((D^\vee)^{P(\varphi)=0})^\wedge$. Comme par ailleurs, $\lg_{\mathscr{O}_L} D/P(\psi)D = \lg_{\mathscr{O}_L} D^\sharp/P(\psi)D^\sharp \leqslant \lg_{\mathscr{O}_L}(D^\vee)^{P(\varphi)=0}$ d'après les propositions 4.43 et 4.45, on en déduit le second isomorphisme, ce qui termine la démonstration dans le cas d'un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module de torsion. Le cas général s'en déduit par passage à la limite comme dans la démonstration de la prop. 4.9

Proposition 4.47. — *Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, si M est un treillis de D stable par ψ, et si $\psi : M \to M$ est surjective, alors $D^\sharp/M$ est un $\mathscr{O}_L$-module de dimension $\leqslant \dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D$.*

Démonstration. — Si D est de torsion, alors $D^\sharp/M$ est un $\mathscr{O}_L$-module de type fini puisque $D^\sharp$ et M sont des treillis de D. Il existe donc $P \in \mathscr{O}_L[X]$ dont l'image dans $k_L[X]$ n'est pas nulle tel que $P(\psi)$ soit identiquement nul sur $D^\sharp/M$. Ceci implique que $D^\sharp/M$ est un quotient de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$, et comme la dimension sur $\mathscr{O}_L$ de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$ est égale à celle de $D^{P(\varphi)=0}$ d'après le th. 4.46, le cor. 4.22 permet de conclure, si D est de torsion. Le cas général s'en déduit par passage à la limite en utilisant l'isomorphisme

$$D^\sharp/M = \varprojlim D^\sharp/(M + (p^kD \cap D^\sharp)) = \varprojlim (D/p^kD)^\sharp/(M/(p^kD \cap M)).$$

4.8. Le module $\psi^{-\infty}(D)$

Si D est un φ-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ ou $\mathscr{E}$, une suite $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de D est *bornée* s'il existe un treillis de D contenant tous les $w^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$. On note $\psi^{-\infty}(D)$ l'ensemble des suites bornées $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de D vérifiant $\psi(w^{(n+1)}) = w^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Plus généralement, si $M \subset D$, on note $\psi^{-\infty}(M)$ l'ensemble des suites d'éléments $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de $\psi^{-\infty}(D)$ telles que l'on ait $w^{(n)} \in M$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. On déduit de la propriété (iii) de $D^\sharp$ que si $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(D)$, alors $w^{(n)} \in D^\sharp$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Autrement dit, $\psi^{-\infty}(D) = \psi^{-\infty}(D^\sharp)$.

Remarque 4.48. — Le module $D^{\psi=1}$ s'identifie naturellement à un sous-$\mathscr{O}_L$-module de $\psi^{-\infty}(D)$. Rappelons que ce module joue un rôle très important en théorie d'Iwasawa.

Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, on munit $\psi^{-\infty}(D)$ de la topologie de la limite projective (induite par la topologie produit), $D^\sharp$ étant muni de la topologie induite par la topologie faible sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, ce qui fait de $\psi^{-\infty}(D)$ un $\mathscr{O}_L$-module compact. Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{E}$, et si D_0 est un réseau de D stable par φ, alors $\psi^{-\infty}(D) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \psi^{-\infty}(D_0)$ et on munit $\psi^{-\infty}(D) = \cup_{n\in\mathbf{N}} p^{-n}\psi^{-\infty}(D_0)$ de la topologie de la limite inductive, ce qui en fait un L-espace vectoriel complet pour une topologie localement convexe.

Exemple 4.49. — Comme $\psi(T^{-1}) = T^{-1}$, on peut voir T^{-1} comme un élément de $\psi^{-\infty}(\mathscr{E})$. L'isomorphisme $\mathscr{E}^\sharp \cong L \cdot T^{-1} \oplus \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ de l'exemple 4.32 nous fournit un isomorphisme de L-espaces vectoriels topologiques $\psi^{-\infty}(\mathscr{E}) \cong L \cdot T^{-1} \oplus \mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p)$, où $\mathscr{D}_0(\mathbf{Q}_p)$ est muni de la topologie de la convergence faible.

Proposition 4.50. — *Si D un φ-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, et si $\overline{D} = D/\mathfrak{m}_L D$, alors la suite de $\mathscr{O}_L$-modules ci-dessous est exacte :*

$$0 \to \mathfrak{m}_L\psi^{-\infty}(D) \to \psi^{-\infty}(D) \to \psi^{-\infty}(\overline{D}) \to 0.$$

Démonstration. — La seule chose non évidente est la surjectivité de l'application $\psi^{-\infty}(D) \to \psi^{-\infty}(\overline{D})$. Soit donc $\overline{w} = (\overline{w}^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(\overline{D})$. Choisissons une base $e_1, \dots, e_d$ de D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ dont les images $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_d$ forment une base de $\overline{D}^\sharp$ sur $k_L[[T]]$, et notons M le sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module de D engendré par $e_1, \dots, e_d$. Finalement, choisissons une section $s : k_L[[T]] \to \mathscr{O}_L[[T]]$ de la réduction modulo $\mathfrak{m}_L$. Nous allons construire, par récurrence sur k une suite d'entiers m_k et une suite $w_k = (w_k^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ d'éléments de D vérifiant les conditions suivantes pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$.

- $w_k^{(n)} \in M + \mathfrak{m}_L T^{-m_1} M + \cdots + \mathfrak{m}_L^k T^{-m_k} M$;
- $\psi(w_k^{(n+1)}) - w_k^{(n)} \in \mathfrak{m}_L^k D$,
- $w_{k+1}^{(n)} - w_k^{(n)} \in \mathfrak{m}_L^k D$,
- $w_k^{(n)}$ a pour image $\overline{w}^{(n)}$ dans $\overline{D}$.

Il suffira alors de poser $w^{(n)} = \lim_{k\to+\infty} w_k^{(n)}$ pour construire un élément de $\psi^{-\infty}(D)$ dont l'image dans $\psi^{-\infty}(\overline{D})$ est $\overline{w}$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.51. — *Si $m \in \mathbf{N}$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $T^{-m}\overline{D}^\sharp$, alors il existe une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $T^{-m}\overline{D}^\sharp$ telle que $u_n = \psi(v_{n+1}) - v_n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — On a $\psi^k(T^{-m}D^\sharp) \subset \psi^k(T^{-mp^k}D^\sharp) = T^{-m}D^\sharp$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et, par ailleurs, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^k(T^{-m}D^\sharp) \subset D^\sharp$ d'après le (iii) de la proposition 4.29. Comme ψ induit une surjection de $D^\sharp$ sur lui-même, on peut construire par récurrence sur n une suite $v' = (v'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $D^\sharp$ vérifiant $v'_0 = 0$ et $\psi(v'_{n+1}) = \psi^k(u_{n+k}) + v'_n$ si $n \in \mathbf{N}$. Si on pose alors

$$v_n = v'_n - (u_n + \psi(u_{n+1}) + \cdots + \psi^{k-1}(u_{n+k-1})),$$

on a $v_n \in T^{-m}D^\sharp$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, et

$$\psi(v_{n+1}) - v_n = \psi(v'_{n+1}) - v'_n - (\psi^k(u_{n+k}) - u_n) = u_n,$$

ce qui montre que la suite v_n ainsi construite convient.

Revenons à la démonstration de la prop. 4.50. Pour construire w_0, il suffit d'écrire $\overline{w}^{(n)}$ sous la forme $\overline{w}^{(n)} = \sum_{i=1}^d a_i\bar{e}_i$, avec $a_i \in k_L[[T]]$ puisque $\overline{w}^{(n)} \in \overline{D}^\sharp$, et de poser $w_0^{(n)} = \sum_{i=1}^d s(a_i)e_i \in M$.

Supposons w_k construite. Choisissons une uniformisante ϖ_L de L. On note $u_k^{(n)} \in \overline{D}$ l'image de $\varpi_L^{-k}(\psi(w_k^{(n+1)}) - w_k^{(n)})$. La suite w_k étant bornée, la suite $u_k = (u_k^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ est une suite bornée d'éléments de $\overline{D}$. Par suite, il existe $m_k \in \mathbf{N}$ tel que $u_k^{(n)} \in T^{-m_k}\overline{D}^\sharp$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. D'après le lemme 4.51, il existe $v_k = (v_k^{(n)})_{k\in\mathbf{Z}}$ une suite d'éléments de $T^{-m_k}\overline{D}^\sharp$ telle que $\psi(v_k^{(n+1)}) - v_k^{(n)} = u_k^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$. Il ne reste plus qu'à écrire $v_k^{(n)}$ sous la forme $v_k^{(n)} = T^{-m_k}\sum_{i=1}^d a_i^{(n)}\bar{e}_i$, avec $a_i^{(n)} \in k_L[[T]]$ si $1 \leqslant i \leqslant d$, et à poser

$$w_{k+1}^{(n)} = w_k^{(n)} + \varpi_L^k T^{-m_k}\sum_{i=1}^d s(a_k^{(n)})e_i,$$

pour construire une suite $w_{k+1} = (w_{k+1}^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ avec les propriétés voulues. Ceci permet de conclure.

4.9. (φ,Γ)-modules

Rappelons que l'on a aussi muni $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ d'une action continue de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$, respectant la structure de $\mathscr{O}_L$-algèbre de $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ et faisant agir $\gamma \in \Gamma$ sur T par $T \mapsto \gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1$.

Définition 4.52. — Un (φ,Γ)-*module* sur $k_L((T))$, $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ ou $\mathscr{E}$ est un φ-module qui est en plus muni d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ. Un tel module est *étale* s'il l'est en tant que φ-module.

Proposition 4.53. — *Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ ou $\mathscr{E}$, alors D est surconvergent et, si $r \in]0, r(D)]$, alors $D^{(0,r]}$ est stable par Γ.*

Lemme 4.54. — *Si D est un (φ,Γ)-module, alors ψ commute à l'action de Γ.*

Proposition 4.55. — *Soient D et D' deux (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$. Si $h : D \to D'$ un est morphisme de $\mathscr{O}_\mathscr{E}$-modules commutant à ψ et Γ, alors h est un morphisme de (φ,Γ)-modules.*

Démonstration. — Si $1 \leqslant i \leqslant p-1$, on a

$$\psi((1+T)^{-i}h(\varphi(x))) = \psi(h((1+T)^{-i}\varphi(x))) = h(\psi((1+T)^{-i}\varphi(x))) = 0.$$

On en déduit (rem. 4.23) l'existence de $y \in D'$ tel que $h(\varphi(x)) = \varphi(y)$. On a alors

$$y = \psi(\varphi(y)) = \psi(h(\varphi(x))) = h(\psi(\varphi(x))) = h(x),$$

et donc $h\circ\varphi=\varphi\circ h$, ce qui permet de conclure.

Lemme 4.56. — *Si $A=k_L((T))$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ ou $\mathscr{E}$, si D est un (φ,Γ)-module étale sur A, si M est un sous-A-module de D stable par ψ et Γ, et si M engendre D en tant que (φ,Γ)-module, alors $M=D$.*

Démonstration. — Si $i\in\mathbf{N}$, soit $(\varphi^*)^iM$ le sous-A-module de D engendré par $\varphi^i(M)$. Si $k\in\mathbf{N}$, soit $M_k=\sum_{i=0}^k(\varphi^*)^iM$. Comme $\psi((\varphi^*)^iM)=(\varphi^*)^{i-1}M$, et comme $\psi(M)\subset M$ par hypothèse, on a $\psi(M_{k+1})\subset M_k$ quel que soit $k\in\mathbf{N}$. Par ailleurs, la suite M_k est une suite croissante de sous-A-modules de D ; elle est donc stationnaire, et la limite est stable par φ par construction, et par Γ puisque M l'est et φ commute à Γ. C'est donc le (φ,Γ)-module engendré par M et notre hypothèse selon laquelle M engendre D en tant que (φ,Γ)-module se traduit par l'existence de $k\in\mathbf{N}$ telle que $M_k=D$. Ceci implique

$$D=\psi^k(D)=\psi^k(M_k)\subset M_0=M,$$

et permet de conclure.

Si D est un (φ,Γ)-module étale sur $k_L((T))$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, ou $\mathscr{E}$, on définit une action de

$$P(\mathbf{Q}_p)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ a\in\mathbf{Q}_p^*,\ b\in\mathbf{Q}_p\right\}$$

sur $\psi^{-\infty}(D)$, de la manière suivante. Si $w=(w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}\in\psi^{-\infty}(D)$, alors

$$\left(\begin{pmatrix} p^k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\star w\right)^{(n)}=w^{(n+k)} \text{ si } k\in\mathbf{Z},\quad \text{en particulier, } \left(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\star w\right)^{(0)}=w^{(-1)}=\psi(w^{(0)})\,;$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\star w\right)^{(n)}=\gamma_a(w^{(n)}) \text{ si } a\in\mathbf{Z}_p^* \text{ et } \gamma_a\in\Gamma \text{ vérifie } \chi(\gamma_a)=a\,;$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\star w\right)^{(n)}=(1+T)^{bp^n}w^{(n)} \text{ si } b\in\mathbf{Q}_p \text{ et } n\geqslant -v_p(b).$$

On remarquera que l'on n'a pas, en général, une formule explicite pour $(g\star w)^{(n)}$ si n est très négatif, mais on la récupère en utilisant la relation $(g\star w)^{(n)}=\psi^N((g\star w)^{(n+N)})$ et en prenant $N\in\mathbf{N}$ assez grand. Pour démontrer que ceci définit bien une action de groupe, il n'y a qu'à constater que cette action est donnée par les mêmes formules que sur les transformées d'Amice des éléments de $\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$.

L'action de $P(\mathbf{Z}_p)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ a\in\mathbf{Z}_p^*,\ b\in\mathbf{Z}_p\right\}$ s'étend en une action continue de $\mathscr{O}_L[[P(\mathbf{Z}_p)]]$ et, en particulier, en une action de $\mathscr{O}_L[[\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}]]$. Si $\mu\in\mathscr{O}_L[[\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}]]$, on définit la transformée d'Amice $\mathscr{A}_\mu\in\mathscr{O}_L[[T]]$ de μ en utilisant l'isomorphisme naturel de $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sur $\mathbf{Z}_p$ envoyant $\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sur x. (On a donc $\mathscr{A}_\mu(T)=\int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu(\begin{pmatrix} 1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix})$.) L'action de $\mu\in\mathscr{O}_L[[\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}]]$ sur $w\in\psi^{-\infty}(D)$ est alors donnée par la formule

$$(\mu\star w)^{(n)}=\mathscr{A}_\mu((1+T)^{p^n}-1)w^{(n)} \text{ si } n\geqslant 0.$$

En particulier, en prenant $n=0$, on voit que l'action de $\mathscr{O}_L[[\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{pmatrix}]]$ encode la structure de $\mathscr{O}_L[[T]]$-module de $D^\sharp$.

Lemme 4.57. — *Soit $M\subset\psi^{-\infty}(D)$ un sous-$\mathscr{O}_L$-module fermé et, si $k\in\mathbf{Z}$, soit $M^{(k)}$ l'ensemble des $x\in D$ tels qu'il existe $w=(w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}\in M$, avec $w^{(k)}=x$. Alors*

(i) $M^{(k)}=M^{(0)}$ quel que soit $k\in\mathbf{Z}$;

(ii) $M^{(0)}$ est un sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module de $D^\sharp$ stable par ψ qui agit surjectivement, et par Γ.
(iii) $M = \psi^{-\infty}(M^{(0)})$.

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont immédiats, ainsi que l'inclusion $M \subset \psi^{-\infty}(M^{(0)})$. Reste l'inclusion $\psi^{-\infty}(M^{(0)}) \subset M$ à vérifier. Soit $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(M^{(0)})$. Si $k \in \mathbf{N}$, il existe $u_k = (u_k^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in M$ tel que $u_k^{(k)} = w^{(k)}$ car $M^{(k)} = M^{(0)}$. Par définition de la topologie sur $\psi^{-\infty}(D)$, la suite u_k tend vers w dans $\psi^{-\infty}(D)$ quand k tend vers $+\infty$, et M étant supposé fermé, cela implique $w \in M$, ce qui permet de conclure.

Théorème 4.58. — *Soit D un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$. Si M est un sous-L-espace vectoriel fermé de $\psi^{-\infty}(D)$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe un sous-(φ,Γ)-module D' de D tel que*

$$M \subset \psi^{-\infty}(D') \quad \text{et} \quad \psi^{-\infty}(D')/M \textit{ est de dimension} \leqslant \dim_{\mathscr{E}} D' \textit{ sur } L.$$

Démonstration. — Soit $M^{(0)}$ l'ensemble de $x \in D$ tels qu'il existe $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(D)$ avec $w^{(0)} = x$. D'après le lemme 4.57, on a $M = \psi^{-\infty}(M^{(0)})$, et quitte à remplacer D par le sous-(φ,Γ)-module de D engendré par $M^{(0)}$, on peut supposer que $M^{(0)}$ engendre D en tant que (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$. Choisissons un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau D_0' de D stable par φ et Γ, et soit D_0 le sous-(φ,Γ)-module de D_0' sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ engendré par $M_0^{(0)} = M^{(0)} \cap D_0'$; c'est aussi un sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau de D puisque l'on a supposé que $M^{(0)}$ engendre D en tant que (φ,Γ)-module sur $\mathscr{E}$. Soit $M_0 = \psi^{-\infty}(M_0^{(0)})$. C'est un-$\mathscr{O}_L$-réseau de M. Soient $\overline{D} = D_0/\mathfrak{m}_L D_0$, $\overline{M} = M_0/\mathfrak{m}_L M_0$ et $\overline{M}^{(0)} = M_0^{(0)}/\mathfrak{m}_L M_0^{(0)}$. Par construction, $\overline{M} = \psi^{-\infty}(\overline{M}^{(0)})$ et $\overline{M}^{(0)}$ engendre $\overline{D}$ en tant que (φ,Γ)-module sur $k_L((T))$.

Maintenant, l'hypothèse selon laquelle M est stable sous l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ se traduit par la stabilité de $\overline{M}$ sous cette action et par le fait que $\overline{M}^{(0)}$ est un sous-$k_L[[T]]$-module de $\overline{D}$ stable par Γ sur lequel ψ agit de manière surjective. Comme $\psi(T^{-pk}x) = T^{-k}\psi(x)$, on en déduit le fait que le sous-$k_L((T))$-espace vectoriel de $\overline{D}$ engendré par $\overline{M}^{(0)}$ est stable par ψ et Γ et donc, d'après le lemme 4.56, est égal au sous-(φ,Γ)-module de $\overline{D}$ qu'il engendre, c'est-à-dire à $\overline{D}$; en d'autres termes, $\overline{M}^{(0)}$ est un réseau de $\overline{D}$. Par ailleurs, comme M est stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, cela implique que $M_0^{(0)}$ est un sous-$\mathscr{O}_L[[T]]$-module de D_0 inclus dans $D^\sharp$, comme de plus $M_0^{(0)}$ est fermé par hypothèse et son image dans $\overline{D}$ est un réseau, cela implique que $M_0^{(0)}$ est un treillis de D_0. Finalement, ψ induit une surjection de $D_0^\sharp/M_0^{(0)}$ sur lui-même et donc une bijection puisque $D_0^\sharp$ et $M_0^{(0)}$ sont des treillis de D_0. On en déduit que l'application $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \mapsto w^{(0)}$ induit un isomorphisme

$$\psi^{-\infty}(D_0)/M_0 = \psi^{-\infty}(D_0^\sharp)/M_0 \cong D_0^\sharp/M_0^{(0)}.$$

Ceci permet de conclure car $D_0^\sharp/M_0^{(0)}$ est un $\mathscr{O}_L$-module de dimension $\leqslant \dim_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}} D_0$ d'après le cor. 4.22.

Corollaire 4.59. — *Si D est un (φ,Γ)-module étale irréductible sur $\mathscr{E}$ et si D^* ne contient pas de sous-L-espace vectoriel non nul, de dimension finie, stable par φ, alors $\psi^{-\infty}(D)$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$-module toplogiquement irréductible.*

Démonstration. — Soit M un sous-$P(\mathbf{Q}_p)$-module fermé non nul de $\psi^{-\infty}(D)$. Comme D est supposé irréductible en tant que (φ,Γ)-module, il résulte du th. 4.58 que $w \mapsto w^{(0)}$ induit un isomorphisme de $\psi^{-\infty}(D)/M$ sur $D^\sharp/M^{(0)}$ qui est de dimension finie sur L. Soit $P \in L[X]$

le polynôme caractéristique de ψ sur $D^\sharp/M^{(0)}$. Alors $D^\sharp/M^{(0)}$ est un quotient de $D^\sharp/P(\psi)D^\sharp$ qui est le dual de $(D^*)^{P(\varphi)=0}$. Comme ce dernier module est un sous-L-espace vectoriel de D^*, stable par φ et de dimension finie d'après le cor. 4.22, il est nul par hypothèse, ce qui permet de conclure.

5. Des (φ, Γ)-modules aux représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$.

5.1. (φ, N)-modules filtrés et (φ, Γ)-modules

5.1.1. Représentations galoisiennes. — Soit $\overline{\mathbf{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. Notons $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$; notons $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty}))$ le noyau du caractère cyclotomique $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$. Soit $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois de l'extension cyclotomique ; il est isomorphe à $\mathbf{Z}_p^*$ via χ.

Définition 5.1. — Si $G = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$, une *$L$-représentation V* de G est un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action L-linéaire continue de G.

Nous allons rappeler un certain nombre de résultats concernant la classification de ces représentations (programme de Fontaine). Notons que Fontaine considère en général des $\mathbf{Q}_p$-représentations au lieu de L-représentations ; l'extension aux L-représentations ne pose aucun problème : il suffit de tensoriser les anneaux de Fontaine usuels (avec leurs structures, φ, N, filtration) par L au dessus de $\mathbf{Q}_p$. Comme on regarde les représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, tout se passe sans douleur ; si on s'intéressait aux représentations de $\mathscr{G}_K$, K extension finie de $\mathbf{Q}_p$, il faudrait juste se méfier au niveau de la filtration de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$: les $L\otimes K$-modules qui interviennent ne sont pas forcément libres. Nous ne nous attarderons pas sur la construction des anneaux de Fontaine car il existe maintenant [**1, 2, 14**] une description des relations entre les différents invariants attachés à une représentation galoisienne n'utilisant que des anneaux de séries de Laurent, et c'est de cette relation dont nous aurons besoin.

5.1.2. φ-modules, (φ, Γ)-modules et représentations galoisiennes. — Fontaine a construit un anneau $\mathbf{B}$ (qu'il note $\widehat{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}$) muni d'actions de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et φ, commutant entre elles, telles que $(\mathbf{B})^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}} = \mathscr{E}$ et $(\mathbf{B})^{\varphi=1} = L$, qui permet de décrire les L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 5.2. — *(i) Si V est une L-représentation de $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B}\otimes_L V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$ est un φ-module étale sur $\mathscr{E}$.*

(ii) Si D est un φ-module étale sur $\mathscr{E}$, alors $\mathbf{V}(D) = (\mathbf{B}\otimes_{\mathscr{E}} D)^{\varphi=1}$ est une L-représentation de $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) De plus, les foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{D}$ sont inverses l'un de l'autre.

Proposition 5.3. — *(i) Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{B}\otimes_L V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}$ est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$.*

(ii) Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}$, alors $\mathbf{V}(D) = (\mathbf{B}\otimes_{\mathscr{E}} D)^{\varphi=1}$ est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) De plus, les foncteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{D}$ sont inverses l'un de l'autre.

Remarque 5.4. — La théorie des (φ, Γ)-modules marche tout aussi bien au niveau entier, en remplaçant l'anneau $\mathbf{B}$ ci-dessus par l'anneau $\mathbf{A}$ de ses entiers. En particulier, si T est un réseau d'une L-représentation V, alors $\mathbf{D}(T)$ est un réseau de $\mathbf{D}(V)$; si $\overline{T} = T/\mathfrak{m}_L T$ est la représentation résiduelle de V, alors $\mathbf{D}(\overline{T}) = \mathbf{D}(T)/\mathfrak{m}_L\mathbf{D}(T)$.

Par ailleurs, comme nous l'avons déjà signalé (prop. 4.53 et commentaires), $D \mapsto \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D$ est une équivalence de catégories de la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ sur la catégorie des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$. En composant cette équivalence de catégories avec celle de la proposition 5.3, on en déduit l'existence de deux foncteurs $\mathbf{V}^\dagger$ et $\mathbf{D}^\dagger$, inverses l'un de l'autres, établissant une équivalence de catégories entre la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et celle des (φ, Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$. On peut par ailleurs décrire ces foncteurs en introduisant le sous-anneau $\mathbf{B}^\dagger$ des éléments *surconvergents* de $\mathbf{B}$, et on a

$$\mathbf{V}^\dagger(D) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D)^{\varphi=1} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}^\dagger(V) = (\mathbf{B}^\dagger \otimes_L V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}.$$

Remarque 5.5. — Lors de notre étude sur l'action de ψ sur un φ-module ou un (φ, Γ)-module, un certain nombre de propriétés ont été mises en avant (cf. cor. 4.59 par exemple). On peut utiliser les équivalences de catégories ci-dessus pour les traduire en des propriétés des représentations galoisiennes associées. Soit donc D un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{E}$ et $V = \mathbf{V}(D)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui est attachée.

(i) D est irréductible en tant que (φ, Γ)-module si et seulement si V est irréductible en tant que représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$;

(ii) D est irréductible en tant que φ-module si et seulement si la restriction de V à $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}$ est irréductible ;

(iii) D n'a pas de sous-L-espace vectoriel de dimension finie stable par φ si et seulement si V n'a pas de sous-espace non nul sur lequel $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}})$ agit trivialement.

Les deux premiers points sont de simples traductions. Le dernier se démontre en remarquant que les éléments de $\mathbf{B}$ dont les images par φ^n, $n \in \mathbf{N}$, engendrent un espace de dimension finie sur L, appartiennent au sous-anneau $L \otimes \widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$ de $\mathbf{B}$, et donc que, si $P \in L[X]$, alors

$$D^{P(\varphi)=0} \subset (\widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}} \subset \widehat{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}})}.$$

Ceci démontre une des implications du dernier point ; l'autre est immédiate.

5.1.3. (φ, N)-modules filtrés et représentations galoisiennes. —

Définition 5.6. — (i) Un (φ, N)-module filtré D est un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'actions linéaires de φ et N, avec $N\varphi = p\varphi N$ et d'une filtration décroissante par des sous-L-espaces vectoriels D^i, $i \in \mathbf{Z}$, avec $D^i = 0$ si $i \gg 0$ et $D^i = D$ si $i \ll 0$.

(ii) Si D est un (φ, N)-module filtré, on lui associe les invariants $t_N(D)$ et $t_H(D)$ définis par

$$t_N(D) = v_p(\det \varphi) \quad \text{et} \quad t_H(D) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} i \cdot \dim_L(D^i/D^{i+1}).$$

(iii) Un (φ, N)-module filtré D est *admissible* si $t_H(D) = t_N(D)$ et si $t_H(D') \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-L-espace vectoriel de D stable par φ et N (muni de la filtration induite).

Rappelons que Fontaine a construit

• un anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ muni d'actions L-linéaires de φ, N et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutant à celles de φ et N, et $N\varphi = p\varphi N$,

• un anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ muni d'une filtration décroissante et d'une action L-linéaire de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ respectant cette filtration

• une injection $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$.

Rappelons aussi qu'une L-représentation V de dimension d est *semi-stable* si $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_L V \cong \mathbf{B}_{\mathrm{st}}^d$ en tant que $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$-modules. La catégorie des L-représentations semi-stables de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est équivalente à celle des (φ, N)-modules filtrés admissibles. Plus précisément, on a le résultat suivant ;

Proposition 5.7. — *(i) Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_L V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}}$ est un (φ, N)-module filtré admissible.*

(ii) Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_L V)^{N=0,\, \varphi=1}$ est une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) De plus, les foncteurs $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ sont inverses l'un de l'autre.

5.1.4. (φ, N)-modules filtrés et (φ, Γ)-modules. — Si on part d'un (φ, N)-module filtré admissible D, alors $D^\dagger = \mathbf{D}^\dagger(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D))$ est un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{E}^\dagger$. Cette description de $D^\dagger$ utilise les deux anneaux de Fontaine $\mathbf{B}^\dagger$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et est donc loin d'être transparente. Heureusement, on dispose maintenant d'une description directe du module $D^\dagger$ en terme de D en passant par l'anneau de Robba $\mathscr{R}$ qui est quand même nettement plus concret. La description à laquelle il est fait allusion ci-dessus va demander un peu de préparation. Rappelons que l'on a étendu la notion d'ordre de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log T]$.

Si D est un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire de φ, on a une décomposition canonique $D = \oplus_{r \in \mathbf{Q}} D_{[r]}$ par les pentes de φ, où $D_{[r]}$ est la somme des sous-espaces caractéristiques pour les valeurs propres α de φ de valuation $v_p(\alpha) = r$. Une base $e_1, \dots, e_d$ de D est dite *adaptée à* φ si, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant d$, il existe $r_i \in \mathbf{Q}$ tel que $e_i \in D_{[r_i]}$. Si tel est le cas, on pose $t_N(e_i) = r_i$.

Si D est un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration par des sous-L-espaces vectoriels D^i, décroissante, indexée par les entiers, exhaustive et séparée, et si $x \in D$ est non nul, on note $t_H(x)$ le plus grand entier i tel que $x \in D^i$. Une base $f_1, \dots, f_d$ de D est dite *adaptée à la filtration* si $D^i = \sum_{t_H(f_j) \geqslant i} L \cdot f_j$ quel que soit $j \in \mathbf{Z}$. On a alors $t_H(D) = \sum_{j=1}^d t_H(f_j)$.

Proposition 5.8. — *Soit D un (φ, N)-module filtré admissible, et soit $D^\dagger = \mathbf{D}^\dagger(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D))$. Soient $e_1, \dots, e_d$ une base de D adaptée à φ, $f_1, \dots, f_d$ une base adaptée à la filtration, et soient $A = (a_{i,j}) \in \mathbf{M}_d(L)$ et, si $n \in \mathbf{N}$, $B^{(n)} = (b_{i,j}^{(n)}) \in \mathbf{GL}_d(L)$ les matrices définies par*

$$N(e_i) = \sum_{j=1}^d a_{j,i} e_j \quad \text{et} \quad \varphi^{-n}(e_i) = \sum_{j=1}^d b_{j,i}^{(n)} f_j.$$

Alors $\mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log T] \otimes_L D = \mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log T] \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$ et $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in \mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log T] \otimes_L D$ appartient à $D^\dagger$ si et seulement si

(i) $N(x_j) + \sum_{i=1}^d a_{j,i} x_i = 0$ si $1 \leqslant j \leqslant d$;

(ii) $\sum_{i=1}^d b_{j,i}^{(n)} x_i$ a un zéro d'ordre $\geqslant -t_H(f_j)$ en $\eta - 1$ si η est une racine primitive p^n-ième de l'unité, et $n \gg 0$;

(iii) x_i est d'ordre $\leqslant -t_N(e_i)$ si $1 \leqslant i \leqslant d$.

De plus, si $r \in]0, r(D^\dagger)]$, alors $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in \mathscr{R}[\frac{1}{t}, \log T] \otimes_L D \in (D^\dagger)^{(0,r]}$ si et seulement si $x \in D^\dagger$ et $x_i \in \mathscr{E}^{]0,r]}[\frac{1}{t}, \log T]$, pour $1 \leqslant i \leqslant d$.

5.2. Le (φ,Γ)-module attaché à une représentation semi-stable de dimension 2

5.2.1. Le (φ,N)-module filtré $D_{\alpha,\mathscr{L}}$. — Soit k un entier $\geqslant 2$. Si $\alpha\in L$ vérifie $2v_p(\alpha)-1=k-1$ et si $\mathscr{L}\in L$, on note $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ le (φ,N)-module filtré défini par

$$D_{\alpha,\mathscr{L}}=L\cdot e_1\oplus L\cdot e_2,\quad \varphi(e_1)=\alpha e_1,\ \varphi(e_2)=p^{-1}\alpha e_2,\quad Ne_1=e_2,\ Ne_2=0$$

$$D^i_{\alpha,\mathscr{L}}=\begin{cases}0 & \text{si } i\geqslant k\\ L\cdot(e_1-\mathscr{L}e_2) & \text{si } 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ D_{\alpha,\mathscr{L}} & \text{si } i\leqslant 0.\end{cases}.$$

Remarque 5.9. — On fera attention au fait que la convention pour l'invariant $\mathscr{L}$ est l'opposée de la convention habituelle. Elle est par contre en accord avec la convention $\log_{\mathscr{L}} p=\mathscr{L}$.

Proposition 5.10. — *(i) $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ est admissible.*

(ii) Si $k\geqslant 3$, alors $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ est irréductible ; si $k=2$, alors $L\cdot e_2$ est un sous-(φ,N)-module filtré admissible de $D_{\alpha,\mathscr{L}}$.

(iii) Si les (φ,N)-modules filtrés $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ et $D_{\alpha',\mathscr{L}'}$ sont isomorphes, alors $\alpha=\alpha'$ et $\mathscr{L}=\mathscr{L}'$.

Démonstration. — C'est bien connu (et immédiat).

5.2.2. La représentation $V_{\alpha,\mathscr{L}}$. — Le (φ,N)-module filtré $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ étant admissible, $V_{\alpha,\mathscr{L}}=\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D_{\alpha,\mathscr{L}})$ est une L-représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 dont les poids de Hodge-Tate sont $1-k$ et 0.

Proposition 5.11. — *Si $k\geqslant 3$, alors $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ est une représentation irréductible de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui reste irréductible quand on la restreint à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}$.*

Démonstration. — Le (φ,N)-module filtré $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ n'a pas de sous-objet admissible, même sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ ou après extension du corps des coefficients ; on en déduit le fait que $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ est une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui reste absolument irréductible même si on la restreint à $\mathscr{G}_K$, si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. L'image de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est un sous-groupe de Lie de $\mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_L)$ dont aucun sous-groupe d'indice fini n'est contenu dans un sous-groupe de Borel (même après extension de L). Comme le déterminant de $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ est d'image infinie, l' enveloppe algébrique de l'image est donc $\mathbf{GL}_2$ et celle de l'image de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}$ contient donc $\mathbf{SL}_2$ puisque elle est distinguée dans $\mathbf{GL}_2$ et que le quotient est abélien.

Remarque 5.12. — Si $k=2$, la représentation $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ est réductible : si $\mathrm{nr}(p\alpha^{-1})$ désigne le caractère non ramifié de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ envoyant un frobenius arithmétique sur $p\alpha^{-1}$, alors $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ est une extension non triviale de $L(\chi^{-1}\cdot\mathrm{nr}(p\alpha^{-1}))$ par $L(\mathrm{nr}(p\alpha^{-1}))$ dont la classe est déterminée par l'invariant $\mathscr{L}$.

5.2.3. Le (φ,Γ)-module $D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}$. — Posons $D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}=\mathbf{D}^\dagger(V_{\alpha,\mathscr{L}})$. C'est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$, et nous allons utiliser la prop. 5.8 pour en donner une description directe (prop. 5.15 ci-dessous). Avant de ce faire, remarquons que les propositions 5.10 et 5.11 se traduisent de la manière suivante.

Proposition 5.13. — *(i) Si $k\geqslant 3$, alors $D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}$ est irréductible ; si $k=2$, alors $D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}$ est une extension non triviale de deux (φ,Γ)-modules de dimension* 1.

(ii) Si $k \geqslant 3$, alors $D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}$ n'a pas de sous-L-espace vectoriel de dimension finie non nul stable par φ.

(iii) Si les (φ,Γ)-modules $D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}$ et $D^{\dagger}_{\alpha',\mathscr{L}'}$ sont isomorphes, alors $\alpha=\alpha'$ et $\mathscr{L}=\mathscr{L}'$.

D'après la prop. 5.8, on a $\mathscr{R}[\frac{1}{t},\log T]\otimes_L D_{\alpha,\mathscr{L}} = \mathscr{R}[\frac{1}{t},\log T]\otimes_{\mathscr{E}^{\dagger}} D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}$. On note $u_1(w)$ et $u_2(w)$ les coordonnées de w dans la base $t^{1-k}e_1, t^{1-k}e_2$.

Proposition 5.14. — *$w\in\mathscr{R}[\frac{1}{t},\log T]\otimes_L D_{\alpha,\mathscr{L}}$ appartient à $D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}$ si et seulement si*

(i) $u_1(w)\in\mathscr{R}$ est d'ordre $k-1-v_p(\alpha)$;

(ii) $u_2(w)=\frac{p-1}{p}u_1(w)\log T+v_2$ où $v_2\in\mathscr{R}$ est d'ordre $k-v_p(\alpha)$;

(iii) $u_2(w)+p^{-n}\mathscr{L}\cdot u_1(w)$ a un zéro d'ordre $k-1$ en $\eta-1$, si η est d'ordre p^n et $n\gg 0$.

Démonstration. — Soient $f_1=e_1-\mathscr{L}e_2$ et $f_2=e_2$. Ceci fait de f_1,f_2 une base de $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ adaptée à la filtration et on a $t_H(f_1)=k-1$ et $t_H(f_2)=0$. D'autre part, e_1,e_2 est une base de $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ adaptée à la décomposition suivant les pentes de frobenius et on a $t_N(e_1)=v_p(\alpha)$, $t_N(e_2)=v_p(\alpha)-1$. Comme $N(e_1)=e_2$, $N(e_2)=0$ et $\varphi^{-n}(e_1)=\alpha^{-n}(f_1+\mathscr{L}f_2)$, $\varphi^{-n}(e_2)=\alpha^{-n}p^nf_2$, la proposition 5.8 se traduit alors, si $x=x_1e_1+x_2e_2$, de la manière suivante : $x\in D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}$ si et seulement si

(i) $N(y_2)=-y_1$, $N(y_1)=0$;

(ii) $\mathscr{L}x_1((1+T)\eta-1)+p^nx_2((1+T)\eta-1)$ a un zéro d'ordre $\geqslant 0$ en 0 et $x_1((1+T)\eta-1)$ a un zéro d'ordre $\geqslant 1-k$, si $n\gg 0$, et si η est une racine primitive p^n-ième de l'unité ;

(iii) x_1 est d'ordre $\geqslant -v_p(\alpha)$ et x_2 est d'ordre $\geqslant 1-v_p(\alpha)$.

Le résultat s'en déduit sans problème (en utilisant le fait qu'un élément x de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}]$ appartient à $\mathscr{R}$ si et seulement si il existe n_0 tel que x ait un zéro d'ordre $\geqslant 0$ en toute racine de l'unité d'ordre p^n, $n\geqslant n_0$).

Vu le rôle joué par $\log_{\mathscr{L}}$ dans cet article, il est plus confortable de retraduire l'énoncé précédent avec $\log_{\mathscr{L}}T$ au lieu de $\log T$, en utilisant la formule

$$\log_{\mathscr{L}}((1+T)\eta-1)=\frac{\mathscr{L}}{(p-1)p^{n-1}}+\log((1+T)\eta-1).$$

Proposition 5.15. — *$w\in\mathscr{R}[\frac{1}{t},\log_{\mathscr{L}}T]\otimes_L D_{\alpha,\mathscr{L}}$ appartient à $D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}$ si et seulement si*

(i) $u_1(w)\in\mathscr{R}$ est d'ordre $k-1-v_p(\alpha)$;

(ii) $u_2(w)=\frac{p-1}{p}u_1(w)\log_{\mathscr{L}}T+v_2$ où $v_2\in\mathscr{R}$ est d'ordre $k-v_p(\alpha)$;

(iii) $u_2(w)$ a un zéro d'ordre $k-1$ en $\eta-1$, si η est d'ordre p^n et $n\gg 0$.

Si $0<r\leqslant r(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}})$, on note $D^{(0,r]}_{\alpha,\mathscr{L}}$ le sous-$\mathscr{E}^{(0,r]}$-module de $D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}$ défini à la prop. 4.35. Il résulte de la proposition 5.8 que l'on peut préciser la proposition 5.15 sous la forme suivante.

Proposition 5.16. — *$w\in\mathscr{R}[\frac{1}{t},\log_{\mathscr{L}}T]\otimes_L D_{\alpha,\mathscr{L}}$ appartient à $D^{(0,r]}_{\alpha,\mathscr{L}}$ si et seulement si*

(i) $u_1(w)\in\mathscr{E}^{]0,r]}$ est d'ordre $k-1-v_p(\alpha)$;

(ii) $u_2(w)=\frac{p-1}{p}u_1(w)\log_{\mathscr{L}}T+v_2$ où $v_2\in\mathscr{E}^{]0,r]}$ est d'ordre $k-v_p(\alpha)$;

(iii) $u_2(w)$ a un zéro d'ordre $k-1$ en $\eta-1$, si η est d'ordre p^n et $\frac{1}{(p-1)p^{n-1}}\leqslant r$.

5.2.4. Le module $D^\sharp_{\alpha,\mathscr{L}}$. — Notons $D^\sharp_{\alpha,\mathscr{L}}$ le module $(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})^\sharp$. Soit $T_{\alpha,\mathscr{L}}$ un réseau de $V_{\alpha,\mathscr{L}}$ stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et soit $D(T_{\alpha,\mathscr{L}}) \subset \mathbf{D}(V_{\alpha,\mathscr{L}}) = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}$ le réseau correspondant à $T_{\alpha,\mathscr{L}}$. Notons aussi $D^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}})$ le module $D(T_{\alpha,\mathscr{L}})^\sharp$; c'est un réseau de $D^\sharp_{\alpha,\mathscr{L}}$.

Proposition 5.17. — *Il existe $C \geqslant 0$ telle que, si $i \in \mathbf{N}$ et si $w \in D^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}}) \cap p^i D(T_{\alpha,\mathscr{L}})$, alors $v_{\frac{k-2}{2}}(u_1(w)) \geqslant \frac{i}{2} - C$.*

Démonstration. — D'après le cor. 4.39, il existe $r > 0$ et $f_1, f_2 \in D^{(0,r]}(T_{\alpha,\mathscr{L}})$ formant une base de $D(T_{\alpha,\mathscr{L}})$ sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}$ tels que $D^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}})$ soit inclus dans le module engendré par f_1 et f_2 sur $\mathscr{O}_\mathscr{E}^{(0,r]}$.

Soit alors $w \in D^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}}) \cap p^i D(T_{\alpha,\mathscr{L}})$. D'après ce qui précède, on peut écrire w sous la forme $w = xf_1 + yf_2$ avec $x, y \in \mathscr{O}_\mathscr{E}^{(0,r]} \cap p^i \mathscr{O}_\mathscr{E}$. En utilisant les minorations obtenues au lemme 1.3 et au cor. 1.5, on en déduit les minorations

$$\begin{aligned} v_{\frac{k-2}{2}}(u_1(w)) &\geqslant v_{\frac{k-2}{2}}^{(0,r/2]}(u_1(w)) - C(\frac{k-2}{2}, \frac{r}{2}) \\ &\geqslant \inf(v_{\frac{k-2}{2}}^{(0,r/2]}(xu_1(f_1)), v_{\frac{k-2}{2}}^{(0,r/2]}(yu_1(f_2))) - C(\frac{k-2}{2}, \frac{r}{2}) \\ &\geqslant \frac{i}{2} + \inf(v_{\frac{k-2}{2}}^{(0,r/2]}(u_1(f_1)), v_{\frac{k-2}{2}}^{(0,r/2]}(u_1(f_2))) - C'(\frac{k-2}{2}, r) - C(\frac{k-2}{2}, \frac{r}{2}) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

5.2.5. Le module $\psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$. — Soit $\beta = p^{k-1}\alpha^{-1}$. Avant de décrire $\psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$, commençons par énoncer le lemme suivant qui est une conséquence immédiate de la proposition 1.17.

Lemme 5.18. — *si $F = (F^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{R}^+_{(k-2)/2}$ telle que $(\beta^{-n}F^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathscr{R}^+_{(k-2)/2}$ et $\psi(F^{(n+1)}) = F^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, alors*

$$\ell_\mathscr{L}(F)^{(n)} = \lim_{m\to+\infty} p^m \psi^{m-n}(F^{(m)} \log_\mathscr{L} T)$$

existe quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Proposition 5.19. — *(i) Si $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$, alors il existe des suites $F_w = (F_w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. $G_w = (G_w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$) d'éléments de $\mathscr{R}^+_{(k-2)/2}$ (resp. $\mathscr{R}^+_{k/2}$) telles que*

(a) $(\beta^{-n}F_w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ (resp. $(\beta^{-n}G_w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$) est bornée dans $\mathscr{R}^+_{(k-2)/2}$ (resp. $\mathscr{R}^+_{k/2}$) ;

(b) $\psi(F_w^{(n+1)}) = F_w^{(n)}$ et $\psi(G_w^{(n+1)}) = G_w^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$;

(c) $u_1(w^{(n)}) = \beta^{-n}F_w^{(n)}$ et $u_2(w^{(n)}) = \beta^{-n}(\ell_\mathscr{L}(F)^{(n)} + G_w^{(n)})$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$;

(d) $\ell_\mathscr{L}(F)^{(n)} + G_w^{(n)} \equiv 0$ mod. T^{k-1}, quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^\infty}$.

(ii) Réciproquement, si $F_w = (F_w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et $G_w = (G_w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites d'éléments de $\mathscr{R}^+_{(k-2)/2}$ et $\mathscr{R}^+_{k/2}$ respectivement qui vérifient les conditions (a), (b), (c) et (d) ci-dessus, et si

$$w^{(n)} = \beta^{-n}\big(F_w^{(n)} \cdot \frac{e_1}{t^{k-1}} + \frac{p-1}{p^{n+1}}(\ell_\mathscr{L}(F)^{(n)} + G_w^{(n)}) \cdot \frac{e_2}{t^{k-1}}\big),$$

alors $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$.

Démonstration. — Soit $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$. D'après le cor. 4.39, si $r = r(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$, la suite $(w^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $D^{(0,r]}_{\alpha,\mathscr{L}}$ vérifiant $\psi(w^{(n+1)}) = w^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Ceci se traduit de la manière suivante.

• $(u_1(w^{(n)}))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\mathscr{E}^{]0,r]}_{(k-2)/2}$ vérifiant $u_1(w^{(n)}) = \beta\psi(u_1(w^{(n+1)}))$. Comme $v_p(\beta) = \frac{k-2}{2} > 0$, on déduit de la proposition 1.11, l'appartenance de $u_1(w^{(n)})$ à $\mathscr{R}^+_{(k-2)/2}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $F^{(n)}_w = \beta^n u_1(w^{(n)})$. Il résulte de ce qui précède que $F_w = (F^{(n)}_w)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{R}^+_{(k-2)/2}$ vérifiant les conditions (a) et (b) de la proposition, et on déduit de la proposition 1.17, l'existence de $\ell_{\mathscr{L}}(F_w)^{(n)}$, l'appartenance de $\ell_{\mathscr{L}}(F_w)^{(n)} - F^{(n)}_w \log_{\mathscr{L}} T$ à $\mathscr{E}^{]0,1]}_{(k-2)/2}$ et le fait que $((p\beta)^{-n}(\ell_{\mathscr{L}}(F_w)^{(n)} - F^{(n)}_w))_{n\in\mathbf{N}}$ est borné dans $\mathscr{E}^{]0,1]}_{(k-2)/2}$ et donc aussi dans $\mathscr{E}^{]0,r]}_{k/2}$.

• $(u_2(w^{(n)}) - \frac{p-1}{p} u_1(w^{(n)}) \log_{\mathscr{L}} T)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $\mathscr{E}^{]0,r]}_{k/2}$ et on a $u_2(w^{(n)}) = p\beta\psi(u_2(w^{(n+1)}))$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $G^{(n)}_w = \frac{p}{p-1} \cdot (p\beta)^n u_2(w^{(n)}) - \ell_{\mathscr{L}}(F_w)^{(n)}$. Il résulte de ce qui précède que $G^{(n)}_w \in \mathscr{E}^{]0,r]}_{k/2}$ et $\psi(G^{(n+1)}_w) = G^{(n)}_w$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. De plus, $((p\beta)^{-n} G^{(n)}_w)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathscr{E}^{]0,r]}_{k/2}$ et comme $v_p(p\beta) > 0$, la proposition 1.11 permet de montrer que $G^{(n)}_w \in \mathscr{R}^+_{k/2}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Les suites F_w et G_w vérifient donc les conditions (a), (b) et (c) de la proposition.

Par ailleurs, il résulte de la proposition 5.16 que $\partial^i(u_2(w^{(n)}))_{|T=\eta-1} = 0$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant i \leqslant k-2$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{m_0}}$, où m_0 est le plus grand entier tel que $\frac{1}{(p-1)p^{m_0-1}} > r$ et $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$ comme d'habitude. On a donc $\partial^i(\ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n)} + G^{(n)}_w)_{|T=\eta-1} = 0$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant i \leqslant k-2$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^\infty} - \boldsymbol{\mu}_{p^{m_0}}$. Par ailleurs, on a $\partial^i \circ \psi^m = p^{-im}\psi^m \circ \partial^i$; on en déduit la formule

$$\partial^i(\psi^m(H))_{|T=x} = p^{-m(i+1)} \sum_{(1+y)^{p^m}=1+x} \partial^i H_{|T=y}.$$

Appliquant ceci à $H = \ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n+m)} + G^{(n+m)}_w$, $m \geqslant m_0$, $x = \eta - 1$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^{m_0}}$, et utilisant la formule $\psi^m(\ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n+m)} + G^{(n+m)}_w) = \ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n)} + G^{(n)}_w$ on en déduit que la relation $\partial^i(\ell_{\mathscr{L}}(F)^{(n)} + G^{(n)}_w)_{|T=\eta-1} = 0$ reste valable pour tout $\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^\infty}$. Ceci termine la démonstration du (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit d'utiliser la proposition 5.16 pour démontrer l'appartenance de $w^{(n)}$ à $D^{(0,r]}_{\alpha,\mathscr{L}}$ et les arguments ci-dessus pour montrer que la suite $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ ainsi construite appartient à $\psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$.

5.3. Quelques représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Soit $\beta \in L$ avec $v_p(\beta) = \frac{k-2}{2}$. On définit la représentation $B(\beta, \mathscr{L})$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, en faisant agir $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sur $\mu \in B(k)^*$ par la formule :

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi(x) \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star_\beta \mu = \beta^{-v_p(ad-bc)} \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} (cx+d)^{k-2} \phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big)\, \mu.$$

Si $w \in \psi^{-\infty}(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}})$, on note $\mu_w \in \mathscr{D}_{(k-2)/2}(\mathbf{Q}_p)$ et $\lambda_w \in \mathscr{D}_{k/2}(\mathbf{Q}_p)$ les distributions dont les transformées d'Amice sont données par les formules

$$\int_{D(0,-n)} (1+T)^{p^n x}\, \mu_w = F_w^{(n)} \quad \text{et} \quad \int_{D(0,-n)} (1+T)^{p^n x}\, \lambda_w = G_w^{(n)},$$

où $F_w^{(n)}$ et $G_w^{(n)}$, $n \in \mathbf{Z}$ sont les éléments de $\mathscr{R}^+$ définis à la prop. 5.19.

Théorème 5.20. — *Soient $k \geqslant 3$, $\alpha \in L$ avec $v_p(\alpha) = \frac{k}{2}$, $\beta = p^{k-1}\beta^{-1}$, et $\mathscr{L} \in L$. Alors l'application $w \mapsto \mu_w$ induit un isomorphisme $P(\mathbf{Q}_p)$-équivariant de L-espaces vectoriels topologiques (pour les topologies forte et faible) de $\psi^{-\infty}(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}})$ sur $B(\beta, \mathscr{L})^*$.*

Démonstration. — Le fait que $w \mapsto \mu_w$ induit un isomorphisme de $\psi^{-\infty}(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}})$ sur $B(\beta, \mathscr{L})^*$ est une combinaison de la prop. 5.19 et du cor. 3.21. Reste l'équivariance par rapport à $P(\mathbf{Q}_p)$ à vérifier. Par définition, on a

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star w\right)^{(n)} = (1+T)^{bp^n} \gamma_{ap^{-v_p(a)}}(w^{(n+v_p(a))}).$$

En utilisant le lien entre w et la transformée d'Amice de μ_w, cela se traduit par

$$\begin{aligned}
\beta^{-n} \int_{D(0,-n)} (1+T)^{p^n x}\, \mu_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\star w} &= \beta^{-n-v_p(a)} (1+T)^{p^n b} \int_{D(0,-n-v_p(a))} (1+T)^{p^{n+v_p(a)} \cdot ap^{-v_p(a)} x}\, \mu_w \\
&= \beta^{-n-v_p(a)} \int_{D(0,-n-v_p(a))} (1+T)^{p^n(ax+b)}\, \mu_w \\
&= \beta^{-n-v_p(a)} \int_{D(0,-n)} (1+T)^{p^n x} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu_w
\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit.

Corollaire 5.21. — *(i) $B(k, \mathscr{L}) \neq 0$.*

(ii) $B(\beta, \mathscr{L})$ est une représentation irréductible de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $\psi^{-\infty}(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}})$ n'est pas réduit à 0 et le (ii) de ce que $V^*_{\alpha,\mathscr{L}} \cong V_{\alpha,\mathscr{L}} \otimes \det(V_{\alpha,\mathscr{L}})^{-1}$ est une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui reste irréductible quand on la restreint à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}}}$, ce qui implique que $\psi^{-\infty}(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}})$ est irréductible en tant que représentation de $P(\mathbf{Q}_p)$ (prop. 5.11, (iii) de la rem. 5.5 et cor. 4.59).

Proposition 5.22. — *L'application $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto w^{(0)}$ induit un isomorphisme de $\psi^{-\infty}(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}}) \cong D^{\sharp}_{\alpha,\mathscr{L}}$.*

Démonstration. — La surjectivité étant automatique, il n'y a que l'injectivité à vérifier. Soit donc $w = (w^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(D^{\dagger}_{\alpha,\mathscr{L}})$ vérifiant $w^{(0)} = 0$. La distribution μ_w est alors à support dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p) - \mathbf{Z}_p$ et la distribution $\mu' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu_w$ est à support dans $p\mathbf{Z}_p$, et appartient à $B(\beta, \mathscr{L})^*$. Maintenant, si $a \in \mathbf{Q}_p$, soit

$$f_a(x) = (x-a)^{k-2} \log_{\mathscr{L}}(x-a) - \sum_{i=0}^{k-2} \lambda_i(a)(x-i)^{k-2} \log_{\mathscr{L}}(x-i),$$

où les λ_i sont des polynômes en a de degré $\leqslant k-2$ définis par $\sum_{i=0}^{k-2} \lambda_i(a)(x-i)^{k-2} = (x-a)^{k-2}$. L'application $a \mapsto f_a$ est une application analytique de $\mathbf{Q}_p - \mathbf{Z}_p$ dans les fonctions analytiques sur $\mathbf{Z}_p$ et sa dérivée $k-1$-ième est $a \mapsto \frac{(k-2)!}{x-a}$. Comme $\mu' \in B(\beta,\mathscr{L})^*$ et est à support dans $p\mathbf{Z}_p$, on a $\int_{p\mathbf{Z}_p} f_a\,\mu' = 0$ quel que soit $a \in \mathbf{Q}_p - \mathbf{Z}_p$, et on peut dériver $k-1$ fois cette égalité par rapport à a pour en déduire la nullité de $\int_{p\mathbf{Z}_p} \frac{1}{x-a}\mu'$ quel que soit $a \in \mathbf{Q}_p - \mathbf{Z}_p$. Ceci implique, en développant $\frac{1}{x-a}$ en puissance de a^{-1}, la nullité de $\int_{p\mathbf{Z}_p} x^n\mu'$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et donc aussi la nullité de μ', ce qui permet de conclure.

Théorème 5.23. — *S'il existe un morphisme non nul $h : B(\beta,\mathscr{L}) \to B(\beta',\mathscr{L}')$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-espaces de Banach, alors $\beta = \beta'$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$.*

Démonstration. — En utilisant le théorème 5.20 et la proposition 5.22, on déduit de h, par dualité, l'existence d'un morphisme $h^\sharp : D^\sharp_{\alpha',\mathscr{L}'} \to D^\sharp_{\alpha,\mathscr{L}}$ de $\mathscr{O}_L[[T]]$-modules commutant aux actions de ψ et Γ. Comme $D^\sharp_{\alpha',\mathscr{L}'}$ et $D^\sharp_{\alpha,\mathscr{L}}$ sont des treillis de $D_{\alpha',\mathscr{L}'}$ et $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ respectivement, on peut (cf. prop. 4.7) étendre $h^\sharp$ par linéarité, en un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-modules de $D_{\alpha',\mathscr{L}'}$ dans $D_{\alpha,\mathscr{L}}$ commutant à l'action de ψ et Γ. La proposition 4.55 montrant qu'un tel morphisme est automatiquement un morphisme de (φ,Γ)-modules, la prop. 5.13 permet de conclure.

5.4. Admissibilité de $B(\beta,\mathscr{L})$

D'après le cor. 2.19, le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ agit par isométries sur $B(\beta)^*$ et sur $B(\beta,\mathscr{L})^* \subset B(\beta)^*$ munis de la valuation $v_{B(k)^*}$ qui est équivalente à la valuation $v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)}$.

Théorème 5.24. — *La représentation $B(\beta,\mathscr{L})$ est une représentation admissible de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*

Démonstration. — On note U la boule unité de $B(\beta,\mathscr{L})^* \subset B(k)^*$ qui est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Le théorème de l'image ouverte montre qu'il existe $c \in \mathbf{Z}$ tel que U soit contenu dans l'image de $p^cD^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}})$ via l'isomorphisme $\iota : D^\sharp_{\alpha,\mathscr{L}} \to B(\beta,\mathscr{L})^*$ obtenu en composant les isomorphismes $D^\sharp_{\alpha,\mathscr{L}} \cong \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}}) \cong B(\beta,\mathscr{L})^*$ des prop. 5.22 et th. 5.20.

Soient $N \in \mathbf{N}$ assez grand, et W_1 et W_2 les deux sous-$\mathbf{Z}_p$-modules de U définis par

$$W_1 = \{\mu \in U,\ v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mathrm{Res}_{D(0,0)}(\mu)) \geqslant N\} \quad \text{et} \quad W_2 = \{\mu \in U,\ v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mathrm{Res}_{D(0,0)}(\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)\star_\beta\mu)) \geqslant N\}.$$

Comme $D(0,0)$ et $D(\infty,0)$ sont invariants par translation par un élément de $\mathbf{Z}_p$, cela implique que W_1 et W_2 sont stables sous l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. De plus, ils sont échangés par $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ et, si N est assez grand, $W_1 \cap W_2 \subset pU$.

Par ailleurs, d'après la proposition 5.17, il existe $i \in \mathbf{N}$ tel que, si $w \in p^cD^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}}) \cap p^{c+i}D(T_{\alpha,\mathscr{L}})$, alors $v_{\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}}(\mathrm{Res}_{D(0,0)}(\mu_w)) \geqslant 1$ et donc $\mu_w \in W_1$. De plus, $D^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}})$ étant un treillis de $D(T_{\alpha,\mathscr{L}})$, le $\mathscr{O}_L[[T]]$-module

$$p^cD^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}})/(p^cD^\sharp(T_{\alpha,\mathscr{L}}) \cap p^{c+i}D(T_{\alpha,\mathscr{L}}))$$

est de type fini. En utilisant le fait que l'action de $\lambda \in \mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$ correspond à la multiplication par la transformée d'Amice de λ (vue comme une mesure sur $\mathbf{Z}_p$), on en déduit le fait que les $\mathscr{O}_L[[\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]]$-modules U/W_1 et $W_2/(W_2\cap W_1)$ sont de type fini. Finalement, comme $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ induit un isomorphisme de $W_2/(W_2\cap W_1)$ sur $W_1/(W_1\cap W_2)$, on en déduit le fait que U/pU, qui est un quotient de $U/(W_2\cap W_1)$, est un $\mathscr{O}_L[[\mathbf{GL_2}(\mathbf{Z}_p)]]$-module de type fini, ce qu'il fallait démontrer.

5.5. Zéros supplémentaires des fonctions L p-adiques

Proposition 5.25. — *Si* $w \in (D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})^{\psi=1} \subset \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$, *alors*

$$\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \lambda_w = p\beta\lambda_w \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu_w = \beta\mu_w.$$

Démonstration. — C'est immédiat.

Proposition 5.26. — *Si* $\alpha = p^{\ell+1}$ (et donc $\beta = p^\ell$) *et si* $w \in (D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})^{\psi=1} \subset \psi^{-\infty}(D^\dagger_{\alpha,\mathscr{L}})$, *alors*

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \mu_w = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \log y \ \mu_w = -\mathscr{L} \cdot \int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell \mu_w.$$

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{Z}$, on a

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} y^i \mu_w = \int_{\mathbf{Z}_p} y^i \mu_w - \int_{p\mathbf{Z}_p} y^i \mu_w = (1 - \beta p^{-i}) \int_{\mathbf{Z}_p} y^i \mu_w.$$

On en déduit la première égalité.

Passons à la démonstration de la seconde. Soit $H_{\ell,\mathscr{L}}(y) = \int_{D(-y,0)} f_\ell(x,y)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)$ On a alors

$$p^{-1}\int_{D(-y,-1)} f_\ell(x,y)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x) = \int_{D(-py,0)} f_\ell(p^{-1}x,y)\ \mu_{\mathrm{KL}}(x) = p^{-\ell}H_{\ell,\mathscr{L}}(py) - \mathscr{L}y^\ell$$

car $f_\ell(u,v) = p^{-\ell}f(pu,pv) - \mathscr{L}v^\ell$. La définition de λ_w (cf. th. 5.20), les prop. 5.19 et 3.20, et la définition de $\ell_{\mathscr{L}}(\mu_w)$ (lemme 3.11) nous fournissent les égalités

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell\lambda_w - p^{-1}\int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} y^\ell\lambda_w &= \int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell \ell_{\mathscr{L}}(\mu_w) - p^{-1}\int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} y^\ell \ell_{\mathscr{L}}(\mu_w) \\ &= \lim_{m\to+\infty}\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p}\Big(\int_{D(-y,0)} f_\ell(x,y)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x) - p^{-1}\int_{D(-y,-1)} f_j(x,y)\,\mu_{\mathrm{KL}}(x)\Big)\,\mu_w(y) \\ &= -\lim_{m\to+\infty}\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p}\Big(H_{\ell,\mathscr{L}}(y) - p^{-\ell}H_{\ell,\mathscr{L}}(py) + \mathscr{L}y^\ell\Big)\mu_w.\end{aligned}$$

Comme $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \lambda_w = p\beta\lambda_w$, comme $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu_w = \beta\mu_w$ et comme $\beta = p^\ell$, on a

$$\begin{aligned} p^{-1}\int_{p^{-1}\mathbf{Z}_p} y^\ell\lambda_w &= (p\beta)p^{-1}\int_{\mathbf{Z}_p}(p^{-1}y)^\ell\lambda_w = \int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell\lambda_w \\ \int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} y^\ell\mu_w &= \beta^m\int_{\mathbf{Z}_p}(p^{-m}y)^\ell\mu_w = \int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell\mu_w \\ p^{-\ell}\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p} H_{\ell,\mathscr{L}}(py)\mu_w &= \beta p^{-\ell}\int_{p^{1-m}\mathbf{Z}_p} H_{\ell,\mathscr{L}}(y)\mu_w = \int_{p^{1-m}\mathbf{Z}_p} H_{\ell,\mathscr{L}}(y)\mu_w.\end{aligned}$$

On en déduit la formule

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} H_{\ell,\mathscr{L}}(y)\mu_w = -\mathscr{L}\int_{\mathbf{Z}_p} y^\ell\mu_w.$$

Maintenant, la suite de terme général

$$\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p^*}(H_{\ell,\mathscr{L}}(y) - y^\ell\log_{\mathscr{L}} y)\mu_w$$

tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ d'après le lemme 3.8 (dans les notations de ce lemme, cette intégrale est égale à $\sum_{v_p(b)=-m} J_{\mathscr{L}}(\mu_w, j, b, 0)$), et comme

$$\begin{aligned}\int_{p^{-m}\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \log_{\mathscr{L}} y \ \mu_w =& \beta^m \int_{\mathbf{Z}_p^*} (p^{-m}y)^\ell \log_{\mathscr{L}}(p^{-m}y) \ \mu_w \\ =& (p^{-\ell}\beta)^m \int_{\mathbf{Z}_p^*} (y^\ell \log y - m\mathscr{L}) \ \mu_w = \int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \log y \ \mu_w,\end{aligned}$$

(puisque $p^{-\ell}\beta = 1$ et $\int_{\mathbf{Z}_p^*} y^\ell \mu_w = 0$), cela permet de conclure.

Références

[1] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Inv. Math. 148, 2002, 219-284.

[2] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, preprint 2004.

[3] L. Berger, C. Breuil, Towards a p-adic Langlands programme, preprint 2004.

[4] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ II, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23-58.

[5] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, Ann. Scient. E.N.S. **37** (2004), 559-610.

[6] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, disponible à : http ://www.ihes.fr/~breuil/publications.html.

[7] C. Breuil, A. Mézard, en préparation.

[8] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[9] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc **12**, 241-268, 1999

[10] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998) 485-571.

[11] P. Colmez, Représentations p-adiques d'un corps local, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians II (Berlin 1998)*, Doc. Mat. Extra vol. II (1998), 153–162.

[12] P. Colmez, Fonctions L p-adiques, *Sém. Bourbaki 1998/99*, exp. 851, Astérisque **266** (2000) 21–58.

[13] P. Colmez, Arithmétique de la fonction zêta, dans *La fonction zêta*, 37-164, journées X-UPS 2002.

[14] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Sém. Bourbaki 2001/02*, exp. 897, Astérisque **290** (2003), 53-101.

[15] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Sém. Bourbaki 2002/03*, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251-319.

[16] P. Colmez, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, preprint 2005.

[17] P. Colmez et J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. **140** (2000), 1–43.

[18] P. Deligne, Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, *Sém. Bourbaki 1968/69*, exp. 343, SLN **179** (1971) 139-172.

[19] M. Emerton, p-adic L-functions and completions of representations of p-adic reductive groups, preprint 2004.

[20] L. Fargues, E. Mantovan, Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink et correspondances de Langlands locales, Astérisque **291** (2004).

[21] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. dans "*Périodes p-adiques*" exposé II, Astérisque **223** (1994) 59–102.

[22] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque 223, 1994, 113-184.

[23] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[24] L. Herr, Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, Bull. S.M.F. **126** (1998), 563–600.

[25] M. Harris, R. Taylor, *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[26] K. Kato, Generalized explicit reciprocity laws, *Algebraic number theory (Hapcheon/Saga, 1996)*, Adv. Stud. Contemp. Math. (Pusan) **1** (1999), 57–126.

[27] K. Kato, Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III)*, Astérisque **295** (2004), 117-290.

[28] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84** (1986) 1-48.

[29] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. **115** (1994) 81-149.

[30] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229** (1995).

[31] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques semi-stables, Mém. Soc. Math. Fr. **84** (2001).

[32] B. Perrin-Riou, Quelques remarques sur la théorie d'Iwasawa des courbes elliptiques, *Number theory for the millennium, III* (Urbana, IL, 2000) 119–147.

[33] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Inv. Math. 153, 2003, 145-196.

Pierre Colmez, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr