GROUPES, GROUPES QUANTIQUES ET ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

UNIVERSITÉ DE PARIS

Institut Mathématique de Jussieu - Paris Rive Gauche

Pierre Fima

Synthèse des travaux de recherches

Pierre Fima

Ce texte résume l'ensemble de mes travaux de recherche. Je me suis initié à la recherche en travaillant sur les groupes quantiques localement compacts et leurs algèbres d'opérateurs (section 3.2). Par la suite, je me suis intéressé plus spécifiquement aux groupes quantiques compacts et discrets, toujours dans la perspective des algèbres d'opérateurs (section 3.1). Cela m'a mené à étudier plus directement les algèbres de von Neumann d'actions (section 2.2) et de groupes (section 2.1). Plus récemment, j'ai étudié les actions de groupes hautement transitives (section 1.2) et moyennables (section 1.1) ainsi que les actions homogènes sur le graphe aléatoire (section 1.3) et, plus généralement, sur un espace d'Uryshon (section 1.4). Enfin je m'intéresse également à la KK-théorie des C*-algèbres (section 4).

Table des matières

Notations. Lorsque G est un groupe et $g_1, \ldots, g_n \in G$, $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ désignera le groupe engendré par $g_1, \ldots, g_n$. Si G est de plus localement compact, $\mathrm{L}(G)$ désignera l'algèbre de von Neumann de G, $C^*(G)$ la C*-algèbre pleine et $C^*_r(G)$ la C*-algèbre réduite. Pour un espace de Hilbert H, le produit scalaire, supposé linéaire à gauche, sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Nous noterons $\mathcal{B}(H)$ la C*-algèbre des opérateurs bornés sur H et $\mathcal{K}(H)$ la C*-algèbre des opérateurs compacts sur H. Le symbole $\otimes$ désignera, suivant le contexte, le produit tensoriel d'espaces de Hilbert, le produit tensoriel minimal de C*-algèbres ou le produit tensoriel d'algèbres de von Neumann. Enfin, pour un A-module Hilbertien $\mathcal{H}$, on notera $\mathcal{L}_A(\mathcal{H})$ la C*-algèbre des opérateurs A-linéaires et admettant un adjoint de $\mathcal{H}$ dans lui-même et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire à valeurs dans A qui sera supposé linéaire à droite dans ce contexte.

Liste des travaux résumées dans cette synthèse

[FLMMS20] P. Fima, F. Le Maître, S. Moon et Y. Stalder, High transitivity for more groups acting on trees, *prépublication arXiv :2003.11116* (2020).

[FLMM20] P. Fima, F. Le Maître, J. Melleray et S. Moon, Homogeneous actions on Urysohn spaces, *to appear in Colloquium Mathematicum* (2020).

[FMS20] P. Fima, S. Moon et Y. Stalder, Homogeneous actions on the Random Graph, *to appear in Groups Geom. Dyn.* (2020).

[FG20] P. Fima et E. Germain, The KK-theory of amalgamated free products, *Adv. Math.* **369** (2020).

[FW20] P. Fima et H. Wang, Rapid decay and polynomial growth for bicrossed products, *to appear in J. Noncommut. Geom.* (2019).

[FG18] P. Fima et E. Germain, The KK-theory of fundamental C*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **370** (2018) no. 10, 7051-7079.

[FMP17] P. Fima, K. Mukerjee et I. Patri, On compact bicrossed products, *J. Noncommut. Geom.* **11** (2017), no. 4, 1521-1591.

[FC17] P. Fima et M. Caspers, Graph products of operator algebras, *J. Noncommut. Geom.* (2017) ; no. 1, 367-411.

[FP16] P. Fima et L. Pittau, The free wreath product of a compact quantum group by a quantum automorphism group, *J. Funct. Anal.* **271** (2016), no. 7, 1996-2043.

[DFSW16] M. Daws, P. Fima, A. Skalski et S. White, The Haagerup property for locally compact quantum groups, *J. Reine Angew. Math.* **711** (2016) 198–229.

[FMS15] P. Fima, S. Moon et Y. Stalder ; Highly transitive actions of groups acting on trees, *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015) 5083–5094.

[FV15] P. Fima et R. Vergnioux, On a cocycle in the adjoint representation of the orthogonal free quantum groups, *Int. Math. Res. Notices* **2015** (2015) 10069–10094.

[FF14] P. Fima et A. Freslon, Graphs of quantum groups and K-amenability, *Adv. Math.* **260** (2014) 233-280.

[Fim14] P. Fima, Amenable, transitive and faithful actions of groups acting on trees, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **24** (2014) 1–17.

[Fim13] P. Fima, K-amenability of HNN extensions of amenable discrete quantum groups, *J. Funct. Anal.* **265** (2013) 507–519.

[FV12] P. Fima et S. Vaes, HNN extensions and unique group measure space decomposition of II_1 factors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 2601–2617.

[Fim11] P. Fima, A note on the von Neumann algebra of a Baumslag-Solitar group, *C.R.A.S.* **349** (2011), 25–27.

[Fim10] P. Fima, Kazhdan's property T for discrete quantum groups, *Internat. J. Math.* **21** (2010), 47–65.

[FV09] P. Fima et L. Vainerman, Twisting and Rieffel's deformation of locally compact quantum groups. Deformation of the Haar measure, *Comm Math. Phys.* **286** (2009), 1011–1050.

[FV08] P. Fima et L. Vainerman, A locally compact quantum group of upper triangular matrices, *Ukrainian Math. J.* **60** (2008), 648–662.

[Fim07b] P. Fima, On locally compact quantum groups whose algebras are factors, *J. Funct. Anal.* **244** (2007), 78–94.

1 Groupes et actions de groupes

1.1 Actions moyennables de groupes non moyennables

À la suite de la construction de la mesure de Lebesgue [Leb01] au début du XX^e siècle, la découverte des paradoxes de Banach-Haussdorff-Tarski [Ban23, HSS14, Tar29] a incité von Neumann [vN29] à étudier la question suivante : étant donné un groupe agissant sur un ensemble X, existe-t-il une moyenne invariante sur X ?

Définition 1.1 (von Neumann [vN29]). Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Une *moyenne* sur X est une application $m : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ telle que
- $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ pour tous $A, B \subset X$ disjoints.
- $m(X) = 1$.

On dit qu'une action $\Gamma \curvearrowright X$ du groupe Γ sur X est *moyennable* s'il existe une moyenne m sur X telle que $m(gA) = m(A)$ pour tous $g \in \Gamma$ et $A \subset X$.

Cette notion d'action moyennable est différente de celle introduite plus tard par Zimmer [Zim84].

L'article de von Neumann montre que l'origine des paradoxes est dans la structure du groupe lui même plutôt que dans l'ensemble sur lequel il agit. von Neumann propose alors d'étudier les *groupes moyennables*, c'est-à-dire les groupes tels que l'action $\Gamma \curvearrowright \Gamma$ par translations à gauche est moyennable. Il est facile de voir que toutes les actions d'un groupe moyennable sont moyennables. La réciproque est vraie pour les actions libres. Greenleaf se demande dans son livre [Gre69] si la réciproque est encore vraie pour des actions non nécessairement libres. Afin d'éviter une réponse négative triviale, il est important de se restreindre aux actions transitives (un point fixe donne une moyenne invariante évidente) et fidèles (sinon ce que l'on considère vraiment est un quotient de Γ). La question de Greenleaf est donc la suivante : si Γ admet une action moyennable, transitive et fidèle alors Γ est-il moyennable ?

La réponse négative à cette question est donnée par van Douwen. Il montre, dans un article posthume [vD90], que tous les groupes libres (avec un nombre fini ou infini dénombrable de générateurs) admettent une action moyennable, transitive et fidèle.

Le résultat de van Douwen a incité Glasner et Monod [GM07] à étudier la classe $\mathcal{A}$ de tous les groupes dénombrables admettant une action moyennable, transitive et fidèle. Glasner et Monod ont caractérisé les produits libres qui sont dans la classe $\mathcal{A}$. En particulier, ils ont montré que la classe $\mathcal{A}$ est stable par produit libre. Leur résultat, qui est basé sur le théorème de Baire, donne une preuve beaucoup plus simple, mais non explicite, du résultat de von Douwen. Grigorchuk et Nekrashevych [GN05] ont également donné une preuve plus simple du résultat de van Douwen.

En conclusion de leur article, Glasner et Monod posent la question suivante : quels produits libres amalgamés et extensions HNN sont dans la classe $\mathcal{A}$? Par la suite, Moon [Moo10, Moo11a] a montré qu'un produit libre de groupes libres finiment engendrés amalgamé sur certains sous-groupes cycliques est dans la classe $\mathcal{A}$. Elle a aussi montré [Moo11b] qu'un produit libre amalgamé sur un groupe fini de deux groupes moyennables ou bien d'un groupe résiduellement fini et d'un groupe moyennable infini est dans la classe $\mathcal{A}$. Les résultats de Moon sont également basés sur le théorème de Baire.

Nous dirons qu'une action est *à orbites infinies* si toutes les orbites sont infinies.

Théorème 1.2 ([Fim14]). *Soient Γ_1, Γ_2 et H des groupes dénombrables infinis et Σ un sous-groupe fini de Γ_1, Γ_2 et H. Soit $\theta : \Sigma \to H$ un morphisme injectif.*

1. *S'il existe une action moyennable, fidèle, à orbites infinies de H sur un ensemble dénombrable et libre sur Σ et $\theta(\Sigma)$ alors l'extension HNN $\mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ est dans $\mathcal{A}$.*
2. *Si, pour $i = 1, 2$, il existe une action moyennable, fidèle, à orbites infinies de Γ_i sur un ensemble dénombrable et libre sur Σ alors le produit libre amalgamé $\Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$ est dans $\mathcal{A}$.*

Pour démontrer le théorème 1.2 nous utilisons le théorème de Baire. L'énoncé du théorème 1.2 dépend du sous-groupe fini Σ. Il est possible d'obtenir un énoncé "uniforme en Σ" en imposant une hypothèse plus forte sur l'action. Nous dirons qu'une action est *presque libre* si tout élément non trivial du groupe agit avec un nombre fini de points fixes. L'intérêt d'une action presque libre $\Gamma \curvearrowright X$ est que l'action diagonale $\Gamma \curvearrowright X_n$, où $X_n = \{(x_1, \dots x_n) \in X^n : x_i \neq x_j \ \forall i \neq j\}$ est le *complémentaire de la diagonale large de X^n*, est moyennable (respectivement à orbites infinies) dès que $\Gamma \curvearrowright X$ l'est et tout élément $g \in \Gamma$ ayant au plus $n-1$ points fixes dans X agit librement dans X_n.

Notons $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ la classe de tous les groupes dénombrables admettant une action moyennable presque libre et à orbites infinies sur un ensemble dénombrable. On déduit de la discussion qui précède que si $\Gamma \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ et $F \subset \Gamma$ est un sous ensemble fini alors il existe une action de Γ moyennable, fidèle, à orbites infinies et telle que tout élément non trivial de F agit librement. On obtient ainsi une version uniforme du théorème 1.2.

La classe $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ contient évidemment tous les groupes moyennables infinis. De plus, l'action moyennable, transitive et fidèle de $\mathbb{F}_n$, $1 \leq n \leq \infty$, construite par van Douwen est en fait presque libre. Il est facile de voir, en considérant l'action induite, que si H est un sous-groupe d'indice fini de Γ alors $H \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \implies \Gamma \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. On en déduit que tous les groupes virtuellement libres sont dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. De plus, l'obstruction à être dans la classe $\mathcal{A}$ découverte dans [GM07] est également une obstruction à être dans la classe $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Plus précisement, si N est un sous-groupe distingué de H et si la paire (N, H) a la propriété (T) relative alors $H \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ (resp. $H \in \mathcal{A}$) implique que N est d'exposant fini. En particulier, $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ n'est ni dans $\mathcal{A}$ ni dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

En utilisant la théorie de Bass-Serre, on montre par récurrence le corollaire suivant de la version uniforme du théorème 1.2.

Corollaire 1.3 ([Fim14]). *Soit Γ un groupe dénombrable agissant sans inversion sur un arbre non trivial $\mathcal{T}$. On suppose que les stabilisateurs des arêtes sont finis et que le graphe quotient $\mathcal{T}/\Gamma$ est fini. Si les stabilisateurs des sommets sont dans $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ alors $\Gamma \in \mathcal{A}$.*

Il reste toujours de nombreuses questions ouvertes au sujet de la classe $\mathcal{A}$. L'une d'entre elles est la suivante.

Problème 1.4. La classe $\mathcal{A}$ est-elle stable par équivalence mesurable ?

Il n'est en fait même pas connu si la classe est stable par sous-groupe d'indice fini.

Problème 1.5. Soit $H < \Gamma$ un sous-groupe d'indice fini d'un groupe $\Gamma \in \mathcal{A}$. A-t-on $H \in \mathcal{A}$?

1.2 Actions hautement transitives de groupes agissant sur un arbre

Les résultats exposés dans cette section sont issus de deux travaux : [FMS15] en commun avec Soyoung Moon et Yves Stalder et [FLMMS20] en commun avec François Le Maître, Soyoung Moon et Yves Stalder.

Dans cette section, X est un ensemble dénombrable infini. Une action $\Gamma \curvearrowright X$ est dite *hautement transitive* si elle est n-transitive pour tout $n \geq 1$. Soit $S(X)$ le groupe Polonais des bijections de X muni de la topologie de la convergence simple. Il est clair qu'une action $\Gamma \curvearrowright X$ est hautement transitive si et seulement si l'image de Γ dans $S(X)$ est dense dans $S(X)$. En particulier, le groupe S_∞ des permutations de X de support fini agit hautement transitivement sur X. Ce groupe n'est pas de type fini et, étant moyennable, il est loin d'être libre.

La première construction explicite d'une action hautement transitive et fidèle du groupe libre $\mathbb{F}_n$, $2 \leq n \leq \infty$, est due à McDonough [McD77]. Par la suite, Dixon [Dix90] a démontré que pour tout $k \geq 2$, génériquement au sens de Baire, k permutations $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in S(X)$ telles que l'action du groupe $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle$ sur X est à orbites infinies, engendrent un groupe libre qui agit hautement transitivement sur X. Glass and McCleary [GM91] ont construit une action fidèle et hautement transitive du groupe $\Gamma_1 * \Gamma_2$ lorsque Γ_1, Γ_2 sont deux groupes dénombrables non triviaux et l'un des Γ_i possède un élément d'ordre infini. Ils ont également remarqué que $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ne possède pas d'action fidèle et 2-transitive. Enfin, ils ont posé la question suivante : pour quels groupes non triviaux dénombrables Γ_1, Γ_2, le produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$ possède-t-il une action fidèle et hautement transitive ?

Gunhouse [Gun92] a complètement répondu à la question en construisant, pour tous les groupes non triviaux et au plus dénombrables Γ_1, Γ_2, avec l'un des Γ_i de cardinal au moins 3, une action fidèle et hautement transitive du produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$. Un résultat similaire a été démontré indépendamment, et presque en même temps, par Hickin [Hic92]. Récemment, Moon et Stalder [MS13] ont obtenu un résultat de généricité à la Dixon pour les actions hautement transitives et fidèles de produits libres.

Nous dirons qu'un groupe est hautement transitif si il admet une action hautement transitive et fidèle. En utilisant les techniques explicites de Hickin, Gunhouse a caractérisé, en 1993 dans sa thèse, les produits libres amalgamés sur un groupe Artinien qui sont hautement transitifs. L'existence de ce résultat, qui n'a jamais été publié, m'a été communiquée par Glass, le directeur de thèse de Gunhouse. Gunhouse démontre que si $\Gamma = \Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$ où $\Sigma \subsetneq \Gamma_i$, $i = 1, 2$, est un groupe Artinien, alors Γ est hautement transitif si et seulement si le seul sous-groupe de Σ qui est distingué à la fois dans Γ_1 et Γ_2 est le groupe trivial. Lorsque Σ est fini et d'indice au moins 3 dans l'un des Γ_i cette dernière condition est équivalente à dire que Γ est à classes de conjugaison infinies (cci) [Cor09].

D'autres exemples de groupes hautement transitifs ont été découverts récemment : les groupes hyperboliques avec un radical fini trivial (Chainikov [Cha12]), les groupes de surfaces (Kitroser [Kit12]) et $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ pour $n \geq 4$ (Garion et Glasner [GG13]). Kitroser obtient un résultat de généricité à la Dixon alors que Garion et Glasner construisent une action explicite.

Il est facile de voir que si Γ est hautement transitif alors Γ est cci, n'est pas virtuellement résoluble et tout sous-groupe distingué non trivial ainsi que tout sous-groupe d'indice fini de Γ est encore hautement transitif.

Nous montrons le résultat suivant dans [FMS15].

Théorème 1.6 ([FMS15])**.** *Soit Γ un groupe agissant sans inversion sur un arbre non trivial. Si les stabilisateurs des arêtes sont finis et les stabilisateurs des sommets sont cci alors Γ est hautement transitif.*

Par les arguments standards de la théorie de Bass-Serre, la preuve du théorème 1.6 se réduit au cas d'une extension HNN ou d'un produit libre amalgamé. De plus, il n'est pas nécessaire de se restreindre au cas où les stabilisateurs d'arêtes sont finis. L'hypothèse que nous imposons sur ces sous-groupes est qu'ils aient un *cœur enfantin.*

Soit $\Sigma < H$ un sous-groupe et $S \subset H$ un sous-ensemble. Le *cœur de Σ relativement à S* est l'ensemble $\text{cœur}_S(\Sigma) = \cap_{h \in S} h^{-1} \Sigma h$. On dit que le cœur de Σ est trivial si $\text{cœur}_H(\Sigma) = \{1\}$. Nous avons besoin d'une propriété plus forte que le cœur trivial : on impose que, pour tout recouvrement de H en sous-ensembles non vide, il existe au moins un élément du recouvrement relativement auquel le cœur de Σ est trivial. Si l'on demande de plus que cette propriété soit vraie pour les recouvrements modulo un nombre fini de Σ-classes on arrive à la définition suivante.

Définition 1.7 ([FMS15])**.** On dit que le cœur d'un sous-groupe $\Sigma < H$ est *enfantin* (dans H) si, pour tout sous-ensemble fini $F \subset H$, pour tout $n \geq 1$, pour tous sous-ensembles non vide $S_1, \ldots, S_n \subset H$ tels que $H \setminus \Sigma F \subset \cup_{k=1}^n S_k$, il existe $1 \leq k \leq n$ tel que $\text{cœur}_{S_k}(\Sigma) = \{1\}$.

Il est clair que si le cœur de Σ est enfantin alors son cœur est trivial. De plus, si H est fini, alors le cœur de tout sous-groupe non-trivial n'est pas enfantin (il existe cependant des groupes finis possédant un sous-groupe non-trivial avec un cœur trivial, par exemple le groupe de permutation S_n dans S_{n+1} a un cœur trivial). Plus généralement, le cœur d'un sous-groupe d'indice fini n'est jamais enfantin. Cela montre que cette notion n'est intéressante que pour les groupes infinis.

Exemple 1.8 ([FMS15])**.** L'exemple le plus simple est un sous-groupe fini relativement cci. En particulier, un groupe fini dans un groupe cci.

Tout sous-groupe $\Sigma < H$ d'indice infini et malnormal tel que $Cl_\Sigma(\sigma) = \{t\sigma t^{-1} : t \in \Sigma\}$ est fini pour tout $\sigma \in \Sigma$. Voici quelques exemples particuliers.

— Un sous-groupe fini et malnormal dans un groupe infini.
— $H = \Sigma * G$, G et Σ non-triviaux et Σ abélien. Plus généralement, tout sous-groupe abélien malnormal Σ d'indice infini dans un groupe infini H.
— $H = K^* \ltimes K$ et $\Sigma = K^* < H$ où K est un corps infini.
— $H = \langle a, b\rangle = \mathbb{F}_2$ et Σ un sous-groupe cyclique infini engendré par un élément primitif (par exemple $a^k ba^{-l}b^{-1}$ avec $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$).

Nous démontrons le théorème suivant en utilisant le théorème de Baire.

Théorème 1.9 ([FMS15])**.** 1. *Soient H un groupe dénombrable infini, $\Sigma < H$ un sous-groupe et $\theta : \Sigma \to H$ un morphisme injectif. Si les cœurs de Σ et $\theta(\Sigma)$ sont enfantins dans H alors $\Gamma = \mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ est hautement transitif. Si H est moyennable et Σ est fini alors Γ admet une action hautement transitive, fidèle et moyennable.*

2. *Soient Γ_1, Γ_2 deux groupes infinis dénombrables et Σ un sous-groupe commun. Si le cœur de Σ est enfantin dans Γ_1 et Γ_2 alors $\Gamma = \Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$ est hautement transitif. Si Γ_1 et Γ_2 sont moyennables et Σ est fini alors Γ admet une action hautement transitive, fidèle et moyennable.*

Ce théorème fournit de nombreux nouveaux exemples de groupes admettant une action hautement transitive et fidèle. On retrouve également le résultat principal de [Kit12] assurant que le groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_g)$ d'une surface orientable de genre $g > 1$ admet une action hautement transitive et fidèle. En effet, pour $g > 1$, le groupe $\pi_1(\Sigma_g)$ s'injecte dans $\pi_1(\Sigma_2)$ comme sous-groupe d'indice fini. Il est alors facile de vérifier que la restriction à $\pi_1(\Sigma_g)$ d'une action hautement transitive et fidèle de $\pi_1(\Sigma_2)$ reste hautement transitive et fidèle. Il suffit donc de montrer que $\pi_1(\Sigma_2) = \langle a_1, b_1\rangle \underset{\Sigma}{*} \langle a_2, b_2\rangle$, où $\langle a_1, b_1\rangle \simeq \mathbb{F}_2 \simeq \langle a_2, b_2\rangle$ et $\Sigma = \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}\rangle = \langle a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}\rangle$ admet une action hautement transitive et fidèle. C'est une conséquence du théorème 1.9 car, d'après l'exemple 1.8, le cœur de Σ est enfantin dans $\langle a_1, b_1\rangle$ et $\langle a_2, b_2\rangle$.

Après l'obtention des résultats précités, Hull et Osin [HO16] ont démontré que les groupes hyperboliques acylindriques avec un radical fini trivial sont hautement transitifs et Miasyan et Osin ont montré [MO15] que tout produit libre amalgamé $\Gamma = \Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$ non dégénéré ($\Gamma_1 \neq \Sigma \neq \Gamma_2$ et $[\Gamma_1 : \Sigma] \geq 3$ ou $[\Gamma_2 : \Sigma] \geq 3$) est hyperbolique acylindrique dès que Σ est *faiblement malnormal* dans Γ (c'est-à-dire si $\exists g \in \Gamma$ tel que $|g\Sigma g^{-1} \cap \Sigma| < \infty$). Plus généralement, ils ont montré que si Γ est un groupe agissant sur un arbre $\mathcal{T}$ sans point fixe sur le bord $\partial\mathcal{T}$ et si il existe deux sommets dont l'intersection des stabilisateurs est fini alors Γ est soit hyperbolique acylindrique soit virtuellement cyclique. Ainsi, pour de nombreux nouveaux exemples de groupes hautement transitifs découvert dans [FMS15], la haute transitivité peut maintenant être déduite des travaux [HO16] et [MO15].

Mentionnons également les résultats de Gelander, Glasner et Soĭfer [GGS19] portant sur la haute transitivité de certains groupes linéaires. Ils démontrent que, pour tout corps local k et tout groupe dénombrable $\Gamma < \mathrm{SL}_2(k)$ non borné et avec un centre trivial, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Γ n'a pas de sous-groupe distingué fini non trivial, et pas de paire de sous-groupes distingués non triviaux $M, N \lhd \Gamma$ tels que $[M, N] = \{1\}$;
2. Γ est Zariski dense ;
3. Γ n'est pas virtuellement résoluble ;
4. Γ est hautement transitif.

Encore plus récemment, Adrien Le Boudec et Nicolás Matte Bon [LBMB20] ont découvert une nouvelle obstruction à la haute transitivité. Rappelons que le *degré de transitivité* $\mathrm{dt}(\Gamma)$ d'un groupe Γ est :

$$\mathrm{dt}(\Gamma) := \sup\{n \geq 1 \,:\, \Gamma \text{ admet une action } n\text{-transitive et fidèle}\} \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}.$$

Notons que si Γ est hautement transitif alors $\mathrm{dt}(\Gamma) = +\infty$ mais la réciproque de cet énoncé est ouverte. Rappelons également qu'une action $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}$ d'un groupe Γ sur un arbre $\mathcal{T}$ est dite *minimale* si il n'existe pas de sous arbre invariant non trivial et *de type général* si Γ possède deux éléments hyperboliques transverses. Adrien Le Boudec et Nicolas Matte Bon ont montré dans [LBMB20] que si un groupe Γ admet une action fidèle, minimale, de type général sur un arbre $\mathcal{T}$ et telle que l'action sur le bord $\Gamma \curvearrowright \partial\mathcal{T}$ est *topologiquement libre* (c'est-à-dire l'ensemble des points fixes de tout élément non trivial de Γ est d'intérieur vide) alors $\mathrm{dt}(\Gamma) \geq 3$. Notons que si $\Gamma \curvearrowright \partial\mathcal{T}$ est topologiquement libre alors $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}$ est fidèle.

Le résultat principal de [FLMMS20] est le suivant.

Théorème 1.10 ([FLMMS20])**.** *Soit Γ un groupe dénombrable et $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}$ une action minimale et de type générale sur un arbre $\mathcal{T}$. Si l'action sur le bord $\Gamma \curvearrowright \partial\mathcal{T}$ est topologiquement libre alors Γ est hautement transitif.*

On combinant le théorème précédent et le résultat de Le Boudec et Matte Bon on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.11. *Soit Γ un groupe dénombrable admettant une action sur un arbre $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}$ fidèle, minimale et de type général. Il y a équivalence :*

1. $\Gamma \curvearrowright \partial\mathcal{T}$ *est topologiquement libre.*
2. Γ *est hautement transitif.*
3. $\mathrm{dt}(\Gamma) = +\infty$
4. $\mathrm{dt}(\Gamma) \geq 4$

Ceci donne notamment une nouvelle classe de groupes dénombrables Γ pour lesquels l'équivalence (Γ hautement transitif) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{dt}(\Gamma) = +\infty$) est vraie. Notons que cette classe de groupes est très large. En effet, tout produit libre amalgamé $\Gamma = \Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_1$ agit par translation à gauche sur son arbre de Bass-Serre $\mathcal{T}_\Gamma$ dont les sommets sont $S(\mathcal{T}_\Gamma) = \Gamma/\Gamma_1 \sqcup \Gamma/\Gamma_2$, les arêtes positives sont $A(\mathcal{T}_\Gamma)^+ = \Gamma/\Sigma$, l'application source est $s(g\Sigma) = g\Gamma_1$ et l'application but est $b(g\Sigma) = g\Gamma_2$. Il est alors facile de vérifier que $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}_\Gamma$ est toujours minimale et l'on a :

- $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}_\Gamma$ est de type général si et seulement si le produit libre est *non-dégénéré* c'est-à-dire $\Gamma_1 \neq \Sigma \neq \Gamma_2$ et $[\Gamma_i : \Sigma] \geq 3$ pour au moins un $i \in \{1, 2\}$.
- $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}_\Gamma$ est fidèle si et seulement si le coeur de Σ dans Γ est trivial.

De plus, toute extension HNN $\Gamma = \mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta) = \langle H, t\rangle$ agit par translation à gauche sur son arbre de Bass-Serre $\mathcal{T}_\Gamma$ dont les sommets sont $S(\mathcal{T}_\Gamma) = \Gamma/H$, les arêtes sont $A(\mathcal{T}_\Gamma) = \Gamma/\Sigma \sqcup \Gamma/\theta(\Sigma)$, l'application source est $s(g\Sigma) = gH$, $s(g\theta(\Sigma)) = gH$ et l'application but est $b(g\Sigma) = gtH$, $b(g\theta(\Sigma)) = gt^{-1}H$ et l'inversion est $\overline{g\Sigma} = gt\theta(\Sigma)$, $\overline{g\theta(\Sigma)} = gt^{-1}\Sigma$. Il est alors facile de vérifier que $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}_\Gamma$ est toujours minimale et l'on a :

- $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}_\Gamma$ est de type général si et seulement si l'extension HNN *non-ascendante* c'est-à-dire $H \neq \Sigma$ et $H \neq \theta(\Sigma)$.
- $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}_\Gamma$ est fidèle si et seulement si le coeur de Σ dans Γ est trivial.

Ainsi, dans le cas des produits libres amalgamés et des extensions HNN on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1.12 ([FLMMS20])**.** *Soit $\Gamma = \Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$ un produit libre amalgamé non dégénéré ou bien $\Gamma = \mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ une extension HNN non-ascendante. Si l'action de Γ sur le bord de son arbre de Bass-Serre est topologiquement libre alors Γ est hautement transitif. Si cette action n'est pas topologiquement libre mais que le coeur de Σ dans Γ est trivial alors* $\mathrm{dt}(\Gamma) \leq 3$.

Exemple 1.13. À comparer avec le théorème 1.9.

1. Soit $\Gamma = \mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ une extension HNN non-ascendante. Si le coeur de Σ ou de $\theta(\Sigma)$ dans H est trivial alors l'action de Γ sur le bord de son arbre de Bass-Serre est topologiquement libre et donc Γ est hautement transitif.

2. Soit $\Gamma = \Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$ un produit libre amalgamé non dégénéré. Si le coeur de Σ est trivial dans Γ_1 ou dans Γ_2 alors l'action de Γ sur le bord de son arbre de Bass-Serre est topologiquement libre et donc Γ est hautement transitif.

Enfin, notre résultat nous permet de répondre à une question posée dans [HO16] : Hull et Osin demandent quel est le degré de transitivité du groupe de Baumslag-Solitar BS(2, 3). Rappelons que, pour $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, le groupe de Baumslag-Solitar associé est $\mathrm{BS}(n, m) = \langle a, b \,:\, ab^m a^{-1} = b^n \rangle$. $\mathrm{BS}(n, m)$ est :
- metabélien, donc résoluble, si $|m| = 1$ et $|n| = 1$;
- non-moyennable si $|m| \geq 2$ et $|n| \geq 2$;
- icc si et seulement si $|m| \neq |n|$;
- llinéaire si et seulement $|m| = 1$, or $|n| = 1$, or $|m| = |n|$.
- pas acylindriquement hyperbolique.

Ainsi, il est facile de vérifier que $\mathrm{dt}(\mathrm{BS}(n, m) = 1$ pour $|n| = 1$ ou $|m| = 1$ ou $|n| = |m|$. Par contre, lorsque $|m| \geq 2$ et $|n| \geq 2$ et $|n| \neq |m|$ il est facile de vérifier que l'action de $\mathrm{BS}(n, m)$ (vue comme une extension HNN) sur le bord de son arbre de Bass-Serre est topologiquement libre. On obtient ainsi le corollaire suivant, répondant complètement à la question de Hull et Osin.

Corollaire 1.14 ([FLMMS20]). $\mathrm{BS}(n, m)$ *est hautement transitif si et seulement si* $|m| \geq 2$ *et* $|n| \geq 2$ *et* $|n| \neq |m|$.

Notons que ni les résultats de [HO16] sur les groupes acylindriquement hyperboliques, ni ceux de [GGS19] sur les groupes linéaires, ni nos précédents résultats [FMS15] ne peuvent être utilisés ici pour obtenir la haute transitivité. Nous donnons également dans [FLMMS20] d'autres exemples nouveaux et explicites de groupes hautement transitifs.

1.3 Actions homogènes sur le graphe aléatoire

Le travail exposé dans cette section [FMS20], en collaboration avec Soyoung Moon et Yves Stalder, est dans la continuité de [FMS15]. Rappelons que dans [FMS15], nous cherchions à comprendre les sous-groupes dénombrables dense du groupe polonais des bijections de $\mathbb{N}$. Dans [FMS20], nous nous intéressons aux sous-groupes dénombrables denses du groupe polonais des automorphismes du graphe aléatoire $\mathcal{R}$.

Le *graphe aléatoire* $\mathcal{R}$, aussi appelé le *graphe de Rado*, est l'unique graphe dénombrable satisfaisant la propriété que pour tous sous-ensembles finis de sommets U et V avec $U \cap V = \emptyset$, il existe un sommet p qui est joint à tout sommet de U et n'est joint à aucun sommet de V.

Le graphe aléatoire satisfait la propriété surprenante que tout isomorphisme entre deux sous-graphes finis s'étend en un isomorphisme de $\mathcal{R}$. De plus, tout graphe au plus dénombrable est isomorphe à un sous-graphe de $\mathcal{R}$. Ces propriétés font que le graphe aléatoire tient une place centrale en théorie des graphes : $\mathcal{R}$ est à la théorie des graphes ce que $\mathbb{Q}$ est à la théorie des ensembles ordonnés ou encore ce que l'espace d'Uryshon est à la théorie des espaces métriques. Il est donc surprenant que ce graphe n'est pas été étudié bien avant les années soixante. En effet, le graphe aléatoire a été popularisé par Erdös et Rényi dans une série d'articles entre 1959 et 1968. Ils ont montré [ER63] qu'un graphe dénombrable (infini) choisi aléatoirement en sélectionnant chaque arête indépendamment avec probabilité $\frac{1}{2}$ parmi l'ensemble des sous-ensembles à deux éléments de l'ensemble des sommets est, avec probabilité 1, isomorphe au graphe aléatoire $\mathcal{R}$: c'est un processus aléatoire dont le résultat est déterministe ! D'après Erdos et Rényi, ce résultat détruit la théorie des graphes aléatoires infinis. La théorie des graphes aléatoires fini est cependant beaucoup moins prévisible.

Erdös et Rényi ont également montré que, au sens de la mesure aussi bien qu'un sens de Baire, presque tous les graphes dénombrables infinis sont isomorphes à $\mathcal{R}$. C'est pourquoi ils n'ont pas donné de construction explicite de $\mathcal{R}$. La première construction explicite du graphe aléatoire est attribuée à Rado en 1964 [Rad64].

Considérons le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ de tous les automorphisme de $\mathcal{R}$. C'est un sous-groupe fermé du groupe polonais des bijections des sommets de $\mathcal{R}$ et donc un espace polonais pour la topologie de la convergence simple sur les sommets.

Soit $\Gamma \curvearrowright \mathcal{R}$ une action du groupe Γ sur le graphe $\mathcal{R}$. Il est facile de vérifier que l'image de Γ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ est dense si et seulement si l'action est *homogène* c'est-à-dire, pour tous sous-ensembles finis U, V et tout isomorphisme $\varphi : U \to V$ entre les graphes induits, il existe $g \in \Gamma$ tel que $g(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in U$. Comprendre les sous-groupes dénombrables de $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ revient donc à comprendre la classe $\mathcal{H}_{\mathcal{R}}$ des groupes dénombrables admettant une action fidèle et homogène sur le graphe aléatoire.

Le résultat principal de [FMS20] est le suivant.

Théorème 1.15.

1. *Soient Γ_1, Γ_2 deux groupes dénombrables non triviaux. Si Γ_1 est infini alors $\Gamma_1 * \Gamma_2 \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$. Si $\Sigma < \Gamma_1, \Gamma_2$ est un sous-groupe commun fini tel que Σ est enfantin dans Γ_1 et que, soit Γ_2 est infini et Σ est enfantin dans Γ_2, soit Γ_2 est fini et $[\Gamma_2 : \Sigma] \geq 2$ alors $\Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2 \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.*
2. *Soit H un groupe dénombrable infini, $\Sigma < H$ un sous groupe fini et $\theta : \Sigma \to H$ un morphisme injectif. Si Σ et $\theta(\Sigma)$ sont enfantins dans H alors $\mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta) \in \mathcal{H}_{\mathcal{R}}$.*

Pour montrer ce théorème, je démontre d'abord que tout groupe dénombrable infini admet une action satisfaisant de bonnes propriétés sur $\mathcal{R}$ en utilisant une construction explicite d'actions sur $\mathcal{R}$ par limites inductives. Puis, à partir de cette action de Γ sur $\mathcal{R}$, avec $\Gamma = \Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$ ou $\Gamma = \mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ j'utilise certains automorphismes de $\mathcal{R}$ pour modifier cette action et le théorème de Baire pour produire l'action voulue.

J'obtiens également un résultat d'ubiquité des sous-groupes libres et dense de type fini parmi les sous-groupes de $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})^k$ de type fini dont l'action sur $\mathcal{R}$ est orbites infinies. Plus précisément je démontre le résultat suivant. Pour $k \geq 2$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})^k$ on note $\langle \alpha \rangle$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ engendré par $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. On considère le sous-ensemble fermé

$$\mathcal{A}_k = \{\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{R})^k : \langle \alpha \rangle \curvearrowright \mathcal{R} \text{ est à orbites infinies}\} \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{R})^k.$$

Théorème 1.16. *Pour tout $k \geq 2$ l'ensemble*

$$O := \{\alpha \in \mathcal{A}_k : \langle \alpha \rangle \textit{ est un groupe libre de base } (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \textit{ et } \langle \alpha \rangle \curvearrowright \mathcal{R} \textit{ est homogène } \}$$

est un G_δ-dense dans $\mathcal{A}_k$.

1.4 Actions homogènes sur les espaces d'Urysohn

Le travail présenté ici [FLMMM20], en collaboration avec François Le Maître, Julien Melleray et Soyoung Moon, est dans la continuité de [FMS15, FMS20]. Soit G un groupe Polonais et notons $\mathcal{H}(G)$ la classes des groupes dénombrables isomorphe à un sous groupe dense de G. Les résultats de [FMS15, FMS20] (résumés dans les deux sections précédentes) montrent que "beaucoup" de groupes agissant sur un arbre sont dans la classe $\mathcal{H}(G)$ pour $G = S(X)$ [FMS15] ainsi que pour $G = \mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ [FMS20].

Il parait alors naturel d'étudier la classe $\mathcal{H}(G)$ pour d'autres groupes Polonais G. Notons que $S(X)$ et $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ sont tout les deux des groupes d'isométries d'espaces d'Urysohn dénombrables. Le but de ce travail est d'étudier la classe $\mathcal{H}(G)$ lorsque G est le groupe d'isométrie d'un espace d'Urysohn dénombrable général.

Rappelons maintenant la notion d'espace d'Urysohn. Soit S un sous ensemble de $[0, +\infty[$ contenant 0. Un espace métrique (X, d) est appelé un S-espace métrique lorsque la métrique d est à valeurs dans S. Un S-métrique dénombrable $\mathbb{U}_S$ est appelé un S-espace d'Urysohn si il satisfait les deux propriétés suivantes :

— *Universalité* : $\mathbb{U}_S$ contient une copie isométrique de tout S-espace métrique fini.
— *Homogénéité* : toute isométrie bijective entre deux sous espaces métriques finis de $\mathbb{U}_S$ se prolonge en une isométrie bijective de $\mathbb{U}_S$.

La méthode du *va-et-vient*, classique en théorie des modèles, permet de démontrer l'unicité, à isométrie bijective près, d'un S-espace d'Urysohn. C'est Urysohn qui, en 1927, dans le travail fondateur [Ury27], a construit le $\mathbb{Q}$-espace d'Urysohn. Spécifions les hypothèses sur S sous lesquelles le S-espace d'Uryshon existe.

Dans toute la suite, S est un sous-ensemble de $[0, +\infty[$ contenant 0 et $|S| \geq 2$. Nous dirons que :

— S est un *ensemble de distance non-borné* si S est un sous semi groupe additif de $[0, +\infty[$ c'est-à-dire si pour tout $s, t \in S$ on a $s + t \in S$.
— S est un *ensemble de distance borné* si il existe $M > 0$ tel que $\forall s, t \in S$ on a $\min(s + t, M) \in S$.

Dès que S est un ensemble de distance, borné ou non, le S-espace d'Urysohn existe. Fixons donc un ensemble de distance S et notons $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$ le groupe des isométries bijectives de $\mathbb{U}_S$. Lorsque l'on munit $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$ de la plus petite topologie pour laquelle toutes les évaluations $ev_x : \mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S) \to \mathbb{U}_S$, $\alpha \mapsto \alpha(x)$ $(x \in \mathbb{U}_S)$ sont continues, pour la topologie discrète sur $\mathbb{U}_S$, le groupe $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$ devient un groupe Polonais.

Exemple 1.17.

1. Si $|S| = 2$ alors S est un ensemble de distance borné et, quitte à multiplier la distance par un $M > 0$, on peut supposer que $S = \{0, 1\}$. Un $\{0, 1\}$-espace métrique est juste un ensemble munit de la métrique discrète et on a donc $\mathbb{U}_{\{0,1\}} = \mathbb{N}$ et, en tant que groupe Polonais, $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_{\{0,1\}}) = S(\mathbb{N})$. La classe $\mathcal{H}(\mathbb{U}_{\{0,1\}})$ est donc la classe des groupes hautement transitifs étudiée dans [FMS15] (section 1.2).
2. $S = \{0, 1/2, 1\}$ est également est ensemble de distance borné. Un $\{0, 1/2, 1\}$-espace métrique est un graphe (non orienté et sans boucle) : $d(x, y) = 1/2 \Leftrightarrow x$ et y sont joints par une arête et $d(x, y) = 1 \Leftrightarrow x$ et y sont distincts et ne sont pas joints par une arête. Le $\{0, 1/2, 1\}$-espace d'Urysohn est donc le graphe aléatoire $\mathcal{R}$ et la classe $\mathcal{H}(\mathbb{U}_{\{0,1/2,1\}})$ est la classe des groupes admettant une action homogène et fidèle sur $\mathcal{R}$ étudiée dans [FMS20] (section 1.3).

S'agissant des ensembles de distance bornés, nous démontrons dans [FLMMM20] le résultat suivant.

Théorème 1.18 ([FLMMM20])**.** *Soit Γ un groupe agissant sans inversion sur un arbre non trivial. Si les stabilisateurs des arêtes sont enfantins dans les deux stabilisateurs de sommets correspondants alors $\Gamma \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$ pour tout S ensemble de distance bornés.*

En particulier, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.19 ([FLMMM20])**.** *Soit S un ensemble de distance borné, Γ_1, Γ_2 et H des groupes dénombrables infinis avec un sous-groupe commun Σ et $\theta : \Sigma \to H$ un morphisme injectif.*

1. *Si Σ est enfantin dans Γ_1 et Γ_2 alors $\Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$. En particulier,*
   - *(a) Pour tous groupes dénombrables infinis Γ_1, Γ_2 on a $\Gamma_1 * \Gamma_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$.*
   - *(b) Si $\mathcal{S}_g$ est une surface fermée, orientable et de genre $g > 1$, alors $\pi_1(\mathcal{S}_g) \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$.*
2. *Si Σ et $\theta(\Sigma)$ sont enfantins dans H alors $\mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta) \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$.*

Notons que dans le cas $S = \{0, 1/2, 1\}$ cela renforce les résultats de [FMS20] où tous les stabilisateurs d'arêtes, en plus d'être enfantins, étaient aussi supposés finis, ce qui ne permettait d'obtenir le résultat pour $\pi_1(\mathcal{S}_g)$.

Dans le cas où l'ensemble de distance S n'est pas borné, nous obtenons le résultat suivant. Notons que $\mathbb{Q}^+ := \mathbb{Q} \cap [0, +\infty[$ est un ensemble de distance non borné.

Théorème 1.20 ([FLMMM20])**.** *Si Γ_1 et Γ_2 sont deux groupes dénombrables infinis alors $\Gamma_1 * \Gamma_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}^+})$.*

Au sujet des obstructions pour être dans la classe $\mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$, notons que, en utilisant les méthodes de K. Tent et M. Ziegler, on démontre que les groupes $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$ sont topologiquement simples. Il en découle directement que si $\Gamma \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$ alors Γ est i.c.c., non résoluble et tout sous-groupe d'indice fini de Γ est dans $\mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$. Enfin, notons que dans le cas $S = \{0, 1\}$ Hull et Osin [HO16] obtiennent la dichotomie suivante : Si Γ est hautement transitif alors soit Γ contient une copie du groupe alterné infini soit il est MIF (*mixed identity free*).

Le résultats précédents sont basés sur le théorème de Baire. Au vu de ces résultats, il paraît fondamental de déterminer à quel point les classes $\mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$ dépendent de l'ensemble de distance S. Ces classes coïncident-elles ? Y a-t-il des inclusions non triviales ? Ce problème reste largement ouvert bien que nous établissions le résultat suivant.

Théorème 1.21 ([FLMMM20])**.** *Soit S un ensemble de distance et S_∞ le groupe des bijections de $\mathbb{N}$ de support fini. Il y a équivalence :*

1. *$S_\infty \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$.*
2. *$|S| = 2$.*
3. *$\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S) \simeq S(\mathbb{N})$.*

Ce théorème démontre que les classes des groupes dénombrables isomorphes à un sous-groupe dense de $S(\mathbb{N})$ et de $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ sont différentes. De nombreuses questions restent cependant sans réponse. Par exemple, nous ne connaissons pas de sous groupe dénombrable dense de $\mathrm{Aut}(\mathcal{R})$ qui ne soit pas isomorphe à un sous groupe dense de $S(\mathbb{N})$ bien qu'il semble probable qu'un tel groupe existe.

Il est clair que lorsque $|S| = 2$, on a $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S) \simeq S(\mathbb{N})$ et donc $S_\infty \in \mathcal{H}(\mathbb{U}_S)$ et donc une seule des implications du théorème 1.21 est non triviale. Notre approche pour démontrer cette implication est la suivante : fixons une action $S_\infty \curvearrowright \mathbb{U}_S$ fidèle et homogène (c'est-à-dire que l'image de S_∞ dans $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$ est dense) et fixons un point $x \in \mathbb{U}_S$. Considérons le sous-groupe stabilisateur $\Delta = \{\gamma \in S_\infty \,:\, \gamma x = x\}$. L'action étant homogène, elle est en particulier transitive et $\mathbb{U}_S$ s'identifie, de façon S_∞-équivariante à S_∞/Δ. L'action étant fidèle, Δ a un coeur trivial et l'action étant homogène, l'adhérence de S_∞ dans $S(S_\infty/\Delta)$ est isomorphe à $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$. Nous démontrons que tout sous-groupe Δ apparaissant ainsi est maximal. La suite de la preuve consiste à classifier les sous-groupes maximaux d'indice infini de S_∞. Nous obtenons alors le résultat suivant, intéressant en soi. Rappelons que le *bi-indice* d'un sous-groupe H d'un groupe G est le cardinal minimal d'un sous-ensemble $F \subset G$ tel que $HFH = G$.

Théorème 1.22 ([FLMMM20]). *Soit Δ un sous-groupe maximal d'indice infini de S_∞.*

1. *si le bi-indice de Δ est fini et vaut $k+1$ alors Δ est le stabilisateur global d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ de cardinal k.*
2. *si le bi-indice de Δ est infini et Δ n'agit pas transitivement sur $\mathbb{N}$ alors Δ est le stabilisateur global d'un sous-ensemble infini et co-infini de $\mathbb{N}$.*
3. *le bi-indice de Δ est infini et Δ agit transitivement sur $\mathbb{N}$ alors il existe une relation d'équivalence E sur $\mathbb{N}$ dont toutes les classes d'équivalence ont le même cardinal $k \geq 2$ et telle que Δ est l'ensemble des éléments de S_∞ qui sont des automorphismes de E.*

Tous les groupes décrits ci-dessus sont bien maximaux.

Nous démontrons ensuite que pour tous les sous-groupes maximaux d'indice infinis $\Delta < S_\infty$ du théorème 1.22, S_∞ est distingué dans la fermeture de S_∞ dans $S(S_\infty/\Delta)$ (c'est la *complétion de Schlichting* de S_∞ respectivement à Δ). Enfin nous montrons que si $|S| \geq 3$, la classe de conjugaison de tout élément non trivial de $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$ est non dénombrable, en particulier, $\mathrm{Iso}(\mathbb{U}_S)$ ne contient pas de sous-groupe distingué non trivial et dénombrable ce qui conclut la preuve. Une autre conséquence intéressante du théorème 1.22 est que S_∞ a exactement une seule action 2-transitive :

Corollaire 1.23 ([FLMMM20]). *Si $S_\infty \curvearrowright \mathbb{N}$ est une action 2-transitive alors elle est conjuguée à l'action naturelle de S_∞ sur $\mathbb{N}$.*

2 Algèbres de von Neuman

Dans cette section, toutes les algèbres de von Neumann sont supposées à prédual séparable.

2.1 Propriétés structurelles des algèbres de von Neumann

Il existe plusieurs notions d'indécomposabilité pour les facteurs II_1 dont la plus évidente est la primalité. Un facteur II_1 M est dit *premier* si il n'admet pas de décomposition non-triviale en produit tensoriel de deux facteurs. C'est-à-dire, pour toute décomposition $M \simeq M_1 \otimes M_2$, M_1 ou M_2 est un facteur de type I. Murray et von Neumann ont démontré que le facteur hyperfini II_1 $\mathcal{R}$ n'est pas premier, car il est McDuff. Un facteur II_1 M est dit *McDuff* si $M \simeq M \otimes \mathcal{R}$.

Le premier facteur II_1 premier a été découvert par Popa. Il a montré [Pop83] que le facteur du groupe libre avec une infinité non-dénombrable de générateurs est premier. Le cas des groupes libres dénombrables est resté longtemps ouvert avant d'être résolu par Ge [Ge98]. Ce résultat a ensuite été généralisé par Ozawa au cas des groupes hyperboliques. Nous dirons qu'une algèbre de von Neumann finie M est *solide* si, pour toute sous-algèbre de von Neumann $A \subset M$ diffuse, le commutant relatif $A' \cap M$ est injectif. Il est facile de vérifier que si M est un facteur II_1 solide alors M est premier. Ozawa [Oza04] a montré que l'algèbre de von Neumann d'un groupe hyperbolique est solide.

Une autre notion d'indécomposabilité pour un facteur II_1 est l'absence de sous-algèbre de Cartan. Une *sous-algèbre de Cartan* A dans un facteur II_1 M est une sous-algèbre de von Neumann telle que

— A est *abélienne maximale* : $A' \cap M = A$;

— A est *régulière* : $\mathcal{N}_M(A)'' = M$ où $\mathcal{N}_M(A) = \{u \in \mathcal{U}(M) \,:\, uAu^* = A\}$ est le *normalisateur* de A.

Feldman et Moore [FM77] ont démontré que M possède une sous-algèbre de Cartan si et seulement si M est isomorphe à l'algèbre de von Neumann d'une relation d'équivalence Borélienne, à orbites dénombrables, préservant la mesure et ergodique sur un espace de probabilité standard, tordue par un 2-cocycle.

Pendant longtemps, l'existence d'une sous-algèbre de Cartan dans tout facteur II_1 ou, de façon équivalente, la décomposabilité de tout facteur II_1 en algèbre de relation, fut une question ouverte. Le premier exemple de facteur II_1 sans sous-algèbre de Cartan fut découvert par Voiculescu. Il a démontré dans [Voi96] que le facteur d'un groupe libre non-abélien $\mathrm{L}(\mathbb{F}_n)$, $2 \leq n \leq \infty$, n'a pas de sous-algèbre de Cartan. Ce résultat a ensuite été renforcé par Ozawa et Popa. Ils ont démontré dans [OP10a] que $\mathrm{L}(\mathbb{F}_n)$ est fortement solide pour $2 \leq n \leq \infty$. Une algèbre de von Neumann est dite *fortement solide* si, pour toute sous-algèbre de von Neumann diffuse et moyennable $Q \subset M$, l'algèbre de von Neumann $\mathcal{N}_M(Q)''$ engendrée par le normalisateur de Q est moyennable. Si M est non-moyennable alors il est clair que la solidité forte implique l'absence de sous-algèbre de Cartan. La solidité forte est également un renforcement de la solidité.

D'autres propriétés structurelles des facteurs II_1 permettent d'obtenir des résultats de non-isomorphisme. Par exemple, pour montrer que $\mathrm{L}(\mathbb{F}_2)$ n'est pas isomorphe au facteur hyperfini II_1, Murray et von Neumann [MvN43] ont démontré que $\mathrm{L}(\mathbb{F}_2)$ n'a pas la propriété Gamma, ce qui implique qu'il n'est pas McDuff, alors que $\mathcal{R}$ l'est. On dit qu'un facteur II_1 M munit de la trace τ a la *propriété Gamma* s'il existe une suite d'unitaire $u_n \in \mathcal{U}(M)$ telle que $\tau(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $||u_n x - x u_n||_2 \to 0$ pour tout $x \in M$. La propriété Gamma implique également la non-solidité.

Dans l'article [Fim11] nous étudions les propriétés structurelles de l'algèbre de von Neumann d'un groupe de Baumslag-Solitar.

Soient $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $\mathrm{BS}(n,m) = \langle a, b \,:\, ab^n a^{-1} = b^m \rangle$ le groupe de Baumslag-Solitar associé. Moldavanskii a montré dans [Mol91] que $\mathrm{BS}(n,m) \simeq \mathrm{BS}(p,q)$ si et seulement si il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\{n, m\} = \{\epsilon p, \epsilon q\}$. On sait que le groupe $\mathrm{BS}(n,m)$ a la propriété de Haagerup ainsi que la propriété d'approximation métrique complète (Gal et Januszkiewicz [GJ03]), qu'il est non-moyennable mais intérieurement moyennable et cci dès que $|n|, |m| > 1$ et $|n| \neq |m|$ (Stalder [Sta06]).

Théorème 2.1 ([Fim11])**.** *Soient* $|n|, |m| > 1$, $|n| \neq |m|$ *et* $\Gamma = \mathrm{BS}(n,m)$*. On a*

1. $\mathrm{L}(\Gamma)$ *est premier.*
2. $\mathrm{L}(\Gamma)$ *n'est pas solide et n'a pas de sous-algèbre de Cartan.*

La preuve de non-solidité est très simple. Notons que Ozawa a également observé que $\mathrm{L}(\Gamma)$ a la propriété Gamma. Ce qui implique le résultat de Stalder sur la moyennabilité intérieure ainsi que la non-solidité. La primalité se déduit des résultats de Chifan et Houdayer [CH12] et l'absence de Cartan est démontrée en utilisant les techniques d'Ozawa et Popa [OP10a] qui reposent de façon cruciale sur la propriété d'approximation métrique complète. Nous montrons en fait que $\mathrm{L}(\Gamma)$ est *robuste*, c'est-à-dire que le commutant relatif de toute sous-algèbre de von Neumann moyennable et régulière n'est pas moyennable, ce qui implique l'absence de sous-algèbre de Cartan.

Il existe beaucoup d'autres travaux sur la primalité et la solidité dans le cas fini [OP04, Shl04, Oza06a, Oza06b, Pet09b, Oza09, Bou12] ainsi que dans le cas général [Shl00, VV07, CH12, Hou10a, HV12, Iso13b, Iso12, DI12]. Citons également les nombreux résultats d'absence de Cartan et solidité forte dans le cas fini [Shl09, OP10b, Hou10b, HS11, Dab10, Sin11, CS13b, CSU13, Avs11, Ioa12a, DI12] ainsi que dans le cas général [HR11, Iso12, BHR12, Iso13a].

2.2 Unicité de la sous-algèbre de Cartan et actions W*-superrigides

L'un des thèmes centraux de la théorie des algèbres de von Neuman est la classification des produits croisés $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ en termes de l'action libre, ergodique et préservant la mesure de probabilité (pmp) $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.

Le célèbre théorème de Connes [Con76] implique que, pour toute action libre, ergodique et pmp le facteur II_1 $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ est isomorphe au facteur hyperfini II_1 et oublie donc beaucoup d'informations sur l'action initiale $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$.

En utilisant sa technique de déformation/rigidité, Popa a réussi à établir de nombreux théorèmes de rigidité. Pour certaines familles d'actions de groupes, il a réussi à retrouver l'action initiale $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ à partir du facteur II_1 $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$. Dans [Pop06], Popa a démontré que si $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est une action libre, ergodique et pmp d'un groupe qui a la propriété (T) et si $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta) = [0, 1]^\Lambda$ est l'action de Bernoulli d'un groupe cci alors un isomorphisme de $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ et $\mathrm{L}^\infty(Y) \rtimes \Lambda$ implique un isomorphisme des groupes Γ et Λ et une conjugaison de leurs actions.

Dans les articles [Pet09a, PV10, Ioa11b], des actions satisfaisant la plus forte des formes de rigidité, appelée la W*-superrigidité, ont été découvertes. Une action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ est dite *W*-superrigide* si pour toute action libre, ergodique et pmp $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$, un isomorphisme de $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ et $\mathrm{L}^\infty(Y) \rtimes \Lambda$ implique un isomorphisme de Γ et Λ et une conjugaison de leurs actions.

La W*-superrigidité est équivalente à la coexistence de deux phénomènes de rigidité :

— L'unicité, à conjugaison unitaire près, de la sous algèbre de Cartan de type produit croisé : si $M = \mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a une autre décomposition en produit croisé par une action libre, ergodique et pmp $M = \mathrm{L}^\infty(Y) \rtimes \Lambda$, alors les sous-algèbres de Cartan $\mathrm{L}^\infty(X)$ et $\mathrm{L}^\infty(Y)$ sont unitairement conjuguées dans M.

— La *superrigidité orbitale* de l'action $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$: s'il existe une action libre, ergodique et pmp $\Lambda \curvearrowright (Y, \eta)$ qui est orbitalement équivalente à $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ alors Γ et Λ sont isomorphes et leurs actions sont conjuguées.

Ces deux phénomènes sont très difficiles à établir. Ils sont encore plus difficiles à obtenir simultanément.

Les premiers résultats de rigidité orbitale furent obtenu par Zimmer [Zim80, Zim84]. La première action orbitalement superrigide a été découverte par Furman [Fur99]. Depuis, de nombreuses autres actions orbitalement superrigidites ont été obtenues [Pop07a, Kid10, Ioa11a, PV11, Kid11, PS12]. Pour un panorama des résultats sur la rigidité et superrigidité orbitale, le lecteur intéressé pourra consulter les articles [Fur11, Gab10, Pop07b, Sha05, Vae07, Vae10].

Le phénomène d'unicité de la sous-algèbre de Cartan a plusieurs facettes. Pour obtenir un résultat de W*-superrigidité nous avons uniquement besoin de l'unicité, à conjugaison unitaire près, de la sous-algèbre de Cartan de type produit croisé. Il est aussi possible de considérer l'unicité de toutes les sous-algèbres de Cartan, à conjugaison unitaire près ou bien à conjugaison par un $*$-automorphisme près. Par exemple, les résultats de [CFW81] et [Kri76] impliquent que deux sous-algèbres de Cartan du facteur hyperfini II_1 sont toujours conjuguées par un $*$-automorphisme. Plus récemment, Ozawa et Popa ont réussi à produire les premiers exemples de facteurs II_1 non-moyennables avec une unique sous-algèbre de Cartan, à conjugaison unitaire près. Ils montrent dans [OP10a] que, pour toute action libre, ergodique pmp et profinie $\mathbb{F}_n \curvearrowright (X, \mu)$ du groupe libre à $n \geq 2$ générateurs, le facteur II_1 $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $\mathrm{L}^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan, à conjugaison unitaire près.

Dans [PV10] Popa et Vaes ont découvert une classe de groupes dénombrables telle que tous les produits croisés $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$, pour n'importe quelle action libre, ergodique et pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, ont $\mathrm{L}^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan de type produit croisé, à conjugaison unitaire près. Cette classe contient non seulement tous les produits libres $\Gamma_1 * \Gamma_2$ d'un groupe Γ_1 infini ayant la propriété (T) avec un groupe non-trivial Γ_2 mais aussi une famille assez large de produits libres amalgamés $\Gamma_1 \underset{\Sigma}{*} \Gamma_2$. Dans l'article [FV12], en collaboration avec Vaes, nous montrons un résultat similaire pour les extensions HNN.

Théorème 2.2 ([FV12])**.** *Soit H un groupe dénombrable contenant un sous-groupe non-moyennable avec la propriété (T) relative ou bien deux sous-groupes non-moyennables commutant l'un avec l'autre. Soient $\Sigma < H$ un sous-groupe moyennable et $\theta : \Sigma \to H$ un morphisme injectif. S'il existe $g_1, \ldots, g_n \in \Gamma = \mathrm{HNN}(H, \Sigma, \theta)$ tels que $\cap_{i=1}^n g_i \Sigma g_i^{-1}$ soit fini alors pour toute action libre, ergodique et pmp $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ le facteur $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $\mathrm{L}^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan de type produit croisé, à conjugaison unitaire près.*

Lorsque $\mathcal{G}$ est un graphe, nous notons $\mathrm{V}(\mathcal{G})$ (resp. $\mathrm{E}(\mathcal{G})$) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes) de $\mathcal{G}$ et $s : \mathrm{E}(\mathcal{G}) \to \mathrm{V}(\mathcal{G})$ (resp. r) l'application source (resp. but). En utilisant la théorie de Bass-Serre, les théorèmes 2.2 et [PV10, Theorem 1.1] nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 2.3 ([FV12]). *Soit Γ un groupe dénombrable satisfaisant les conditions suivantes.*

1. *Γ contient un sous-groupe non-moyennable ayant la propriété (T) relative ou bien deux sous-groupes non-moyennables commutant l'un avec l'autre.*
2. *Γ agit sans inversion sur un arbre $\mathcal{T}$ de telle sorte qu'il existe un sous-arbre fini ayant un stabilisateur fini et une arête $e \in \mathrm{E}(\mathcal{T})$ telle que le stabilisateur de e est moyennable et les petit sous-arbres contenant toutes les arêtes de $\Gamma.s(e)$ (resp. $\Gamma.r(e)$) sont tous les deux égaux à $\mathcal{T}$.*

Alors, pour toute action libre, ergodique et pmp $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ le facteur $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $\mathrm{L}^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan de type produit croisé, à conjugaison unitaire près.

C'est en superposant leur résultat d'unicité de Cartan avec ceux de superrigidité orbitale de certaines actions de Bernoulli obtenus par Popa [Pop07a, Pop08] que Popa et Vaes avaient obtenu leurs exemples d'actions W*-superrigides dans [PV10]. En faisant de même, nous obtenons de nouveaux exemples.

Rappelons que, si $\Gamma \curvearrowright I$ est une action sur un ensemble dénombrable I, alors l'action de Bernoulli généralisée $\Gamma \curvearrowright (X_0,\mu_0)^I$, où (X_0,μ_0) est un espace de probabilité standard et $(g\cdot x)_i = x_{g^{-1}\cdot i}$, est libre si et seulement si $\Gamma \curvearrowright I$ est fidèle lorsque (X_0,μ_0) est sans atomes ou bien $\{g\cdot i \,:\, i\in I\}$ est infini pour tout $g \in \Gamma \setminus \{e\}$ lorsque (X_0,μ_0) possède au moins un atome. Dans l'énoncé qui suit, nous supposons implicitement que les actions de Bernoulli généralisées rencontrées sont libres.

Théorème 2.4 ([FV12]). *Soient H un groupe dénombrable ayant la propriété (T), $\Sigma < H$ un sous-groupe infini moyennable et $\theta : \Sigma \to H$ un morphisme injectif tel que $\Sigma \cap \theta(\Sigma) = \{e\}$. Si $\Gamma \curvearrowright I$ est une action sur un ensemble dénombrable telle que $\Sigma \cdot i$ est infini pour tout $i \in I$, alors l'action de Bernoulli généralisée $\Gamma \curvearrowright (X_0,\mu_0)^I$ est W*-superrigide.*

En considérant deux copies différentes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, pour $n \geq 3$, on obtient un exemple explicite satisfaisant les hypothèses du théorème 2.4.

D'autres résultats d'unicité de la sous-algèbre de Cartan et d'actions W*-superrigides ont été obtenu [Ioa11b, HPV13, CP13, Vae13, CS13b, CSU13, PV13a, Ioa12c, PV13b, Ioa12a, Bou13, DI12, CIK13]. Le lecteur intéressé pourra aussi consulter le papier [Ioa12b] pour une vue d'ensemble. Le plus spectaculaire de ces résultats de W*-superrigidité est celui de Ioana [Ioa11b] qui assure que l'action de Bernoulli d'un groupe cci avec la propriété (T) est W*-superrigide et le plus spectaculaire des résultats d'unicité de Cartan est certainement celui de Popa et Vaes [PV13a, PV13b] qui généralise celui d'Ozawa et Popa en prolongeant leurs méthodes. Ils montrent que, pour toute action libre, ergodique et pmp d'un groupe hyperbolique non-élémentaire $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ le facteur $\mathrm{L}^\infty(X) \rtimes \Gamma$ a $\mathrm{L}^\infty(X)$ comme unique sous-algèbre de Cartan, à conjugaison unitaire près. Citons également les résultats d'unicité de Cartan et de W*-superrigidité pour des actions uniquement supposées *non-singulières* [HV12, BHR12]. Enfin, il existe également des résultats de W*-superrigidité pour des algèbres de groupes [IPV13, BV12].

3 Groupes quantiques et algèbres d'opérateurs

3.1 Groupes quantiques compacts

Historiquement, la motivation initiale pour introduire des objets plus généraux que les groupes localement compacts était d'étendre l'analyse harmonique aux groupes non commutatifs, notamment la transformée de Fourier ainsi que la dualité de Pontrjagin. L'ensemble $\widehat{G}$ des caractères d'un groupe localement compact abélien G est encore un groupe localement compact abélien, le groupe dual de G. La transformée de Fourier envoie les fonctions sur G sur des fonctions sur $\widehat{G}$, et le théorème de dualité de Pontrjagin assure que $\widehat{\widehat{G}}$ est isomorphe à G. Lorsque G n'est plus abélien, le dual de G n'est plus un groupe et le problème est d'introduire une catégorie plus large contenant à la fois les groupes localement compacts et leurs duaux.

Ce fut T. Tannaka [Tan38] qui, en 1938, donna un théorème de dualité pour les groupes compacts. Il fut capable de reconstruire un groupe compact à partir de ses représentations unitaires irréductibles. En 1949, M.G. Krein [Kre63] introduisit une définition intrinsèque du dual d'un groupe compact. En 1959, W.F.

Stinespring [Sti59] montra un théorème de dualité pour les groupes localement compacts unimodulaires qui permit de retrouver un groupe localement compact unimodulaire à partir de son algèbre de von Neumann munie du coproduit standard et du poids de Plancherel. Il fut certainement le premier à souligner l'importance de l'unitaire fondamental d'un groupe. C'est finalement G.I. Kac [Kac61, Kac65] qui, en 1961, restaura la symétrie de la dualité de Pontryagin en définissant la structure de *ring group*. Cette catégorie a une dualité et contient à la fois les groupes localement compacts unimodulaires et leurs duaux. Un théorème de dualité pour les groupes localement compacts généraux fut donné par P. Eymard [Eym64] en 1964 et par N. Tatsuuma [Tat66]. Cependant, dans ces deux travaux, la dualité, qui est dans l'esprit de Tannaka-Krein-Stinespring, n'est plus symétrique. Après d'importants travaux de M. Takesaki qui fournirent les outils nécessaires, le programme de G.I. Kac fut finalement achevé en 1973, indépendamment par L. Vainerman et G.I. Kac [KV73, KV74], et par M. Enock et J.M. Schwartz [ES73, ES75]. La catégorie qu'ils ont défini a une dualité et contient à la fois les groupes localement compacts et leurs duaux. Ces objets sont maintenant appelés *algèbres de Kac* (voir [ES92]). Cette théorie est formulée dans le langage des algèbres de von Neumann et sa reformulation C*-algébrique fut donnée par J.M. Vallin et M. Enock [EV93, Val85].

L'histoire de la théorie des groupes quantiques localement compacts ne s'arête pas là. A partir des années 80, de nouveaux groupes quantiques apparurent, des exemples importants d'algèbres de Hopf obtenues par déformations d'algèbres universelles enveloppantes et d'algèbres de fonctions sur des groupes de Lie. Les exemples considérés par V.G. Drinfel'd et M. Jimbo en 1985 [Dri85, Jim85], ainsi que l'exemple analytique $\mathrm{SU}_q(2)$, construit en 1987 par S.L. Woronowicz [Wor87b] comme un exemple de sa théorie des *compact matrix pseudo-groups* [Wor87a], ont montré que la théorie des algèbres de Kac était trop étroite pour inclure tous les groupes quantiques : dans la théorie des algèbres de Kac, le carré de l'antipode (qui est l'analogue quantique de l'opération d'inversion dans un groupe) est toujours égal à 1, mais dans les exemples de V.G. Drinfel'd, M. Jimbo et S.L. Woronowicz, ce n'est pas toujours le cas. L'exemple de Woronowicz montre également que l'antipode n'est pas toujours bornée et est en général seulement densément définie.

Dans cette section nous introduisons la théorie des groupes quantiques compacts de Woronowicz.

Définition 3.1 (Woronowicz [Wor98])**.** Un *groupe quantique compact* (GQC) est une paire $G = (C(G), \Delta)$, où $C(G)$ est une C*-algèbre unifère et $\Delta : C(G) \to C(G) \otimes C(G)$ est un $*$-morphisme unifère, telle que :
— $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$.
— $\Delta(C(G))(1 \otimes C(G))$ et $\Delta(C(G))(C(G) \otimes 1)$ sont denses dans $C(G) \otimes C(G)$.

Les groupes quantiques compact contiennent à la fois les groupes compacts et les duaux de groupes discrets.

Soit G un groupe compact. Soient $C(G)$ la C*-algèbre (commutative) des fonctions continues de G dans $\mathbb{C}$ et $\Delta : C(G) \to C(G) \otimes C(G) = C(G \times G)$ le $*$-morphisme définit par $\Delta(F)(g, h) = F(gh)$ pour $F \in C(G)$ et $g, h \in G$. La paire $(C(G), \Delta)$ est un GQC. De plus, tout GQC G avec $C(G)$ commutative est de ce type.

Soit Γ un groupe discret. Soit $\Delta : C^*(\Gamma) \to C^*(\Gamma) \otimes C^*(\Gamma)$, $