SÉRIE PRINCIPALE UNITAIRE POUR $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET REPRÉSENTATIONS TRIANGULINES DE DIMENSION 2

par

Pierre Colmez

Résumé. — Cet article s'inscrit dans le cadre d'une hypothétique correspondance de Langlands p-adique. Notre but est d'établir une bijection naturelle entre la famille des représentations triangulines irréductibles de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et la « série principale unitaire » pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Ces deux familles sont paramétrées par la même variété analytique $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$ décrite ci-dessous, et la bijection précédemment mentionnée fait correspondre les représentations $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\Pi(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ attachées à $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$. La correspondance ainsi obtenue est mieux qu'une simple bijection entre deux familles d'objets : si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, on dispose de constructions naturelles donnant une description du dual $\Pi(s)^*$ de $\Pi(s)$ à partir de $V(s)$.

Table des matières

Introduction

0.1. Notations

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$ et $W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Weil (qui est dense dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$). Si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\deg(g) \in \mathbf{Z}$ l'entier défini par $g(x) = x^{p^{\deg(g)}}$ si $x \in \overline{\mathbf{F}}_p$. Soit $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$, alors $\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p} = \ker \chi = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/F_\infty)$, ce qui permet de voir χ aussi comme un isomorphisme de $\Gamma = \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/H_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathbf{Z}_p^*$.

Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ l'ensemble des caractères continus $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$. La notation est justifiée par le fait que $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ est l'ensemble des points L-rationnels d'une variété analytique $\widehat{\mathscr{T}}$. On note juste $x \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère induit par l'inclusion de $\mathbf{Q}_p$ dans L, et $|x|$ le caractère envoyant $x \in \mathbf{Q}_p^*$ sur $p^{-v_p(x)}$. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $w(\delta)$ son *poids*, défini par $w(\delta) = \frac{\log \delta(u)}{\log u}$, où $u \in \mathbf{Z}_p^*$ n'est pas une racine de l'unité.

L'abélianisé $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ de $W_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ d'après la théorie locale du corps de classes, ce qui permet de voir un élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ aussi comme un caractère continu de $W_{\mathbf{Q}_p}$. De manière explicite, si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors $\delta(g)$ est défini par la formule

$$\delta(g) = \delta(p)^{-\deg(g)}\delta(\chi(g)).$$

Si δ est *unitaire* (i.e. si $v_p(\delta(p)) = 0$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et $w(\delta)$ est alors le poids de Hodge-Tate généralisé de δ. Par exemple $x|x|$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ ; son poids est 1.

0.2. L'espace des paramètres $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$

On note (δ_1, δ_2) un élément générique de $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$, et on définit $\mathscr{S}$ comme la variété analytique obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On a donc une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}} \times \widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$, où $\mathscr{L} = \infty \in \mathbf{P}^0(L)$ si la fibre au-dessus de (δ_1, δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0 \quad \text{et} \quad v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0.$$

Si $s \in \mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s) \in \mathbf{Q}_+$ et $w(s) \in L$ définis par

$$u(s) = v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) \quad \text{et} \quad w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{st}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}} \coprod \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, où
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} = \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} \neq \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) = w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) > w(s)$.

Remarque 0.1. — Les exposants "ng", "cris", "st", "ord" et "ncl" sont respectivement censés faire penser à "non géométrique", "cristalline", "semi-stable", "ordinaire" et "non classique". Cette terminologie vient de la classification des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires surconvergentes.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_0 \coprod \mathscr{S}_*$, où
- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s) = 0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s) > 0$.

Si truc $\in \{\mathrm{ng}, \mathrm{cris}, \mathrm{st}, \mathrm{ord}, \mathrm{ncl}\}$ et machin $\in \{+, 0, *\}$, on note $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}^{\mathrm{truc}}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\mathrm{truc}}$ et $\mathscr{S}_{\mathrm{machin}}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ord}}$ et $\mathscr{S}_0^{\mathrm{ncl}}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\rm irr}=\mathscr{S}_*^{\rm ng}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm cris}\coprod\mathscr{S}_*^{\rm st}$.

0.3. (φ,Γ)-modules

Soit $\mathscr{R}$ l'anneau de Robba, et soit $\mathscr{E}^\dagger$ le corps des éléments bornés de $\mathscr{R}$. Les anneaux $\mathscr{E}^\dagger\subset\mathscr{R}$ sont munis d'actions du frobenius φ et de Γ commutant entre elles.

Un (φ,Γ)-*module* sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$ est un module libre de type fini muni d'actions semi-linéaires de φ et de Γ commutant entre elles, telles que $\varphi(D)$ engendre D (en tant que module sur $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$). Un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est *triangulable* si c'est une extension successive de (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$.

La classification des (φ,Γ)-modules triangulables de rang 2 se ramène, par définition, à celle des (φ,Γ)-modules de rang 1 et de leurs extensions, ce qui fait l'objet du théorème 0.2 ci-dessous.

Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ,Γ) module obtenu en multipliant l'action de φ sur $\mathscr{R}$ par $\delta(p)$ et celle de $\gamma\in\Gamma$ par $\delta(\chi(\gamma))$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 0.2. — (i) *Si D est un (φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, il existe un unique $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que $D\cong\mathscr{R}(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, alors* $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))=\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R},\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$ *est un L-espace vectoriel de dimension* 1 *sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}$ est de la forme x^{-i}, avec i entier $\geqslant 0$, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier $\geqslant 1$; dans ces deux cas,* $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ *est de dimension* 2 *et l'espace projectif associé est naturellement isomorphe à* $\mathbf{P}^1(L)$.

Soit $\widetilde{\mathscr{S}}(L)$ l'ensemble des $s=(\delta_1,\delta_2,h)$, où $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $h\in\mathrm{Ext}^1(\mathscr{R},\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$. Si $s\in\widetilde{\mathscr{S}}(L)$, on note $D(s)$ l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ définie par h. Si $\alpha\in L^*$ et si $s'=(\delta_1,\delta_2,\alpha h)$, les (φ,Γ)-modules $D(s)$ et $D(s')$ sont isomorphes, ce qui fait que l'espace des paramètres naturels pour décrire les (φ,Γ)-modules non irréductibles de rang 2 sur $\mathscr{R}$ est le champs analytique $\widetilde{\mathscr{S}}/\mathbf{G}_m$. La variété analytique $\mathscr{S}$ introduite ci-dessus correspond à l'ouvert « $h\neq 0$ » des (φ,Γ)-modules non scindés.

0.4. Représentations triangulines

Rappelons que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est équivalente **[27, 11]** à la catégorie des (φ,Γ)-modules *étales* sur $\mathscr{E}^\dagger$. Par ailleurs, Kedlaya a établi **[28]** l'existence d'une filtration par les pentes pour les φ-modules sur $\mathscr{R}$; cette filtration est l'analogue de la décomposition de Dieudonné-Manin. Une conséquence de ce théorème de Kedlaya est que la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est aussi équivalente à la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont (1) de pente 0.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on note $\mathbf{D}^\dagger(V)$ et $\mathbf{D}_{\rm rig}(V)=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{D}^\dagger(V)$ respectivement les (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{E}^\dagger$ et $\mathscr{R}$ qui lui sont associés. On dit que V est *trianguline*(2) si $\mathbf{D}_{\rm rig}(V)$ est triangulable. La classification des représentations triangulines de dimension 2 est donc équivalente à celle des (φ,Γ)-module triangulables de pente 0 ; elle repose sur le théorème 0.2 et le théorème de Kedlaya dont un certain nombre de conséquences immédiates sont résumées dans la remarque suivante.

(1) Un φ-module D sur $\mathscr{R}$ est de pente 0, s'il contient un φ-module Δ étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ tel que l'on ait $D=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\Delta$; le module Δ est alors unique d'après le théorème de Kedlaya.

(2) Le triangle est un instrument de musique dont le son (triangulin (?)) est presque cristallin...

Remarque 0.3. — (i) Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, la pente de $\mathscr{R}(\delta)$ définie par Kedlaya est $v_p(\delta(p))$. Un des points cruciaux pour ce qui suit est qu'une extension de (φ, Γ)-modules peut fort bien être de pente 0 sans que les deux morceaux le soient, mais alors les extensions sont dans le sens opposé à celui permis par le théorème de Kedlaya.

(ii) Le cas scindé n'est pas très passionnant : le module $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si les deux caractères δ_1, δ_2 sont unitaires, la représentation $V(s)$ qui lui correspond est alors la somme directe de δ_1 et δ_2 vus comme des caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iii) Dans le cas non scindé, si $D(s)$ est de pente 0, alors son déterminant est de pente 0 et $\mathscr{R}(\delta_1)$ est de pente $\geqslant 0$ La première de ces conditions se traduit par $v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = 0$ et la seconde par $v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0$. Une condition nécessaire pour que $D(s)$ soit de pente 0 si $s \in \mathscr{S}$ est donc que $s \in \mathscr{S}_+$. Cette condition n'est pas suffisante mais presque, comme le montre le (i) du théorème 0.5 ci-dessous.

Si $s \in \mathscr{S}_+$ est tel que $D(s)$ est de pente 0, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui est associée. Cette représentation est trianguline par construction. Réciproquement, le théorème 0.2 et la discussion précédente montrent que, si V est trianguline, alors il existe $s \in \mathscr{S}_+$ tel que $D(s)$ soit de pente 0 et $V \cong V(s)$.

Remarque 0.4. — Le cas où $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_0$ n'est pas spécialement passionnant car alors δ_1 et δ_2 sont unitaires et $V(s)$ est une extension de δ_2 par δ_1 dont la classe est déterminée par $\mathscr{L}$. En particulier, $V(s)$ n'est pas irréductible.

Théorème 0.5. — (i) *Si $s \in \mathscr{S}_*$, le module $D(s)$ est de pente 0, sauf si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$, auquel cas les pentes sont $u(s) - w(s)$ et $w(s) - u(s)$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors $V(s)$ est irréductible. Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}}$, alors $V(s)$ (tordue par un caractère convenable) devient ordinaire sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et n'est donc pas irréductible.*

(iii) *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ et $s' = (\delta_1', \delta_2', \mathscr{L}')$ sont deux éléments distincts de $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors $V(s) \cong V(s')$ si et seulement si $s, s' \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ et $\delta_1' = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2' = x^{-w(s)}\delta_1$.*

Remarque 0.6. — L'application $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \mapsto s' = (x^{w(s)}\delta_2, x^{-w(s)}\delta_1, \infty)$ est une involution de $\mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$

Pour décrire les propriétés de $V(s)$, quand elle existe, il est plus agréable de supposer que la restriction de δ_1 à $\mathbf{Z}_p^*$ est triviale. On peut facilement en déduire ce qui se passe dans le cas général en tordant par un caractère de la manière suivante. Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\delta^0 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ le caractère dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ coïncide avec celle de δ et qui vérifie $\delta(p) = 1$; en particulier, δ^0 est unitaire ce qui permet de le voir comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, alors $s^0 = (\delta_1(\delta_1^0)^{-1}, \delta_2(\delta_1^0)^{-1}, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, et on a $V(s) = V(s^0)(\delta_1^0)$.

Remarque 0.7. — Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$; ceux de $V(s^0)$ sont 0 et $-w(s)$.

Théorème 0.8. — (i) *Soit $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*$ tel que la restriction de δ_1 à $\mathbf{Z}_p^*$ soit triviale.*

- *Si $s \in \mathscr{S}_* - \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}} = \mathscr{S}_{\mathrm{irr}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}}$, le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))^{\varphi = \delta_1(p)}$ est non nul.*
- *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$, alors $V(s)$ devient cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))$ est, en tant que représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$, la somme des deux caractères associés à δ_1 et $x^{w(s)}\delta_2$, sauf si ces deux caractères sont égaux, auquel cas c'est l'extension non triviale de ces deux caractères.*

• *Si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm st}$, alors $V(s)$ est semi-stable ; le module $\mathbf{D}_{\rm st}(V)$ est, en tant que représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$, la somme des deux caractères associés à δ_1 et $x^{w(s)}\delta_2$, et le paramètre de Fontaine-Mazur* [**31**] *de la filtration est $\mathscr{L}$.*

(ii) *Soit V une L-représentation irréductible de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont les poids de Hodge-Tate sont 0 et $w \in L$, et telle qu'il existe $\alpha \in L^*$ avec $v_p(\alpha) > 0$ et $(\mathbf{B}_{\rm cris}^+ \otimes_L V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha} \neq 0$. Alors il existe $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*$ tel que δ_1 soit trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$, $\delta_1(p) = \alpha$ et $w(s) = -w$, et tel que $V \cong V(s)$ (resp. $V \cong V(x^w\delta_1, x^{-w}\delta_2, \mathscr{L})$) si $s \in \mathscr{S}_{\rm irr}$ (resp. si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm ncl}$). De plus,*

• *V devient cristalline sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ si et seulement si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm cris}$;*

• *V est semi-stable si et seulement si $s \in \mathscr{S}_*^{\rm st}$.*

Remarque 0.9. — (i) Il résulte de ce qui précède qu'une L-représentation cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline si et seulement si les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\rm cris}(V)$ appartiennent à L, et qu'une représentation semi-stable de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est trianguline.

(ii) D'après un théorème de Kisin [**29**], les représentations attachées aux formes modulaires surconvergentes vérifient l'hypothèse selon laquelle il existe $\alpha \in L^*$ avec $v_p(\alpha) \geqslant 0$ et $(\mathbf{B}_{\rm cris}^+ \otimes_L V)^{\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, \varphi=\alpha}$ soit non nul. Ceci nous fournit un morphisme $x \mapsto s(x)$ de variétés analytiques de la courbe de Coleman-Mazur [**14**] dans $\mathscr{S}_+$, mais il se passe quelque chose d'un peu bizarre dans le cas où $s = s(x) = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*^{\rm ncl}$ (i.e. dans le cas où x correspond à une forme de poids entier $\geqslant 2$ qui n'est pas classique) puisque la représentation $V(s)$ n'existe pas. La représentation V_x est alors $V(s')$, où $s' = (\delta_1 x^{-w(s)}, \delta_2 x^{w(s)}, \mathscr{L})$. Notons que $V(s')$ a un comportement très analogue à celui que devrait avoir $V(s)$ puisque ses poids de Hodge-Tate sont 0 et $-w(s)$, et la valeur propre de φ sur $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(s'))$ est $\delta_1(p)$; sa particularité est que les poids de Hodge-Tate sont « dans l'autre sens » car $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(s'))$ est inclus dans ${\rm Fil}^{w(s)}$. (Voir le (v) de la rem. 0.13 pour d'autres commentaires.)

0.5. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Si $\mathscr{L} \in L$, on note $\log_{\mathscr{L}}$ le logarithme normalisé par $\log_{\mathscr{L}} p = \mathscr{L}$, et si $\mathscr{L} = \infty$, on définit $\log_{\mathscr{L}}$ par $\log_\infty = v_p$; on a donc $\log_\infty(x) = \lim_{\mathscr{L}\to\infty} \mathscr{L}^{-1} \log_{\mathscr{L}}(x)$.

Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+$, on note δ_s le caractère $(x|x|)^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$. Remarquons que, si $s \in \mathscr{S}_*$, on ne peut avoir $\mathscr{L} \neq \infty$ que si δ_s est de la forme x^i, avec $i \in \mathbf{N}$. On associe à s les représentations $B(s)$, $M(s)$ et $\Pi(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ définies de la manière suivante.

• $B(s)$ est l'ensemble des $\phi : \mathbf{Q}_p \to L$ de classe $\mathscr{C}^{u(s)}$ telles que $x \mapsto \delta_s(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^{u(s)}$ en 0. L'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est donnée par la formule

$$\phi \star_s \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)(x) = \delta_1^{-1}(ad-bc)\delta_s(cx+d)\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big).$$

• Si δ_s n'est pas de la forme x^i, avec $i \in \mathbf{N}$, on prend pour $M(s)$ l'espace vectoriel engendré par 1, et les $\delta_s(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$.

Si $\delta_s = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, on note $M(s)$ l'intersection avec $B(s)$ de l'espace vectoriel engendré par les $\delta_s(x-a)$ et les $\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$.

• Finalement, si $s \in \mathscr{S}_*$, on pose $\Pi(s) = B(s)/\widehat{M(s)}$, où $\widehat{M(s)}$ désigne l'adhérence de $M(s)$ dans $B(s)$.

Remarque 0.10. — Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_0$, on a $M(s) = 0$, mais il ne semble pas qu'il faille prendre $\Pi(s) = B(s)$ si on veut étendre la correspondance de Langlands p-adique aux représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui ne sont pas irréductibles. En fait, le cas des représentations ordinaires (cf. [**9**]) suggère que le bon espace à considérer pour $\Pi(s)$ doit être une extension de $B(s)$ par $B(s')$, où $s' = (\delta_2, \delta_1, \mathscr{L})$.

Compte-tenu de la remarque ci-dessus, nous nous restreindrons au cas $s \in \mathscr{S}_*$. L'énoncé ci-dessous devrait être un théorème dans un futur très proche (cf. (i) de la rem. 0.13).

Théorème 0.11. — (i) *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_*$, alors $\Pi(s) \neq 0$ et est unitaire sauf si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$. De plus,*

- *si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors $\Pi(s)$ est irréductible et admissible,*
- *si $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{ord}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{ncl}}$, alors $\Pi(s)$ n'est pas irréductible : si $s' = (x^{-w(s)}\delta_1, x^{w(s)}\delta_2, \mathscr{L})$, alors $(\frac{d}{dx})^{w(s)}$ induit un morphisme $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant de $B(s)$ dans $B(s')$ tuant $M(s)$, et $\Pi(s)$ est une extension de $B(s')$ par l'adhérence de l'image des fonctions localement polynomiales de degré $< w(s)$ dans $\Pi(s)$.*

(ii) *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ et $s' = (\delta_1', \delta_2', \mathscr{L}')$ sont deux éléments distincts de $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors il existe un morphisme $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant non nul $\Pi(s) \to \Pi(s')$ si et seulement si $s, s' \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ et $\delta_1' = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta_2' = x^{-w(s)}\delta_1$.*

En vue d'une hypothétique correspondance de Langlands locale p-adique, le parallélisme entre les résultats du théorème 0.8 concernant les L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et ceux du théorème 0.11 ci-dessus est assez frappant. Ce qui est encore plus frappant, est qu'il semble difficile de démontrer directement le théorème 0.11 sans utiliser le théorème 0.12 ci-dessous pour le déduire du théorème 0.8, via la théorie des (φ, Γ)-modules.

Rappelons qu'un (φ, Γ)-module étale D est muni d'un inverse à gauche ψ de φ commutant à l'action de Γ. L'ensemble $\psi^{-\infty}(D)$, des suites bornées $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ d'éléments de D vérifiant $\psi(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{Z}$, est alors muni d'une action naturelle du sous-groupe mirabolique $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, définie en utilisant les actions de ψ, Γ et la structure de $\mathscr{O}_L[[T]]$-module de D.

Théorème 0.12. — *Si $s \in \mathscr{S}_{\mathrm{irr}}$, alors le $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-module $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}^\dagger(V(s)))$ est naturellement isomorphe au dual $\Pi(s)^*$ de $\Pi(s)$.*

Remarque 0.13. — (i) La démonstration de ce théorème n'est pas encore complètement rédigée. On a $\mathscr{S}_{\mathrm{irr}} = \mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}} \coprod \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$. Le cas $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$ a été traité dans [**22**], et la démonstration a été adaptée par Berger et Breuil [**3**] pour traiter le cas où $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ est tel que $\delta_s x^{1-w(s)}$ est trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$ (sauf les cas exceptionnels(3)...) ; le cas $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ est particulièrement intéressant car c'est le seul où des isomorphismes non triviaux apparaissent (cf. (ii) du th. 0.11). La démonstration dans le cas $\mathscr{S}_*^{\mathrm{ng}}$ présente de grandes similarités avec celle du cas $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{st}}$, les nouveautés se trouvant plutôt dans la construction des (φ, Γ)-modules $\mathbf{D}^\dagger(V(s))$ que dans la construction de l'isomorphisme du théorème 0.12. Il reste donc à traiter, à torsion près par un caractère, les

(3)Il y a deux cas exceptionnels un peu embêtants, à savoir les $s \in \mathscr{S}_*^{\mathrm{cris}}$ qui vérifient soit $\delta_1\delta_2^{-1} = |x|\, x^{w(s)}$ (et donc $\delta_s = x^{w(s)-1}$), soit $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{w(s)}$ (et donc $\delta_s = x^{w(s)}(x|x|)^{-1}$). Le premier de ces cas correspond au cas où la représentation de $W_{\mathbf{Q}_p}$ associée à la représentation cristalline $V(s)$ (tordue par un caractère) est « non générique » ; le second correspond au cas où cette représentation n'est pas semi-simple.

cas exceptionnels et les cas correspondant, du coté galoisien, aux représentations non cristallines, mais devenant cristallines sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$. Il ne semble pas y avoir de vrai obstacle...

(ii) Comme nous l'avons signalé plus haut, la correspondance de Langlands locale p-adique semble devoir s'étendre [**9**] au cas $s \in \mathscr{S}^{\mathrm{ord}}$; l'intérêt de ce cas est que les représentations ne sont plus irréductibles.

(iii) Le module $\Pi(s)^*$ est muni d'une action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Il serait *très* intéressant de pouvoir lire, directement en termes de (φ, Γ)-modules, l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ que l'isomorphisme ci-dessus induit sur $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}^\dagger(V(s)))$. Comme on sait déjà lire l'action du sous-groupe mirabolique, il « n'y a que » l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ qui reste à comprendre.

(iv) L'idée selon laquelle la correspondance de Langlands locale p-adique pouvait s'étendre à toute la série principale unitaire et pas seulement au cas localement algébrique a été inspirée par l'espoir que cette correspondance se comporte bien en famille. Cet espoir s'est trouvé confirmé (au moins dans le cas de la série principale) par les résultats de [**3**] qui, réinterprétés en termes de caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ au lieu de valeurs propres de frobenius, faisaient ressortir un parallélisme éclatant avec ceux de Kisin [**29**].

(v) En vue d'une correspondance de Langlands locale p-adique en famille, le cas de $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$ pose un petit problème (cf. (ii) de la remarque 0.9). Une manière de remédier à ce problème serait de définir $V(s)$ et $\Pi(s)$ comme étant respectivement $V(s')$ et $\Pi(s')$, où $s' = (x^{-w(s)}\delta_1, x^{w(s)}\delta_2, \infty)$ si $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Du point de vue des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, cela se justifie de la manière suivante. Définissons le sous-espace $\widetilde{M}(s)$ de $B(s)$ comme étant

• l'espace vectoriel engendré par les x^j, pour $0 \leqslant j < u(s)$ et les $(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $0 \leqslant j < u(s)$, si δ_s n'est pas de la forme x^i, avec $i \in \mathbf{N}$;

• l'intersection avec $B(s)$ de l'espace vectoriel engendré par les x^j, pour $0 \leqslant j \leqslant i$ et les $(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $0 \leqslant j < u(s) = \frac{i}{2}$, si $\delta_s = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$.

Si $s \in \mathscr{S}_+$, la fonction $a \mapsto \delta_s(x-a)$ (resp. $a \mapsto \delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$) est une fonction sur $\mathbf{Q}_p$, à valeurs dans $B(s)$, qui est de classe $\mathscr{C}^j$ si $j < u(s)$. La dérivée j-ième de cette fonction est de la forme $c_s(j)(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)$ (resp. $c'_s(j)(x-a)^{-j}\delta_s(x-a) + c_s(j)(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$), où $c_s(j)$ est une constante non nulle sauf si $w(s) \in \{1, \dots, j\}$. On en déduit que $\widehat{M(s)}$ est aussi l'adhérence de $\widetilde{M}(s)$ dans $B(s)$ si les $c_j(s)$ ne s'annulent pas, c'est-à-dire, si $s \notin \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Par contre, si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, alors l'adhérence $\widehat{M(s)}'$ de $\widetilde{M}(s)$ est nettement plus grosse que $\widehat{M(s)}$, et on montre que l'application $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}} : B(s) \to B(s')$ induit un isomorphisme $B(s)/\widehat{M(s)}' \cong \Pi(s')$.

(vi) Une des motivations pour étendre les résultats à la série principale était de fournir une démonstration, en termes de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (avec l'invariant $\mathscr{L}$ de Breuil [**8**]), de la formule $\mathscr{L} = -2\frac{a'_p}{a_p}$ de Stevens [**34**], reliant invariant $\mathscr{L}$ de Coleman [**13**] et dérivée logarithmique de valeurs propres de frobenius. Soit

$$z \mapsto s(z) = (a_p(z)^{v_p(x)}, |x|^{-1}x^{1-k}\langle x\rangle^{k-z}(a_p(k)^2a_p(z)^{-1})^{v_p(x)}, \mathscr{L}(z))$$

une fonction analytique (avec $\langle x\rangle^{k-z} = \exp((k-z)\log x)$) sur la boule $D(k, r)$ de $\mathbf{C}_p$ de centre k, entier $\geqslant 3$, et de valuation r, à valeurs dans $\mathscr{S}_+$. En particulier, la fonction $z \mapsto a_p(z)$ est analytique, et $\delta_{s(k)} = x^{k-2}$, ce qui fait que $\mathscr{L}(k)$ est un élément, a priori quelconque, de $\mathbf{P}^1(L)$. Soit $z \mapsto \mu(z)$ une fonction analytique de $D(k, r)$ dans $\mathscr{D}_{\frac{k-2}{2}}(\mathbf{Q}_p)$ telle que $\mu(z) \in \Pi(s(z))^*$

quel que soit z (l'existence de telles familles analytiques de distributions résulte de l'étude des (φ,Γ)-modules associés à une famille analytique de représentations galoisiennes [**4**]). Si j_u est une famille d'entiers vérifiant $0\leqslant j_u<\frac{k-2}{2}$, si a_u est une famille d'éléments de $\mathbf{Q}_p$, et si $\lambda_u(z)$, est une famille finie de fonctions analytiques sur $D(k,r)$, telles que $\sum_u \lambda_u(z)(x-a_u)^{-j_u}\delta_{s(z)}(x-a_u)$ a un pôle d'ordre $<\frac{k-2}{2}$ en ∞, alors la fonction

$$F(z)=\int_{\mathbf{Q}_p}\Big(\sum_u \lambda_u(z)(x-a_u)^{-j_u}\delta_{s(z)}(x-a_u)\Big)\,\mu(z)$$

est identiquement nulle sur $D(k,r)$. Comme les fonctions $\int_{\mathbf{Q}_p} x^i\,\mu(z)$ sont aussi identiquement nulles sur $D(k,r)$ si $i<\frac{k-2}{2}$, on obtient, en dérivant $F(z)$ par rapport à z et en évaluant le résultat en $z=k$ (où l'on a $\delta_{s(k)}(x-a_u)=(x-a_u)^{k-2}$),

$$\int_{\mathbf{Q}_p}\Big(\sum_u \lambda_u(k)\Big(\log(x-a_u)+2v_p(x-a_u)\frac{a_p'(k)}{a_p(k)}\Big)(x-a_u)^{k-2-j_u}\Big)\,\mu(k)=0.$$

Ceci montre que $\mu(k)\in\Pi\big(a_p(k)^{v_p(x)},|x|^{-1}x^{1-k}a_p(k)^{-v_p(x)},2\frac{a_p'(k)}{a_p(k)}\big)^*$ et donc $\mathscr{L}(k)=2\frac{a_p'(k)}{a_p(k)}$. On peut voir cette formule comme une illustration du fait que $\mathscr{S}_+$ est obtenu par éclatement à partir de $\widehat{\mathscr{T}}\times\widehat{\mathscr{T}}$.

Évidemment, pour retrouver la formule de Stevens, il faut savoir que les invariants $\mathscr{L}$ utilisés sont les mêmes[(4)], ce qui demande de rassembler un certains nombre de résultats pas totalement évidents, dont celui de Breuil [**8**] qui a été le facteur déclenchant pour l'introduction des (φ,Γ)-modules dans la théorie des représentations unitaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Dans l'autre sens, on peut utiliser les diverses démonstrations de la formule $\mathscr{L}=-2\frac{a_p'}{a_p}$, et les résultats de Kisin [**29**], pour démontrer que les différents invariants $\mathscr{L}$ attachés à une forme modulaire coïncident. En effet, outre la formule originale de Stevens et celle ci-dessus, on dispose de telles formules pour l'invariant de Fontaine-Mazur [**21**] et pour ceux de Teitelbaum et Darmon-Orton [**5**].

0.6. Plan de la démonstration dans le cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}$

Comme mentionné plus haut, le théorème 0.12 a été démontré ailleurs dans les cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm st}$ et $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$; nous nous concentrerons donc sur le cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm ng}$ ou, plus généralement, sur le cas où $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_*$ est tel qu'il existe $k\in\mathbf{N}$, avec $k-1\geqslant 2u(s)$ et $w(s)\notin\{1,\dots,k\}$, ce qui permet de couvrir une partie du cas $s\in\mathscr{S}_*^{\rm cris}$. Choisissons un tel k, et posons $\delta=x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$. On dispose alors de la description suivante du module $\Delta(s)=\mathbf{D}^\dagger(V(s))$.

Proposition 0.14. — *Il existe λ, A, B et C, où*
- *λ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta^{-1}\lambda\neq 0$,*
- *$A\in\mathscr{R}^+$ vérifie $(\delta(p)\varphi-1)A=\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,*
- *$B\in(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ vérifie $(\delta(\gamma)\gamma-1)B=\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,*
- *$C\in\mathscr{R}$ est tel que $A-(\delta(\gamma)\gamma-1)C\equiv B-(\delta(p)\varphi-1)C\equiv 0$ mod t^k,* (avec $t=\log(1+T)$),

[(4)] Au signe près ; le signe des invariants $\mathscr{L}$ est parfaitement arbitraire.

tels que, si $D(s,k)$ est le (φ,Γ)-module de base g_1, g_2 sur $\mathscr{R}$, avec actions de φ et γ données par

$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \quad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + Bg_1),$$
$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \quad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)(g_2 + Ag_1),$$

alors $\Delta(s)$ le sous-ensemble de $D(s,k)$ des $x = x_1g_1 + x_2g_2$, où $x_1, x_2 \in \mathscr{R}$ vérifient les conditions
- *$x_1 - Cx_2 \equiv 0 \mod t^k$,*
- *x_1 est d'ordre $k - u(s)$ et x_2 est d'ordre $u(s)$.*

Remarque 0.15. — Il est, *a priori*, loin d'être clair qu'il existe des couples (x_1, x_2) d'éléments de $\mathscr{R}$ vérifiant les conditions « $x_1 - Cx_2 \equiv 0 \bmod t^k$ » et « x_1 est d'ordre $k - u(s)$ et x_2 est d'ordre $u(s)$ ».

Cette existence, dans le cas où $C \in L$ est équivalente à la conjecture « faiblement admissible implique admissible » de Fontaine (en dimension 2, dans le cas cristallin, pour $K = \mathbf{Q}_p$). Dans le cas général, cette existence est contenue de manière implicite dans le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya [**28**]. Ceci avait déjà été utilisé par Berger [**2**] qui en avait déduit une nouvelle démonstration de la conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

Soit u un générateur topologique de $\mathbf{Z}_p^*$. Soit μ_{KL}^* la distribution sur $\mathbf{Z}_p^*$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta\, \mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{w(\delta)}{\delta(u) - 1} \quad \text{si } \delta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^* \text{ est un caractère continu} \neq 1, \text{ et } \int_{\mathbf{Z}_p^*} \mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{1}{\log u}.$$

Cette distribution est l'analogue multiplicatif de la distribution de Kubota-Leopoldt, ce qui justifie la notation. Elle dépend du choix de u.

Soit $\alpha = |x|^{-1}\delta = x^{1-k}\delta_s$. La restriction de α à $\mathbf{Z}_p^*$ coïncide avec celle de δ, et on a $w(\alpha) = w(\delta) = w(s) - k$. On note $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ le produit de convolution sur $\mathbf{Z}_p^*$ de λ et $\alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$. On définit $\mu_{\alpha,\lambda}$ comme l'unique distribution sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ est $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ et qui vérifie[(5)]

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(px)\, \mu_{\alpha,\lambda} = p\alpha(p)^{-1} \int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x)\mu_{\alpha,\lambda}.$$

On définit $c_{\alpha,\lambda} \neq 0$, et $c_{\alpha,\lambda}(j)$, si $j \in \mathbf{N}$, par les formules :

$$c_{\alpha,\lambda} = \frac{p}{(p-1)\log u} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \alpha^{-1}\, \lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad c_{\alpha,\lambda}(j) = \frac{(w(\alpha)+j)\cdots(w(\alpha))}{j!} \cdot c_{\alpha,\lambda}^{-1}.$$

Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des parties finies de $L \times \mathbf{Q}_p \times \mathbf{N}$. Si $U = \{u = (a_u, j_u, \lambda_u)\} \in \mathscr{U}$, soient

$$\ell_{\alpha,U}(y) = \sum_{u \in U} \lambda_u \frac{(y - a_u)^{j_u}}{c_{\alpha,\lambda}(j_u)} \alpha(y - a_u) \quad \text{et} \quad P_U(X) = \sum_{u \in U} \lambda_u (X - a)^{j_u}.$$

On note $\mathscr{U}(k, u(s))$ l'ensemble des $U \in \mathscr{U}$ tels que $\deg P_U < k - 1 - u(s)$ et $k - 1 - u(s) < j_u \leqslant k - 1$ quel que soit $u \in U$.

Finalement, si $j \in \mathbf{N}$, soit $f_{\alpha,j}(x,y)$ la fonction de deux variables définie par

$$f_{\alpha,j}(x,y) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{y^{j-i}x^i}{w(\alpha) + i}.$$

(5) Si $\alpha(p) = p^{1-i}$, il faut en plus imposer $\int_{\mathbf{Z}_p} x^i \mu_{\alpha,\lambda} = 0$ pour garantir l'unicité.

Proposition 0.16. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p)$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mu \in \Pi(s)^*$.

(ii) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{U,\alpha}\,\mu = 0$ *quel que soit* $U \in \mathscr{U}(k, u(s))$.

(iii) *Il existe* $\nu \in \mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ *telle que, quels que soient* $a \in \mathbf{Q}_p$, $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ *et* $0 \leqslant j \leqslant k-1$, *on ait*

$$p^{n_1}\int_{D(a,n_1)} x^j\,\nu - p^{n_2}\int_{D(a,n_2)} x^j\,\nu$$
$$= \int_{\mathbf{Q}_p}\Big(p^{n_1}\int_{D(a-y,n_1)} f_{\alpha,j}(x,y)\,\mu_{\alpha,\lambda}(x) - p^{n_2}\int_{D(a-y,n_2)} f_{\alpha,j}(x,y)\,\mu_{\alpha,\lambda}(x)\Big)\,\mu(y).$$

(iv) *Il existe* $\nu \in \mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ *telle que*[(6)], *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$, *on ait*

$$F_\nu^{(n)} \equiv \delta(p)^{-n}\big(CF_\mu^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty}\delta(p)^{-m}\psi^m(BF_\mu^{(n+m)})\big) \bmod t^k.$$

(v) *Il existe* $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(\Delta(s))$ *tel que, si on écrit* $z^{(n)}$ *sous la forme* $z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2$, *alors quel que soit* $n \in \mathbf{Z}$,

$$z_2^{(n)} = \delta_2(p)^n\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(1+T)^{p^n x}\ \mu.$$

Réciproquement, si $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(\Delta(s))$, *il existe* $\mu_z \in \mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ *et* $\nu_z \in \mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ *vérifiant les propriétés* (iv) *et* (v) *et, quel que soit* $n \in \mathbf{Z}$, *on a*

$$z_1^{(n)} = (p^k\delta_1(p)^{-1})^{-n}\Big(F_{\nu_z}^{(n)} - \sum_{m=1}^{+\infty}\delta(p)^{-m}\psi^m(BF_{\mu_z}^{(n+m)})\Big).$$

Remarque 0.17. — (i) La démonstration de cette proposition consiste en une longue série de traductions occupant les §§ 6, 7 et 8.

(ii) L'isomorphisme du th. 0.12 est obtenu en envoyant $z \in \psi^{-\infty}(\Delta(s))$ sur μ_z.

0.7. Céoukonfaikoi. — La clé de voute de l'article est le § 3 qui est consacré à des calculs de groupes d'extensions dans la catégorie des (φ,Γ)-modules et, en particulier à la démonstration du th. 0.2. Le reste de l'article consiste en une série de traductions des résultats du § 3 en utilisant les diverses équivalences de catégories à notre disposition. Les th. 0.5 et 0.8 sont démontrés par petits bouts dans les §§ 4 et 5 qui sont consacrés respectivement à l'étude des (φ,Γ)-modules $D(s)$ et $\Delta(s) = \mathbf{D}^\dagger(V(s))$ et à celle de la représentation galoisienne $V(s)$. Le seul résultat de cette partie galoisienne utilisé du coté $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est la prop. 0.14 démontrée au n° 4.5. Cette proposition permet, d'une part (n° 8.7), de décrire le module $\psi^{-\infty}(\mathbf{D}^\dagger(V(s)))$, et d'autre part (§ 7), d'associer à s un certain nombre d'objets qui permettent (§ 8) de faire marcher la machine du § 6 pour décrire le dual de $\Pi(s)$. Comme le résumé ci-dessus le suggère, les résultats ont été obtenus dans l'ordre inverse de celui dans lequel ils sont présentés dans l'article... Pour déduire les propriétés de $\Pi(s)$ (th. 0.11) de la description du dual $\Pi(s)^*$ (th. 0.12), il n'y a rien à changer aux arguments de [**22**, ? ?] et [**3**, ? ?] ; nous ne les avons pas reproduits dans cet article.

(6) Si μ est une distribution sur $\mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$, on pose $F_\mu^{(n)} = \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(1+T)^{p^n x}\mu \in \mathscr{R}^+$.

0.8. Remerciements. — Les résultats de cet article ont été entrevus et annoncés lors de la conférence « L-functions and Galois representations » de Durham, organisée par D. Burns et J. Nekovář. L'atmosphère de cette conférence, où il a beaucoup été question de familles (de formes modulaires, de représentations galoisienne...) a joué un grand rôle dans la cristallisation des résultats.

La réception, juste avant la conférence, des notes « Towards a p-adic Langlands programme » de L. Berger et C. Breuil, contenant une définition de la représentation $\Pi(s)$ dans le cas cristallin, a joué un rôle évident, mais les travaux de M. Kisin et une question de G. Chenevier (dont la prop. 5.10 constitue la réponse) ont aussi eu une influence décisive en me mettant sur la piste de la représentation galoisienne $V(s)$. Ma première construction de $V(s)$ reposait sur la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie [**16, 17**] ; elle avait l'inconvénient de ne pas fournir directement le (φ,Γ)-module associé, et c'est l'exposé de L. Berger à la conférence de Durham qui m'a fait réaliser la puissance du théorème de Kedlaya pour ce genre de questions.

Je voudrais remercier tous les acteurs mentionnés ci-dessus pour l'influence qu'ils ont eue. Une partie non négligeable de cet article a été rédigée pendant un séjour à Padoue, et je voudrais en profiter pour remercier, de leur hospitalité, B. Chiarellotto et le département de mathématiques de l'université de Padoue.

1. Compléments à [22]

1.1. Compléments sur $\mathscr{R}$

Lemme 1.1. — (i) *Si $\alpha\in L^*$ n'est pas de la forme p^{-i}, $i\in\mathbf{N}$, alors $\alpha\varphi-1:\mathscr{R}^+\to\mathscr{R}^+$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $\alpha=p^{-i}$, avec $i\in\mathbf{N}$, alors le noyau de $\alpha\varphi-1:\mathscr{R}^+\to\mathscr{R}^+$ est la droite $L\cdot t^i$, et $\sum_{k=0}^{+\infty}a_kt^k$ est dans l'image de $\alpha\varphi-1$ si et seulement si $a_i=0$.*

Démonstration. — Si $k>-v_p(\alpha)$, alors $-\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha\varphi)^n$ est un inverse continu de $\alpha\varphi-1$ sur $T^k\mathscr{R}^+$. (Pour montrer que la somme définit bien une fonction analytique sur $v_p(T)>0$, il suffit de constater que l'on a $v_p(\varphi^n(T))=n+C$, si n est assez grand, et donc $v_p(F(\varphi(T)))\geqslant nk+C'$ si F est divisible par T^k.) Le résultat se déduit alors de ce que $\mathscr{R}^+=\oplus_{i=0}^{k-1}L\cdot t^i\oplus T^k\mathscr{R}^+$ et de ce que $\varphi(t^i)=p^it^i$.

Lemme 1.2. — *Si $b\in\mathscr{E}^\dagger$ et si $v_p(\alpha)<0$, il existe $c\in\mathscr{E}^\dagger$ tel que $b'=b-(\alpha\varphi-1)c$ appartienne à $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$.*

Démonstration. — Il suffit de résoudre l'équation $\alpha c-\psi(c)=\psi(b)$ dans $\mathscr{E}^\dagger$, or cette équation admet comme solution $c=\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha^{-k}\psi^k(b)$, la convergence de la série dans $\mathscr{E}^\dagger$ étant une conséquence de la prop. [**22**, ? ?].

Corollaire 1.3. — *Si $b\in\mathscr{R}$ et si $v_p(\alpha)<0$, il existe $c\in\mathscr{R}$ tel que $b'=b-(\alpha\varphi-1)c$ appartienne à $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.1, si $k>-v_p(\alpha)$, il existe $c_1\in\mathscr{R}$ tel que $b-(\alpha\varphi-1)c_1$ soit de la forme $\sum_{i<k}a_iT^i$ et donc appartienne à $\mathscr{E}^\dagger$, ce qui permet d'utiliser le lemme 1.2 pour conclure.

Lemme 1.4. — *Si $v_p(\alpha)<0$, et si $a\in\mathscr{R}$ vérifie $(\alpha\varphi-1)a\in(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, alors $a\in\mathscr{R}^+$.*

Démonstration. — Si $x=\sum_{k\in\mathbf{Z}}x_kT^k$ est un élément de $\mathscr{R}$, on note x^+ et x^- les séries de Laurent définies par $x^+=\sum_{k\geqslant 0}x_kT^k\in\mathscr{R}^+$ et $x^-=\sum_{n\leqslant -1}x_kT^k\in\mathscr{E}^\dagger$. On a $\psi(x)^-=\psi(x^-)$ et $\psi(x)^+=\psi(x^+)$; on a aussi $\varphi(x)^-=\varphi(x^-)^-$.

Appliquant ce qui précède à $x=(\varphi(a)-a)\in(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, on en déduit les identités

$$0=\psi((\varphi(a)-\alpha^{-1}a)^-)=\psi((\varphi(a^-)-\alpha^{-1}a)^-)=(\psi(\varphi(a^-)-\alpha^{-1}a^-))^-=a^--\alpha^{-1}\psi(a^-),$$

et comme on a supposé $v_p(\alpha)<0$, une récurrence immédiate montre que $a^-\in\mathfrak{m}_L^k\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, quel que soit $k\in\mathbf{N}$. On en déduit la nullité de a^-, ce qu'il fallait démontrer.

Si $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k\in\mathscr{R}$, on définit le résidu de la forme différentielle $\omega=f\,dT$ par la formule $\operatorname{res}(\omega)=a_{-1}$. On a alors $\operatorname{res}(\gamma(\omega))=\operatorname{res}(\omega)$ et $\operatorname{res}(\varphi(\omega))=\operatorname{res}(\omega)$.

Soit $\partial:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$ l'opérateur différentiel $\partial=\frac{d}{dt}=(1+T)\frac{d}{dT}$. On a

$$\partial\circ\varphi=p\,\varphi\circ\partial\quad\text{et}\quad\partial\circ\gamma=\chi(\gamma)\,\gamma\circ\partial.$$

Par ailleurs, comme $df=\partial f\,\frac{dT}{1+T}$; on en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.5. — (i) $\ker\partial=L$ *et f est dans l'image de ∂ si et seulement si* $\operatorname{res}(f\,\frac{dT}{1+T})=0$.

(ii) $\partial:\mathscr{R}[\log T]\to\mathscr{R}[\log T]$ *est surjective.*

On pose $\operatorname{Res}(f)=\operatorname{res}(f\,\frac{dT}{1+T})$. Comme $\log\frac{\gamma(T)}{T}$ et $\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$ appartiennent à $\mathscr{R}$ et donc ont une différentielle dont le résidu est nul, on en déduit les formules

$$\operatorname{Res}(\gamma(x))=\chi(\gamma)^{-1}\operatorname{Res}(x)\quad\text{et}\quad\operatorname{Res}(\varphi(x))=\operatorname{Res}(x).$$

Lemme 1.6. — *Si $x\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$, alors* $\operatorname{Res}\frac{\partial x}{x}\in\mathbf{Z}$.

Démonstration. — On peut écrire x de manière unique sous la forme $x=\alpha T^kx^+x^-$, avec $\alpha\in L^*$, $k\in\mathbf{Z}$, $x^+\in 1+T\mathscr{O}_L[[T]]$ et $x^-\in(1+pT^{-1}\mathscr{O}_L[[T^{-1}]])\cap\mathscr{E}^\dagger$. On a alors $\operatorname{Res}\frac{\partial x^-}{x^-}=\operatorname{Res}\frac{\partial x^+}{x^+}=0$ et $\operatorname{Res}\frac{\partial T^k}{T^k}=k$, ce qui permet de conclure.

Lemme 1.7. — *Si $x\in\mathscr{R}$ vérifie* $\operatorname{Res}(x)=0$, *alors il existe $c\in\mathscr{R}$ tel que $(\gamma-1)c=tx$.*

Démonstration. — Ce lemme peut se trouver dans [**1**]. Rappelons-en la démonstration. Soit $\nabla=\frac{\log\gamma}{\log\chi(\gamma)}$. Un petit calcul montre que $\nabla=t\partial$. Par ailleurs, on peut factoriser $\frac{\log(1+X)}{\log\chi(\gamma)}$ sous la forme $XF(X)$, et donc ∇ sous la forme $(\gamma-1)F(\gamma-1)$, ce qui prouve que pour trouver une solution de l'équation $(\gamma-1)c=t^iy$, il suffit d'exhiber une solution de l'équation $\partial c=t^{i-1}y$. Le lemme est alors une conséquence du fait que $\partial c=x$ a une solution dans $\mathscr{R}$ si et seulement si $\operatorname{Res}(x)=0$.

1.2. Anneaux de Fontaine

Proposition 1.8. — *Si $r>0$ et si $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t},\log\pi]$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $Nx=0$;

(ii) $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}]$.

Démonstration. — C'est évident.

Proposition 1.9. — *Si $r>0$ et si $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}[\frac{1}{t}]$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\varphi^{-n}(x)\in\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ *quel que soit* $n\in\mathbf{N}$ *vérifiant* $\frac{1}{(p-1)p^{n-1}}\leqslant r$ *;*
(ii) $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate, et pour montrer l'implication (i)⇒(ii), il suffit de prouver que si $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ est tel que $\varphi^{-n}(x)$ est divisible par t dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ pour tout n vérifiant $\frac{1}{(p-1)p^{n-1}}\leqslant r$, alors x est divisible par t dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$. Ceci a été démontré par Berger [**1**, ? ?].

Lemme 1.10. — *Si $x\in\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *il existe $n_0\in N$ tel que $\varphi^{-n}(x)\in\mathbf{A}_{\max}$ quel que soit $n\geqslant 0$;*
(ii) $x\in\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Passons à la réciproque. Par hypothèse, si $n\geqslant n_0$, il existe $x_n\in\mathbf{A}_{\max}$ tel que $x=\varphi^n(x_n)$. Par ailleurs, si $y\in\mathbf{A}_{\max}$, il existe une suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, tendant p-adiquement vers 0, telle que l'on ait

$$y=\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\Big(\frac{[\tilde{p}]}{p}\Big)^k\quad\text{et donc }\varphi^n(y)=\sum_{k=0}^{+\infty}p^{k(p^n-1)}\varphi^n(a_k)\Big(\frac{[\tilde{p}]}{p}\Big)^{kp^n};$$

on en déduit l'inclusion $\varphi^n(\mathbf{A}_{\max})\subset\widetilde{\mathbf{A}}^{+}+p^{n-1}\mathbf{A}_{\max}$, et l'appartenance de x à $\cap_{n\geqslant n_0}(\widetilde{\mathbf{A}}^{+}+p^{n-1}\mathbf{A}_{\max})$. Comme $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}\cap p^n\mathbf{A}_{\max}=(p,[\tilde{p}])^n\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, cela implique que $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ est fermé dans $\mathbf{A}_{\max}$; on en déduit l'appartenance de x à $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 1.11. — *Si $r>0$, et si $0<s\leqslant r$, les conditions suivantes sont équivalentes pour $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$:*
(i) *la suite $(\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{[s,r]}$;*
(ii) $x\in\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$.

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Passons à la réciproque. On peut décomposer x sous la forme $x=y+z$ avec $z\in\widetilde{\mathbf{B}}^{(0,r]}$ et, quitte à remplacer x par y, on peut supposer $r=+\infty$ et $x\in\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$, auquel cas le résultat suit du lemme 1.10.

Proposition 1.12. — *Si $x\in\mathscr{R}$ et si $\alpha\in L^*$ vérifie $v_p(\alpha)\geqslant 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *x est d'ordre $v_p(\alpha)$;*
(ii) *la suite de terme général $\alpha^n\varphi^{-n}(x)$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$.*

Démonstration. — On peut écrire x sous la forme $x=x^{+}+x^{-}$, avec $x^{+}\in\mathscr{R}^{+}$ et $x^{-}\in\mathscr{E}^{\dagger}$. La suite $(\varphi^{-n}(x^{-}))_{n\in\mathbf{N}}$ est alors bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$; il en est donc, a fortiori, de même de la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x^{-}))_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{\dagger}$. On peut donc remplacer x par x^{+} et se ramener à vérifier que $x\in\mathscr{R}^{+}$ est d'ordre $v_p(\alpha)$ si et seulement si la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$.

Maintenant, on a $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}=\cap_{i\in\mathbf{N}}\varphi^i(\mathbf{B}_{\max}^{+})$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^{+}$ si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\varphi^i(\mathbf{B}_{\max}^{+})$ quel que soit $i\in\mathbf{N}$, ou encore, si et seulement si, quel que soit $i\in\mathbf{N}$, la suite $(\varphi^{-i}(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{B}_{\max}^{+}$. Ceci permet de se ramener à prouver que $x\in\mathscr{R}^{+}$ est d'ordre $v_p(\alpha)$ si et seulement si la suite $(\alpha^n\varphi^{-n}(x))_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{B}_{\max}^{+}$. Pour la démonstration de ce dernier fait, voir par exemple [**15**, lemme VIII.3.3].

2. (φ,Γ)-modules et représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$

2.1. (φ,Γ)-modules étales et représentations galoisiennes

Si Λ est un anneau muni d'un action d'un frobenius φ, un φ-module D sur Λ est, dans cet article[7], un Λ-module libre muni d'une action semi-linéaire de φ telle que, si $e_1,\dots,e_d$ est une base de D sur Λ, alors il en est de même de $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$.

Si $r=\frac{a}{b}\in\mathbf{Q}$, avec $a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N}-\{0\}$, et a et b premiers entre eux, on note $D_{[r]}$ le φ-module sur Λ, de rang b, possèdant une base $e_1,\dots,e_b$ dans laquelle l'action de φ est donnée par

$$\varphi(e_1)=e_2,\dots,\varphi(e_{b-1})=e_b,\ \varphi(e_b)=p^a e_1.$$

Un φ-module D sur Λ est *élémentaire* s'il est isomorphe à $D_{[r]}$ pour un certain $r\in\mathbf{Q}$ (qui est alors unique).

Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ est un corps complet pour la valuation v_p de corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$ qui est algébriquement clos. Un φ-module D sur $\widetilde{\mathbf{B}}$ possède donc une décomposition de Dieudonné-Manin en somme directe de φ-modules élémentaires $D=\oplus_{i\in I}D_{[r_i]}$

Un φ-module D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est *de pente* $r\in\mathbf{Q}$ si, dans la décomposition de Dieudonné-Manin de $\widetilde{\mathbf{B}}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}} D$, tous les r_i sont égaux à r. Un φ-module D sur $\mathscr{E}^\dagger$ est *étale* s'il est de pente 0.

Rappelons qu'un (φ,Γ)-*module étale sur* $\mathscr{E}^\dagger$ est un φ-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ muni en plus d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.

Proposition 2.1 **([27, 11])**. — *Les foncteurs $\mathbf{V}^\dagger$ et $\mathbf{D}^\dagger$ définis par*

$$\mathbf{D}^\dagger(V)=(\mathbf{B}^\dagger\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{\mathscr{H}_{\mathbf{Q}_p}}\quad\text{et}\quad \mathbf{V}^\dagger(D)=(\mathbf{B}^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger_{\mathbf{Q}_p}}D)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre et établissent une équivalence de catégories entre la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et celle des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$.

2.2. Le théorème de Dieudonné-Manin de Kedlaya

Le théorème de Kedlaya ci-dessous va jouer un rôle fondamental dans la suite pour la construction de (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ et donc de représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 2.2 **([28])**. — *Si D est un φ-module sur $\mathscr{R}$, il existe une unique filtration*

$$0=D_0\subset D_1\subset\cdots\subset D_h=D$$

et, pour $1\leqslant i\leqslant h$, un unique sous-$\mathscr{E}^\dagger$-module Δ_i de D_i/D_{i-1}, non nul, stable par φ et isocline de pente r_i en tant que φ-module sur $\mathscr{E}^\dagger$, tels que

- $r_1<r_2\cdots<r_h$;
- $D_i/D_{i-1}=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\Delta_i$ *si* $1\leqslant i\leqslant h$.

Définition 2.3. — (i) Les rationnels r_i, $1\leqslant i\leqslant h$ apparaissant dans la proposition 2.2 sont *les pentes de D*.

(ii) D est *de pente* r si $h=1$ et $r_1=r$; ceci implique que D contient un unique sous-φ-module $\boldsymbol{\Delta}(D)$ sur $\mathscr{E}^\dagger$, isocline de pente r, tel que $D=\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\boldsymbol{\Delta}(D)$.

[7] On peut relacher cette condition de liberté ; il faut alors imposer que l'application naturelle $\Lambda\otimes_{\varphi(\Lambda)}\varphi(D)\to D$ soit un isomorphisme.

Rappelons qu'un (φ,Γ)-*module sur* $\mathscr{R}$ est un φ-module sur $\mathscr{R}$ muni en plus d'une action semi-linéaire de Γ commutant à celle de φ.

Proposition 2.4. — *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ de pente 0, alors $\mathbf{\Delta}(D)$ est stable par Γ.*

Démonstration. — Choisissons une base $e_1,\dots,e_d$ de $\Delta = \mathbf{\Delta}(D)$ sur $\mathscr{E}^\dagger$. C'est donc aussi une base D sur $\mathscr{R}$. Soit A la matrice de γ dans cette base, et, si $n\in\mathbf{N}$ soit B_n la matrice de φ^n. Comme Δ est de pente 0, il existe $N\in\mathbf{N}$ tel que, quel que soit $n\in\mathbf{N}$, les matrices B_n et B_n^{-1} soient à coefficients dans $p^{-N}\mathscr{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$. On tire de la relation $A = B_n\varphi^n(A)\gamma(B_n^{-1})$, le fait que les coefficients de A restent bornés quand on s'approche de $v_p(T)=0$, et donc que A est à coefficients dans $\mathscr{E}^\dagger$. Ceci permet de conclure.

Corollaire 2.5. — *Les foncteurs $\Delta\mapsto \mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\Delta$ et $D\mapsto\mathbf{\Delta}(D)$ sont inverses l'un de l'autre et induisent une équivalence de catégories de la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$ sur la sous-catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont de pente 0.*

Remarque 2.6. — On peut reformuler le corollaire ci-dessus en disant que l'on ne perd pas d'information en tensorisant par $\mathscr{R}$, ce qui est quand même un peu surprenant car cette opération peut transformer un (φ,Γ)-module irréductible sur $\mathscr{E}^\dagger$ en un (φ,Γ)-module réductible sur $\mathscr{R}$, mais alors les morceaux ne sont pas de pente 0 et les extensions entre les morceaux sont dans le sens opposé à celui permis par le théorème de Kedlaya.

2.3. Application aux représentations galoisiennes

Proposition 2.7. — *Les foncteurs $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}$ et $\mathbf{V}$ définis par*

$$\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V) = \mathscr{R}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{D}^\dagger(V)\quad\text{et}\quad \mathbf{V}(D) = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}} D)^{\varphi=1}$$

sont inverses l'un de l'autre et induisent une équivalence de catégories de la catégorie des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sur celle des (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$ qui sont de pente 0. De plus, on a

$$\mathbf{V}(D) = \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)).$$

Démonstration. — Compte tenu des prop. 2.1 et 2.2, il suffit de prouver la formule $\mathbf{V}(D) = \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D))$. On a $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}} D = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{\Delta}(D)$, et comme $\mathbf{\Delta}(D)$ est étale, on peut utiliser la proposition 1.11 pour caractériser $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{\Delta}(D)\subset\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}} D$ comme l'ensemble des x tels que la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ soit bornée. On en déduit les égalités,

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{\mathrm{rig}}\otimes_{\mathscr{R}} D)^{\varphi=1} &= (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{\Delta}(D))^{\varphi=1} = \big(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathbf{B}^\dagger}(\mathbf{B}^\dagger\otimes_{\mathscr{E}^\dagger}\mathbf{\Delta}(D))\big)^{\varphi=1}\\ &= \big(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_{\mathbf{B}^\dagger}(\mathbf{B}^\dagger\otimes_L\mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)))\big)^{\varphi=1} = (\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger\otimes_L\mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)))^{\varphi=1} = \mathbf{V}^\dagger(\mathbf{\Delta}(D)).\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Pour terminer ce n$^{\mathrm{o}}$, rappelons que l'on peut retrouver [**1**] les modules $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ directement à partir de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$, sans passer par les anneaux de Fontaine. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 2.8. — *Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors*

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V) &= \big(\mathscr{R}[1/t]\otimes_{\mathscr{R}}\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)\big)^{\Gamma} = \big(\mathscr{R}[1/t]\otimes_{\mathscr{E}^{\dagger}}\mathbf{D}^{\dagger}(V)\big)^{\Gamma}\\ \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) &= \big(\mathscr{R}[1/t,\log T]\otimes_{\mathscr{R}}\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)\big)^{\Gamma} = \big(\mathscr{R}[1/t,\log T]\otimes_{\mathscr{E}^{\dagger}}\mathbf{D}^{\dagger}(V)\big)^{\Gamma}\end{aligned}$$

3. Calculs de groupes de cohomologie

3.1. Le complexe associé à un (φ,Γ)-module

Soit γ un générateur de Γ (si $p=2$, il faut un peu modifier les arguments). Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, on note $C^{\bullet}(D)$ le complexe

$$0 \xrightarrow{d_0} D \xrightarrow{d_1} D\oplus D \xrightarrow{d_2} D \xrightarrow{d_3} 0\ ,$$

avec $d_1(x)=((\gamma-1)x,(\varphi-1)x)$ et $d_2(x,y)=(\varphi-1)x-(\gamma-1)y$. Si $i\in\mathbf{N}$, on note $B^i(D)$ l'image de d_i et $Z^i(D)$ le noyau de d_{i+1}, ce qui permet de définir le i-ème groupe de cohomologie $H^i(D)$ de D comme le quotient de $Z^i(D)$ par $B^i(D)$. On a bien évidemment $H^i(D)=0$ si $i\notin\{0,1,2\}$. Le groupe $H^1(D)$ s'identifie au groupe des extensions de $\mathscr{R}$ par D : si E est une telle extension et $e\in E$ est un relèvement de $1\in\mathscr{R}$, alors $((\gamma-1)e,(\varphi-1)e)$ est un élément de $Z^1(C^{\bullet}(D))$ dont la classe dans $H^1(D)$ ne dépend pas du choix de e, ce qui nous fournit une application naturelle $\mathrm{Ext}(\mathscr{R},D)\to H^1(D)$ qui est un isomorphisme comme on le constate aisément.

Par ailleurs, si $0\to D_1\to D\to D_2\to 0$ est une suite exacte de (φ,Γ)-modules sur $\mathscr{R}$, la suite de complexes associés

$$0\to C^{\bullet}(D_1)\to C^{\bullet}(D)\to C^{\bullet}(D_2)\to 0,$$

est exacte ; elle donne donc naissance à la suite exacte longue de cohomologie

$$0\to H^0(D_1)\to H^0(D)\to H^0(D_2)\to H^1(D_1)\to H^1(D)\to\cdots\to H^2(D_2)\to 0.$$

3.2. Le (φ,Γ)-module associé à un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$ et sa cohomologie

Soit $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ le groupe des caractères continus (et donc localement analytiques) de $\mathbf{Q}_p^*$ dans L^*. Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, on peut écrire δ de manière unique sous la forme

$$\delta(x)=\alpha^{v_p(x)}\eta(x|x|),\quad \text{avec } \alpha=\delta(p)\in L^* \text{ et } \eta:\mathbf{Z}_p^*\to\mathscr{O}_L^*.$$

Comme $\mathbf{Z}_p^*=\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)\times(1+2p\mathbf{Z}_p)$, où $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$ est le groupe (fini) des racines de l'unité contenues dans $\mathbf{Q}_p$, et comme $1+2p\mathbf{Z}_p$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, le caractère η est déterminé par sa restriction η_0 à $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$ et sa valeur en $1+2p$ qui appartient à $1+\mathfrak{m}_L$ car $\eta(1+2p)^{p^n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Ceci permet de voir $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ comme l'ensemble des points L-rationnels d'un groupe analytique rigide $\widehat{\mathscr{T}}$, isomorphe (non canoniquement) à $\mathbf{G}_m\times B(1,1^-)\times\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$.

Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, la quantité $\frac{\log\delta(u)}{\log u}$ ne dépend pas du choix de $u\in\mathbf{Z}_p^*-\boldsymbol{\mu}(\mathbf{Q}_p)$. On la note $w(\delta)$; c'est *le poids* ou *le poids de Hodge-Tate* de δ. Il est plus ou moins immédiat que

- $w(\delta)=0$ si et seulement si δ est localement constant ;
- $w(\delta)\in\mathbf{Z}$ si et seulement si δ est localement algébrique.

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathscr{R}(\delta)$ le (φ,Γ)-module obtenu en tordant les actions de φ et Γ sur $\mathscr{R}$ par δ. De manière explicite, si on note $x(\delta)$ l'élément de $\mathscr{R}(\delta)$ correspondant à $x \in \mathscr{R}$, on a

$$\varphi(x(\delta)) = (\delta(p)\varphi(x))(\delta) \quad \text{et} \quad \gamma(x(\delta)) = (\delta(\gamma)\gamma(x))(\delta),$$

où l'on a utilisé l'identification $\mathrm{W}^{\mathrm{ab}}_{\mathbf{Q}_p} \cong \mathbf{Q}_p^*$ pour voir δ comme un caractère de Γ (on a donc $\delta(g) = \delta(\chi(g))$ si $g \in \Gamma$). Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et si $i \in \mathbf{N}$, on note simplement $Z^i(\delta)$, $B^i(\delta)$ et $H^i(\delta)$, les groupes $Z^i(\mathscr{R}(\delta))$, $B^i(\mathscr{R}(\delta))$ et $H^i(\mathscr{R}(\delta))$.

Proposition 3.1. — (i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^0(\delta) = 0$.*
(ii) *Si $i \in \mathbf{N}$, alors $H^0(x^{-i}) = L \cdot t^i$.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.1, on a $H^0(\delta) = 0$ si $\delta(p)$ n'est pas de la forme p^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, et $H^0(\delta) \subset L \cdot t^i$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$. Le résultat s'en déduit.

Corollaire 3.2. — *Les (φ,Γ)-modules $\mathscr{R}(\delta)$ et $\mathscr{R}(\delta')$ ne sont isomorphes que si $\delta = \delta'$.*

Démonstration. — En tordant par δ^{-1}, on se ramène à prouver que $\mathscr{R}(\delta)$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{R}$ si $\delta \neq 1$, ce qui suit de ce que $\delta = 1$ est le seul élément de $\widehat{\mathscr{T}}(L)$ tel que que $\mathscr{R}(\delta)$ soit engendré par $H^0(\delta)$.

3.3. Calcul de $H^1(\delta)$ dans le cas $v_p(\delta(p)) < 0$

Lemme 3.3. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$. Alors*
(i) *l'équation $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$ a une unique solution $b_{\delta,\lambda}$ dans $(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$;*
(ii) *$b_{\delta,\lambda} \in \mathscr{E}^+$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta^{-1}\,\lambda = 0$.*

Démonstration. — Comme $\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0} \subset (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, le (i) est un cas particulier du théorème [**11**, ? ?] selon lequel $\gamma - 1$ est inversible sur $D^{\psi=0}$ si D est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$.

Prouvons le (ii). L'application $\mu \mapsto \delta^{-1}\mu$ induit un isomorphisme de Γ-modules de $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ sur $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)(\delta)$, ce qui permet de se ramener au cas $\delta = 1$. En utilisant l'isomorphisme $\Gamma \cong \mathbf{Z}_p^*$ qui induit un isomorphisme Γ-équivariant $L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathscr{O}_L[[\Gamma]] \cong \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$, on est ramené à prouver que $\mu \in (\gamma - 1)\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\mu = 0$. Comme $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\gamma(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*}\mu$, cela nous fournit une des implications, l'autre s'en déduit en remarquant que $(\gamma-1)\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ est de corang 1 sur $\mathscr{O}_L$ dans $\mathscr{O}_L[[\Gamma]]$ car γ est un générateur topologique de Γ.

Lemme 3.4. — *Soit $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ et soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\lambda = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$. Alors l'équation $(\delta(p)\varphi - 1)a = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$ a une unique solution $a_{\delta,\lambda}$ dans $\mathscr{R}^+$ vérifiant $(\partial^i a_{\delta,\lambda})_{|T=0} = 0$ si $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — C'est une simple traduction du lemme 1.1.

Remarque 3.5. — Par construction, si $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ (et vérifie $\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\lambda = 0$ dans le cas $\delta(p) = p^{-i}$ et $i \in \mathbf{N}$), alors $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in Z^1(\delta)$.

Proposition 3.6. — *Soit $\delta : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ un caractère continu vérifiant $v_p(\delta(p)) < 0$.*

(i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 1 sur L et l'image de $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda})$ en est une base si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda \neq 0$.*

(ii) *Si $\delta = x^{-i}$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 2 sur L, et les images de $(t^i, 0)$ et $(0, t^i)$ en forment une base.*

Démonstration. — Soit $(a, b) \in Z^1(\delta)$. Comme $v_p(\delta(p)) < 0$, d'après le cor. 1.3, il existe $c_0 \in \mathscr{R}$ tel que $b_1 = b-(\delta(p)\varphi-1)c_0 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$. Soit $a_1 = a-(\delta(\gamma)\gamma-1)c_0$ de telle sorte que $(a_1, b_1) \in Z^1(\delta)$ a même image que (a, b) dans $H^1(\delta)$. Comme $(a_1, b_1) \in Z^1(\delta)$, et comme $b_1 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$, on a $(\delta(p)\varphi - 1)a_1 = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1 \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$. D'après le lemme 1.4, ceci implique $a_1 \in \mathscr{R}^+$ et donc $(\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1 \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$.

Soit $\lambda \in \mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p^*, L)$ la mesure définie par $\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1 + T)^x\,\lambda = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b_1$. Si $\delta(p) = p^{-i}$, avec i entier $\geqslant 1$, la relation $(\delta(p)\varphi - 1)a_1 = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1 + T)^x\,\lambda$ entraine que l'on a

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\,\lambda = \partial^i((\delta(p)\varphi - 1)a_1)_{|T=0} = (p^i\delta(p) - 1)(\partial^i a_1)_{|T=0} = 0.$$

Le lemme 3.3 implique donc que $b_1 = b_{\delta,\lambda}$ et le lemme 3.4 que $a_1 - a_{\delta,\lambda} \in Lt^i$. Maintenant, si $\delta(p) = p^{-i}$, mais $\delta \neq x^{-i}$, alors $(t^i, 0)$ est le bord de $((\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1)^{-1}t^i, 0)$; pour terminer la démonstration du (i), il suffit donc de vérifier que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$ si et seulement si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$.

Si $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$, il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que $(\delta(p)\varphi - 1)c = b_{\delta,\lambda}$. Comme $\psi(b_{\delta,\lambda}) = 0$, cela entraine $c \in \mathscr{R}^+$ d'après le lemme 1.4, et donc $b_{\delta,\lambda} \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$. D'après le lemme 3.3, ceci implique $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$.

Réciproquement, si $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$, il résulte du lemme 3.3 que $b_{\delta,\lambda} \in (\mathscr{E}^+)^{\psi=0}$. De plus, si $\delta(p) = p^{-i}$, la nullité de

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = \partial^i((\delta(\gamma)\gamma - 1)b_{\delta,\lambda})_{|T=0} = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1)(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0}$$

entraine celle de $(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0}$ puisque $\delta \neq x^{-i}$ et donc $\delta(\gamma)\chi(\gamma)^i - 1 \neq 1$. On en déduit, grâce au lemme 1.1, l'existence et l'unicité de $c \in \mathscr{R}^+$ vérifiant $(\delta(p)\varphi-1)c = 0$ (et $(\partial^i c)_{|T=0}$ si $\delta(p) = p^{-i}$). On a alors

$$(\delta(p)\varphi - 1)((\delta(\gamma)\gamma - 1)c - a_{\delta,\lambda}) = 0,$$

ce qui, grâce au lemme 1.1, entraine que $(\delta(\gamma)\gamma - 1)c - a_{\delta,\lambda} = 0$ et donc que $(a_{\delta,\lambda}, b_{\delta,\lambda}) \in B^1(\delta)$. Ceci permet de conclure.

(ii) Dans le cas $\delta = x^{-i}$, il faut modifier le raisonnement à deux endroits. Tout d'abord $(t^i, 0)$ n'est plus un bord, et ensuite la condition $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\,\lambda = 0$ est automatique, mais $b_{\delta,\lambda} \in \mathscr{E}^+$ ne vérifie plus nécéssairement la propriété $(\partial^i b_{\delta,\lambda})_{|T=0} = 0$, et donc l'existence de c dans $\mathscr{R}^+$ (et donc dans $\mathscr{R}$) vérifiant $(\delta(p)\varphi - 1)c = 0$ n'est pas automatique. Le résultat s'en déduit.

Remarque 3.7. — Dans le cas, $\delta = |x|$, on peut prendre $(\log\frac{\gamma(T)}{T}, \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p})$ comme générateur de $H^1(\delta)$, ce qui a l'avantage de rendre plus transparent le lien avec les représentations semi-stables.

3.4. L'opérateur $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$

On déduit des formules
$$\partial \circ \varphi = p\,\varphi \circ \partial \quad \text{et} \quad \partial \circ \gamma = \chi(\gamma)\,\gamma \circ \partial,$$
le fait que ∂ induit un morphisme L-linéaire, commutant à l'action de φ et Γ, de $\mathscr{R}(x^{-1}\delta)$ dans $\mathscr{R}(\delta)$. Ce morphisme induit un morphisme de complexes de $C^\bullet(x^{-1}\delta)$ dans $C^\bullet(\delta)$, et donc aussi un morphisme, encore noté ∂, de $H^i(x^{-1}\delta)$ dans $H^i(\delta)$.

Proposition 3.8. — (i) *Si $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, alors ∂ induit un isomorphisme de $H^1(x^{-1}\delta)$ sur $H^1(\delta)$.*

(ii) *Si $\delta = x$, alors $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nul et $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 1.

(iii) *Si $\delta = x|x|$, alors $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nul et $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. — Commençons par déterminer le noyau de ∂. Si $\delta = x$, alors $x^{-1}\delta = 1$ et $H^1(x^{-1}\delta)$ est le L-espace vectoriel de dimension 2 engendré par $(1,0)$ et $(0,1)$ qui sont tués par ∂, ce qui fait que ∂ est identiquement nul sur $H^1(x^{-1}\delta)$.

Si $\delta = x|x|$, alors $x^{-1}\delta = |x|$ et $H^1(x^{-1}\delta)$ est le L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $(\log\frac{\gamma(T)}{T}, \log\frac{\varphi(T)}{T^p})$ dont l'image par ∂ est le bord de $\frac{1+T}{T}$, ce qui fait que ∂ est identiquement nul sur $H^1(x^{-1}\delta)$.

Si $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, et si $(a,b) \in Z^1(x^{-1}\delta)$ est dans le noyau de ∂, alors il existe $c \in \mathscr{R}$ tel que l'on ait $\partial a = (\delta(\gamma)-1)c$ et $\partial b = (\delta(p)\varphi - 1)c$. Ceci implique en particulier que l'on a
$$(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)\mathrm{Res}(c) = (\delta(p)-1)\mathrm{Res}(c) = 0,$$
et comme $\delta \neq x|x|$, l'une au moins des deux quantités $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)$ ou $(\delta(p)-1)$ est non nulle, ce qui implique que $\mathrm{Res}(c)$ est nul, et qu'il existe $c' \in \mathscr{R}$ tel que $\partial c' = c$. Soient $a' = a - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)c'$ et $b' = b - (\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)c'$. Par construction, on a $\partial a' = \partial b' = 0$, et donc $a', b' \in L$. Par ailleurs, on a aussi $(\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)b'$, et comme $\delta \neq x$, l'une au moins des deux quantités $(\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)$ et $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)$ est non nulle, ce qui fait que les couples (a', b') vérifiant la relation ci-dessus forment un L-espace vectoriel de dimension 1 et que l'on peut modifier c' en lui ajoutant un élément de L de telle sorte que $a' = b' = 0$. On en déduit l'injectivité de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ dans le cas $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$.

Intéressons nous maintenant à l'image de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$. Soit $(a,b) \in Z^1(\delta)$. On a donc $(\delta(p)\varphi - 1)a = (\delta(\gamma)\gamma - 1)b$, ce qui nous donne la relation
$$(\delta(p)-1)\mathrm{Res}(a) = (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1)\mathrm{Res}(b).$$
Si $(\delta(p)-1) \neq 0$, on peut ajouter à (a,b) un bord de telle sorte que $\mathrm{Res}(b) = 0$, et la relation précédente entraîne alors que $\mathrm{Res}(a) = 0$. Si $(\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1} - 1) \neq 0$, on peut ajouter à (a,b) un bord de telle sorte que $\mathrm{Res}(a) = 0$, et la relation précédente entraîne alors que $\mathrm{Res}(b) = 0$. Autrement dit, si $\delta \neq x|x|$, quitte à ajouter un bord à (a,b), on peut s'arranger pour que $\mathrm{Res}(a) = \mathrm{Res}(b) = 0$. Il existe alors $a', b' \in \mathscr{R}$ tels que $a = \partial a'$ et $b = \partial b'$. Ceci implique que $(\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b' \in L$, et, comme précédemment, si $\delta \neq x$, on peut ajouter à a' et b' des éléments de L de telle sorte que $(a', b') \in Z^1(x^{-1}\delta)$. On en déduit la surjectivité de $\partial : H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ dans le cas $\delta \neq x$ et $\delta \neq x|x|$, ce qui termine la démonstration du (i).

Si maintenant $\delta = x$, la quantité $d(a,b) = (\delta(p)p^{-1}\varphi - 1)a' - (\delta(\gamma)\chi(\gamma)^{-1}\gamma - 1)b' \in L$ ne dépend pas du choix de (a',b') vérifiant $\partial a' = a$ et $\partial b' = b$, ce qui nous fournit une application naturelle de $H^1(\delta)$ dans L qui n'est pas identiquement nulle car, si $b = \varphi(\frac{1}{T}) - \frac{1}{T}$, et si $a \in T\mathscr{R}^+$ est l'unique solution de l'équation $(p\varphi - 1)a = (\varphi - 1)\big(\frac{\chi(\gamma)}{(1+T)^{\chi(\gamma)}-1} - \frac{1}{T}\big) \in T\mathscr{R}^+$, on peut prendre $b' = \frac{1}{p}\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$, et pour a' la primitive de $(1+T)^{-1}a$ sans terme constant. Alors $d(a,b)$ est le terme constant de $-(\gamma-1)b' = -\frac{1}{p}(\varphi - p)\log\frac{\varphi(T)}{T^p}$, et donc $d(a,b) = -\frac{p-1}{p}\log\chi(\gamma) \neq 0$. Ceci termine la démonstration du (ii).

Finalement, si $\delta = x|x|$, le raisonnement fait ci-dessus montre que ∂ est une surjection de $Z^1(x^{-1}\delta)$ sur l'ensemble des $(a,b) \in Z^1(\delta)$ vérifiant $\mathrm{Res}(a) = \mathrm{Res}(b) = 0$. Comme ∂ : $H^1(x^{-1}\delta) \to H^1(\delta)$ est identiquement nulle, cela montre que $H^1(\delta)$ s'identifie à l'image de $Z^1(\delta)$ dans L^2 par $(a,b) \mapsto (\mathrm{Res}(a), \mathrm{Res}(b))$. Or $Z^1(\delta)$ contient les couples $(\frac{1}{T}, b)$, où $b \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ est l'unique solution de l'équation $(\chi(\gamma)\gamma - 1)b = (\varphi - 1)\frac{1}{T}$, et $(a, \frac{1}{T} + \frac{1}{2})$, où $a \in T\mathscr{R}^+$ est l'unique solution de l'équation $(\varphi - 1)a = (\chi(\gamma)\gamma - 1)(\frac{1}{T} + \frac{1}{2}) \in T\mathscr{O}_L[[T]]$. On en déduit le fait que l'image de $Z^1(\delta)$ dans L^2 par $(a,b) \mapsto (\mathrm{Res}(a), \mathrm{Res}(b))$ est L^2 tout entier, ce qui termine la démonstration du (iii) et donc de la proposition en entier !

3.5. Dimension de $H^1(\delta)$

Les résultats des deux § précédents permettent de calculer la dimension de $H^1(\delta)$.

Théorème 3.9. — (i) *Si δ n'est pas de la forme x^{-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, ou de la forme $|x|x^i$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 1.

(ii) *Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2 *engendré par les images de $(t^i, 0), (0, t^i) \in Z^1(\delta)$.*

(iii) *Si $\delta = |x|x^i$, avec $i \geqslant 1$ entier, alors $H^1(\delta)$ est un L-espace vectoriel de dimension* 2.

Démonstration. — • Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $H^1(\delta)$ est de dimension 2 d'après le (ii) de la prop. 3.6.

• Si $\delta = x^i$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ a même dimension que $H^1(x)$ comme le montre une récurrence immédiate utilisant le (i) de la prop. 3.8, et donc $H^1(\delta)$ est de dimension 1 d'après le (ii) de la proposition 3.8.

• Si $\delta = x^i|x|$, avec i entier $\geqslant 1$, alors $H^1(\delta)$ a même dimension que $H^1(x|x|)$ d'après le (i) de la prop. 3.8, et donc $H^1(\delta)$ est de dimension 2 d'après le (iii) de la proposition 3.8.

• Dans tous les autres cas, $H^1(\delta)$ a même dimension, pour tout $k \in \mathbf{N}$, que $H^1(x^{-k}\delta)$ d'après le (i) de la prop. 3.8, et comme $v_p(p^{-k}\delta(p)) < 0$ si k est assez grand, le (i) de la prop. 3.6 montre que $H^1(\delta)$ est de dimension 1.

Ceci permet de conclure.

Remarque 3.10. — (i) Si $v_p(\delta(p)) = 0$, l'équivalence de catégories entre (φ, Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ montre que $H^1(\delta)$ est aussi égal au groupe de cohomologie galoisienne $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta))$. Le théorème 3.9 permet donc de retrouver les résultats classiques selon lesquels, si δ est un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $H^1(\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}, L(\delta))$ est de dimension 1 sur L, si $\delta \neq 1$ et $\delta \neq \chi$, et de dimension 2, si $\delta = 1$ ou $\delta = \chi$.

(ii) Si $\delta = 1$, l'extension de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de L par $L(\delta)$ correspondant à $(0,1) \in H^1(\delta)$ est celle donnée par $g(e_1) = e_1$ et $g(e_2) = e_2 - (\deg g)e_1$, où $\deg : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p$ est le caractère additif non ramifié envoyant un frobenius sur 1 ; l'extension correspondant à $(1,0)$ est celle donnée par $g(e_1)=e_1$ et $g(e_2)=e_2+\frac{\log\chi(g)}{\log\chi(\gamma)}e_1$.

Définition 3.11. — Si $i\in\mathbf{N}$, on définit un isomorphisme $\mathscr{L}:\mathrm{Proj}(H^1(x^{-i}))\cong\mathbf{P}^1(L)$ en envoyant $h=a(0,1)+b(1,0)$ sur $\mathscr{L}(h)=\frac{a}{b\log\chi(\gamma)}$.

Remarque 3.12. — (i) Si $i=0$ et si $h\in H^1(x^{-i})$ est non nul, le (ii) de la remarque 3.10 montre que la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ définie par h ne dépend, à isomorphisme près, que de $\mathscr{L}(h)$, et que cette représentation est non ramifiée si et seulement si $\mathscr{L}=\infty$ (elle n'est même de Hodge-Tate que si $\mathscr{L}(h)=\infty$).

(ii) On dispose aussi (cf. def. 3.19) d'un isomorphisme naturel $\mathscr{L}:\mathrm{Proj}(H^1(x^i|x|))\cong\mathbf{P}^1(L)$, si i est un entier $\geqslant 1$. Ce dernier permet de retrouver (cf. prop. 5.18) l'invariant $\mathscr{L}$ attaché par Fontaine et Mazur **[31]** à une représentation semi-stable non cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui justifie le nom que lui avons donné.

3.6. Calcul de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$

Si $N\in\mathbf{N}$, soit ζ_{p^N} une racine primitive p^N-ième de l'unité choisie de telle sorte que l'on ait $\zeta_{p^{N+1}}^p=\zeta_{p^N}$ quel que soit $N\in\mathbf{N}$. On note L_N la $\mathbf{Q}_p$-algèbre étale $L\otimes_{\mathbf{Q}_p}\mathbf{Q}_p(\zeta_{p^N})$, que l'on munit de l'action L-linéaire évidente de Γ. Si $\Phi_N=\varphi^{N-1}(T^{-1}\varphi(T))$ est le p^N-ième polynôme cyclotomique, on a aussi $L_N=L[T]/\Phi_N$. On note L_∞ la réunion des L_N, $N\in\mathbf{N}$.

Si $\eta:\mathbf{Z}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$ est d'ordre fini, on note $p^{N(\eta)}$ son conducteur (où $N(\eta)$ est défini par $N(\eta)=0$ si $\eta=1$ et $N(\eta)$ est le plus petit entier n tel que η soit trivial sur $1+p^n\mathbf{Z}_p$ si $\eta\neq 1$), on définit la somme de Gauss $G(\eta)$ associée à η par $G(\eta)=1$ si $\eta=1$ et, si $N(\eta)=N\geqslant 1$,
$$G(\eta)=\sum_{x\in(\mathbf{Z}/p^N\mathbf{Z})^*}\eta(x)\zeta_{p^N}^x\in L_N^*.$$

Proposition 3.13. — *Soit $k\geqslant 1$ un entier.*

(i) *Si $\eta:\mathbf{Z}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$ est d'ordre fini et $0\leqslant i\leqslant k-1$, alors $G(\eta)t^i$ est vecteur propre pour l'action de Γ agissant par $\eta^{-1}\chi^i$.*

(ii) *Si $N\in\mathbf{N}$, alors $L_N[t]/t^k=\oplus_{N(\eta)\leqslant N}\oplus_{0\leqslant i\leqslant k-1}L\cdot G(\eta)t^i$.*

Démonstration. — Le (i) est un calcul immédiat (et classique). Le (ii) suit de l'indépendance linéaire des caractères et de ce que $|\{\eta,\ N(\eta)\leqslant N\}|=(p-1)p^{N-1}=\dim_L L_N$.

Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $w(\delta)=0$, ce qui équivaut à ce que la restriction δ_0 de δ à $\mathbf{Z}_p^*$ soit d'ordre fini, on pose $G(\delta)=G(\delta_0)$ et $N(\delta)=N(\delta_0)$. Si i,k sont deux entiers vérifiant $0\leqslant i\leqslant k-1$, on note $\pi_{\delta,i}$ la projection de $L_\infty[t]/t^k$ sur $L\cdot G(\delta)t^i$.

Corollaire 3.14. — (i) *Si $w(\delta)\notin\{1,\dots,k\}$, alors $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma-1):L_n[t]/t^k\to L_n[t]/t^k$ est un isomorphisme quel que soit $n\in\mathbf{N}$.*

(ii) *Si $w(\delta)\in\{1,\dots,k\}$, et si $n\geqslant N(x^{-w(\delta)}\delta)$, alors le noyau de $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma-1)$: $L_n[t]/t^k\to L_n[t]/t^k$ est $L\cdot t^{k-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta)$, et l'image est le noyau de $\pi_{x^{-w(\delta)}\delta,k-w(\delta)}$.*

Si $r\leqslant\frac{1}{p-1}$, on note $n(r)$ le plus petit entier tel que $(p-1)p^{n-1}r\geqslant 1$.

Proposition 3.15. — (i) *Si* $r \leqslant \frac{1}{p-1}$*, alors* $\mathscr{E}^{]0,r]}/t^k \cong \oplus_{n\geqslant n(r)}\mathscr{E}^{]0,r]}/\Phi_n^k$.

(ii) *Si* $(p-1)p^{n-1}r \geqslant 1$*, alors* $T \mapsto \zeta_{p^n}e^{t/p^n} - 1$ *induit un isomorphisme* Γ*-équivariant de* $\mathscr{E}^{]0,r]}/\Phi_n^k$ *sur* $L_n[t]/t^k$.

(iii) $\varphi : \mathscr{E}^{]0,r]} \to \mathscr{E}^{]0,r/p]}$ *se traduit, via les isomorphismes précédents, par* $\varphi((x_n)_{n\geqslant n(r)}) = (y_n)_{n\geqslant n(r/p)}$*, avec* $y_n = x_{n-1}$ *quel que soit* $n \geqslant n(r/p) = n(r)+1$.

Démonstration. — On a $t = \prod_{n\geqslant n(r)}(p^{-1}\Phi_n)$, à multiplication près par une unité de $\mathscr{E}^{]0,r]}$, ce qui permet d'utiliser le théorème des parties finies de Lazard pour démontrer le (i). Le reste est plus ou moins immédiat.

Si $w(\delta) = 0$ et $k \geqslant 1$, on choisit $G(\delta,k) \in \mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}/t^k = \oplus_{n\geqslant 1}L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n = 0$ si $n < N$, et $x_n = \delta(p)^n G(\delta)$ si $n \geqslant N$.

Lemme 3.16. — *Si* $w(\delta) = 0$*, alors* $(\delta(p)\varphi - 1)G(\delta,k) \in t^k\mathscr{R}$ *et* $(\delta(\gamma)\gamma - 1)G(\delta,k) \in t^k\mathscr{R}$.

Démonstration. — C'est immédiat au vu de la construction de $G(\delta,k)$ et des prop. 3.13 et 3.15.

Proposition 3.17. — (i) *Si* $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$*, alors* $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) = 0$.

(ii) *Si* $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$*, alors* $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ *est un* L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* $t^{-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta, w(\delta))$.

Démonstration. — Il n'y a rien à démontrer si $k = 0$; nous supposerons donc $k \geqslant 1$. L'application $z \mapsto t^k z$ induit un isomorphisme de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ sur $H^0((\mathscr{R}/t^k)(x^{-k}\delta))$, ce qui nous permet de travailler dans $\mathscr{R}/t^k$ plutôt que dans $t^{-k}\mathscr{R}/\mathscr{R}$.

Si $w(\delta) \notin \{1,\dots,k\}$, il résulte du cor. 3.14, que $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1)$ est injectif sur $L_n[t]/t^k$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Il est donc aussi injectif sur $\mathscr{R}/t^k$, d'après la proposition 3.15, ce qui démontre le (i).

Si $w(\delta) \in \{1,\dots,k\}$, et si $c \in \mathscr{R}/t^k$ est tué par $(\delta(\gamma)\chi^{-k}(\gamma)\gamma - 1)$ et $(\delta(p)p^{-k}\varphi - 1)$, il résulte de la prop. 3.15 que, si on écrit c sous la forme $(c_n)_{n\gg 0}$, avec $c_n \in L_n[t]/t^k$, alors $c_n \in L\cdot G(x^{-w(\delta)}\delta)t^{k-w(\delta)}$ et $c_{n+1} = p^{w(\delta)}\delta(p)^{-1}c_n$, quel que soit $n \gg 0$. Il existe donc $\lambda \in L$ tel que $c = \lambda t^{k-w(\delta)}G(x^{-w(\delta)}\delta, w(\delta))$, ce qui permet de conclure.

3.7. L'application $\iota_k : H^1(\delta) \to H^1(x^{-k}\delta)$

Si k est un entier $\geqslant 1$, la suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta) \to t^{-k}\mathscr{R}(\delta) \to t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta) \to 0$ donne naissance à une suite exacte longue de cohomologie dont le début est

$$0 \to H^0(\mathscr{R}(\delta)) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)) \to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(\mathscr{R}(\delta)) \to H^1(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)).$$

On peut utiliser ceci pour analyser le L-espace vectoriel $H^1(x^k|x|)$ qui est de dimension 2 d'après le th. 3.9 : la suite

$$0 \to H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|)) \to H^1(x^k|x|) \to H^1(|x|) \to 0$$

est exacte car $H^0(|x|) = 0$ d'après la prop. 3.1 et donc $H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|))$, qui est de dimension 1 sur L d'après la prop. 3.17, s'injecte dans $H^1(x^k|x|)$, et le quotient, qui est de dimension 1, s'identifie à $H^1(|x|)$ puisque cet espace est lui-aussi de dimension 1 sur L, d'après le th. 3.9. Comme $H^1(|x|)$ est engendré par $(\log\frac{\gamma(T)}{T}, \log\frac{\varphi(T)}{T^p})$ et comme $H^0((\mathscr{R}/t^k)(|x|))$ est engendré par $G(|x|,k)$, on en tire le résultat suivant, en choisissant $G'(|x|,k)\in\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\oplus_{n\geqslant 1}L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n=\log(\zeta_{p^n}e^{t/p^n}-1)$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$.

Proposition 3.18. — *Si $k\geqslant 1$, et si $h\in H^1(x^k|x|)$, alors il existe $\lambda,\mu\in L$ uniques tel que h soit l'image de $(a,b)\in Z^1(x^k|x|)$, avec*

$$\begin{aligned} a &= t^{-k}(\gamma-1)\big(\lambda G(|x|,k)+\mu(\log T-G'(|x|,k))\big)\\ b &= t^{-k}(p^{-1}\varphi-1)\big(\lambda G(|x|,k)+\mu(\log T-G'(|x|,k))\big). \end{aligned}$$

Définition 3.19. — Si $k\geqslant 1$, si $h\in H^1(x^k|x|)$ est non nul, et si λ,μ sont les éléments de L fournis par la proposition 3.18, on note $\mathscr{L}(h)\in\mathbf{P}^1(L)$ la quantité $-\frac{p-1}{p}\frac{\lambda}{\mu}$.

Remarque 3.20. — $\mathscr{L}(h)=\infty$ si et seulement si h se trivialise dans $t^{-k}\mathscr{R}$.

Si $k\in\mathbf{N}$, le (φ,Γ)-module $t^{-k}\mathscr{R}(\delta)$ s'identifie naturellement à $\mathscr{R}(x^{-k}\delta)$ et la suite exacte ci-dessus donne naissance à un morphisme naturel $\iota_k: H^1(\delta)\to H^1(x^{-k}\delta)$.

Théorème 3.21. — (i) *Si $w(\delta)\notin\{1,\dots,k\}$, alors $\iota_k : H^1(\delta)\to H^1(x^{-k}\delta)$ est un isomorphisme.*

(ii) *Si $w(\delta)\in\{1,\dots,k\}$ et $\delta\neq x^{w(\delta)}$, $|x|x^{w(\delta)}$, alors l'application de connexion induit un isomorphisme $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))\cong H^1(\delta)$ et $\iota_k: H^1(\delta)\to H^1(x^{-k}\delta)$ est identiquement nul.*

(iii) *Si $\delta=|x|x^{w(\delta)}$, avec $1\leqslant w(\delta)\leqslant k$, alors $\iota_k: H^1(\delta)\to H^1(x^{-k}\delta)$ est surjective et son noyau est la droite des $h\in H^1(\delta)$ vérifiant $\mathscr{L}(h)=\infty\in\mathbf{P}^1(L)$.*

(iv) *Si $\delta=x^{w(\delta)}$, avec $1\leqslant w(\delta)\leqslant k$, alors $\iota_k: H^1(\delta)\to H^1(x^{-k}\delta)$ est injective et son image est la droite d'invariant $\mathscr{L}=\infty$.*

Démonstration. — On part de la suite exacte

$$0\to H^0(\delta)\to H^0(x^{-k}\delta)\to H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))\to H^1(\delta)\to H^1(x^{-k}\delta).$$

Si $w(\delta)\notin\{1,\dots,k\}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))=0$ d'après la proposition 3.17, et $H^1(\delta)$ et $H^1(x^{-k}\delta)$ sont de dimension 1 sur L d'après le théorème 3.9. On en déduit le (i).

Si $w(\delta)\in\{1,\dots,k\}$ et $\delta\neq x^{w(\delta)}$, alors $H^0(x^{-k}\delta)=0$ d'après la proposition 3.1, et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ s'injecte dans $H^1(\delta)$. Si de plus $\delta\neq |x|x^{w(\delta)}$, alors $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ et $H^1(\delta)$ sont de dimension 1 sur L, d'après la prop. 3.17 et le th. 3.9, et donc l'application de connexion $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))\to H^1(\delta)$ est un isomorphisme et ι_k est nulle. On en déduit le (ii).

Comme le (iii) est contenu dans la prop. 3.18, qui est à la base de la définition de l'invariant $\mathscr{L}$, et dans la rem. 3.20, il ne reste plus que le cas $\delta=x^i$, avec $i\in\{1,\dots,k\}$, à traiter. Dans ce cas, on a $H^0(\delta)=0$ d'après la proposition 3.1, et $H^0(x^{-k}\delta)$ et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ sont tous deux de dimension 1, d'après les prop. 3.1 et 3.17. On en déduit, en utilisant la suite exacte ci-dessus, que ι_k est injective. Comme $H^1(\delta)$ est de dimension 1, son image par ι_k est une droite de $H^1(x^{-k}\delta)$ qui est de dimension 2 ; elle est donc déterminée par la valeur de $\mathscr{L}(\iota_k(h))$, où $h\in H^1(\delta)$ est non nul. Soit $(a,b)\in Z^1(\delta)$ représentant h ; on a donc $(\chi(\gamma)^i\gamma-1)b=(p^i\varphi-1)a$, et $\iota_k(h)$ est représenté par (t^ka,t^kb). On déduit de la relation $(\chi(\gamma)\gamma-1)t^{i-1}b=(p\varphi-1)t^{i-1}a$ la nullité de $\mathrm{Res}(t^{i-1}a)$. Ceci permet, en utilisant le lemme 1.7, de montrer qu'il existe $c\in\mathscr{R}$ tel que $(\gamma-1)c=t^ia$. On a alors $t^ka=(\chi(\gamma)^{i-k}\gamma-1)(t^{k-i}c)$, ce qui prouve que (t^ka,t^kb) est cohomologue à un multiple de $(0,t^{k-i})$ et donc que $\mathscr{L}(\iota_k(h))=\infty$. Ceci termine la démonstration du théorème 3.21.

4. Construction de (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$

4.1. (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$

Lemme 4.1. — *Si $a,b\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$ vérifient $a^{-1}\varphi(a)=b^{-1}\gamma(b)$, il existe $\alpha,\beta\in L^*$ et $c\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$, tels que l'on ait $a=\alpha c^{-1}\gamma(c)$ et $b=\beta c^{-1}\varphi(c)$.*

Démonstration. — On peut écrire tout élément x de $(\mathscr{E}^\dagger)^*$ de manière unique sous la forme $x=x^{(0)}T^{k(x)}x^+x^-$, avec $x^{(0)}\in L^*$, $k(x)\in\mathbf{Z}$, $x^+\in 1+T\mathscr{O}_L[[T]]$ et $x^-\in(1+\mathfrak{m}_L[[T^{-1}]])\cap\mathscr{E}^\dagger$. De plus, $k(\varphi(x))=pk(x)$ et $k(\gamma(x))=k(x)$.

En posant $\alpha=a^{(0)}$ et $\beta=b^{(0)}$ et en divisant a par α et b par β, on se ramène à démontrer que, si $a^{(0)}=1$ et $b^{(0)}=1$, alors il existe $c\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$ tel que $a=c^{-1}\gamma(c)$ et $b=c^{-1}\varphi(c)$. Commençons par remarquer que la relation $a^{-1}\varphi(a)=b^{-1}\gamma(b)$ implique $(p-1)k(a)=0$ et donc que $k(a)=0$. On a donc $a=a^+a^-$ et $b=T^{k(b)}b^+b^-$. En réduisant modulo $\mathfrak{m}_L$ la relation $a^{-1}\varphi(a)=b^{-1}\gamma(b)$, on obtient la nullité de $\chi(\gamma)^{k(b)}-1$ modulo p et donc la divisibilité de $k(b)$ par $p-1$, ce qui permet, quitte à multiplier b par $T^{-s}\varphi(T^s)$ de se ramener au cas où $k(b)=0$. Mais alors $(\log a,\log b)$ est un élément de $Z^1(1)$; son image par ∂ est donc un élément de $Z^1(x)$ dont l'image dans $H^1(x)$ est triviale d'après le (ii) de la proposition 3.8. Il existe donc $c_0\in\mathscr{R}$ tel que l'on ait

$$\frac{\partial a}{a}=(\chi(\gamma)\gamma-1)c_0\quad\text{et}\quad\frac{\partial b}{b}=(p\varphi-1)c_0.$$

La relation $\frac{\partial b}{b}=(p\varphi-1)c_0$ et le fait que $k(b)=0$ implique que $\operatorname{Res}(c_0)=0$ et donc qu'il existe $c_1\in\mathscr{R}$ tel que $c_0=\partial c_1$.

Soit $r>0$ tel que c_1 converge sur $0<v_p(T)\leqslant r$, et soit $n\in\mathbf{N}$ tel que $n+v_p(c_1)>1$ sur la couronne $p^{-2}r\leqslant v_p(T)\leqslant r$. Soit $c_2=\exp p^nc_1$. Alors c_2 est analytique sur la couronne $p^{-2}r\leqslant v_p(T)\leqslant r$ et y vérifie l'équation fonctionnelle $c_2=b^{-p^n}\varphi(c_2)$, ce qui montre que c_2 se prolonge en une fonction analytique sur $0<v_p(T)\leqslant r$ qui est bornée puisque $b^{(0)}=1$; on a donc $c_2\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$.

Par ailleurs, comme $b\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$, il existe $c\in\mathbf{B}^\dagger$ tel que $\varphi(c)=bc$. On a alors $\varphi(c^{-p^n}c_2)=c^{-p^n}c_2$, ce qui prouve que $c^{-p^n}c_2\in L^*$ et donc que $c^{p^n}\in\mathscr{E}^\dagger$, et comme $\mathbf{B}^\dagger$ est absolument non ramifiée sur $\mathscr{E}^\dagger$, cela implique $c\in\mathscr{E}^\dagger$. On en déduit le résultat.

Proposition 4.2. — *Si D est un (φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, alors il existe $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ unique tel que D soit isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$.*

Démonstration. — L'unicité suit (cor. 3.2) de ce que $\mathscr{R}(\delta)$ n'est pas isomorphe à $\mathscr{R}(\delta')$ si $\delta\neq\delta'$. Pour montrer l'existence de δ, choisissons une base e de D sur $\mathscr{R}$. Alors $\varphi(e)$ est aussi une base de D sur $\mathscr{R}$ et il existe $b\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$ tel que l'on ait $\varphi(e)=be$; en particulier, $\Delta=\mathscr{E}^\dagger\cdot e$ est stable par φ. Comme D est de rang 1, il est isocline, et la prop. 2.4 montre que Δ est aussi stable par Γ et donc qu'il existe $a\in\mathscr{E}^\dagger$ tel que l'on ait $\gamma(e)=ae$. La relation $\varphi(\gamma(e))=\gamma(\varphi(e))$ se traduit par la relation $a\gamma(b)=b\varphi(a)$, et on déduit du lemme 4.1, l'existence de $c\in(\mathscr{E}^\dagger)^*$ tel que φ et γ agissent sur $e'=ce$ par multiplication par des éléments de L^*. Ceci permet de conclure.

Remarque 4.3. — On peut aussi déduire ce résultat, via l'équivalence de catégories entre L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}^\dagger$, de la description de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ fournie par la théorie locale du corps de classes.

4.2. (φ,Γ)-modules triangulables

Lemme 4.4. — *Si D est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *D possède un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$;*
(ii) *D possède un sous-(φ,Γ)-module saturé, de rang 1 sur $\mathscr{R}$.*

Démonstration. — Il n'y a bien évidemment que l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) à prouver. Choisissons une base $e_1,\dots,e_d$ de D sur $\mathscr{R}$. Soit D_1 un sous-(φ,Γ)-module de rang 1 sur $\mathscr{R}$, et soit $f\in D_1$ une base de D_1. Écrivons f sous la forme $f=x_1e_1+\cdots+x_de_d$. Comme $\varphi(f)=bf$ avec $b\in\mathscr{R}^*$ et $\gamma(f)=af$, avec $a\in\mathscr{R}^*$, et comme les matrices de $\varphi(e_1),\dots,\varphi(e_d)$ et $\gamma(e_1),\dots,\gamma(e_d)$, dans la base $e_1,\dots,e_d$, appartiennent à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{R})$, on en déduit le fait que l'idéal de $\mathscr{R}$ engendré par $x_1,\dots,x_d$, est stable par γ et φ. Comme $\mathscr{R}$ est un anneau de Bézout, cet idéal est principal, et la stabilité par γ implique qu'on peut trouver un générateur λ de cet idéal de la forme $\lambda=\prod_{n\geqslant n_0}(\Phi_n^{i_n}/p)$, où $\Phi_n=\varphi^{n-1}(X^{-1}((1+X)^p-1))$ est le p^n-ième polynôme cyclotomique. La stabilité par φ implique alors que i_n est décroissante et donc stationnaire pour n assez grand. Si k est la limite de la suite i_n, on a alors $\lambda\sim t^k=X\prod_{n=1}^{+\infty}(\Phi_n/p)$, à multiplication près par une unité de $\mathscr{R}$. En d'autre termes, quitte à remplacer D_1 par $t^{-k}D_1$, on peut s'arranger pour que D_1 soit saturé. Ceci permet de conclure.

Remarque 4.5. — On a démontré en passant que les sous-(φ,Γ)-modules d'un (φ,Γ)-module D de rang 1 sur $\mathscr{R}$ sont de la forme t^kD, avec $k\in\mathbf{N}$.

Définition 4.6. — Un (φ,Γ)-module D sur $\mathscr{R}$ est dit *triangulable* si c'est une extension successive de (φ,Γ)-modules de rang 1 sur $\mathscr{R}$, i.e. si D possède une filtration croissante par des sous-(φ,Γ)-modules D_1, pour $0\leqslant i\leqslant d$ telle que l'on ait $D_0=0$, $D_d=D$ et D_i/D_{i-1} est libre de rang 1 si $1\leqslant i\leqslant d$.

4.3. Le (φ,Γ)-module $D(s)$

Soit $\widetilde{\mathscr{S}}(L)$ l'ensemble des $s=(\delta_1,\delta_2,h)$, où $\delta_1,\delta_2\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ et $h\in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$. Si $s\in\widetilde{\mathscr{S}}(L)$, on note $D(s)$ l'extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ définie par h. Le (φ,Γ)-module $D(s)$ ne dépend de h qu'à homothétie près et donc ne dépend que de l'image de s dans $\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$.

D'après le théorème 3.9, la dimension de $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est 1 sauf si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ ou si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. Dans ces deux derniers cas, $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est de dimension 2, et on dispose d'un isomorphisme naturel $\mathscr{L}:\mathrm{Proj}(H^1(\delta_1\delta_2^{-1}))\cong\mathbf{P}^1(L)$. Ceci nous permet de décrire le sous-ensemble de $\widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$ des $s=(\delta_1,\delta_2,h)$ avec $h\neq 0$ (correspondant aux (φ,Γ)-modules non scindés) comme l'ensemble des points L-rationnels de la variété analytique $\mathscr{S}$ obtenue en éclatant $\widehat{\mathscr{T}}\times\widehat{\mathscr{T}}$ le long des sous-variétés $\delta_1\delta_2^{-1}=x^i|x|$, pour i entier $\geqslant 1$ et des variétés $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, pour i entier $\geqslant 0$. On dispose d'une projection de $\mathscr{S}$ sur $\widehat{\mathscr{T}}\times\widehat{\mathscr{T}}$ dont les fibres sont en général réduites à un point et isomorphes à $\mathbf{P}^1$ dans le cas contraire. On note un élément générique s de $\mathscr{S}(L)$ sous la forme $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$, où $\mathscr{L}=\infty$ si la fibre au-dessus de (δ_1,δ_2) est réduite à un point, et $\mathscr{L}\in\mathbf{P}^1(L)$ sinon.

On note $\mathscr{S}_+$ le fermé de $\mathscr{S}$ constitué des s vérifiant les conditions

$$v_p(\delta_1(p))+v_p(\delta_2(p))=0\quad\text{et}\quad v_p(\delta_1(p))\geqslant 0.$$

Si $s \in \mathscr{S}_+(L)$, on associe à s les invariants $u(s) \in \mathbf{Q}_+$ et $w(s) \in L$ définis par

$$u(s) = v_p(\delta_1(p)) = -v_p(\delta_2(p)) \quad \text{et} \quad w(s) = w(\delta_1) - w(\delta_2).$$

On partitionne $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_+^{\rm ng} \coprod \mathscr{S}_+^{\rm cris} \coprod \mathscr{S}_+^{\rm st} \coprod \mathscr{S}_+^{\rm ord} \coprod \mathscr{S}_+^{\rm ncl}$, où

- $\mathscr{S}_+^{\rm ng}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ ne soit pas un entier $\geqslant 1$;
- $\mathscr{S}_+^{\rm cris}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} = \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\rm st}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) < w(s)$ et $\mathscr{L} \neq \infty$;
- $\mathscr{S}_+^{\rm ord}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) = w(s)$;
- $\mathscr{S}_+^{\rm ncl}$ est l'ensemble des s tels que $w(s)$ soit un entier $\geqslant 1$, $u(s) > w(s)$.

On partitionne aussi $\mathscr{S}_+$ sous la forme $\mathscr{S}_+ = \mathscr{S}_0 \coprod \mathscr{S}_*$, où

- $\mathscr{S}_0$ est l'ensemble des s tels que $u(s) = 0$;
- $\mathscr{S}_*$ est l'ensemble des s tels que $u(s) > 0$.

Si truc $\in \{\rm ng, cris, st, ord, ncl\}$ et machin $\in \{+, 0, *\}$, on note $\mathscr{S}_{\rm machin}^{\rm truc}$ l'intersection de $\mathscr{S}^{\rm truc}$ et $\mathscr{S}_{\rm machin}$. En particulier, les ensembles $\mathscr{S}_0^{\rm ord}$ et $\mathscr{S}_0^{\rm ncl}$ sont vides.

Finalement, on pose $\mathscr{S}_{\rm irr} = \mathscr{S}_*^{\rm ng} \coprod \mathscr{S}_*^{\rm cris} \coprod \mathscr{S}_*^{\rm st}$.

Proposition 4.7. — *Si $s = (\delta_1, \delta_2, h) \in \widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$, alors $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si on est dans un des deux cas exclusifs suivants :*

- *$s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\rm ncl}$;*
- *$h = 0$ et δ_1, δ_2 sont unitaires.*

Démonstration. — Si $D(s)$ est de pente 0, alors le déterminant de $D(s)$ est de pente 0, ce qui signifie que $v_p(\delta_1(p)\delta_2(p)) = 0$. De plus, si cette condition est vérifiée, alors d'après le théorème de Kedlaya, $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si il n'a pas de sous-module de pente < 0. En particulier, si $D(s)$ est de pente 0, alors $v_p(\delta_1(p)) \geqslant 0$ et donc $s \in \mathscr{S}_+$. De même, si $h = 0$, alors $\mathscr{R}(\delta_2)$ est un sous-(φ, Γ)-module de pente $v_p(\delta_2(p))$ de $D(s)$ et donc, si $h = 0$, alors $D(s)$ est de pente 0 si et seulement si $v_p(\delta_1(p)) = v_p(\delta_2(p)) = 0$. Si $h \neq 0$, la discussion précédente montre que $D(s)$ ne peut être de pente 0 que si $s \in \mathscr{S}_+$.

Supposons donc que $s \in \mathscr{S}_+$, mais que $D(s)$ contient un sous-module D' de pente strictement négative. Comme $\mathscr{R}(\delta_1)$ est de pente $\geqslant 0$, tous ses sous-(φ, Γ)-modules sont de pente $\geqslant 0$, et l'image de D' dans $\mathscr{R}(\delta_2)$ est un sous-(φ, Γ)-module non nul de $\mathscr{R}(\delta_2)$; elle est donc (rem. 4.5) de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, avec $k \in \mathbf{N}$ (et $k \geqslant 1$ car $D(s)$ est supposé non scindé), ce qui fait (th. 3.21) que $h \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ se trivialise dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$. La pente de D' est alors $k - u(s)$; sa stricte négativité équivaut à $u(s) > k$. On a donc $v_p(\delta_1(p)\delta_2^{-1}(p)) = 2u(s) > 2k \geqslant k+1$; en particulier, $\delta_1\delta_2^{-1}$ n'est pas de la forme x^i ou $x^i|x|$, avec $1 \leqslant i \leqslant k$, ce qui fait que $\iota_k : H^1(\delta_1\delta_2^{-1}) \to H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ est non injective si et seulement si $w(s) = i$, avec i entier, $1 \leqslant i \leqslant k$. Comme ι_k est alors identiquement nulle, l'existence de D' est équivalente à celle d'un entier $k \geqslant 1$ avec $1 \leqslant w(s) \leqslant k < u(s)$, c'est-à-dire à l'appartenance de s à $\mathscr{S}_+^{\rm ncl}$. Ceci permet de conclure.

Remarque 4.8. — La même démonstration, en remplaçant « pente < 0 » par « pente $= 0$ » montre que, si $u(s) > 0$, alors $D(s)$ possède un sous-(φ, Γ)-module de rang 1 et de pente 0 si et seulement si $s \in \mathscr{S}_+^{\rm ord}$ et ce sous-(φ, Γ)-module est isomorphe à $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, où $k = w(s)$.

Proposition 4.9. — *Soient $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L})$ et $s' = (\delta_1', \delta_2', \mathscr{L}')$ deux éléments de $\mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\rm ncl}$.*

(i) *Si $\delta_1 = \delta_1'$, alors $D(s) \cong D(s')$ si et seulement si $\delta_2 = \delta_2'$ et $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$.*

(ii) *Si* $\delta_1 \neq \delta'_1$, *alors* $D(s) \cong D(s')$ *si et seulement si* $s, s' \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}$ *et* $\delta'_1 = x^{w(s)}\delta_2$, $\delta'_2 = x^{-w(s)}\delta_1$.

De plus, on alors $w(\delta'_1) = w(\delta_1)$, $w(\delta'_2) = w(\delta_2)$, *et* $D(s) \cong D(s')$ *contient un sous* (φ, Γ)-*module d'indice* $t^{w(s)}$ *isomorphe à* $\mathscr{R}(\delta_1) \oplus \mathscr{R}(\delta'_1)$.

Démonstration. — Le (i) est une évidence ; remarquons juste que la condition $\mathscr{L} = \mathscr{L}'$ est automatique si $\delta_1\delta_2^{-1}$ n'est ni trivial ni de la forme $x^i|x|$ avec i entier $\geqslant 1$.

Passons au (ii), et soit $D = D(s) = D(s')$. Par construction, D contient des sous-(φ, Γ)-modules saturés D_1 et D'_1 isomorphes respectivement à $\mathscr{R}(\delta_1)$ et $\mathscr{R}(\delta'_1)$ qui sont distincts puisque $\delta_1 \neq \delta'_1$. Mais alors $D' = D_1 \oplus D'_1$ est d'indice fini dans D et est stable par φ et Γ ; il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel que D' soit d'indice t^k dans D, et on a $k \geqslant 1$ car D' est scindé alors que $D = D(s)$ ne l'est pas, par hypothèse.

L'image de D_1 dans $D/D'_1 = \mathscr{R}(\delta'_2)$ est d'indice t^k puisque $D_1 \oplus D'_1$ est d'indice t^k dans D. On en déduit l'identité $\delta_1 = x^k\delta'_2$. Symétriquement, on a $\delta'_1 = x^k\delta_2$. De plus, le fait que D' soit scindé se traduit par la nullité des images de h (élément de $H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ relevant $\mathscr{L}$) dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ et h' (élément de $H^1(\delta'_1(\delta'_2)^{-1})$ relevant $\mathscr{L}'$) dans $H^1(x^{-k}\delta'_1(\delta'_2)^{-1})$. D'après le théorème 3.21, cela se traduit par

- $w(s) \in \{1, \dots, k\}$ et $\mathscr{L} = \infty$ si $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{w(s)}|x|$,
- $w(s') \in \{1, \dots, k\}$ et $\mathscr{L}' = \infty$ si $\delta'_1(\delta'_2)^{-1} = x^{w(s')}|x|$.

Des relations $\delta_1 = x^k\delta'_2$ et $\delta'_1 = x^k\delta_2$, on déduit les relations $w(\delta_1) = k + w(\delta'_2)$ et $w(\delta_2) = -k + w(\delta'_1)$, puis $w(s) + w(s') = 2k$. Comme $w(s) \leqslant k$ et $w(s') \leqslant k$ d'après ce qui précède, cela implique $w(s) = w(s') = k$. On en déduit le résultat, les relations $w(\delta'_1) = w(\delta_1)$ et $w(\delta'_2) = w(\delta_2)$ découlant immédiatement des formules précédentes.

4.4. Le module $D(s,k)$

Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}^+$, et si k est un entier $\geqslant 1$, on note $D(s,k)$ le sous-(φ, Γ)-module $t^{-k}\mathscr{R}(\delta_1) + D(s)$ de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ et on pose $\delta = x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$. Ceci fait de $D(s,k)$ une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(x^{-k}\delta_1)$ dont la classe n'est autre que $\iota_k(h) \in H^1(\delta)$ si $h \in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ est un relèvement de $\mathscr{L}$. L'intérêt d'introduire $D(s,k)$ est que, si $k \gg 0$, alors $v_p(\delta(p)) < 0$, ce qui permet d'utiliser la prop. 3.6 pour obtenir une description « concrète » de $D(s,k)$ puis de $D(s)$.

Proposition 4.10. — *Soient* $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+$ *et* k *un entier* $> 2u(s)$ *tels que* $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$. *Soit* $\delta = x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$.

(i) *Il existe* λ, A, B *et* C, *où*

- λ *est une mesure sur* $\mathbf{Z}_p^*$ *vérifiant* $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta^{-1}\lambda \neq 0$,
- $A \in \mathscr{R}^+$ *vérifie* $(\delta(p)\varphi - 1)A = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x\,\lambda$,
- $B \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ *vérifie* $(\delta(\gamma)\gamma - 1)B = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x\,\lambda$,
- $C \in \mathscr{R}$ *est tel que* $A + (\delta(\gamma)\gamma - 1)C \equiv B + (\delta(p)\varphi - 1)C \equiv 0 \bmod t^k$.

(ii) *Si* λ, A, B *et* C *vérifient les conditions du* (i), *alors* $D(s,k)$ *possède une base* g_1, g_2 *dans laquelle les actions de* Γ *et* φ *sont données par*

$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \qquad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)(g_2 + Ag_1)$$
$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \qquad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + Bg_1),$$

et telle que $D(s)$ *admette* t^kg_1 *et* $g_2 + Cg_1$ *comme base sur* $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Soit $(a,b)\in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ dont l'image dans $\mathrm{Proj}(H^1(\delta_1\delta_2^{-1}))$ est $\mathscr{L}$, ce qui fait que (t^ka,t^kb) représente la classe de $D(s,k)$ dans $H^1(\delta)$, et qu'il existe une base f_1,f_2 de $D(s)$ sur $\mathscr{R}$ dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par

$$\gamma(f_1)=\delta_1(\gamma)f_1,\qquad \gamma(f_2)=\delta_2(\gamma)(f_2+af_1)$$
$$\varphi(f_1)=\delta_1(p)f_1,\qquad \varphi(f_2)=\delta_2(p)(f_2+bf_1),$$

D'après la prop. 3.6, il existe alors une mesure λ sur $\mathbf{Z}_p^*$, $A\in\mathscr{R}^+$, et $B\in(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ tels que l'on ait

$$(\delta(p)\varphi-1)A=(\delta(\gamma)\gamma-1)B=\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda,$$

et il existe $C\in\mathscr{R}$ tel que

$$(\delta(\gamma)\gamma-1)C=-A+t^ka\quad\text{et}\quad(\delta(p)\varphi-1)C=-B+t^kb.$$

De plus, ι_k est injective, ce qui implique que l'image de (A,B) dans $H^1(\delta)$ est non nulle et, d'après la proposition 3.6, cela équivaut à $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta^{-1}\lambda\neq 0$. On en déduit le résultat, en posant $g_1=t^{-k}f_1\quad\text{et}\quad g_2=f_2-Ct^{-k}f_1$.

Nous allons maintenant nous intéresser au cas $w(s)\in\{1,\dots,k\}$, laissé de côté dans la prop. 4.10. Rappelons que, si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $w(\delta)=0$, et si k est un entier $\geqslant 1$, on a choisi $G(\delta,k)\in\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\oplus_{n\geqslant 1}L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n=0$ si $n<N(\delta)$ et $x_n=\delta(p)^nG(\delta)$ si $n\geqslant N(\delta)$. Si $\delta=1$, on peut prendre $G(\delta,k)=1$, mais nous aurons plutôt besoin de $G'(1,k)\in\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\oplus_{n\geqslant 1}L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n=n$ si $n\geqslant 1$, de telle sorte que $(\gamma-1)G'(1,k)\in t^k\mathscr{R}$ et $(\varphi-1)G'(1,k)\in -1+t^k\mathscr{R}$. Rappelons que l'on a aussi choisi $G'(|x|,k)\in\mathscr{E}^{]0,1/(p-1)]}$ dont l'image $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\oplus_{n\geqslant 1}L_n[t]/t^k$ est donnée par $x_n=\log(\zeta_{p^n}e^{t/p^n}-1)$ si $n\geqslant 1$.

Proposition 4.11. — (i) *Si $s=(\delta_1,\delta_2,\infty)\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}\cup\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, si $k\geqslant w(s)$, et si $\delta_1\neq\delta_2x^{w(s)}$, alors $D(s,k)$ contient une base g_1,g_2 dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par*

$$\gamma(g_1)=\chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1,\qquad \gamma(g_2)=\delta_2(\gamma)g_2$$
$$\varphi(g_1)=p^{-k}\delta_1(p)g_1,\qquad \varphi(g_2)=\delta_2(p)g_2,$$

et telle que $D(s)$ admette t^kg_1, $g_2-t^{k-w(s)}G(x^{-w(s)}\delta_1\delta_2^{-1},w(s))g_1$ comme base sur $\mathscr{R}$.

(ii) *Si $s=(\delta_1,\delta_2,\infty)\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{cris}}\cup\mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, si $k\geqslant w(s)$, et si $\delta_1=\delta_2x^{w(s)}$, alors $D(s,k)$ contient une base g_1,g_2 dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par*

$$\gamma(g_1)=\chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1,\qquad \gamma(g_2)=\delta_2(\gamma)g_2$$
$$\varphi(g_1)=p^{-k}\delta_1(p)g_1,\qquad \varphi(g_2)=\delta_2(p)(g_2+t^{k-w(s)}g_1),$$

et telle que $D(s)$ admette t^kg_1, $g_2-t^{k-w(s)}G'(1,w(s))g_1$ comme base sur $\mathscr{R}$.

(iii) *Si $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}$ (et donc $\delta_1=\delta_2|x|x^{w(s)}$), et si $k\geqslant w(s)$, alors $D(s,k)$ contient une base g_1,g_2 dans laquelle les actions de Γ et φ sont données par*

$$\gamma(g_1)=\chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1,\qquad \gamma(g_2)=\delta_2(\gamma)(g_2+t^{k-w(s)}(\gamma-1)(\log T-G'(|x|,w(s)))g_1)$$
$$\varphi(g_1)=p^{-k}\delta_1(p)g_1,\qquad \varphi(g_2)=\delta_2(p)(g_2+t^{k-w(s)}(p^{-1}\varphi-1)(\log T-G'(|x|,w(s)))g_1)$$

et telle que $D(s)$ admette t^kg_1, $g_2-\frac{p-1}{p}\mathscr{L}\cdot t^{k-w(s)}G(|x|,w(s))g_1$ comme base sur $\mathscr{R}$.

Démonstration. — Dans tous les cas, posons $\delta = \delta_1\delta_2^{-1}$. Le (i) est alors une traduction du fait que l'application de connexion de $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ dans $H^1(\delta)$ est un isomorphisme et $H^0(t^{-k}\mathscr{R}(\delta)/\mathscr{R}(\delta))$ est un L-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $t^{k-w(s)}G(x^{-w(s)}\delta_1\delta_2^{-1}, w(s))$. De même, le (iii) est une traduction de la définition de l'invariant $\mathscr{L}$ (cf. prop. 3.18) ; le (ii) quant-à-lui est une traduction du fait que l'application ι_k envoie $H^1(\delta)$ dans la droite engendrée par $(t^{k-w(s)}, 0)$ de $H^1(x^{-k}\delta)$.

4.5. Le (φ, Γ)-module $\Delta(s)$

Si $s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\rm ncl}$, on note $\Delta(s)$ le (φ, Γ)-module $\mathbf{\Delta}(D(s))$. C'est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{E}^\dagger$ et notre but est d'en donner une description plus « concrète ». Nous nous restreindrons[8] au cas où il existe un entier $k > 2u(s)$ tel que $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$, et nous reprenons les notations de la proposition 4.10 ; en particulier, $B \in \mathscr{E}^\dagger$ et $C \in \mathscr{R}$.

Proposition 4.12. — *Si $x = x_1g_1 + x_2g_2 \in D(s, k)$, alors $x \in \Delta(s)$ si et seulement si x vérifie les deux conditions suivantes*
(i) $x_1 - Cx_2 \equiv 0$ *mod* t^k ;
(ii) x_1 *est d'ordre* $k - u(s)$ *et* x_2 *est d'ordre* $u(s)$.

Démonstration. — La condition (i) traduit juste l'appartenance de x à $D(s)$. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que si $x \in D(s)$, alors $x \in \Delta(s)$ si et seulement si x vérifie (ii). Pour cela, on utilise la caractérisation de $\Delta(s)$ comme l'ensemble des $x \in D(s)$ tels que la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ soit bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\rm rig}^\dagger \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ ou, ce qui revient au même, dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\rm rig}^\dagger \otimes_{\mathscr{R}} D(s, k)$.

En posant $\alpha_1 = p^k\delta_1(p)^{-1}$ et $\alpha_2 = \delta_2(p)^{-1}$, on obtient

$$\varphi(g_1) = \alpha_1^{-1}g_1 \quad \text{et} \quad \varphi(g_2) = \alpha_2^{-1}(g_2 + Bg_1).$$

on en tire, par récurrence sur n, les formules

$$\varphi^{-n}(g_1) = \alpha_1^n g_1 \quad \text{et} \quad \varphi^{-n}(g_2) = \alpha_2^n g_2 - (\alpha_2^{n-1}\alpha_1\varphi^{-1}(B) + \cdots + \alpha_1^n\varphi^{-n}(B))g_1.$$

Maintenant, si $x = x_1g_1 + x_2g_2$, et $\varphi^{-n}(x) = x_{1,n}g_1 + x_{2,n}g_2$, la formule ci-dessus nous fournit les identités

$$x_{1,n} = \alpha_1^n\varphi^{-n}(x_1) - \alpha_2^n\varphi^{-n}(x_2)\Big(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi^{-1}(B) + \cdots + \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\varphi^{-n}(B)\Big) \quad \text{et} \quad x_{2,n} = \alpha_2^n\varphi^{-n}(x_2).$$

Par ailleurs, comme $v_p(\alpha_1) = k - u(s) \geqslant u(s) = v_p(\alpha_2)$, et comme $B \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, la suite de terme général

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi^{-1}(B) + \cdots + \frac{\alpha_1^n}{\alpha_2^n}\varphi^{-n}(B)$$

est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\rm rig}^\dagger$. Les conditions suivantes sont donc équivalentes :

- la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)$ est bornée dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\rm rig}^\dagger \otimes_{\mathscr{R}} D(s, k)$;
- les suites de terme général $x_{1,n}$ et $x_{2,n}$ sont bornées dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\rm rig}^\dagger$;
- les suites de terme général $\alpha_1^n\varphi^{-n}(x_1)$ et $\alpha_2^n\varphi^{-n}(x_2)$ sont bornées dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\rm rig}^\dagger$.

[8] On pourrait utiliser la proposition 4.11 pour obtenir des résultats du même type dans le cas $w(s)$ entier $\geqslant 1$, mais nous n'en aurons pas besoin.

Comme $v_p(\alpha_1) \geqslant 0$ et $v_p(\alpha_2) \geqslant 0$, la dernière condition est équivalente, d'après la proposition 1.12, à la condition

- x_1 est d'ordre $v_p(\alpha_1) = k - u(s)$ et x_2 est d'ordre $v_p(\alpha_2) = u(s)$.

Ceci permet de conclure.

5. Application aux représentations galoisiennes

5.1. Définition des représentations triangulines

Définition 5.1. — Une L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est dite *trianguline* si $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ est triangulable.

Si $s = (\delta_1, \delta_2, h) \in \widetilde{\mathscr{S}}(L)/L^*$ est de pente 0, on note $V(s)$ la L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond par l'équivalence de catégories de la prop. 2.7.

Remarque 5.2. — (i) Par construction, la représentation $V(s)$ est trianguline.

(ii) Réciproquement, il résulte de la définition et de la prop. 4.7, qu'une représentation trianguline de dimension 2, qui n'est pas somme directe de deux caractères, est isomorphe à $V(s)$ pour un certain $s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$. Par ailleurs, on a $V(s) \cong V(s')$ si et seulement si $D(s) \cong D(s')$ d'après la prop. 2.7. Ceci permet d'utiliser la prop. 4.9 pour obtenir une classification complète des représentations triangulines de dimension 2.

(iii) Des exemples naturels de représentations triangulines de dimension 2 sont fournis par les représentations attachées aux formes modulaires surconvergentes. En effet, Kisin **[29]** a montré qu'elles satisfont la propriété (i) de la prop. 5.3 ci-dessous (avec $\eta = 1$).

Proposition 5.3. — *Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ et $\alpha \in L^*$ tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} \neq 0$;*

(ii) *V est trianguline.*

De plus, sous ces conditions, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contienne un sous-(φ,Γ)-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$, avec

$$\delta(x) = x^k \eta^{-1}(x|x|)\alpha^{v_p(x)}.$$

Démonstration. — Soit V une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 telle qu'il existe $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ et $\alpha \in L^*$ tels que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} \neq 0$. D'après la prop. 2.8, quitte à multiplier η par χ^{-k} et α par p^k pour $k \gg 0$, on peut supposer que $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta))^{\varphi=\alpha} = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))^{\Gamma=1,\varphi=\alpha}$. Le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))^{\Gamma=1,\varphi=\alpha}$ est alors non nul et toute L-droite qu'il contient est stable par φ et fixe par Γ. Choisissons une telle droite. Le sous-$\mathscr{R}$-module de $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta))$ qu'elle engendre est alors stable par φ et Γ, et $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient un sous-(φ,Γ)-module D_1 de rang 1 sur $\mathscr{R}$. Le lemme 4.4 montre que l'on peut supposer D_1 saturé. Mais alors $D_2 = D/D_1$ est aussi de rang 1 et donc D est une extension de deux (φ,Γ)-modules de rang 1 ; il est donc triangulable, ce qui démontre l'implication (i)$\Rightarrow$(ii).

Réciproquement, si V est trianguline, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient un sous-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta)$. Il suffit alors de prendre $\eta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ défini par $\eta(g) = \delta^{-1}(\chi(g))$ pour que $(\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V(\eta)))^{\Gamma=1,\varphi=\delta(p)}$ soit non nul. Ceci permet de conclure.

5.2. Poids de Hodge-Tate de $V(s)$

Dans tout ce qui suit, $s=(\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}_+-\mathscr{S}_+^{\rm ncl}$, et notre but est d'étudier en détail la représentation $V(s)$ de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On remarquera que, si η est un caractère unitaire de $\mathbf{Q}_p^*$ (que l'on voit aussi comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), alors

$$V(s)\otimes\eta=V(\eta\delta_1,\eta\delta_2,\mathscr{L}).$$

Le caractère $\delta_1\delta_2$ est unitaire et peut donc être vu comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 5.4. — (i) $\det V(s)=L(\delta_1\delta_2)$.
(ii) $V(s)^*=V(\delta_2^{-1},\delta_1^{-1},\mathscr{L})$.

Démonstration. — Le (i) suit de ce que $\det D(s)=\mathscr{R}(\delta_1\delta_2)$ et le (ii) de ce que $V(s)^*=V(s)\otimes(\det V(s))^{-1}$.

Proposition 5.5. — *Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont $w(\delta_1)$ et $w(\delta_2)$.*

Démonstration. — Il existe une base f_1,f_2 de $D(s)$ dans laquelle l'action de $\gamma\in\Gamma$ est donnée par

$$\gamma(f_1)=\delta_1(\gamma)f_1\quad\text{et}\quad\gamma(f_2)=\delta_2(\gamma)f_2+A_\gamma f_1,$$

avec $A_\gamma\in\mathscr{R}$. Si $n\gg 0$, alors $\varphi^{-n}(f_1)$ et $\varphi^{-n}(f_2)$ convergent dans $\mathbf{B}_{\rm dR}^+\otimes V(s)$ et $g_1=\theta(\varphi^{-n}(f_1))$, $g_2=\theta(\varphi^{-n}(f_2))$ forment une base de $\mathbf{D}_{{\rm Sen},n}$ sur L_n. On a alors

$$\gamma(g_1)=\delta_1(\gamma)g_1\quad\text{et}\quad\gamma(g_2)=\delta_2(\gamma)g_2+\theta(\varphi^{-n}(A_\gamma))g_1,$$

ce qui fait que dans la base g_1,g_2, l'opérateur $\Theta_{\rm Sen}=\lim_{\gamma\to 1}\frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ de Sen est triangulaire supérieur avec $w(\delta_1),w(\delta_2)$ comme coefficients diagonaux. Ceci permet de conclure.

Proposition 5.6. — (i) *Si $w(\delta_1)=w(\delta_2)$ et $\delta_1\neq\delta_2$, alors $\Theta_{\rm Sen}$ n'est pas semi-simple.*
(ii) *Si $\delta_1=\delta_2$, alors $\Theta_{\rm Sen}$ est semi-simple si et seulement si $\mathscr{L}=\infty$.*

Démonstration. — Quitte à tordre par un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on peut se ramener au cas $w(\delta_1)=w(\delta_2)=0$, et même s'arranger pour que δ_1 soit trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$. Si $\Theta_{\rm Sen}$ est semi-simple, cela implique alors $\Theta_{\rm Sen}=0$, et un théorème de Sen (**[33]** ; cf. aussi **[1]**) implique que l'inertie de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agit à travers un quotient fini. En particulier, $W_{\mathbf{Q}_p}$ agit unitairement sur $\mathbf{D}_{\rm pst}(V(s))$ qui contient le L-espace vectoriel $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(s))^{\varphi=\delta_1(p)}$ qui est non nul, car il contient, d'après la prop. 2.8, le module $(D(s)^\Gamma)^{\varphi=\delta_1(p)}$ qui, lui-même, contient $L(\delta_1)$ puisque δ_1 est trivial sur $\mathbf{Z}_p^*$. Ceci implique que $u(s)=v_p(\delta_1(p))=0$ et donc que $V(s)$ est une extension de $L(\delta_2)$ par $L(\delta_1)$. On peut donc trouver une base e_1,e_2 de $V(s)\otimes\delta_2^{-1}$ dans laquelle l'action de $g\in\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est donnée par

$$g(e_1)=\delta(g)e_1\quad\text{et}\quad g(e_2)=e_2+c(g)e_1,$$

où l'on a posé $\delta=\delta_1\delta_2^{-1}$ et $g\mapsto c(g)$ est un 1-cocycle continu sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ à valeurs dans $L(\delta)$, et qui est trivial sur un sous-groupe H d'indice fini de $I_{\mathbf{Q}_p}$ contenu dans $\ker\delta_2$ (la restriction de δ_2 à $I_{\mathbf{Q}_p}$ est d'image finie car δ_2 est localement constant sur $\mathbf{Z}_p^*$).

Si $\delta\neq 1$, on peut trouver $f\in W_{\mathbf{Q}_p}\subset\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ avec $\deg(f)=1$, tel que $\delta(f)\neq 1$. Choisissons un tel f et soit $c=\frac{c(f)}{\delta(f)-1}$. Le cocycle $g\mapsto c'(g)=c(g)-(\delta(g)-1)c$ est alors trivial sur le groupe engendré topologiquement par H et f, et comme H est d'indice fini dans $I_{\mathbf{Q}_p}$ et f engendre topologiquement $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/I_{\mathbf{Q}_p}$, cela montre que $g\mapsto c'(g)$, qui est cohomologue à $g\mapsto c(g)$, est trivial sur un sous-groupe d'indice fini de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Comme $V(s)\otimes\delta_2^{-1}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, cela implique que $V(s)\otimes\delta_2^{-1}$ et donc aussi $V(s)$ est somme de deux caractères, ce que l'on avait exclu. On en déduit le (i). Le (ii) quant à lui n'est que la définition de l'invariant $\mathscr{L}$ pour $h\in H^1(\delta)$ quand $\delta=1$.

5.3. Irréductibilité de $V(s)$

Proposition 5.7. — *Si $u(s)=0$, alors $V(s)$ est une extension non triviale de $L(\delta_2)$ par $L(\delta_1)$; en particulier, $V(s)$ n'est pas irréductible.*

Démonstration. — C'est une simple conséquence de l'équivalence de catégories de la proposition 2.5 entre (φ,Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Proposition 5.8. — (i) *$V(s)$ est irréductible si et seulement si $s\in\mathscr{S}_{\rm irr}$.*

(ii) *Si $s\in\mathscr{S}_+^{\rm ord}$, alors $V(s)$ est une extension non triviale de $L(x^{-w(s)}\delta_1)$ par $L(x^{w(s)}\delta_2)$; c'est donc la tordue (par un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) d'une représentation quasi-ordinaire (i.e. devenant ordinaire sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$).*

Démonstration. — Le cas $u(s)=0$ a été traité dans la proposition 5.7. Nous supposerons donc $s\in\mathscr{S}_*$ dans ce qui suit. Comme $V(s)$ est de dimension 2, elle n'est pas irréductible si et seulement si elle possède une sous-représentation de dimension 1. Via l'équivalence de catégories de la proposition 2.5 entre (φ,Γ)-modules de pente 0 sur $\mathscr{R}$ et L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, cela équivaut à l'existence d'un sous-(φ,Γ)-module de $D(s)$, de rang 1 et de pente 0. Le résultat suit alors de la remarque 4.8.

Lemme 5.9. — *$D(s)$ contient des (φ,Γ)-modules de rang 1 autres que les $t^k\mathscr{R}(\delta_1)$, pour $k\in\mathbf{N}$, si et seulement si $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$, $\delta_1\neq\delta_2x^{w(s)}$ et $\mathscr{L}=\infty$. De plus, dans ce dernier cas, ces (φ,Γ)-modules sont de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$, pour k entier $\geqslant w(s)$.*

Démonstration. — Soit $D_1\subset D$ un (φ,Γ)-module de rang 1 qui n'est pas de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_1)$, pour $k\in\mathbf{N}$. Alors D_1 n'est pas colinéaire à $\mathscr{R}(\delta_1)$ et donc la projection de $D(s)$ sur $\mathscr{R}(\delta_2)$ induit un isomorphisme de D_1 sur un sous-(φ,Γ)-module de $\mathscr{R}(\delta_2)$. Un tel module est de la forme $t^k\mathscr{R}(\delta_2)$ et $D(s)$ contient donc un sous-module isomorphe à $\mathscr{R}(\delta_1)\oplus t^k\mathscr{R}(\delta_2)$ qui est scindé, ce qui se traduit par la nullité de l'image par ι_k dans $H^1(x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1})$ de $h\in H^1(\delta_1\delta_2^{-1})$ relevant $\mathscr{L}$. Le lemme est alors une conséquence directe du th. 3.21.

Proposition 5.10. — *Si V est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe deux caractères η_1, η_2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dans $\mathscr{O}_L^*$, tels que $w(\eta_1)-w(\eta_2)\notin\mathbf{Z}$ et tels que $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_1))\neq 0$ et $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_2))\neq 0$;*

(ii) *V est somme de deux caractères et la différence de ses poids de Hodge-Tate n'est pas un entier.*

Démonstration. — L'implication (ii)$\Rightarrow$(i) est immédiate ; montrons la réciproque. Si η est un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, la condition $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta))\neq 0$ implique que l'un des poids de Hodge-Tate de V diffère de $-w(\eta)$ par un entier. La condition $w(\eta_1)-w(\eta_2)\notin\mathbf{Z}$ implique donc que la différence des poids de Hodge-Tate de V n'est pas un entier et donc que ni $V(\eta_1)$ ni $V(\eta_2)$ ne sont de Hodge-Tate, ni, a fortiori, cristallines. Ceci implique que $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_1))$ et $\mathbf{D}_{\rm cris}(V(\eta_2))$ sont de dimension 1. D'après la proposition 5.3, $D = \mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ contient alors des sous-(φ,Γ)-modules saturés isomorphes à $\mathscr{R}(\theta_1)$ et $\mathscr{R}(\theta_2)$, avec

$$\theta_1(x) = x^{k_1}\eta_1^{-1}(x|x|)\alpha_1^{v_p(x)} \quad \text{et} \quad \theta_2(x) = x^{k_2}\eta_2^{-1}(x|x|)\alpha_2^{v_p(x)},$$

où $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$, et α_1, α_2 sont les valeurs propres de φ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_1))$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(\eta_2))$ respectivement. Ces deux modules ne sont pas inclus dans un même sous-(φ,Γ)-mdodule de rang 1 de D car $w(\theta_1) - w(\theta_2) = k_1 - w(\eta_1) - k_2 + w(\eta_2)$ n'est pas un entier.

Maintenant, si V n'est pas somme de deux caractères, alors $D \cong D(s)$ pour un certain $s \in \mathscr{S}_+ - \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$; la différence des poids de Hodge-tate de V est alors $\pm w(s)$ d'après la prop. 5.5 et donc $w(s) \notin \mathbf{Z}$, ce qui conduit à une contradiction puisque, d'après le lemme 5.9, si $D(s)$ contient des sous-(φ,Γ)-modules de rang 1 non colinéaires, alors $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$. Ceci permet de conclure.

5.4. Représentations potentiellement semi-stables et représentations de Weil-Deligne

Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, et si K_0 est l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K, un L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p),\varphi,N)$-module, est un $L\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$-module libre de rang fini muni

• d'une action L-linéaire et K_0-semi-linéaire de φ ;

• d'une action L-linéaire et K_0-semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ commutant à celle de φ ;

• d'un opérateur $L\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0$-linéaire nilpotent $N : D \to D$ commutant à $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ et vérifiant $N\varphi = p\varphi N$

Rappelons qu'une Λ-représentation D du groupe de Weil-Deligne de $\mathbf{Q}_p$ (appelée encore Λ-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module) est un Λ-module libre de rang fini muni

• d'un morphisme de groupes $\rho : W_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{GL}(D)$ dont le noyau contient un sous-groupe d'indice fini de $I_{\mathbf{Q}_p}$;

• d'un opérateur nilpotent $N : D \to D$ tel que $N\rho(g) = p^{-\deg g}\rho(g)N$ si $g \in W_{\mathbf{Q}_p}$.

Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ et D est un $(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p),\varphi,N)$-module, on peut aussi voir D comme un $(L\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module en tordant l'action de $g \in W_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p)$ par $\varphi^{-\deg g}$, ce qui tue la semi-linéarité de l'action de g sur K_0.

Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui devient semi-stable sur K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ est un L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p),\varphi,N)$-module. De plus, l'inclusion de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ munit $K\otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ d'une filtration admissible par des sous $L\otimes K$-modules libres[9]. En utilisant la recette décrite ci-dessus, cela permet de voir $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ comme un $(L\otimes_{\mathbf{Q}_p} K_0)$-$WD_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible.

Remarque 5.11. — Dans le cas particulier où K est une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$, cas auquel nous allons être confronté dans cet article, une représentation qui devient semi-stable sur K devient aussi semi-stable sur $K \cap \mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})$ qui est totalement ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$. Dans ce qui précède, on a alors $K_0 = \mathbf{Q}_p$ et donc tout est déjà linéaire. De plus, l'action de $W_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ se

[9] On prendra garde au fait que cette filtration n'est, en général, pas libre sur $L\otimes K$, si on considère des L-représentations de $\mathscr{G}_F$, où F est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, au lieu de représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

factorise à travers $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \cong \mathbf{Q}_p^*$, et on retrouve la structure de L-$(\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}_p), \varphi, N)$ en définissant l'action de φ comme étant celle de $p \in \mathbf{Q}_p^* \cong W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$.

J'ignore s'il y a une recette du même type dans le cas général.

Remarque 5.12. — On fera attention au fait que, si V est semi-stable et donc si $I_{\mathbf{Q}_p}$ agit trivialement sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, les valeurs propres d'un frobenius de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$ (i.e. un élément de degré 1) sont *les inverses de celles de* φ.

5.5. Cristallinité de $V(s)$

Si $a \leqslant b$ sont deux éléments de $\mathbf{Z}$, et si $\alpha, \beta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, on note $D_{a,b,\alpha,\beta}$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré défini par $D_{a,b,\alpha,\beta} = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2$, et

- $Ne_1 = Ne_2 = 0$;
- $\begin{cases} g(e_1) = \alpha(g)e_1 \text{ et } g(e_2) = \beta(g)e_2 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ g(e_1) = \alpha(g)e_1 \text{ et } g(e_2) = \alpha(g)(e_2 - (\deg g)e_1) & \text{si } \alpha = \beta, \end{cases}$;
- $\mathrm{Fil}^i(L_\infty \otimes_L D_{a,b,\alpha,\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > -a, \\ L_\infty \cdot (G(\beta\alpha^{-1})e_1 + e_2) & \text{si } -b < i \leqslant -a \text{ et } \alpha \neq \beta, \\ L_\infty \cdot e_2 & \text{si } -b < i \leqslant -a \text{ et } \alpha = \beta, \\ D_{a,b,\alpha,\beta} & \text{si } i \leqslant -b. \end{cases}$

Ce module est admissible si et seulement si

$$-b \leqslant v_p(\alpha(p)), v_p(\beta(p)) \leqslant -a \quad \text{et} \quad v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -a - b.$$

On note $S^{\mathrm{cris}}(L)$ (resp. $S^{\mathrm{ord}}(L)$) l'ensemble des (a, b, α, β), où $a, b \in \mathbf{Z}$ vérifient $a \leqslant b$ et $\alpha, \beta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, et vérifient $v_p(\alpha(p)) + v_p(\beta(p)) = -a - b$ et $-b < v_p(\alpha(p)), v_p(\beta(p)) < -a$ (resp. $v_p(\alpha(p)) = -b$ et $v_p(\beta(p)) = -a$, ou $v_p(\alpha(p)) = -a$ et $v_p(\beta(p)) = -b$). Si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$, on note $V_{a,b,\alpha,\beta}$ la L-représentation potentiellement cristalline de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont $D_{a,b,\alpha,\beta}$ est le $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}$. Cette représentation devient, par construction, cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$; elle est irréductible si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L)$ et réductible (quasi-ordinaire) si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{ord}}(L)$.

Proposition 5.13. — *Si $(a, b, \alpha, \beta) \in S^{\mathrm{cris}}(L) \cup S^{\mathrm{ord}}(L)$, la représentation $V_{a,b,\alpha,\beta}$ est trianguline. Plus précisément, on a*

$$V_{a,b,\alpha,\beta} \cong V(x^b\alpha, x^a\beta, \infty) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty).$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, α et β jouant des rôles symétriques, il suffit de démontrer que $V(s) \cong V_{a,b,\alpha,\beta}$, si $s = (x^b\beta, x^a\alpha, \infty)$. Pour cela, il suffit de calculer le module $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ et de vérifier que ce module est isomorphe à $D_{a,b,\alpha,\beta}$ en tant que $W_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré.

Remarquons aussi que, si $k \in \mathbf{Z}$, on a

$$V_{a,b,\alpha,\beta} \otimes (x|x|)^k \cong V_{a+k,b+k,|x|^k\alpha,|x|^k\beta} \quad \text{et} \quad V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes (x|x|)^k \cong V(x^{b+k}|x|^k\beta, x^{a+k}|x|\alpha, \infty),$$

ce qui permet de se ramener au cas $a = 0$.

D'après les (i) et (ii) de la prop. 4.11, on peut trouver une base g_1, g_2 de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ dans laquelle l'action de γ est donnée par

$$\gamma(g_1) = \beta(\gamma)g_1 \quad \text{et} \quad \gamma(g_2) = \alpha(\gamma)g_2,$$

celle de φ par

$$\begin{cases}\varphi(g_1)=\beta(p)g_1,\ \varphi(g_2)=\alpha(p)g_2 & \text{si } \alpha\neq\beta,\\ \varphi(g_1)=\beta(p)g_1,\ \varphi(g_2)=\beta(p)(g_2+g_1) & \text{si } \alpha=\beta,\end{cases}$$

et telle que $D(s)$ admette $t^b g_1,\ g_2-Hg_1$ comme base sur $\mathscr{R}$, où l'on a posé $H=G(\beta\alpha^{-1},b)$ (resp. $H=G'(1,b)$) si $\alpha\neq\beta$ (resp. si $\alpha=\beta$).

Dans tous les cas g_1,g_2 est une base de $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ car $\alpha\circ\chi$ et $\beta\circ\chi$ sont des caractères d'ordre fini de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et les formules ci-dessus montre que, si $\sigma\in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$, alors[10],

$$\begin{cases}\sigma(g_1)=\beta(\sigma)g_1,\ \sigma(g_2)=\alpha(\sigma)g_2 & \text{si } \alpha\neq\beta,\\ \sigma(g_1)=\beta(\sigma)g_1,\ \sigma(g_2)=\beta(\sigma)(g_2-\deg(\sigma)g_1) & \text{si } \alpha=\beta.\end{cases}$$

Dans tous les cas, les $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-modules $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))$ et $D_{a,b,\alpha,\beta}$ sont isomorphes, et il n'y a plus qu'à identifier les filtrations[11]. Les poids de Hodge-Tate de $V(s)$ sont 0 et $b>0$; la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V(s))=\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ est donc complètement déterminée par la donnée du Fil^0 qui est une droite. Un élément x de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s))$ est dans le Fil^0 si et seulement si $\iota_n(\varphi^n(x))\in \mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s))$ pour tout $n\gg 0$. Par ailleurs, comme

$$\iota_n(H)\equiv\begin{cases}(\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n G(\beta\alpha^{-1}) & \mathrm{mod}\ t^bL_n[[t]] \text{ si } \alpha\neq\beta,\\ n & \mathrm{mod}\ t^bL_n[[t]] \text{ si } \alpha=\beta,\end{cases}$$

on a

$$\iota_n(g_2)\equiv\begin{cases}(\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n G(\beta\alpha^{-1})\iota_n(g_1) & \mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s)) \text{ si } \alpha\neq\beta,\\ n\iota_n(g_1) & \mathrm{mod}\ \mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s)) \text{ si } \alpha=\beta.\end{cases}$$

Comme de plus, si $x_1,x_2\in L_\infty$,

$$\varphi(x_1g_1+x_2g_2)=\begin{cases}\alpha(p)^n((\beta(p)\alpha^{-1}(p))^n x_1g_1+x_2g_2) & \text{si } \alpha\neq\beta,\\ \beta(p)^n((x_1+nx_2)g_1+x_2g_2) & \text{si } \alpha=\beta,\end{cases}$$

on obtient la congruence suivante modulo $\mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s))$:

$$\iota_n(\varphi^n(x_1g_1+x_2g_2))\equiv\begin{cases}\beta(p)^n(x_1-G(\beta\alpha^{-1})x_2)\iota_n(g_1) & \text{si } \alpha\neq\beta,\\ \beta(p)^n x_1\iota_n(g_1) & \text{si } \alpha=\beta.\end{cases}$$

On en déduit le fait que $\mathrm{Fil}^0(L_\infty\otimes_L \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V(s)))$ est la droite des $x_1g_1+x_2g_2$, où $x_1,x_2\in L_\infty$ vérifient $x_1-G(\beta\alpha^{-1})x_2=0$ (resp. $x_1=0$) si $\alpha\neq\beta$ (resp. si $\alpha=\beta$). Ceci permet de conclure.

Proposition 5.14. — *Si D est un $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible de dimension 2 qui n'est pas somme de deux $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$-module admissibles de dimension 1, alors il existe $(a,b,\alpha,\beta)\in S^{\mathrm{cris}}(L)\cup S^{\mathrm{ord}}(L)$ tel que $D\cong D_{a,b,\alpha,\beta}$ si et seulement si l'action de $W_{\mathbf{Q}_p}$ se triangule sur L* (et donc se factorise à travers $W_{\mathbf{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$) *;*

Démonstration. — Il suffit de l'écrire.

[10] On rappelle que $\delta(\sigma)=\delta(\chi(\sigma))\delta(p)^{-\deg(\sigma)}$, si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, vu comme caractère de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$.

[11] Cela peut se faire sans aucun calcul : ce que nous avons fait jusque-là prouve que $V(s)$ est cristalline ; la filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V(s))\cong D_{a,b,\alpha,\beta}$ est donc admissible, et il n'y a, à isomorphisme près, qu'une seule filtration admissible sur $D_{a,b,\alpha,\beta}$. Les calculs qui suivent sont juste là pour rassurer l'auteur sur la cohérence de la théorie.

Remarque 5.15. — Il est immédiat que

• $s \in \mathscr{S}_+^{\rm cris}(L)$ si et seulement si il existe $(a,b,\alpha,\beta) \in S^{\rm cris}(L)$ vérifiant $b \geqslant a+1$ et un caractère $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes \delta$;

• $s \in \mathscr{S}_+^{\rm ord}(L)$ si et seulement si il existe $(a,b,\alpha,\beta) \in S^{\rm ord}(L)$ et un caractère $\delta : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s) \cong V(x^b\beta, x^a\alpha, \infty) \otimes \delta$;

Corollaire 5.16. — (i) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\rm cris}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation irréductible devenant cristalline sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.*

(ii) *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\rm ord}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation devenant ordinaire sur extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.*

Remarque 5.17. — La réciproque du (ii) est vraie et ce qui empèche celle du (i) de l'être aussi (outre le cas d'une somme de deux caractères) est juste le fait que les valeurs propres de φ n'ont aucune raison, a priori, d'appartenir à L (mais elles appartiennent en tout cas à une extension quadratique de L).

5.6. Semi-stabilité de $V(s)$

Si $a < b$ sont deux éléments de $\mathbf{Z}$, si $\alpha \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ est localement constant et si $\mathscr{L} \in L$, on note $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré défini par $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} = L \cdot e_1 \oplus L \cdot e_2$, et

• $Ne_1 = e_2$ et $Ne_2 = 0$;

• $g(e_1) = \alpha(g)e_1$ et $g(e_2) = p^{\deg g}\alpha(g)e_2$;

• $\mathrm{Fil}^i(L_\infty \otimes_L D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > -a, \\ L_\infty \cdot (e_1 - \mathscr{L}e_2) & \text{si } -b < i \leqslant -a, \\ D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} & \text{si } i \leqslant -b. \end{cases}$

Ce module est admissible si et seulement si $v_p(\alpha(p)) = (-a-b+1)/2$. On note $S^{\rm st}(L)$ l'ensemble des $(a,b,\alpha,\mathscr{L})$, où $a,b \in \mathbf{Z}$ vérifient $a < b$, où $\mathscr{L} \in L$, et où $\alpha \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $v_p(\alpha(p)) = (-a-b+1)/2$. Si $(a,b,\alpha,\mathscr{L}) \in S^{\rm st}(L)$, on note $V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ la L-représentation potentiellement semi-stable de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ dont $D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ est le $\mathbf{D}_{\rm pst}$. Cette représentation devient, par construction, semi-stable sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$; c'est la tordue d'une représentation semi-stable de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par un caractère d'ordre fini ; elle est irréductible si $b - a \geqslant 2$ et réductible (tordue d'une ordinaire par un caractère d'ordre fini) si $b = a+1$.

Proposition 5.18. — *Si $(a,b,\alpha,\mathscr{L}) \in S^{\rm st}(L)$, la représentation $V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$ est trianguline. Plus précisément,*

$$V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} \cong V(x^b|x|\alpha, x^a\alpha, \mathscr{L}).$$

Démonstration. — Remarquons que, si $k \in \mathbf{Z}$ et si $\eta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ est unitaire localement constant, on a

$$\begin{aligned} V_{a,b,\alpha,\mathscr{L}} \otimes (x|x|)^k\eta &\cong V_{a+k,b+k,|x|^k\alpha\eta,\mathscr{L}}, \\ V(x^b\beta, x^a\alpha, \mathscr{L}) \otimes (x|x|)^k\eta &\cong V(x^{b+k}|x|^k\beta\eta, x^{a+k}|x|\alpha\eta, \mathscr{L}), \end{aligned}$$

ce qui permet de se ramener au cas $a = 0$ et $\alpha(x) = \alpha(p)^{v_p(x)}$. Soit donc $s = (x^b|x|\alpha, \alpha, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+^{\rm st}$. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que $\mathbf{D}_{\rm st}(V(s))$ est isomorphe à $D_{0,b,\alpha,\mathscr{L}}$ en tant que $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré.

On a $w(s)=b>0$ et, d'après le (iii) de la prop. 4.11, on peut trouver une base g_1, g_2 de $\mathscr{R}[\frac{1}{t}]\otimes_{\mathscr{R}} D(s)$ dans laquelle les actions de φ et γ sont données par

$$\gamma(g_1)=g_1,\quad \gamma(g_2)=g_2+(\gamma-1)(\log T-G'(|x|,b))g_1,$$
$$\varphi(g_1)=p^{-1}\alpha(p)g_1,\quad \varphi(g_2)=\alpha(p)(g_2+(p^{-1}\varphi-1)(\log T-G'(|x|,b))g_1),$$

et telle que $D(s)$ soit le $\mathscr{R}$-module engendré par $t^k g_1$ et $g_2-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,b)g_1$.

Le module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ est alors $L\cdot e_1\oplus L\cdot e_2$, avec $e_1=g_2-(\log T-G'(|x|,b))g_1$ et $e_2=\frac{p}{p-1}g_1$. Les actions de φ et N sont données par

$$\varphi(e_1)=\alpha(p)e_1,\ \varphi(e_2)=p^{-1}\alpha(p)e_2,\ Ne_1=e_2,\ Ne_2=0.$$

Le module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ est donc, en tant que $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module, isomorphe à $D_{0,b,\alpha,\mathscr{L}}$. Il ne reste plus qu'à identifier la filtration qui est complètement déterminée par la droite Fil^0.

Par construction, on a $\iota_n(\log T-G'(|x|,b))\in t^bL_n[[t]]$ et $\iota_n(G(|x|,b))\in p^{-n}+t^bL_n[[t]]$ quel que soit $n\geqslant 1$. De la première congruence, on déduit que $\iota_n(e_1)\equiv\iota_n(g_2)\mod \mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s))$. Par ailleurs, $\mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s))$ est engendré par $\iota_n(t^bg_1)=p^{-nb}t^b\iota_n(g_1)$ et par $\iota_n(g_2-\frac{p}{p-1}\mathscr{L}G(|x|,b)g_1)$, et la seconde congruence montre que l'on a $\iota_n(g_2)\equiv\frac{p}{p-1}\mathscr{L}p^{-n}\iota_n(g_1)\mod \mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s))$.

Maintenant, $x\in\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ si et seulement si $\iota_n(\varphi^n(x))\in\mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s))$ quel que soit n assez grand. Si $x_1,x_2\in L$, on a, d'après ce qui précède,

$$\iota_n(\varphi^n(x_1e_1+x_2e_2))=\alpha(p)^n(x_1\iota_n(e_1)+p^{-n}x_2\iota_n(e_2))\equiv\alpha(p)^n(x_1\frac{p}{p-1}\mathscr{L}p^{-n}+p^{-n}x_2\frac{p}{p-1})\iota_n(g_1)$$

mod $\mathrm{Fil}^0(L_n((t))\otimes D(s))$, ce qui fait que $\mathrm{Fil}^0\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V(s))$ est la droite d'équation $\mathscr{L}x_1+x_2=0$. Ceci permet de conclure.

Proposition 5.19. — *Si D est un $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module filtré admissible de dimension 2 sur lequel $N\neq 0$, alors il existe $(a,b,\alpha,\mathscr{L})\in S^{\mathrm{st}}(L)$ tel que $D\cong D_{a,b,\alpha,\mathscr{L}}$.*

Démonstration. — Il suffit de l'écrire.

Remarque 5.20. — Il est immédiat que $s\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}(L)$ si et seulement si il existe $(a,b,\alpha,\mathscr{L})\in S^{\mathrm{st}}(L)$ et un caractère $\delta:\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}\to\mathscr{O}_L^*$ tels que $V(s)\cong V(x^b|x|\alpha,x^a\alpha,\mathscr{L})\otimes\delta$.

Corollaire 5.21. — *Si $s\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}(L)$, alors $V(s)$ est une tordue par un caractère d'une représentation semi-stable non cristalline. Réciproquement, si V est une L-représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ tordue par un caractère d'une représentation semi-stable non cristalline, alors il existe $s\in\mathscr{S}_+^{\mathrm{st}}(L)$ tel que $V\cong V(s)$.*

6. Une description de certains duaux

6.1. Mise en place

Soit $h:\mathbf{Q}_p^*\to L$, localement analytique, et soit $c_h(j)$, pour $j\in\mathbf{N}$, une famille d'éléments de L. Si $U=\{u=(a_u,j_u,\lambda_u),\ u\in U\}$ est une partie finie $\mathbf{Q}_p\times\mathbf{N}\times L$, on pose

$$\ell_{h,U}(x)=\sum_{u\in U}\lambda_u\frac{(x-a_u)^{j_u}}{c_h(j_u)}h(x-a_u)\quad\text{et}\quad P_U(X)=\sum_{u\in U}\lambda_u(X-a_u)^{j_u}.$$

Soit $r > 0$, et soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $k - 2r \geqslant 1$. On note $\mathscr{U}'(k,r)$ l'ensemble des parties finies U de $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{N} \times L$ telles que $k - 1 - r < j_u \leqslant k - 1$ si $u \in U$ et on note $\mathscr{U}(k,r)$ (resp. $\mathscr{U}(k,r)^0$) l'ensemble des $u \in \mathscr{U}'(k,r)$ tels que $\deg P_U < k - 1 - r$ (resp. $P_U = 0$).

On suppose que h et la famille $c_h(j)$ vérifie

(h0a) $c_h(j) \neq 0$ si $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et $h(px) = \alpha_h h(x) + \beta_h$ avec $v_p(\alpha_h) = 2r - (k-1) \leqslant 0$ et $\beta_h = 0$ si $\alpha_h \neq 1$;

(h0b) si $U \in \mathscr{U}(k,r)$ et $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, alors $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu$ existe[(12)].

On suppose en outre que l'on dispose

• d'une distribution μ_h sur $\mathbf{Q}_p$ vérifiant

(h1) $\mu_h \in \mathscr{D}_{k-2r}(\mathbf{Q}_p)$ et $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu_h = (p\alpha_h^{-1})\mu_h$ (et, si $\beta_h \neq 0$, $p^n \int_{D(a,n)} \mu_h = p^{n+1} \int_{D(a,n+1)} \mu_h$ quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$) ;

• de fonctions $f_{h,j}(x,y)$ et $g_{h,j}(x,y)$, pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$, localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p^* \times \mathbf{Q}_p^*$, avec

(h2a) $f_{h,j}$ est polynomiale en y et $\int_{D(a,n)} f_{h,j}(x,y)\, \mu_h(x)$ est défini quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$;

(h2b) $\sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} (-a)^{j-m} f_{h,m}(x,y) = f_{h,j}(x, y-a)$;

(h2c) $f_{h,j}(x,y)$ et $g_{h,j}(x,y)$ sont analytiques sur $\{(x,y),\ v_p(x+y) \geqslant n(h) + v_p(y)\}$;

(h2d) $f_{h,j}(px,py) = p^j(f_{h,j}(x,y) + \beta_h y^j)$ et $g_{h,j}(px,py) = p^{-1} g_{h,j}(x,y)$;

(h2e) si $v_p(y) < n$, alors

$$\int_{D(-y,n)} (x+y)^{j+1} g_{h,j}(x,y)\, \mu_h(x) = p^{-n} c_h(j)^{-1} y^j h(y) - \int_{D(-y,n)} f_{h,j}(x,y)\, \mu_h(x);$$

• de $B_h \in (\mathscr{E}^{(0,1]})^{\psi=0}$ et $C_h \in \mathscr{E}^{]0,1]}[\log T]$, vérifiant

(h3a) $(p^{-1}\alpha_h \varphi - 1) C_h \equiv B_h \bmod t^k \mathscr{E}^{]0,1]}[\log T]$;

(h3b) si $y \in \mathbf{Z}_p^*$ et $n \geqslant 1$, alors

$$\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^y \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} y^{j-i} \partial^i B_h(\eta - 1) = p^{n+1} \int_{D(-y,n+1)} f_{h,j}(x,y) \mu_h(x) - p^n \int_{D(-y,n)} f_{h,j}(x,y) \mu_h(x);$$

(h3c) si $y \in \mathbf{Z}_p$, alors

$$\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_p - \{1\}} \eta^y \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} y^{j-i} \partial^i C_h(\eta - 1) = \int_{D(-y,0)} f_{h,j}(x,y)\, \mu_h(x) - p \int_{D(-y,1)} f_{h,j}(x,y)\, \mu_h(x).$$

6.2. Énoncé des résultats

Soit $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$. Comme $v_p(p\alpha_h^{-1}) > 0$, la série

$$(p\alpha_h^{-1})^n \Big(- C_h F_\mu^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty} (p\alpha_h^{-1})^m \psi^m (B_h F_\mu^{(n+m)}) \Big)$$

(12) L'équation fonctionnelle $h(px) = \alpha_h h(x) + \beta_h$ implique, d'après le lemme 8.2, que $x^j h(x)$ est de classe $\mathscr{C}^r$ en 0 si $j + v_p(\alpha_h) > r$, c'est-à-dire si $j > k - 1 - r$; le seul problème est donc la convergence à l'infini.

converge [**22**, ? ?] dans $\mathscr{E}^{]0,1]}[\log T]$; on note $\ell_h(F_\mu)^{(n)}$ sa somme. Un petit calcul utilisant (h3a) montre que

$$\psi(\ell_h(F_\mu)^{(n+1)}) \equiv \ell_h(F_\mu)^{(n)} \bmod t^k \mathscr{E}^{]0,1]}[\log T].$$

Théorème 6.1. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu = 0$ *quel que soit* $U \in \mathscr{U}(k,r)$ *;*
(ii) *il existe $\nu \in \mathscr{D}_{k-r}(\mathbf{Q}_p)$ telle que, quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^\infty}$, on ait*

$$F_\nu^{(n)}((1+T)\eta - 1) \equiv \ell_h(F_\mu)^{(n)}((1+T)\eta - 1) \bmod T^k.$$

Démonstration. — On prolonge μ en une forme linéaire $\phi \mapsto \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi\, \mu$ sur l'espace W_h engendré par les $(x-a)^j h(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $k-1-r < j \leqslant k-1$ en décomposant cet espace sous la forme $W_h = W'_h \oplus W''_h$, où W'_h est le sous-espace engendré par les $\ell_{h,U}$, pour $U \in \mathscr{U}(k,r)$, et W''_h est un supplémentaire quelconque de W'_h dans W_h (en particulier, W''_h est de dimension finie), et en imposant que $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \ell_{h,U}\, \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu$ si $U \in \mathscr{U}(k,r)$ et $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi\, \mu = 0$ si $\phi \in W''_h$. Le théorème est alors une conséquence immédiate des propositions 6.2 et 6.3 ci-dessous.

Proposition 6.2. — *Si $0 \leqslant j \leqslant k-1$, si $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$, alors l'intégrale*

$$I_{h,j}(\mu, a, n) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \Big(\int_{D(a-y,n)} f_{h,j}(x, y-a)\, \mu_h(x) \Big) \mu(y)$$

converge et il existe une unique forme linéaire $\ell_h(\mu) \in \mathscr{D}_{\rm alg}^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)$ sur l'espace des fonctions localement polynomiales de degré $\leqslant k-1$, à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ telle que, quels que soient $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $a \in \mathbf{Q}_p$ et $n \in \mathbf{Z}$, l'on ait

$$\int_{D(a,n)} (x-a)^j \ell_h(\mu) = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \Big(\int_{D(a-y,n)} f_{h,j}(x, y-a)\, \mu_h(x) \Big) \mu(y).$$

De plus, $\ell_h(\mu)$ vérifie les propriétés :
(h4) *il existe $C(h) \in \mathbf{R}$ tel que, quels que soient $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, $a \in \mathbf{Q}_p$, $n \in \mathbf{Z}$ et $k-1-r < j \leqslant k-1$,*

$$v_p\Big(\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} p^{-n} \frac{(x-a)^j}{c_h(j)} h(x-a) \mu - \int_{D(a,n)} (x-a)^j\, \ell_h(\mu) \Big) \geqslant n(j-(k-r)) + v_{\mathscr{D}_r}(\mu) + C(h).$$

(h5) *Quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et $n_1 \geqslant n_2 \in \mathbf{Z}$, on a, si $n + v_p(a) \geqslant 0$ et $n + n_2 \geqslant 0$,*

$$\begin{aligned} p^{n_1} \int_{D(a,n_1)} (x-a)^j \ell_h(\mu) - p^{n_2} \int_{D(a,n_2)} (x-a)^j \ell_h(\mu) \\ = \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_2}}} \partial^j \big((1+T)^{-ap^n} \ell_h(F_\mu)^{(n)} \big)_{|T=\eta-1}; \end{aligned}$$

Proposition 6.3. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, si $\ell_h(\mu) \in \mathscr{D}_{\rm alg}^{[0,k-1]}(\mathbf{Q}_p)$, et si $\ell_h(F_\mu) = (\ell_h(F_\mu)^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}}$ vérifient les conditions* (h4) *et* (h5), *alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu = 0$ *quel que soit* $U \in \mathscr{U}(k,r)$ *;*
(ii) $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu = 0$ *quel que soit* $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$ *;*
(iii) *$\ell_h(\mu)$ se prolonge en une distribution globalement d'ordre $k-r$ sur $\mathbf{Q}_p$;*

(iv) *il existe* $\nu\in\mathscr{D}_{k-r}(\mathbf{Q}_p)$ *telle que, quels que soient* $n\in\mathbf{N}$ *et* $\eta\in\boldsymbol{\mu}^*_{p^\infty}$*, on ait*

$$F_\nu^{(n)}((1+T)\eta-1)\equiv\ell_h(F_\mu)^{(n)}((1+T)\eta-1) \bmod T^k.$$

6.3. Un peu d'analyse fonctionnelle p-adique

Nous allons commencer par démontrer la proposition 6.3, et pour cela, nous allons prouver les implications (ii)⇒(i)⇒(iii)⇒(iv)⇒(ii).

On peut écrire P_U sous la forme

$$P_U(X)=\sum_{i=0}^{k-1}b_{U,i}X^i,\quad \text{avec } b_{U,i}=\sum_{u\in U}\lambda_u\binom{j_u}{i}(-a_u)^{j_u-i},$$

et l'appartenance de U à $\mathscr{U}(k,r)$ se traduit par la nullité des $b_{U,i}$ pour $i\geqslant k+1-r$. La linéarité de l'intégration couplée avec le fait que $\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{h,U}\mu=0$ quel que soit $U\in\mathscr{U}(k,r)^0$, nous donne l'existence d'éléments $\beta_i(\mu)$, $i<k+1-r$ tels que l'on ait $\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{h,U}\mu=\sum_{i<k+1-r}\beta_i(\mu)b_{U,i}$ quel que soit $U\in\mathscr{U}(k,r)$. De plus, on montre en prenant une base d'un supplémentaire dans W_h' de l'espace engendré par les $\ell_{h,U}$, pour $U\in\mathscr{U}(k,r)^0$, qu'il existe $C\in\mathbf{R}$ tel que l'on ait $v_p(\beta_i(\mu))\geqslant C+v_{\mathscr{D}_r}(\mu)$ quel que soient i et μ. Par ailleurs,

$$\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{h,U}(y)\mu=\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{h,U}(p^{-n}y)\,\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\mu=\int_{\mathbf{Q}_p}(\ell_{h,U_n}(y)-Q(y))\,\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\mu,$$

où $U_n=\{(p^na_u,j_u,(\alpha_hp^{j_u})^{-n}\lambda_u),\ u\in U\}$ et Q est un polynôme de degré $<r$ pour des raisons de croissance à l'infini (nul si $\alpha_h\neq1$). On a alors $\int_{\mathbf{Q}_p}Q(y)\,\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\mu=0$, et comme $b_{U_n,i}=(\alpha_hp^i)^{-n}b_{U,i}$, on en déduit la relation $\beta_i(\mu)=(\alpha_hp^i)^{-n}\beta_i(\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star_k\mu)$ et donc la minoration

$$\begin{aligned}v_p(\beta_i(\mu))&=-(2r+i-(k-1))n+v_p(\beta_i(\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star_k\mu))\\&\geqslant-(2r+i-(k-1))n+C+v_{\mathscr{D}_r}(\left(\begin{smallmatrix}p^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star_k\mu)\\&=((k-1)-i-r)n+C+v_{\mathscr{D}_r}(\mu).\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour faire tendre cette quantité vers $+\infty$ et démontrer la nullité de $\beta_i(\mu)$ si $i<k-1-r$. On en déduit l'implication (ii)⇒(i).

Si $\int_{\mathbf{Q}_p}\ell_{h,U}\,\mu=0$ quel que soit $U\in\mathscr{U}(k,r)$, alors $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}(x-a)^jh(x-a)\,\mu=0$ quels que soient $a\in\mathbf{Q}_p$ et $(k-1)-r<j\leqslant k-2$. La propriété (h4) nous fournit alors la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(x-a)^{k-1}\,\ell_h(\mu)\Big)\geqslant C(h)+((k-1)-(k-r))n,$$

quels que soient $a\in\mathbf{Q}_p$ et $n\in\mathbf{Z}$, et comme $k-1>k-r-1$, cela implique que $\ell_h(\mu)$ est d'ordre $k-r$ d'après la proposition [**18**, ? ?] On en déduit l'implication (i)⇒(iii).

Supposons que $\ell_h(\mu)$ se prolonge en une distribution ν globalement d'ordre $k-r$ sur $\mathbf{Q}_p$. La propriété (h5) nous fournit l'identité

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^{n+n_2}}}\partial^j\big((1+T)^{bp^n}(\ell_h(F_\mu)^{(n)}-F_\nu^{(n)})\big)_{|T=\eta-1}=0$$

quels que soient $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $b \in \mathbf{Q}_p$, $n_1 \geqslant n_2 \in \mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que $n+n_1, n+n_2 \in \mathbf{N}$ et $bp^n \in \mathbf{Z}_p$. Soient $a \in \mathbf{Z}_p$ et $m \in \mathbf{N}$. Appliquant ce qui précède à $n_2 = -m$, $b = ap^{-n}$ et $n_1 = m-n$, on en déduit que

$$\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^m}} \partial^j \big((1+T)^a (\ell_h(F_\mu)^{(n)} - F_\nu^{(n)})\big)_{|T=\eta-1} = 0$$

quels que soient $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $a \in \mathbf{Z}_p$ et $n, m \in \mathbf{N}$. Cela permet de montrer, par récurrence sur j, que l'on a $\partial^j\big(\ell_h(F_\mu)^{(n)} - F_\nu^{(n)}\big)_{|T=\eta-1} = 0$ quel que soient $n \in \mathbf{N}$, $\eta \in \boldsymbol{\mu}^*_{p^\infty}$ et $0 \leqslant j \leqslant k-1$. On en déduit l'implication (iii)⇒(iv).

Reste l'implication (iv)⇒(ii) à démontrer. La propriété (h5) se traduit par

$$p^{n_1}\int_{D(a,n_1)} (x-a)^j \nu - p^{n_2}\int_{D(a,n_2)} (x-a)^j \nu = p^{n_1}\int_{D(a,n_1)} (x-a)^j \ell_h(\mu) - p^{n_2}\int_{D(a,n_2)} (x-a)^j \ell_h(\mu)$$

quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$. Ceci est équivalent à

$$p^n \int_{D(a,n)} (x-a)^j \nu - \int_{D(0,0)} (x-a)^j \nu = p^n \int_{D(a,n)} (x-a)^j \ell_h(\mu) - \int_{D(0,0)} (x-a)^j \ell_h(\mu)$$

quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p$, $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et $n \in \mathbf{Z}$, comme on peut le montrer en utilisant l'identité

$$\begin{aligned}\big(p^n \mathbf{1}_{D(a,n)}(x) - \mathbf{1}_{D(0,0)}(x)\big)(x-a)^j &= \big(p^n \mathbf{1}_{D(a,n)}(x) - p^m \mathbf{1}_{D(a,m)}(x)\big)(x-a)^j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-a)^{j-i} \big(p^m \mathbf{1}_{D(0,m)}(x) - \mathbf{1}_{D(0,0)}(x)\big) x^i\end{aligned}$$

valable si $m \leqslant v_p(a)$ de telle sorte que $D(a,m) = D(0,m)$. On en déduit, si $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$, la formule

$$\sum_{u\in U} \lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\, \nu = \sum_{u \in U} \lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\, \ell_h(\mu).$$

Maintenant, le fait que ν est globalement d'ordre $k-r$ nous fournit la minoration

$$v_p\Big(\sum_{u\in U} \lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\, \nu\Big) \geqslant v_{\mathscr{D}_{k-r}}(\nu) + \inf_{u \in U}(v_p(\lambda_u)) + n \inf_{u\in U}(j_u - (k-r)),$$

tandis que la propriété (h4) nous fournit la minoration

$$v_p\Big(p^{-n}\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\mu - \sum_{u\in U}\lambda_u \int_{D(a_u,n)} (x-a_u)^{j_u}\, \ell_h(\mu)\Big) \geqslant C(h) + \inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u)) + \inf_{u \in U}((j_u - (k-r))n).$$

On en déduit, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, la minoration

$$v_p\Big(\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\, \mu\Big) \geqslant n \inf_{u\in U}(j_u - (k-1) + r) + \inf_{u\in U}(v_p(\lambda_u)) + \inf(v_{\mathscr{D}_{k-r}}(\nu), C(h)).$$

Comme $\inf_{u\in U}(j_u - (k-1) + r) > 0$, Il n'y a plus qu'à faire tendre n vers $+\infty$ pour faire tendre le membre de droite vers $+\infty$ et en déduire la nullité de $\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\mu$ si $U \in \mathscr{U}(k,r)^0$. Ceci permet de conclure la démonstration de la proposition 6.3.

6.4. Existence et propriétés de la distribution $\ell_h(\mu)$

Passons à la démonstration de la proposition 6.2. Pour démontrer la convergence de l'intégrale $I_{h,j}(\mu,n,a)$, on peut supposer $a=0$, quitte à remplacer μ par $\left(\begin{smallmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu$ (ce qui ne change pas la valeur de $v_{\mathscr{D}_r}(\mu)$). En utilisant la propriété (h2e), on décompose alors $I_{h,j}(\mu,n,0)$ sous la forme

$$I_{h,j}(\mu,n,0)=J_0(n)-\sum_{m=-\infty}^{n-n(h)} I_m(n)+I_\infty(n),$$

avec

$$J_0(n)=\int_{D(0,n-n(h)+1)\times D(0,n)} f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\mu(y),\qquad I_\infty(n)=\int_{D(\infty,n(h)-n)} p^{-n}\frac{y^j}{c_h(j)}h(y)\,\mu(y),$$
$$I_m(n)=\int_{p^m\mathbf{Z}_p^*}\int_{D(-y,n)}(x+y)^{j+1}g_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\mu(y),$$

et on est ramené à prouver la convergence de la série $\sum_{m=-\infty}^{n-n(h)} I_m(n)$. Pour cela, on fait les changements de variables $x=p^m u$ et $y=p^m v$, et on utilise les propriétés (h1) et (h2d), pour obtenir

$$I_m(n)=(p^{1-j}\alpha_h^{-1})^{-m}\int_{\mathbf{Z}_p^*}\int_{D(-v,n-m)}(u+v)^{j+1}g_{h,j}(u,v)\,\mu_h(u)\left(\begin{smallmatrix}p^{-m} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu(v).$$

Maintenant, comme $n-m\geqslant n(h)$, la propriété (h2c) implique que la fonction

$$\phi(u,v)=\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}(v)\mathbf{1}_{D(-v,n-m)}(u)(u+v)^{j+1}g_{h,j}(u,v)$$

appartient à $\mathrm{LA}_{n-m}(\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p)$, et, si l'on pose

$$C_0(h)=\inf_{0\leqslant j\leqslant k-1} v_{\mathrm{LA}_{n(h)}}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}(v)\mathbf{1}_{D(-v,n(h))}(u)g_{h,j}(u,v)),$$

on a $v_{\mathrm{LA}_{n-m}}(\phi)\geqslant(j+1)(n-m)+C_0(h)$. On en déduit la minoration

$$\begin{aligned}v_p(I_m)\geqslant{}&-m(k-2r-j)+(v_{\mathscr{D}_{k-2r}}(\mu_h)-(k-2r)(n-m))\\&+((v_{\mathscr{D}_r}(\mu)-mr)-r(n-m))+(j+1)(n-m)+C_0(h)\\={}&-m+n(j-(k-1-r))+v_{\mathscr{D}_{k-2r}}(\mu_h)+v_{\mathscr{D}_r}(\mu)+C_0(h),\end{aligned}$$

et la convergence de la série.

Pour montrer que $\ell_h(\mu)$ est bien définie et est une forme linéaire, il suffit d'utiliser la propriété (h2b) pour constater que les formules définissant ℓ_h se ramènent à

$$\int_{D(a,n)} x^j\ell_h(\mu)=\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}\Big(\int_{D(a-y,n)} f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\Big)\,\mu(y),$$

si $0\leqslant j\leqslant k-1$ et $a\in\mathbf{Q}_p$.

Pour démontrer que $\ell_h(\mu)$ vérifie la propriété (h4), on peut de nouveau se ramener à $a=0$ et écrire l'intégrale à évaluer sous la forme

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} p^{-n}\frac{y^j}{c_h(j)}\,\mu-\int_{D(0,n)} x^j\ell_h(\mu)=J_1(n)-J_0(n)+\sum_{m=-\infty}^{n-n(h)} I_m(n),$$

avec $J_1(n)=\int_{D(0,n-n(h)+1)} p^{-n}\frac{y^j}{c_h(j)}h(y)\mu$. Pour évaluer $v_p(J_0(n))$ et $v_p(J_1(n))$, on fait les changements de variables $x=p^nu$, $y=p^nv$, et on utilise les propriètés (h1) et (h2d), ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
J_1(n) =&(p^{j-1}\alpha_h)^n\int_{D(0,-n(h)+1)}\frac{v^j}{c_h(j)}(h(v)+n\beta_h)\left(\begin{smallmatrix}p^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu(v)\\
J_0(n) =&(p^{j-1}\alpha_h)^n\int_{D(0,-n(h)+1)}\Big(\int_{D(0,0)}(f_{h,j}(u,v)+n\beta_h v^j)\,\mu_h(u)\Big)\left(\begin{smallmatrix}p^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu(v).
\end{aligned}$$

Comme les fonctions à intégrer ne dépendent plus de n, on en déduit l'existence de $C_1(h)$ tel que, quel que soit $n\in\mathbf{Z}$, on ait

$$\inf(v_p(J_0(n)),v_p(J_1(n)))\geqslant nv_p(p^{j-1}\alpha_h)+v_{\mathscr{D}_r}(\left(\begin{smallmatrix}p^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu)+C_1(h)=n(j-(k-r))+v_{\mathscr{D}_r}(\mu)+C_1(h).$$

Il suffit alors d'utiliser la minoration de $v_p(I_m(n))$ obtenue ci-dessus (en remarquant que le minimum de cette minoration est atteint pour $m=n-n(h)$ puisque $j>k-1-r$) pour montrer que $\ell_h(\mu)$ vérifie la propriété (h4) avec

$$C(h)=\inf(C_1(h),-n(h)+v_{\mathscr{D}_{k-2r}}(\mu_h)+C_0(h)).$$

Il nous reste à vérifier que $\ell_h(\mu)$ vérifie la propriété (h5). Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 6.4. — (i) *Si $n\geqslant 1$, alors*

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{1\}}\partial^j\big((p\alpha_h^{-1})^n\psi^n(B_hF_\mu^{(n)})\big)(\eta-1)=$$
$$\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}\Big(p\int_{D(-y,1)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)-\int_{D(-y,0)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\Big)\,\mu(y).$$

(ii)

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{1\}}\partial^j(-C_hF_\mu^{(0)})(\eta-1)=\int_{\mathbf{Z}_p}\Big(p\int_{D(-y,1)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)-\int_{D(-y,0)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\Big)\,\mu(y).$$

Démonstration. — (i) Soit $H^{(n)}=\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^{p^nx}\mu=\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\mu^{(n)}=F_\mu^{(n)}-\varphi(F_\mu^{(n-1)})$. On a alors,

$$\psi(B_hF_\mu^{(n)})=\psi(B_hH^{(n)})+\psi(B_h\varphi(F_\mu^{(n-1)}))=\psi(B_hH^{(n)})+\psi(B_h)F_\mu^{(n-1)},$$

et comme $\psi(B_h)=0$, cela montre que l'on peut remplacer $F_\mu^{(n)}$ par $H^{(n)}$ dans la formule à démontrer. Par ailleurs, comme

$$\partial^j\psi^n=p^{-nj}\psi^n\partial^j\quad\text{et}\quad\psi^n(f)(a)=p^{-n}\sum_{b^{p^n}=a}f(b),$$

on obtient

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{1\}}\partial^j\big((p\alpha_h^{-1})^n\psi^n(B_hF_\mu^{(n)})\big)(\eta-1)=$$
$$(p^{-j}\alpha_h^{-1})^n\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^n}}\Big(\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}\partial^iB_h(\eta-1)\cdot\partial^{j-i}H^{(n)}(\eta-1)\Big).$$

Maintenant, comme
$$\partial^{j-i}H^{(n)}(\eta-1)=\int_{\mathbf{Z}_p^*}y^{j-i}\eta^y\,\mu^{(n)},$$
on peut réécrire la somme ci-dessus sous la forme
$$(p^{-j}\alpha_h^{-1})^n\int_{\mathbf{Z}_p^*}\Big(\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^n}}\eta^y\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}y^{j-i}\partial^iB_h(\eta-1)\Big)\,\mu^{(n)}(y),$$
ou encore, en utilisant la propriété (h3b), sous la forme
$$(p^{-j}\alpha_h^{-1})^n\int_{\mathbf{Z}_p^*}\Big(p^{n+1}\int_{D(-y,n+1)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)-p^n\int_{D(-y,n)}f_{h,j}(x,y)\,\mu_h(x)\Big)\,\mu^{(n)}(y).$$
On conclut en faisant les changements de variables $x=p^nu$, $y=p^nv$, et en utilisant les propriétés (h1) et (h2d).

(ii) On a
$$\begin{aligned}\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{1\}}\partial^j(-C_hF_\mu^{(0)})(\eta-1)&=-\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{1\}}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\partial^iC_h(\eta-1)\partial^{j-i}F_\mu^{(0)}(\eta-1)\\&=-\int_{\mathbf{Z}_p}\Big(\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{1\}}\eta^y\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\partial^iC_h(\eta-1)y^{j-i}\Big)\,\mu(y),\end{aligned}$$
et on conclut en utilisant la propriété (h3c).

Revenons à la démonstration de la propriété (h4). Commençons par remarquer que, vu la définition de $\ell_h(F_\mu)^{(n)}$, le lemme 6.4 permet de démontrer cette propriété pour $n_1=1$, $n_2=0$, $n=0$ et $a=0$, et ce, quel que soit $\mu\in\mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$. Le cas $n_1=1$, $n_2=0$, $a=0$ et n quelconque s'en déduit en utilisant la relation $\psi(\ell_h(F_\mu)^{(n+1)})\equiv\ell_h(F_\mu)^{(n)}\mod t^k$; le cas $n_1=n_2+1$ et $a=0$ s'en déduit en remarquant que $\ell_h(\left(\begin{smallmatrix}p^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\mu)=\left(\begin{smallmatrix}p^m&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\ell_h(\mu)$, si $m\in\mathbf{Z}$; le cas n_1,n_2 quelconques et $a=0$ s'en déduit par linéarité, et le cas général s'en déduit en remarquant que, si $\lambda=\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\mu$, alors $\ell_h(\lambda)=\left(\begin{smallmatrix}1&a\\0&1\end{smallmatrix}\right)\star\ell_h(\mu)$, et $\ell_h(F_\lambda)^{(m)}=(1+T)^{p^ma}\ell_h(F_\mu)^{(m)}$ si $m+v_p(a)\geqslant 0$. Ceci termine la démonstration de la prop. 6.2 et, par voie de conséquence, celle du th. 6.1.

7. Les objets attachés à un caractère de $\mathbf{Q}_p^*$

7.1. Les constantes $c_{\alpha,\lambda}(j)$

Soit $u=\chi(\gamma)$; c'est un générateur topologique de $\mathbf{Z}_p^*$. Si $\alpha:\mathbf{Q}_p^*\to\mathbf{C}_p^*$ est un caractère continu, la quantité $\frac{\log\alpha(u)}{\log u}$ ne dépend pas du choix de u ; on la note $w(\alpha)$. Il existe alors $n(\alpha)\geqslant 1$ tel que l'on ait
$$\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{w(\alpha)}{n}(x-1)^n\quad\text{si } x\in D(1,n(\alpha)).$$

On se fixe, pour toute la suite de ce §, une mesure λ sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant
$$\int_{\mathbf{Z}_p^*}\alpha^{-1}\,\lambda\neq 0\quad\text{et}\quad\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^i\,\lambda=0,\text{ si }\alpha(p)=p^{1-i},\text{ avec } i\in\mathbf{N}.$$

On définit $c_{\alpha,\lambda} \neq 0$, et $c_{\alpha,\lambda}(j)$, si $j \in \mathbf{N}$, par les formules :

$$c_{\alpha,\lambda} = \frac{p}{(p-1)\log u} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \alpha^{-1}\,\lambda \quad \text{et} \quad c_{\alpha,\lambda}(j) = \frac{(w(\alpha)+j)\cdots(w(\alpha))}{j!} \cdot c_{\alpha,\lambda}^{-1}.$$

Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des parties finies de $L \times \mathbf{Q}_p \times \mathbf{N}$. Si $U = \{u = (a_u, j_u, \lambda_u)\} \in \mathscr{U}$, soient

$$\ell_{\alpha,U}(y) = \sum_{u\in U} \lambda_u \frac{(y-a_u)^{j_u}}{c_{\alpha,\lambda}(j_u)} \alpha(y-a_u) \quad \text{et} \quad P_U(X) = \sum_{u\in U} \lambda_u (X-a)^{j_u}.$$

On peut aussi écrire $P_U(X)$ sous la forme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_{U,i} X^i, \quad \text{avec } b_{U,i} = \sum_{u\in U} \lambda_u \binom{j_u}{i} (-a_u)^{j_u - i}.$$

Lemme 7.1. — *Si $j \in \mathbf{N}$, et si $c_{\alpha,\lambda}(j) \neq 0$, alors $\alpha(y)^{-1}\big(\frac{(y-a)^j}{c_{\alpha,\lambda}(j)}\alpha(y-a)\big)$ est analytique au voisinage de $y = \infty$, et on a*

$$\alpha(y)^{-1}\Big(\frac{(y-a)^j}{c_{\alpha,\lambda}(j)}\alpha(y-a)\Big) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-a)^{j-i} \frac{y^i}{c_{\alpha,\lambda}(i)} + O(y^{-1}).$$

Démonstration. — Au voisinage de $y = \infty$,

$$\begin{aligned}\frac{(y-a)^j}{c_{\alpha,\lambda}(j)} \cdot \frac{\alpha(y-a)}{\alpha(y)} &= \frac{y^j}{c_{\alpha,\lambda}(j)} \big(1 - ay^{-1}\big)^{w(\alpha)+j} \\ &= \frac{1}{c_{\alpha,\lambda}} \Big(\frac{j!}{(w(\alpha)+j)\cdots(w(\alpha))} \sum_{n=0}^{j} \binom{w(\alpha)+j}{n} (-a)^n y^{j-n} \Big) + O(y^{-1}),\end{aligned}$$

et on conclut en posant $i = j - n$ et en développant le coefficient binomial.

Corollaire 7.2. — *Si $U \in \mathscr{U}$, et si $c_{\alpha,\lambda}(j_u) \neq 0$ quel que soit $u \in U$, alors $\alpha(y)^{-1}\ell_{\alpha,U}(y)$ est analytique au voisinage de $y = \infty$, et on a*

$$\alpha(y)^{-1}\ell_{\alpha,U}(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_{U,j} \frac{y^j}{c_{\alpha,\lambda}(j)} + O(y^{-1}).$$

7.2. La distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$

Soit μ_{KL}^* la distribution sur $\mathbf{Z}_p^*$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta\, \mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{w(\delta)}{\delta(u)-1} \quad \text{si } \delta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^* \text{ est un caractère continu} \neq 1, \text{ et } \int_{\mathbf{Z}_p^*} \mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{1}{\log u}.$$

Cette distribution est l'analogue multiplicatif de la distribution de Kubota-Leopoldt, ce qui justifie la notation. Elle dépend du choix du générateur γ de Γ et est d'ordre 1.

Lemme 7.3. — *Si $n \geqslant 1$, si $0 \leqslant i \leqslant (p-1)p^{n-1}-1$, et si $\delta : \mathbf{Z}_p^* \to \mathbf{C}_p^*$ est un caractère continu, alors*

$$\int_{D(u^i,n)} \delta\, \mu_{\mathrm{KL}}^* = \begin{cases} \frac{\delta(u)^i w(\delta)}{\delta(u)^{(p-1)p^{n-1}}-1} = \frac{\delta(u)^{-((p-1)p^{n-1}-i)} w(\delta)}{1-\delta(u)^{-(p-1)p^{n-1}}} & \textit{si } \delta^{(p-1)p^{n-1}} \neq 1, \\ p^{-n} \frac{p\delta(u)^i}{(p-1)\log u} & \textit{si } \delta^{(p-1)p^{n-1}} = 1. \end{cases}$$

Démonstration. — Si X_n désigne l'ensemble des caractères $\beta : (\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})^* \to \overline{\mathbf{Q}}_p^*$, on a

$$\mathbf{1}_{D(u^i,n)}(x) = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \sum_{\beta\in X_n} \beta(u)^{-i}\beta(x)$$
$$\int_{D(u^i,n)} \delta\, \mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \sum_{\beta\in X_n} \beta(u)^{-i} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \beta\delta\, \mu_{\mathrm{KL}}^*.$$

Si $\delta^{(p-1)p^{n-1}} = 1$, on a $w(\beta\delta) = 0$ quel que soit $\beta \in X_n$; tous les termes de la somme sont donc nuls sauf celui correspondant à $\beta = \delta^{-1}$, ce qui nous donne $\int_{D(u^i,n)} \delta\, \mu_{\mathrm{KL}}^* = p^{-n} \frac{p\delta(u)^i}{(p-1)\log u}$.

Si $\delta^{(p-1)p^{n-1}} \neq 1$, comme $w(\delta\beta) = w(\delta)$, et comme β est déterminé par $\eta = \beta(u) \in \boldsymbol{\mu}_{(p-1)p^{n-1}}$, on obtient

$$\int_{D(u^i,n)} \delta\, \mu_{\mathrm{KL}}^* = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{(p-1)p^{n-1}}} \eta^{-i} \frac{w(\delta)}{\delta(u)\eta - 1} = \frac{\delta(u)^i w(\delta)}{\delta(u)^{(p-1)p^{n-1}} - 1}.$$

La dernière identité peut se montrer, par exemple, en développant en séries entières en $z = \delta(u)$. Ceci permet de conclure.

On note $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ le produit de convolution sur $\mathbf{Z}_p^*$ de λ et $\alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$. On a donc

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)\, \lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^* = \int_{\mathbf{Z}_p^*\times\mathbf{Z}_p^*} \phi(zt)\, \lambda(t)\alpha(z)\mu_{\mathrm{KL}}^*(z).$$

Lemme 7.4. — *Si $y \in \mathbf{Z}_p^*$ et $1 \leqslant m \leqslant n+1$, alors*

$$\frac{w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)p^n}} \sum_{a=1}^{(p-1)p^n} \alpha(u)^{-a} \int_{D(-u^a y,m)} \lambda(x) = \int_{D(-y,m)} \mu_{\alpha,\lambda}(x).$$

Démonstration. — On a

$$\mathbf{1}_{D(-y,m)}(zt) = \sum_{a=1}^{(p-1)p^n} \mathbf{1}_{D(-u^a y,m)}(t)\mathbf{1}_{D(u^{-a},n+1)}(z).$$

En revenant à la définition de la distribution $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$, on en déduit la formule

$$\int_{D(-y,m)} \mu_{\alpha,\lambda} = \sum_{a=1}^{(p-1)p^n} \Big(\int_{D(-u^a y,m)} \lambda\Big)\Big(\int_{D(u^{-a},n+1)} \alpha\, \mu_{\mathrm{KL}}^*\Big),$$

et on conclut en utilisant le lemme 7.3 avec $i = (p-1)p^n - a$ et $\delta = \alpha$.

Lemme 7.5. — (i) *Si $\alpha(p)$ n'est pas de la forme p^{1-i}, avec $i \in \mathbf{N}$, alors il existe une unique distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbf{Q}_p$ dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ est $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ et qui vérifie $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu_{\alpha,\lambda} = p\alpha(p)^{-1}\mu_{\alpha,\lambda}$.*

(ii) *Si $\alpha(p) = p^{1-i}$, alors il existe une unique distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbf{Q}_p$, dont la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ est $\lambda \star \alpha\mu_{\mathrm{KL}}^*$ et qui vérifie $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu_{\alpha,\lambda} = p\alpha(p)^{-1}\mu_{\alpha,\lambda}$ et $\int_{\mathbf{Z}_p} x^i\mu_{\alpha,\lambda} = 0$.*

Démonstration. — L'application $\mu \mapsto A_\mu(T) = \int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu$ induit [**22**, ??] une bijection de l'ensemble des distributions sur $\mathbf{Q}_p$ vérifiant $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu = p\alpha(p)^{-1}\mu$, sur l'ensemble des éléments de $\mathscr{R}^+$ vérifiant $\psi(f) = p^{-1}\alpha(p)f$. D'autre part, si μ est une telle distribution, alors $(1-p^{-1}\alpha(p)\varphi)A_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\mu$. Le lemme est donc une simple traduction du lemme 1.1.

Lemme 7.6. — *Si $v_p(y) < n$, alors*

$$\int_{D(-y,n)} \alpha^{-1}\, \mu_{\alpha,\lambda} = p^{-n}c_{\alpha,\lambda}.$$

Démonstration. — On se ramène au cas $v_p(y) = 0$ et $n \geqslant 1$, en faisant le changement de variables $x = p^{v_p(y)}x'$ et en utilisant la relation $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \star \mu_{\alpha,\lambda} = p\alpha(p)^{-1}\mu_{\alpha,\lambda}$. On utilise alors les formules

$$\mathbf{1}_{D(-y,n)}(zt) = \sum_{i=0}^{(p-1)p^{n-1}} \mathbf{1}_{D(-yu^i,n)}(t)\mathbf{1}_{D(u^{-i},n)}(z) \quad \text{et} \quad \int_{D(u^{-i},n)} \mu_{\mathrm{KL}}^* = p^{-n}\frac{p}{(p-1)\log u},$$

pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{D(-y,n)} \alpha^{-1}(x)\, \mu_{\alpha,\lambda} &= \int_{\mathbf{Z}_p^*\times\mathbf{Z}_p^*} \mathbf{1}_{D(-y,n)}(zt)\ \alpha(zt)^{-1}\lambda(t)\ \alpha(z)\mu_{\mathrm{KL}}^*(z) \\ &= \sum_{i=0}^{(p-1)p^{n-1}} \Big(\int_{D(-yu^i,n)} \alpha(z)^{-1}\lambda\Big)\Big(\int_{D(u^{-i},n)} \mu_{\mathrm{KL}}^*\Big) \\ &= p^{-n}\frac{p}{(p-1)\log u}\sum_{i=0}^{(p-1)p^{n-1}} \int_{D(-yu^i,n)} \alpha(z)^{-1}\lambda = p^{-n}c_{\alpha,\lambda}.\end{aligned}$$

7.3. Les fonctions $f_{\alpha,j}$ et $g_{\alpha,j}$

Si $j \in \mathbf{N}$ et si $w(\alpha) \notin \{0,-1,\dots,-j\}$, soit $f_{\alpha,j}(x,y)$ la fonction de deux variables définie par

$$f_{\alpha,j}(x,y) = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{y^{j-i}x^i}{w(\alpha)+i}.$$

Proposition 7.7. — (i) *Si $j \in \mathbf{N}$, alors $f_{\alpha,j}(px,py) = p^jf_{\alpha,j}(x,y)$.*

(ii) *Si $j \in \mathbf{N}$ et $a \in \mathbf{Q}_p$, alors $\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(-a)^{j-m}f_{\alpha,m}(x,y) = f_{\alpha,j}(x,y-a)$.*

Démonstration. — $f_{\alpha,j}$ est un polynôme homogène de degré j en x,y ; on en déduit le (i). Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m}(-a)^{j-m}f_{\alpha,m}(x,y) &= \sum_{m=0}^{j}\sum_{i=0}^{m}\frac{j!}{m!(j-m)!}(-a)^{j-m}\frac{m!}{i!(m-i)!}\frac{y^{m-i}x^i}{w(\alpha)+i} \\ &= \sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!(j-i)!}\frac{x^i}{w(\alpha)+i}\Big(\sum_{m=i}^{j}\frac{(j-i)!}{(j-m)!(m-i)!}(-a)^{j-m}y^{m-i}\Big) \\ &= \sum_{i=0}^{j}\frac{j!}{i!(j-i)!}\frac{x^i}{w(\alpha)+i}(y-a)^{j-i} = f_{\alpha,j}(x,y-a),\end{aligned}$$

ce qui démontre le (ii) et permet de conclure.

Soit
$$g_{\alpha,j}(x,y)=(x+y)^{-j-1}\Big(\frac{j!}{(w(\alpha)+j)\cdots(w(\alpha))}y^j\alpha(-yx^{-1})-f_{\alpha,j}(x,y)\Big).$$

Proposition 7.8. — *Si $j\in\mathbf{N}$, et si $w(\alpha)\notin\{0,-1,\dots,-j\}$, alors*

(i) $g_{\alpha,j}(px,py)=p^{-1}g_{\alpha,j}(x,y)$.

(ii) $\int_{D(-y,n)}(x+y)^{j+1}g_{\alpha,j}(x,y)\,\mu_{\alpha,\lambda}(x)=p^{-n}\frac{y^j}{c_{\alpha,\lambda}(j)}\alpha(-y)-\int_{D(-y,n)}f_{\alpha,j}(x,y)\,\mu_{\alpha,\lambda}(x)$.

(iii) $g_{\alpha,j}$ *est analytique sur l'ouvert de* $\mathbf{Q}_p^*\times\mathbf{Q}_p^*$ *des* (x,y) *vérifiant* $v_p(x+y)\geqslant v_p(y)+n(\alpha)$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Le (ii) est une conséquence du lemme 7.6. Pour démontrer le (iii), partons de l'existence, si $w\in\mathbf{C}_p$, de l'identité suivante de séries entières (en u)
$$(1-u)^w\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}\frac{(u-1)^i}{w+i}=\frac{j!}{w(w+1)\cdots(w+j)}\Big(1-\sum_{m=1}^{+\infty}\binom{w+j}{j+m}(1-u)^{w-m}u^{j+m}\Big)$$
qui se démontre en dérivant par rapport à u, et en faisant une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{j!}{w(w+1)\cdots(w+j)}$ pour identifier les termes constants.

On en déduit, si $v_p(u)\geqslant n(\alpha)$, la formule
$$\alpha(u-1)\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}\frac{(u-1)^i}{w(\alpha)+i}=\frac{j!}{w(\alpha)(w(\alpha)+1)\cdots(w(\alpha)+j)}\Big(\alpha(-1)-\sum_{m=1}^{+\infty}\binom{w(\alpha)+j}{j+m}\frac{\alpha(u-1)}{(1-u)^m}u^{j+m}\Big).$$
Il suffit alors de poser $u=\frac{x+y}{y}$ et de multiplier les deux membres par $(x+y)^{-j-1}y^y\alpha(-yx^{-1})$ pour en déduire la formule
$$g_{\alpha,j}(x,y)=-\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\binom{w(\alpha)+j}{j+m}\frac{(x+y)^{m-1}}{x^m},$$
valable si $v_p(x+y)\geqslant v_p(y)+n(\alpha)$, ce qui permet de conclure.

7.4. Les éléments $A_{\alpha,\lambda}$, $B_{\alpha,\lambda}$ et $C_{\alpha,\lambda}$

• Soit $B_{\alpha,\lambda}\in(\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ la solution de l'équation
$$(\alpha(\gamma)\gamma-1)B_{\alpha,\lambda}=\int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\lambda.$$

Lemme 7.9. — *Si $n\geqslant 1$, si $i\in\mathbf{N}$, et si $y\in\mathbf{Z}_p^*$,*
$$(w(\alpha)+i)\cdot\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^n}}\eta^y\partial^iB_{\alpha,\lambda}(\eta-1)=p^{n+1}\int_{D(-y,n+1)}x^i\mu_{\alpha,\lambda}-p^n\int_{D(-y,n)}x^i\mu_{\alpha,\lambda}.$$

Démonstration. — On a $w(x^i\alpha)=w(\alpha)+i$ et, avec des notations évidentes,
$$\partial^iB_{\alpha,\lambda}=B_{x^i\alpha,x^i\lambda}\quad\text{et}\quad x^i\mu_{\alpha,\lambda}=\mu_{x^i\alpha,x^i\lambda},$$
ce qui permet de se ramenenr à $i=0$ pour faire les calculs.

La relation $(\alpha(\gamma)\gamma-1)B_{\alpha,\lambda}=(1+T)$ se traduit par
$$\alpha(u)B_{\alpha,\lambda}(\eta^u-1)-B_{\alpha,\lambda}(\eta-1)=\int_{\mathbf{Z}_p^*}\eta^x\,\lambda,$$

quel que soit $\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^n}$. Soit

$$g(y) = w(\alpha) \cdot \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^y B_{\alpha,\lambda}(\eta - 1).$$

En multipliant la relation ci-dessus par η^{uy}, on obtient la relation

$$\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^{uy} B_{\alpha,\lambda}(\eta^u - 1) = \alpha(u)^{-1} \Big(\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \Big(\eta^{uy} B_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) + \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^{x+uy}\, \lambda \Big)\Big).$$

Comme $\sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \eta^z = p^{n+1} \mathbf{1}_{D(0,n+1)}(z) - p^n \mathbf{1}_{D(0,n)}(z)$, on en déduit, l'équation fonctionnelle $g(y) = \alpha(u)^{-1}(g(uy) + w(\alpha) v(uy))$, avec

$$v(y) = \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}} - \boldsymbol{\mu}_{p^n}} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^{x+y} \lambda(x) = p^{n+1} \int_{D(-y,n+1)} \lambda(x) - p^n \int_{D(-y,n)} \lambda(x).$$

En utilisant le fait que g est constante modulo $p^{n+1}\mathbf{Z}_p$ et que $u^{(p-1)p^n} \equiv 1 \bmod p^{n+1}$, cela permet de calculer $g(y)$. On obtient

$$\begin{aligned} g(y) =& \frac{w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)p^n}} \sum_{a=1}^{(p-1)p^n} \alpha(u)^{-a} v(u^a y) \\ =& \frac{w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)p^n}} \sum_{a=1}^{(p-1)p^n} \alpha(u)^{-a} \Big(p^{n+1} \int_{D(-u^a y, n+1)} \lambda(x) - p^n \int_{D(-u^a y, n)} \lambda(x) \Big), \end{aligned}$$

et le lemme 7.4 permet de conclure.

• Soit $A_{\alpha,\lambda} \in \mathscr{R}^+$ la solution (cf. lemme 1.1) de l'équation $(p^{-1}\alpha(p)\varphi - 1) A_{\alpha,\lambda} = \int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x\, \lambda$ vérifiant $\partial^i A_{\alpha,\lambda}(0) = 0$ si $\alpha(p) = p^{1-i}$.

Lemme 7.10. — *On a*

$$\partial^i A_{\alpha,\lambda}(0) = -\frac{u^i \alpha(u) - 1}{w(\alpha) + i} \int_{\mathbf{Z}_p} x^i \mu_{\alpha,\lambda} \quad \text{et} \quad p^{i-1}\alpha(p) \partial^i A_{\alpha,\lambda}(0) = -\frac{u^i \alpha(u) - 1}{w(\alpha) + i} \int_{p\mathbf{Z}_p} x^i \mu_{\alpha,\lambda}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que, si $\alpha(p) = p^{1-i}$, alors toutes les quantités ci-dessus sont nulles. Nous supposerons donc $\alpha(p) \neq p^{1-i}$ dans ce qui suit.

Soit $F = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \mu_{\alpha,\lambda}$. Comme $(p^{-1}\alpha(p) \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1) \star \mu_{\alpha,\lambda} = 0$, on a

$$(p^{-1}\alpha(p)\varphi - 1) F = -\int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x \mu_{\alpha,\lambda} = -\int_{\mathbf{Z}_p^*} (1+T)^x\, \lambda \star \alpha \mu_{\mathrm{KL}}^*.$$

En appliquant ∂^i et en évaluant le résultat en $T = 0$, cela nous donne

$$\begin{aligned} (p^{i-1}\alpha(p) - 1) \partial^i F(0) = -\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\, \lambda \star \alpha \mu_{\mathrm{KL}}^* =& -\Big(\int_{\mathbf{Z}_p{}^*} x^i \lambda \Big) \Big(\int_{\mathbf{Z}_p{}^*} x^i \alpha(x)\, \mu_{\mathrm{KL}}^* \Big) \\ =& \frac{-(w(\alpha) + i)}{u^i \alpha(u) - 1} \int_{\mathbf{Z}_p{}^*} x^i \lambda. \end{aligned}$$

Comme $(p^{i-1}\alpha(p) - 1) \partial^i A_{\alpha,\lambda}(0) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i \lambda$, cela permet de démontrer la première identité ; la seconde s'en déduit en utilisant la relation $p^{-1}\alpha(p) \left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star \mu_{\alpha,\lambda} = \mu_{\alpha,\lambda}$.

• Soit $C_{\alpha,\lambda} \in \mathscr{R}^+$ vérifiant $(\alpha(\gamma)\gamma - 1)C_{\alpha,\lambda} \equiv A_{\alpha,\lambda} \bmod t^k\mathscr{R}^+$. Un tel $C_{\alpha,\lambda}$ existe (et est unique (n° 3.6) modulo $t^k\mathscr{R}^+$) si $w(\alpha) \notin \{0, -1, \dots, 1-k\}$.

Lemme 7.11. — *Si $y \in \mathbf{Z}_p$ et si $0 \leqslant i \leqslant k-1$, alors*

$$(w(\alpha)+i) \cdot \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_p - \{1\}} \eta^y \partial^i C_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) = \int_{D(-y,0)} \mu_{\alpha,\lambda} - p \int_{D(-y,1)} \mu_{\alpha,\lambda}.$$

Démonstration. — On a encore $\partial^i A_{\alpha,\lambda} = A_{x^i\alpha, x^i\lambda}$ et $\partial^i C_{\alpha,\lambda} \equiv C_{x^i\alpha,x^i\lambda} \bmod t^{k-i}$, ce qui permet, comme pour le lemme 7.9, de se ramener à $i = 0$ pour faire les calculs.

Des hypothèses $(\alpha(u)\gamma - 1)C_{\alpha,\lambda} \equiv A_{\alpha,\lambda} \bmod t\mathscr{R}^+$ et $(p^{-1}\alpha(p)\varphi - 1)A_{\alpha,\lambda} = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x \lambda$, on déduit, pour $\eta \in \boldsymbol{\mu}_p$, les formules

$$\alpha(u)C_{\alpha,\lambda}(\eta^u - 1) = C_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) + A_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) \quad \text{et} \quad p^{-1}\alpha(p)A_{\alpha,\lambda}(0) - A_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^x \lambda.$$

De la seconde égalité, on déduit la formule

$$A_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) = p^{-1}\alpha(p)A_{\alpha,\lambda}(0) - \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^x \lambda = -\frac{\alpha(u)-1}{w(\alpha)} \int_{p\mathbf{Z}_p} \mu_{\alpha,\lambda} - \int_{\mathbf{Z}_p^*} \eta^x \lambda.$$

De la première, on déduit, en posant $g(y) = w(\alpha) \cdot \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_p - \{1\}} \eta^y C_{\alpha,\lambda}(\eta - 1)$ et en raisonnant comme dans la démonstration du lemme 7.9, l'équation fonctionnelle $g(uy) = \alpha(u)^{-1}(g(y) + w(\alpha)v(y))$, avec

$$\begin{aligned} v(y) &= \sum_{\eta \in \boldsymbol{\mu}_p - \{1\}} \eta^y A_{\alpha,\lambda}(\eta - 1) \\ &= -\frac{\alpha(u)-1}{w(\alpha)} \Big(\int_{p\mathbf{Z}_p} \mu_{\alpha,\lambda} \Big) \Big(p\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p}(y) - \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(y) \Big) - \int_{\mathbf{Z}_p^*} \big(p\mathbf{1}_{D(-y,1)}(x) - \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(x) \big) \lambda(x). \end{aligned}$$

On a alors, comme dans la démonstration du lemme 7.9,

$$g(y) = \frac{w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)}} \sum_{a=1}^{p-1} \alpha(u)^{-a} v(u^a y).$$

Maintenant, le lemme 7.4 nous fournit la formule

$$\frac{w(\alpha)}{1 - \alpha(u)^{-(p-1)}} \sum_{a=1}^{p-1} \alpha(u)^{-a} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \mathbf{1}_{D(-u^a y, 1)}(x) \lambda(x) = \Big(\int_{D(-y,1)} \mu_{\alpha,\lambda} \Big) \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}(y).$$

Les trois autres termes de la somme constituant $v(u^a y)$ ne dépendent pas de a, et comme $\sum_{a=1}^{p-1} \alpha(u)^{-a} = \frac{\alpha(u)^{-1}(1-\alpha(u)^{-(p-1)})}{1-\alpha(u)^{-1}}$, la contribution de ces trois termes à $g(y)$ est

$$-\Big(\int_{p\mathbf{Z}_p} \mu_{\alpha,\lambda} \Big) \Big(p\mathbf{1}_{p\mathbf{Z}_p}(y) - \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(y) \Big) + \frac{w(\alpha)}{\alpha(u)-1} \Big(\int_{\mathbf{Z}_p^*} \lambda \Big) \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}(y).$$

Il n'y a plus qu'à utiliser la formule $\frac{w(\alpha)}{\alpha(u)-1} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \lambda = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \mu_{\alpha,\lambda}$, et à mettre ensemble les formules obtenues pour conclure.

Corollaire 7.12. — (i) *Si* $y\in \mathbf{Z}_p^*$ *et* $n\geqslant 1$, *alors*

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_{p^{n+1}}-\boldsymbol{\mu}_{p^n}}\eta^y\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}y^{j-i}\partial^iB_{\alpha,\lambda}(\eta-1)=$$

$$p^{n+1}\int_{D(-y,n+1)}f_{\alpha,j}(x,y)\mu_{\alpha,\lambda}(x)-p^n\int_{D(-y,n)}f_{\alpha,j}(x,y)\mu_{\alpha,\lambda}(x).$$

(ii) *Si* $0\leqslant j\leqslant k-1$, *et si* $y\in\mathbf{Z}_p$, *alors*

$$\sum_{\eta\in\boldsymbol{\mu}_p-\{1\}}\eta^y\sum_{i=0}^j\binom{j}{i}y^{j-i}\partial^iC_{\alpha,\lambda}(\eta-1)=$$

$$\int_{D(-y,0)}f_{\alpha,j}(x,y)\,\mu_{\alpha,\lambda}(x)-p\int_{D(-y,1)}f_{\alpha,j}(x,y)\,\mu_{\alpha,\lambda}(x)$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe des lemmes 7.9 et 7.11.

8. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

8.1. Un peu d'analyse p-adique

Si $f\in\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$, si $n\in\mathbf{N}$, on note $f\circ p^{-n}:\mathbf{Z}_p\to L$ la fonction de support $p^n\mathbf{Z}_p$, dont la restriction à $p^n\mathbf{Z}_p$ est donnée par la formule $f\circ p^{-n}(x)=f(p^{-n}x)$.

Lemme 8.1. — *Si* $f\in\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$ *et si* $n\in\mathbf{N}$, *alors* $f\circ p^{-n}\in\mathrm{LA}_{h+n}$ *et* $v_{\mathrm{LA}_{h+n}}(f\circ p^{-n})=v_{\mathrm{LA}_h}(f)$.

Démonstration. — Il suffit de revenir aux définitions.

Lemme 8.2. — *Si* $f\in\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p^*)$, *si* $\alpha\in L^*$, *et si* $k\in\mathbf{N}$, *alors la série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n n^k f\circ p^{-n}$$

converge dans $\mathscr{C}^u(\mathbf{Z}_p)$ *si* $0\leqslant u<v_p(\alpha)$.

Démonstration. — Il existe $h\geqslant 1$ tel que $f\in\mathrm{LA}_h(\mathbf{Z}_p)$. Si $n\geqslant 0$, alors, d'après la prop. [**22**, ? ?] et le lemme 8.1, on a

$$\begin{aligned}v_{\mathscr{C}^u}(\alpha^n n^k f\circ p^{-n})&\geqslant nv_p(\alpha)+v_{\mathrm{LA}_{h+n}}(f\circ p^{-n})-u(h+n)\\&=n(v_p(\alpha)-u)+v_{\mathrm{LA}_h}(f)-uh,\end{aligned}$$

ce qui montre que $v_{\mathscr{C}^u}(\alpha^n n^k f\circ p^{-n})$ tend vers $+\infty$ si $v_p(\alpha)-u>0$, et permet de conclure.

Proposition 8.3. — *Soit* $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$ *vérifiant* $v_p(\delta(p))>0$, *et soit* $k\in\mathbf{N}$. *Alors* $\log_{\mathscr{L}}^k\cdot\delta$ *tend vers* 0 *en* 0 *et la fonction obtenue en prolongeant par continuité est de classe* $\mathscr{C}^u$ *sur* $\mathbf{Q}_p$ *pour tout* u *vérifiant* $0\leqslant u<v_p(\delta(p))$.

Démonstration. — Comme

$$v_p((\log_{\mathscr{L}} x)^k\delta(x)) \geqslant v_p(x)v_p(\delta(p)) + k\inf(0, v_p(\mathscr{L})),$$

on en déduit le premier point. Par ailleurs, comme δ et $\log_{\mathscr{L}}$ sont localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p^*$, il suffit de regarder ce qui se passe en 0, et on peut donc se contenter d'étudier la restriction de $\log_{\mathscr{L}}^k\cdot\delta$ à $\mathbf{Z}_p^*$. Si $i\in\mathbf{N}$, notons f_i la restriction de $\log_{\mathscr{L}}^i\cdot\delta$ à $\mathbf{Z}_p$. Un calcul immédiat montre que la restriction de $\log_{\mathscr{L}}^k\cdot\delta$ à $p^n\mathbf{Z}_p^*$ est alors égale à

$$\delta(p)^n\Big(\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}(n\mathscr{L})^{k-i}f_i\circ p^{-n}\Big),$$

et donc que la restriction de $\log_{\mathscr{L}}^k\cdot\delta$ à $\mathbf{Z}_p$ (prolongée par continuité en 0), est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\delta(p)^n\Big(\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}(n\mathscr{L})^{k-i}f_i\circ p^{-n}\Big),$$

ce qui permet d'utiliser le lemme 8.2 pour conclure.

Lemme 8.4. — *Si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, si $i\in\mathbf{N}$, si $a\in\mathbf{Q}_p^*$, si $n\geqslant 1+v_p(a)$ et si $m\geqslant\sup(n, n(\delta)+v_p(a))$, alors $\mathbf{1}_{D(a,n)}(x)\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i\in\mathrm{LA}_m(\mathbf{Q}_p)$ et*

$$v_{\mathrm{LA}_m}(\mathbf{1}_{D(a,n)}(x)\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i)\geqslant v_p(a)v_p(\delta(p)) + i\inf(0, v_p(\mathscr{L})).$$

Démonstration. — On se ramène à $a=1$ en faisant le changement de variables $x=ay$, auquel cas le résultat s'obtient en revenant à la définition de $n(\delta)$ et en développant brutalement.

Lemme 8.5. — *Si $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$, si $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, et si $\mathscr{L}\in L$, il existe $C(u,\delta,\mathscr{L})\in\mathbf{R}$ tel que, si $n\in\mathbf{Z}$, et si $i\in\mathbf{Z}$, alors*

$$v_p\Big(\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i\,\mu\Big)\geqslant (u-v_p(\delta(p)))n + v_{\mathscr{D}_u}(\mu) + C(u,\delta,\mathscr{L}).$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i\,\mu &= \int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta(p^{-n}x)(\log_{\mathscr{L}}(p^{-n}x))^i\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu\\ &=\delta(p)^{-n}\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x - n\mathscr{L})^i\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu.\end{aligned}$$

On en déduit la minoration

$$\begin{aligned}v_p\Big(\int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*}\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x)^i\,\mu\Big)\geqslant -nv_p(\delta(p)) &+ v_{\mathscr{D}_u}(\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu)\\ &+v_{\mathrm{LA}_{n(\delta)}}(\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}\cdot\delta(x)(\log_{\mathscr{L}} x-n\mathscr{L})^i) - n(\delta)u,\end{aligned}$$

et le résultat suit, avec $C(u,\delta,\mathscr{L}) = -n(\delta)u + i\inf(0,v_p(\mathscr{L}))$, de ce que $v_{\mathscr{D}_u}(\left(\begin{smallmatrix}p^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\star\mu) = v_{\mathscr{D}_u}(\mu)+nu$ et du lemme 8.4 en écrivant $\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p^*}$ sous la forme $\sum_{a=1}^{p-1}\mathbf{1}_{D(a,1)}$.

Remarque 8.6. — On n'aura, dans la suite, besoin que du cas $i=0$, auquel cas, on peut remplacer $C(u,\delta,\mathscr{L})$ par une constante $C(u,\delta)$ ne dépendant pas de $\mathscr{L}$.

8.2. Distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on note $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ l'espace des fonctions ϕ localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p$ telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbf{Q}_p$. Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, on dit que ϕ a un pôle d'ordre $< u$ (resp. d'ordre $\leqslant u$) en l'infini, si $\delta(x)\phi(1/x)$ a un zéro d'ordre $> u - v_p(\delta(p))$ (resp. d'ordre $\geqslant u - v_p(\delta(p))$) en 0.

On note $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ le dual de $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, on note μ_1 la restriction de μ à $\mathbf{Z}_p$ et μ_2 la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mu_2 = \int_{D(0,\infty)} \delta(x)\phi(1/x)\ \mu.$$

On note aussi ι_δ l'involution de $\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*)$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi(x)\,\iota_\delta(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)\phi(1/x)\ \mu.$$

On a alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_2) = \iota_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_1))$, et réciproquement, si on part de deux distributions μ_1, μ_2 sur $\mathbf{Z}_p$ dont les restrictions à $\mathbf{Z}_p^*$ vérifient la condition ci-dessus, alors on peut recoller μ_1 et μ_2 en un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. Par contre, il n'est en général pas possible d'étendre une distribution sur $\mathbf{Q}_p$ en un élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$; il y a une condition de croissance à l'infini.

On dit que $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ est d'ordre $\leqslant u$ si les distributions μ_1 et μ_2 ci-dessus appartiennent à $\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$. On note $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ l'ensemble des éléments d'ordre $\leqslant u$ de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, et on munit $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ de la valuation $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}$ définie par

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu) = \inf(v_{\mathscr{D}_u}(\mu_1), v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2))$$

qui en fait un espace de Banach. On peut aussi voir $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ comme le dual de l'espace $\mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ des fonctions ϕ de classe $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Q}_p$ telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge par continuité en une fonction de classe $\mathscr{C}^u$ sur $\mathbf{Q}_p$.

8.3. Prolongement à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ de distributions sur $\mathbf{Q}_p$

Lemme 8.7. — *Soient $u \geqslant 0$ et $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$.*

(i) *Si $i < u$ est un entier, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_{D(0,-n)} x^i\,\mu = 0$.*

(ii) *Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ a un pôle d'ordre $< u$ en ∞, la suite de terme général $\int_{D(0,-n)} \phi\,\mu$ admet une limite $\int_{\mathbf{Q}_p} \phi\,\mu$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — (i) Si $i \in \mathbf{N}$, on a $v_p(\int_{D(0,-n)} x^i \mu) \geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu) + (i-u)(-n)$ qui tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$ si $i < u$, ce qui démontre le (i).

(ii) Pour montrer que l'intégrale converge, il s'agit de vérifier que, si $\sum_{i<u-v_p(\delta(p))} a_i x^i$ converge sur $D(\infty, n_0)$ et donc, si $v_p(a_i) - in_0$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers $-\infty$, alors la série double

$$\sum_{n\geqslant n_0+1}\ \sum_{i<u-v_p(\delta(p))} a_i \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} x^i\delta(x)\,\mu$$

converge. Or, d'après le lemme 8.5 (appliqué au caractère $x^i\delta$), on a

$$v_p(a_i \int_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} x^i\delta(x)\,\mu) \geqslant v_p(a_i) + (u - v_p(\delta(p)) - i)n + C = v_p(a_i) - in_0 + (u - v_p(\delta(p)) - i)(n - n_0) + C',$$

avec $C, C' \in \mathbf{R}$. Ceci permet de conclure car $v_p(a_i) - in_0 + (u - v_p(\delta(p)) - i)(n - n_0)$ tend vers $+\infty$ si i tend vers $-\infty$ ou si n tend vers $+\infty$.

Proposition 8.8. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$ et $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ vérifie $v_p(\delta(p)) = 2u$, et si $\mu_\delta \in \mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ est la distribution définie par*
- $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi\, \mu_\delta = \lim_{n\to+\infty} \int_{D(0,-n)} \phi\, \mu$ *si ϕ a un pôle d'ordre $< u$ en ∞,*
- $\int_{D(\infty,0)} \delta(x) x^i\, \mu_\delta = 0$ *si $u - v_p(\delta(p)) \leqslant i \leqslant 0$,*

alors μ_δ est d'ordre u.

Démonstration. — Pour calculer l'ordre de μ_δ, il s'agit de calculer celui de la distribution μ' sur $\mathbf{Z}_p$ définie par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\mu' = \int_{D(\infty,0)} \delta(x)\phi(1/x)\mu_\delta,$$

et pour ce faire, il s'agit de minorer $v_p(\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu')$, pour $a \in \mathbf{Z}_p$, $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathbf{N}$. Il y a deux cas.
- $n > v_p(a)$. Dans ce cas, on a

$$\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu' = \int_{\mathbf{Q}_p} \phi_{a,n,i}\, \mu, \quad \text{avec } \phi_{a,n,i}(x) = \mathbf{1}_{D(a^{-1}, n-2v_p(a))}(x) \cdot \delta(x) x^{-i} (\frac{1-ax}{p^n})^i.$$

Si $m = \sup(n - 2v_p(a), n(\delta) - v_p(a))$, on a $\phi_{a,n,i} \in \mathrm{LA}_m(\mathbf{Q}_p)$, et écrivant $(\frac{1-ax}{p^n})^i$ sous la forme $p^{i(m-n)} a^i (\frac{x-a^{-1}}{p^m})^i$, on obtient, en utilisant le lemme 8.4 pour le caractère $x^{-i}\delta$, la minoration

$$v_{\mathrm{LA}_m}(\phi_{a,n,i}) \geqslant (i - v_p(\delta(p)))v_p(a) + iv_p(a) + i(m-n) = -2uv_p(a) - i(m - n + 2v_p(a)).$$

On en déduit la minoration

$$\begin{aligned} v_p\Big(\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu'\Big) &\geqslant v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) + v_{\mathrm{LA}_m}(\phi_{a,n,i}) - um \\ &= v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) + (i-u)(2v_p(a) + m) - in. \end{aligned}$$

Comme $2v_p(a) + m \geqslant n$ avec égalité si $n \geqslant v_p(a) + n(\delta)$, on obtient finalement

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu'\Big) \geqslant v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu) - un \text{ si } i \geqslant u \text{ (ou si } n \geqslant v_p(a) + n(\delta)).$$

- $n \leqslant v_p(a)$. On a alors $D(a,n) = D(0,n)$ et donc

$$\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu' = \int_{D(\infty,n)} \delta(x) x^{-i} (\frac{1-ax}{p^n})^i\, \mu_\delta = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} (\frac{-a}{p^n})^j \int_{D(\infty,n)} \delta(x) x^{-j}\, \mu_\delta.$$

On en déduit la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} (\frac{x-a}{p^n})^i \mu'\Big) \geqslant \inf_{0\leqslant j\leqslant i} v_p\Big(\int_{D(\infty,n)} \delta(x) x^{-j}\, \mu_\delta\Big).$$

Par ailleurs, on a (avec les conventions évidentes si $n \leqslant 0$)

$$\int_{D(\infty,n)} x^{-j}\delta(x)\mu_\delta = \begin{cases} \sum_{i=n+1}^{+\infty} \int_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*} x^{-j}\delta(x)\mu & \text{si } j > v_p(\delta(p)) - u = u, \\ \sum_{i=1}^{n} \int_{p^{-i}\mathbf{Z}_p^*} x^{-j}\delta(x)\mu & \text{si } j \leqslant v_p(\delta(p)) - u = u. \end{cases}$$

Ceci permet, en utilisant le lemme 8.5, de minorer $v_p(\int_{D(\infty,n)} x^{-j}\delta(x)\mu_\delta)$ par

$$\begin{cases}(j-u)n+v_{\mathscr{D}_u}(\mu)+C(u,\delta) & \text{si } j>u,\\ (j-u)(n-1)+v_{\mathscr{D}_u}(\mu)+C(u,\delta) & \text{si } j\leqslant u.\end{cases}$$

Comme $n\geqslant 0$ puisque μ' est à support dans $\mathbf{Z}_p$, on obtient finalement la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}(\frac{x-a}{p^n})^i\mu'\Big)\geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu)-un+C(u,\delta).$$

Les deux minorations ci-dessus montrent que μ' est d'ordre u et qu'il existe $C'(u,\delta)$ tel que $v_{\mathscr{D}_u}(\mu')\geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu)+C'(u,\delta)$, ce que l'on cherchait à démontrer.

8.4. Restriction à $\mathbf{Q}_p$ de distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$

On suppose encore $v_p(\delta(p))=2u$. On note $\nu_\delta^{[i]}$ (resp. $\nu_0^{[i]}$) l'élément de $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ défini par

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}\phi\,\nu_\delta^{[i]}=\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}(\delta(x)\phi(1/x))_{|x=0}\quad\Big(\text{resp. }\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}\phi\,\nu_0^{[i]}=\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}(\phi(x))_{|x=0}\Big).$$

C'est une distribution dont le support est réduit à ∞ (resp. 0).

D'après la prop 8.3, on a $x^i\in\mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ si $i<v_p(\delta(p))-u=u$. L'intégrale $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}x^i\mu$ est donc bien définie si $i<u$ et $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. Soit

$$\begin{aligned}\tau_{\geqslant u}:\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))&\to\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))\\ \mu&\mapsto\mu-\sum_{0\leqslant i<u}\Big(\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}x^i\mu\Big)\nu_0^{[i]}.\end{aligned}$$

Remarque 8.9. — (i) $\tau_{\geqslant u}$ est la projection de $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ sur le sous-espace des μ vérifiant $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}x^i\mu=0$ si $0\leqslant i<u$, parallèlement à $\oplus_{0\leqslant i<u}L\cdot\nu_0^{[i]}$.

(ii) Si $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$ et si $\mu_\delta\in\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ est la distribution définie au lemme 8.7, alors $\tau_{\geqslant u}(\mu_\delta)=\mu_\delta$.

Proposition 8.10. — *Si $u\geqslant 0$, l'application*

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\circ\tau_{\geqslant u}:\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))\to\mathscr{D}(\mathbf{Q}_p)$$

induit une suite exacte

$$0\to\big(\oplus_{0\leqslant i<u}L\cdot\nu_0^{[i]}\big)\oplus\big(\oplus_{0\leqslant i\leqslant u}L\cdot\nu_\delta^{[i]}\big)\to\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))\to\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)\to 0$$

d'espaces de Banach p-adiques.

Démonstration. — Comme d'habitude, si $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, on note μ_1 la restriction de μ à $\mathbf{Z}_p$ et μ_2 la distribution sur $\mathbf{Z}_p$ définie par $\int_{\mathbf{Z}_p}\phi(x)\mu_2=\int_{D(\infty,0)}\delta(x)\phi(1/x)$, ce qui fait de μ_1 et μ_2 des éléments de $\mathscr{D}_u(\mathbf{Z}_p)$. La condition $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)=0$ est alors équivalente à ce que μ_2 soit à support 0 et la formule

$$\ker(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\circ\tau_{\geqslant u})=\big(\oplus_{0\leqslant i<u}L\cdot\nu_0^{[i]}\big)\oplus\big(\oplus_{0\leqslant i\leqslant u}L\cdot\nu_\delta^{[i]}\big)$$

est une traduction du (i) de la remarque 8.9 et du fait qu'une distribution sur $\mathbf{Z}_p$, d'ordre u, et à support 0, est une combinaison linéaire des $\nu_0^{[i]}$, pour $i\leqslant u$.

La surjectivité de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\circ\tau_{\geqslant u}$ est une conséquence de la prop 8.8 et du (ii) de la remarque 8.9. Pour conclure, il s'agit donc de montrer, d'une part, que, si $\mu\in\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ vérifie $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}x^i\mu=0$ si $0\leqslant i<u$, alors $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)\in\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$, et, d'autre part, que $\mu\mapsto\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ est continue. Pour ce faire, on est amené à étudier les intégrales $\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu$, pour $i\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{Q}_p$ et $n\in\mathbf{Z}$.

- Si $a\in\mathbf{Z}_p$ et $n\geqslant 0$ (i.e. si $D(a,n)\subset\mathbf{Z}_p$), on a

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu\Big)=v_p\Big(\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu_1\Big)\geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu_1)-un.$$

- Si $a\notin\mathbf{Z}_p$ et $n>v_p(a)$ (i.e. si $D(a,n)\cap\mathbf{Z}_p=\emptyset$), on a

$$\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu=\int_{\mathbf{Z}_p}\phi_{a,n,i}\,\mu_2,$$

où $\phi_{a,n,i}$ est la fonction qui a été introduite au cours de la démonstration de la prop. 8.8. On en déduit, comme dans cette démonstration, la minoration

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu\Big)\geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2)-un\ \text{ si } i\geqslant n \text{ (ou si } n\geqslant v_p(a)+n(\delta)).$$

- Si $a=0$, $n<0$ et $i<u$, on a, grâce à l'hypothèse $\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)}x^i\mu=0$ si $i<u$,

$$\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu=-p^{-ni}\int_{\mathbf{Q}_p-p^{-n}\mathbf{Z}_p}x^{-i}\delta(x)\,\mu_2=-p^{-ni}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{p^{-n-k}\mathbf{Z}_p^*}x^{-i}\delta(x)\,\mu_2.$$

On en déduit, en utilisant le lemme 8.5, la minoration $v_p\big(\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu\big)\geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2)-un+C(u,\delta)$.

- Si $a=0$, $n<0$ et $i\geqslant u$, on a alors,

$$\begin{aligned}\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu&=\int_{p^n\mathbf{Z}_p}(p^{-n}x)^i\mu\\&=p^j\int_{p^{n+1}\mathbf{Z}_p}(p^{-n-1}x)^j\mu+\sum_{b=1}^{p-1}\int_{p^nb+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}b^{i-j}p^j\Big(\frac{x-p^nb}{p^{n+1}}\Big)^j\mu.\end{aligned}$$

Or, on a déjà constaté que $v_p\big(\int_{p^nb+p^{n+1}\mathbf{Z}_p}\big(\frac{x-p^nb}{p^{n+1}}\big)^j\mu\big)\geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2)-(n+1)u$. On en déduit que

$$v_p\Big(\int_{p^n\mathbf{Z}_p}(p^{-n}x)^i\mu\Big)\geqslant\inf\Big(i+v_p\Big(\int_{p^{n+1}\mathbf{Z}_p}(p^{-n-1}x)^i\mu\Big),v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2)-(n+1)u\Big),$$

et une récurrence descendante immédiate (utilisant $i\geqslant u$) montre que l'on a

$$v_p\Big(\int_{p^n\mathbf{Z}_p}(p^{-n}x)^i\mu\Big)\geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2)-(n+1)u$$

quel que soit $n<0$.

- Si $a\notin\mathbf{Z}_p$ et $n\leqslant v_p(a)$ (i.e. $D(a,n)\cap\mathbf{Z}_p\neq 0$ et $D(a,n)\not\subset\mathbf{Z}_p$), alors $D(a,n)=D(0,n)$ et

$$\int_{D(a,n)}\big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i\mu=\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}(p^{-n}a)^{i-j}\int_{p^n\mathbf{Z}_p}(p^{-n}x)^j\mu,$$

ce qui permet d'utiliser les deux minorations précédentes pour obtenir

$$v_p\Big(\int_{D(a,n)} \big(\frac{x-a}{p^n}\big)^i \mu\Big) \geqslant v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2) - (n+1)u.$$

Les minorations précédentes montrent que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$ et qu'il existe $C \in \mathbf{R}$ tel que

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)) \geqslant \inf(v_{\mathscr{D}_u}(\mu_1), v_{\mathscr{D}_u}(\mu_2)) + C = v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu) + C,$$

ce qui permet de conclure.

8.5. La représentation $\Pi(s)$

8.5.1. Action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$

Lemme 8.11. — *Si $\phi \in \mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ (resp. si $\phi \in \mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$), et si $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, alors $\delta(cx+d)\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)$ se prolonge par continuité en $x = -\frac{d}{c}$ (si $c \neq 0$) en une fonction appartenant à $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ (resp. à $\phi \in \mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$).*

Démonstration. — Il suffit de regarder le comportement de $\delta(cx+d)\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)$ au voisinage de ∞ et de $-\frac{d}{c}$. Par hypothèse, on a $\phi(x) = \delta(x)\phi_\infty(x)$ où ϕ_∞ est localement analytique (resp. de classe $\mathscr{C}^u$) au voisinage de ∞.

• Au voisinage de ∞, il y a deux cas suivant que $c = 0$ ou $c \neq 0$.

— Si $c = 0$, on a $\phi(\frac{ax+b}{d}) = \delta(x)\delta(\frac{a}{d} + \frac{b}{dx})\phi_\infty(\frac{ax+b}{d})$, et $\delta(\frac{a}{d} + \frac{b}{dx})$ est analytique au voisinage de ∞ tandis que $\phi_\infty(\frac{ax+b}{d})$ a la même régularité que ϕ, ce qui montre que $\phi(\frac{ax+b}{d})$ est de la forme $\delta(x)\phi'(x)$, avec ϕ' localement analytique ou de classe $\mathscr{C}^u$.

— Si $c \neq 0$, on a $\delta(cx+d) = \delta(x)\delta(c + \frac{d}{x})$ et $\delta(c+\frac{d}{x})$ est analytique au voisinage de ∞ tandis que $\phi(\frac{ax+b}{cx+d}) = \phi(\frac{a+b/x}{c+d/x})$ a la même régularité que ϕ, ce qui montre que $\delta(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d})$ est de la forme $\delta(x)\phi'(x)$, avec ϕ' localement analytique ou de classe $\mathscr{C}^u$.

Dans tous les cas, $\delta(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d})$ a donc le comportement voulu en ∞.

• Si $c \neq 0$, alors $\delta(cx+d)\phi(\frac{ax+b}{cx+d}) = \delta(ax+b)\phi_\infty(\frac{ax+b}{cx+d})$ a, au voisinage de $x = -\frac{d}{c}$, la même régularité que ϕ.

Ceci permet de conclure.

On fait agir $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathscr{D}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ par la formule

$$\int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \phi(x)\, g\star_\delta \mu = \int_{\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)} \delta(cx+d)\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)\ \mu.$$

Comme $x \mapsto \delta(cx+d)\phi\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)$ appartient à $\mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$ si $\phi \in \mathscr{C}^u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, cela implique que cette action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ laisse stable $\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$.

Remarque 8.12. — Il est, en général, assez difficile de décrire la transformée d'Amice de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(g \star_\delta \mu)$, mais cela ne pose pas de problème si g est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ car l'action $\star_\delta$ coïncide avec celle introduite dans [**22**, ? ?] .

8.5.2. La représentation $B(s)$

Si $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+$, on note δ_s le caractère $(x|x|)^{-1}\delta_1\delta_2^{-1}$. On définit la représentation $B(s)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ comme étant l'espace $\mathscr{C}^{u(s)}(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta_s))$ muni de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ donnée par la formule

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star_s \phi(x) = \delta_1^{-1}(ad-bc)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \star_{\delta_s} \phi(x) = \delta_1^{-1}(ad-bc)\delta_s(cx+d)\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big).$$

8.5.3. Les sous-$\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-modules $M(s)$ et $\widehat{M(s)}$ de $B(s)$

• Si δ_s n'est pas de la forme x^j, avec $j \in \mathbf{N}$, on prend pour $\widehat{M(s)}$ l'adhérence dans $B(s)$ de l'espace vectoriel $M(s)$ engendré par les x^i, pour $0 \leqslant i < u(s)$, et les $(x-a)^{-i}\delta_s(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $0 \leqslant i < u(s)$. Cet espace est stable sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ car, comme le montre un calcul immédiat, $M(s)$ n'est autre que le sous-$\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-module de $B(s)$ engendré par les polynômes de degré $< u(s)$. On note $M(s)' \subset M(s)$ l'intersection de l'espace des fonctions ayant un pôle d'ordre $< u(s)$ en ∞ avec celui engendré par les $(x-a)^{-j}\delta_s(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $0 \leqslant j < u(s)$.

• Si $\delta_s = x^j$, avec $j \in \mathbf{N}$, et si $\mathscr{L}(h) = \mathscr{L} \in \mathbf{P}^1(L)$, on note $M(s)'$ l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x-a)^{j-i}\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x-a)$, pour $a \in \mathbf{Q}_p$ et $0 \leqslant i < u(s) = \frac{j}{2}$ ayant un pôle d'ordre $< u(s)$ en l'infini, où si $\mathscr{L} = \infty$, on définit $\log_{\mathscr{L}}$ par $\log_\infty = v_p$. On note $\widehat{M(s)}$ l'adhérence dans $B(s)$ de l'espace $M(s)$ engendré par les x^i, pour $0 \leqslant i \leqslant j$ et par $M(s)'$. Un petit calcul montre que $M(s)$ est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$; il en est donc de même de $\widehat{M(s)}$.

8.5.4. La représentation $\Pi(s)$

Dans tous les cas, on pose $\Pi(s) = B(s)/\widehat{M(s)}$.

Remarque 8.13. — (i) L'espace $\widehat{M(s)}$ correspond à l'espace $\widehat{M(s)}$ de l'introduction sauf si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$, auquel cas c'est l'espace $\widehat{M(s)}'$ du (v) de la rem. 0.13 de l'introduction. L'espace $M(s)$ ci-dessus n'est pas celui de l'introduction.

(ii) Dans tous les cas, $M(s)$ contient les polynômes de degré $< u(s)$ et l'application qui, à $\phi \in M(s)$, associe le développement de Taylor à l'ordre $u(s)$ de $\delta(x)\phi(x)$ au voisinage de 0, est surjective. En utilisant la prop. 8.10, cela permet de montrer que $\mu \mapsto \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\mu)$ induit un isomorphisme

$$\Pi(s)^* \cong \Big\{\mu \in \mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p),\ \int_{\mathbf{Q}_p} \phi\,\mu = 0 \text{ quel que soit } \phi \in M(s)'\Big\}.$$

Proposition 8.14. — *Il existe $C \geqslant 0$ tel que, pour tous $\mu \in \Pi(s)^*$ et $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ on ait*

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(g \star_s \mu) \geqslant v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu) - C.$$

Démonstration. — Il est clair sur la définition de $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}$ que $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \star_s \mu\big) = v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(\mu)$ si $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$. Par ailleurs, un calcul immédiat montre que l'on a

$$v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \star_s \mu\big) = v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)}(\mu),$$

si $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$. Ceci permet de conclure car, d'une part $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ induit, d'après la rem. 8.13, un isomorphisme de $\Pi(s)^*$ sur un sous-banach de $\mathscr{D}_u(\mathbf{Q}_p)$, et d'autre part, tout élément de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ s'écrit comme un produit d'au plus trois éléments de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ ou $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Corollaire 8.15. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)(\delta))$, alors*

$$v_{B(s)^*}(\mu) = \inf_{g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}(g \star_s \mu)$$

est fini. De plus, $v_{B(s)^*}$ est une valuation sur $\Pi(s)^*$, équivalente à la valuation $v_{\mathscr{D}_u(\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p))}$, invariante sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Remarque 8.16. — (i) Ce qui précède montre que $\Pi(s)$ est une représentation unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

(ii) Rien ne garantit, a priori, que $\Pi(s) \neq 0$.

8.6. Une description de $\Pi(s)^*$ pour $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$

Soit $s = (\delta_1, \delta_2, \mathscr{L}) \in \mathscr{S}_+$. On suppose que $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$, ou plus généralement, qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ avec $k - 1 \geqslant 2u(s)$ tel que $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$.

Remarque 8.17. — Cette condition implique en particulier que l'on ne peut pas avoir $\delta = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$; en effet, on aurait alors $w(s) = i + 1$ et la condition $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$, équivalente à $k \leqslant i$ est en contradiction avec la condition $k - 1 \geqslant 2u(s) = i$.

Choisissons un tel k, et posons $\delta = x^{-k}\delta_1\delta_2^{-1}$ et $\alpha = \delta \cdot |\ |^{-1} = \delta_s x^{1-k}$. On a $w(\alpha) = w(\delta) = w(s) - k$ la condition $w(s) \notin \{1, \dots, k\}$ implique que $w(\alpha) + j \neq 0$ si $0 \leqslant j \leqslant k - 1$.

Nous allons utiliser les résultats du § 6 pour $h = \alpha$. Pour cela, choisissons, comme dans le § 7, une mesure λ sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant

$$\int_{\mathbf{Z}_p^*} \alpha^{-1}(x)\,\lambda \neq 0 \quad \text{et} \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^i\,\lambda = 0, \text{ si } \alpha(p) = p^{1-i}, \text{ avec } i \in \mathbf{N}.$$

Comme $w(\alpha) + j \neq 0$ si $0 \leqslant j \leqslant k - 1$, on a $c_{\alpha,\lambda}(j) \neq 0$ si $0 \leqslant j \leqslant k - 1$. On pose alors

- $\alpha_h = \alpha(p)$,
- $\mu_h = \mu_{\alpha,\lambda}$, $c_h(j) = c_{\alpha,\lambda}(j)$,
- $f_{h,j} = f_{\alpha,j}$, $g_{h,j} = g_{\alpha,j}$
- $A_h = A_{\alpha,\lambda}$, $B_h = B_{\alpha,\lambda}$, $C_h = C_{\alpha,\lambda}$,

où $\mu_{\alpha,\lambda}$, $c_{\alpha,\lambda}(j)$, $f_{\alpha,j}$, $g_{\alpha,j}$, $B_{\alpha,\lambda}$ et $C_{\alpha,\lambda}$ sont les objets attachés à α dans le § 7.

Lemme 8.18. — *On a*

$$M(s)' = \{\ell_{h,U},\ U \in \mathscr{U}(k, u(s))\}.$$

Démonstration. — C'est une simple traduction du cor. 7.2.

Corollaire 8.19. — *$\Pi(s)^*$ s'identifie, en tant que $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-module, au sous-espace de $\mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ des distributions satisfaisant*

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \ell_{h,U}\,\mu = 0 \quad \textit{quel que soit } U \in \mathscr{U}(k, u(s)).$$

Lemme 8.20. — *Les quantités h, $c_h(j)$, α_h, μ_h, $f_{h,j}$, $g_{h,j}$, B_h et C_h vérifient les conditions* (h0)–(h3) *du § 6.*

Démonstration. — • h vérifie (h0a) car $h(px) = \alpha(p)h(x) = \alpha_h h(x)$ et $v_p(\alpha(p)) = 2u(s)-(k-1) = 2r-(k-1) \leqslant 0$ par hypothèse ;
- h et la famille $c_h(j)$, $j \in \mathbf{N}$, vérifient (h0b) grâce au cor. 7.2 ;
- la distribution μ_h vérifie (h1) par construction ;
- (h2a) est immédiat ;
- (h2b) est le (ii) de la prop. 7.7 ;
- (h2c) est évident pour $f_{h,j}$ et est le (iii) de la prop. 7.8 pour $g_{h,j}$;
- (h2d) est la conjonction des (i) des prop. 7.7 et 7.8 ;
- (h3a) est la définition de C_h ;
- (h3b) et (h3c) sont respectivement les (i) et (ii) du cor. 7.12.

Corollaire 8.21. — *Si $\mu \in \mathscr{D}_r(\mathbf{Q}_p)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mu \in \Pi(s)^*$;
(ii) *il existe $\nu \in \mathscr{D}_{k-r}(\mathbf{Q}_p)$ telle que, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on ait*

$$F_\nu^{(n)}((1+T)\eta-1) \equiv (p\alpha_h^{-1})^n\Big(C_hF_\mu^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty}(p\alpha_h^{-1})^m\psi^m(B_hF_\mu^{(n+m)})\Big) \bmod t^k.$$

Démonstration. — C'est, modulo le lemme 8.18, une simple traduction du th. 6.1.

8.7. Une seconde description de $\Pi(s)^*$ dans le cas $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$. — On se place toujours dans le cas où il existe un entier $k > 2u(s)$ tel que $w(s) \notin \{1,\dots,k\}$, et on suppose en plus $s \notin \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$.

Par construction, λ, $A_h = A_{\alpha,\lambda}$, $B_h = B_{\alpha,\lambda}$ et $C_h = C_{\alpha,\lambda}$ vérifient les propriétés suivantes
- λ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p^*$ vérifiant $\int_{\mathbf{Z}_p^*}\delta^{-1}\lambda = \int_{\mathbf{Z}_p^*}\alpha^{-1}\lambda \neq 0$,
- $A_h \in \mathscr{R}^+$ vérifie $(\delta(p)\varphi-1)A_h = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,
- $B_h \in (\mathscr{E}^\dagger)^{\psi=0}$ vérifie $(\delta(\gamma)\gamma-1)B_h = \int_{\mathbf{Z}_p^*}(1+T)^x\,\lambda$,
- $C \in \mathscr{R}$ est tel que $A_h - (\delta(\gamma)\gamma-1)C_h \equiv B_h - (\delta(p)\varphi-1)C_h \equiv 0 \bmod t^k$.

D'après les prop. 4.10 et 4.12, cela implique que, si $D(s,k)$ est le (φ,Γ)-module de base g_1, g_2 sur $\mathscr{R}$, avec actions de φ et γ données par

$$\varphi(g_1) = p^{-k}\delta_1(p)g_1, \quad \varphi(g_2) = \delta_2(p)(g_2 + B_hg_1),$$
$$\gamma(g_1) = \chi(\gamma)^{-k}\delta_1(\gamma)g_1, \quad \gamma(g_2) = \delta_2(\gamma)(g_2 + A_hg_1),$$

alors $\Delta(s)$ est le sous-ensemble de $D(s,k)$ des $x = x_1g_1 + x_2g_2$, où $x_1, x_2 \in \mathscr{R}$ vérifient les conditions
- $x_1 - C_hx_2 \equiv 0 \bmod t^k$,
- x_1 est d'ordre $k-u(s)$ et x_2 est d'ordre $u(s)$.

Proposition 8.22. — (i) *Si $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(\Delta(s))$, avec $z^{(n)} = z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2$, alors il existe une distribution μ_z globalement d'ordre $u(s)$ sur $\mathbf{Q}_p$ et une suite $G_z = (G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}_{k-u(s)}^+$ vérifiant*
(a) $G_z^{(n)} = \psi(G_z^{(n+1)})$ *quel que soit $n \in \mathbf{N}$;*
(b) *il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $v_{k-u(s)}(G_z^{(n)}) \geqslant c + (k-u(s))n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$;*

(c) $G_z^{(n)} \equiv \delta(p)^{-n}\big(C_h F_{\mu_z}^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \delta(p)^{-m}\psi^m(B_h F_{\mu_z}^{(n+m)})\big)$ *mod* t^k ;

(d) $z_1^{(n)} = (p^k\delta_1(p)^{-1})^{-n}\big(G_z^{(n)} - \sum_{m=1}^{+\infty} \delta(p)^{-m}\psi^m(B_h F_{\mu_z}^{(n+m)})\big)$ et $z_2^{(n)} = \delta_2(p)^n F_{\mu_z}^{(n)}$ *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$.

(ii) *Réciproquement, si* $\mu \in \mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p)$, *s'il existe une suite* $G = (G^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{R}^+_{k-u(s)}$ *vérifiant les propriétés* (a), (b), (c) *ci-dessus, et si les suites de terme général* $z_1^{(n)}$ *et* $z_2^{(n)}$ *sont définies par les formules du* (d), *alors* $(z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2)_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(\Delta(s))$.

Démonstration. — On a

$$g_1 = p^k\delta_1(p)^{-1}\varphi(g_1) \quad \text{et} \quad g_2 = \delta_2(p)^{-1}\varphi(g_2) - p^k\delta_1(p)^{-1}B_h\varphi(g_1).$$

On en déduit la formule

$$\psi(z_1g_1 + z_2g_2) = p^k\delta_1(p)^{-1}(\psi(z_1) - \psi(B_hz_2))g_1 + \delta_2(p)^{-1}\psi(z_2)g_2.$$

On déduit de la formule précédente, et de la description de $\Delta(s)$ ci-dessus, que $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \psi^{-\infty}(\Delta(s))$, avec $z^{(n)} = z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2$ si et seulement si

(i) la suite de terme général $z_2^{(n)}$ est une suite bornée d'éléments d'ordre $u(s)$ de $\mathscr{R}$ vérifiant $z_2^{(n)} = \delta_2(p)^{-1}\psi(z_2^{(n+1)})$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$;

(ii) la suite de terme général $z_1^{(n)}$ est une suite bornée d'éléments d'ordre $k-u(s)$ de $\mathscr{R}$ vérifiant $z_1^{(n)} = p^k\delta_1(p)^{-1}(\psi(z_1^{(n+1)}) - \psi(B_hz_2^{(n+1)}))$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$;

(iii) $z_1^{(n)} \equiv C_hz_2^{(n)} \bmod t^k$.

Comme $v_p(\delta_2(p)^{-1}) = u(s) > 0$, la condition (i) implique, d'après [**22**, ? ?], que $z_2^{(n)} \in \mathscr{R}^+$ et $\psi(\delta_2(p)^{-(n+1)}z_2^{(n+1)}) = \delta_2(p)^{-n}z_2^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$; elle est donc équivalente à l'existence d'une distribution μ_z globalement d'ordre $u(s)$ sur $\mathbf{Q}_p$ telle que l'on ait

$$F_{\mu_z}^{(n)} = \delta_2(p)^{-n}z_2^{(n)} \quad \text{quel que soit } n \in \mathbf{N}.$$

De plus, comme $v_p(p^k\delta_1(p)^{-1}) = k - u(s) > u(s)$, et comme la suite de terme général $z_2^{(n)}$ est une suite bornée d'éléments d'ordre $u(s)$ de $\mathscr{R}^+$, il résulte de la prop. [**22**, ? ?], que $(p^k\delta_1(p)^{-1})^m\psi^m(B_hz_2^{(m)})$ tend vers 0 dans $\mathscr{E}_{u(s)}^{]0,1]}$ quand m tend vers $+\infty$. Ceci permet de montrer que la série

$$z_1^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty}(p^k\delta_1(p)^{-1})^m\psi^m(B_hz_2^{(n+m)})$$

converge dans $\mathscr{R}_{k-u(s)}$. On note $y^{(n)}$ la somme de cette série. Un calcul immédiat montre que $y^{(n)} = (p^k\delta_1(p)^{-1})\psi(y^{(n+1)})$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et, les suites de terme général $z_1^{(n)}$ et $z_2^{(n)}$ étant bornées, il en est de même de la suite de terme général $y^{(n)}$. En particulier, comme $v_p(p^k\delta_1(p)^{-1}) > 0$, on en déduit l'appartenance de $y^{(n)}$ à $\mathscr{R}^+$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

On déduit de ce qui précède que, si on pose $G_z^{(n)} = (p^k\delta_1(p)^{-1})^ny^{(n)}$, alors $G_z = (G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{R}^+_{k-u(s)}$ vérifiant

- $G_z^{(n)} = \psi(G_z^{(n+1)})$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$;
- $(p^k\delta_1(p)^{-1})^{-n}G_z^{(n)}$ est borné dans $\mathscr{R}^+_{k-u(s)}$;
- $G_z^{(n)} \equiv \delta(p)^{-n}\big(C_hF_{\mu_z}^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty}\delta(p)^{-m}\psi^m(B_hF_{\mu_z}^{(n+m)})\big) \bmod t^k$.

Ceci permet de démontrer le (i). Pour démontrer le (ii), il suffit de remonter les calculs.

Remarque 8.23. — Les deux premières conditions ci-dessus, satisfaites par la suite $(G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$, sont équivalentes à l'existence d'une distribution $\nu_z \in \mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ dont $(G_z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ est la transformée d'Amice. Ceci permet de reformuler la prop. 8.22 sous la forme du corollaire 8.24 ci-dessous.

Corollaire 8.24. — *Si $(z_1^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ et $(z_2^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}}$ sont deux suites d'éléments de $\mathscr{R}$, et si $z^{(n)} = z_1^{(n)}g_1 + z_2^{(n)}g_2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $z = (z^{(n)})_{n\in\mathbf{Z}} \in \psi^{-\infty}(\Delta(s))$;

(ii) *il existe $\mu_z \in \mathscr{D}_{u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ et $\nu_z \in \mathscr{D}_{k-u(s)}(\mathbf{Q}_p)$ vérifiant, quel que soit $n \in \mathbf{Z}$,*

$$F_{\nu_z}^{(n)} \equiv \delta(p)^{-n}\big(C_h F_{\mu_z}^{(n)} + \sum_{m=1}^{+\infty} \delta(p)^{-m}\psi^m(B_h F_{\mu_z}^{(n+m)})\big) \mod t^k$$

et telles que $z_1^{(n)}$ et $z_2^{(n)}$ soient donnés par

$$z_2^{(n)} = \delta_2(p)^n F_{\mu_z}^{(n)} \quad \text{et} \quad z_1^{(n)} = (\delta_1(p)p^{-k})^n\Big(F_{\nu_z}^{(n)} - \sum_{m=1}^{+\infty} \delta(p)^{-m}\psi^m(B_h F_{\mu_z}^{(n+m)})\Big).$$

Corollaire 8.25. — *Si $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ng}}$* (ou, plus généralement, s'il existe k entier $\geqslant 2u(s)+1$ tel que $w(s) \notin \{1,\dots,k\}$), *l'application $z \mapsto \mu_z$ induit un isomorphisme $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-équivariant de $\psi^{-\infty}(\Delta(s))$ sur $\Pi(s)^*$.*

Démonstration. — Que $z \mapsto \mu_z$ induise un isomorphisme d'espaces vectoriels est un conjonction des cor. 8.21 et 8.24. Que cet isomorphisme soit continu et donc un isomorphisme d'espaces de Banach résulte de la continuité des applications coordonnées $z_1g_1 + z_2g_2 \mapsto (z_1, z_2)$. Qu'il soit $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$-équivariant vient juste de ce que l'action de $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $\psi^{-\infty}(\Delta(s))$ a été définie [**22**, ? ?] de manière à refléter l'action de $\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur les transformées d'Amice des distributions sur $\mathbf{Q}_p$.

8.8. Le cas $s \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}}$

Lemme 8.26. — *Si $i \in \mathbf{N}$, et si ϕ est $i+1$ fois dérivable, alors*

$$\Big((cx+d)^i\phi(\frac{ax+b}{cx+d})\Big)^{(i+1)} = \frac{(ad-bc)^{i+1}}{(cx+d)^{i+2}}\phi^{(i+1)}(\frac{ax+b}{cx+d}).$$

Démonstration. — On $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cx+d)}$ et donc $\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, ce qui permet de démontrer le résultat pour $i = 0$. Le cas général s'en déduit, par récurrence, via le calcul suivant

$$\begin{aligned}\Big((cx+d)^i\phi(\frac{ax+b}{cx+d})\Big)^{(i+1)} &= \Big(ci(cx+d)^{i-1}\phi(\frac{ax+b}{cx+d}) + (ad-bc)(cx+d)^{i-2}\phi'(\frac{ax+b}{cx+d})\Big)^{(i)} \\ &= ci\frac{(ad-bc)^i}{(cx+d)^{i+1}}\phi^{(i)}(\frac{ax+b}{cx+d}) + \Big(\frac{(ad-bc)^i}{(cx+d)^i}\phi^{(i)}(\frac{ax+b}{cx+d})\Big)' \\ &= \frac{(ad-bc)^{i+1}}{(cx+d)^{i+2}}\phi^{(i+1)}(\frac{ax+b}{cx+d}).\end{aligned}$$

Corollaire 8.27. — *Si $s = (\delta_1, \delta_2, \infty) \in \mathscr{S}_+^{\mathrm{ncl}} \cup \mathscr{S}_+^{\mathrm{ord}}$, et si $s' = (x^{-w(s)}\delta_1, x^{w(s)}\delta_2, \infty)$, alors $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}}$ induit un morphisme $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-équivariant de $B(s)$ dans $B(s')$.*

Remarque 8.28. — Si $w(s)$ est un entier $\geqslant 1$, mais $s \notin \mathscr{S}_+^{\rm ncl} \cup \mathscr{S}_+^{\rm ord}$, les fonctions de $B(s)$ ne sont pas $w(s)$ fois dérivable, et on n'obtient pas de morphisme de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ de cette manière.

Proposition 8.29. — (i) *Si* $s \in \mathscr{S}_+^{\rm ord}$*, alors* $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}}$ *induit une surjection de* $\Pi(s)$ *sur* $B(s') = \Pi(s')$ *dont le noyau est non nul.*

(ii) *Si* $s \in \mathscr{S}_+^{\rm ncl}$*, alors* $\frac{d^{w(s)}}{dx^{w(s)}}$ *induit un isomorphisme de* $\Pi(s)$ *sur* $\Pi(s')$*.*

Démonstration. — Dans les deux cas, la surjectivité suit de la surjectivité de la dérivation $\mathscr{C}^r(\mathbf{Z}_p) \to \mathscr{C}^{r-1}(\mathbf{Z}_p)$, si $r \geqslant 1$.

Pour la détermination du noyau dans le cas (i), voir **[9]**. Pour démontrer le (ii), constatons que le noyau est une représentation unitaire dans laquelle les fonctions localement polynomiales de degré $\leqslant w(s)-1$ sont denses. C'est donc un complété de $\mathrm{Sym}^{w(s)-1} \otimes$ lisse, et la condition $u(s) > w(s)$ fait que l'on n'est pas dans la bande d'existence de ces complétés unitaires (cf. **[24]**).

Références

[1] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Inv. Math. 148, 2002, 219-284.

[2] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, preprint 2004.

[3] L. Berger, C. Breuil, Représentations cristallines irréductibles de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, preprint 2004.

[4] L. Berger, P. Colmez, Familles de représentations p-adiques, en préparation.

[5] M. Bertolini, H. Darmon et A. Iovita, Families of automorphic forms and the Mazur-Tate-Teitelbaum conjecture, preprint 2004.

[6] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ II, J. Institut Math. Jussieu 2, 2003, 23-58.

[7] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, to appear in Ann. Scient. E.N.S.

[8] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, disponible à : http ://www.ihes.fr/~breuil/publications.html.

[9] C. Breuil et M. Emerton, en préparation.

[10] C. Breuil, A. Mézard, en préparation.

[11] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[12] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc **12**, 241-268, 1999

[13] R. Coleman, A p-adic Shimura isomorphism and p-adic periods of modular forms, Contemp. Math. **165** (1994) 21–51.

[14] R. Coleman et B. Mazur, The eigencurve, *Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry (Durham 1996)*, London Math. Soc. Lect. Note **254** (1997), 1–113.

[15] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998) 485-571.

[16] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[17] P. Colmez, Espaces Vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, preprint 2002.

[18] P. Colmez, Arithmétique de la fonction zêta, dans *La fonction zêta*, 37-164, journées X-UPS 2002.

[19] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Sém. Bourbaki 2001/02*, exp. 897, Astérisque **290** (2003), 53-101.

[20] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Sém. Bourbaki 2002/03*, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251-319.

[21] P. Colmez, Invariants $\mathscr{L}$ et dérivées de valeurs propres de frobenius, preprint 2003.

[22] P. Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, preprint 2004.

[23] P. Colmez et J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. **140** (2000), 1–43.

[24] M. Emerton, p-adic L-functions and completions of representations of p-adic reductive groups, preprint 2004.

[25] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques. dans "*Périodes p-adiques*" exposé II, Astérisque **223** (1994) 59–102.

[26] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque 223, 1994, 113-184.

[27] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[28] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[29] M. Kisin, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[30] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84** (1986), 1-48.

[31] B. Mazur, On monodromy invariants occuring in global arithmetic, and Fontaine's theory, Contemp. Math. **165** (1994) 1–20.

[32] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Inv. Math. 153, 2003, 145-196.

[33] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[34] G. Stevens, Coleman's $\mathscr{L}$-invariant and families of modular forms, preprint 1996.

Pierre Colmez, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr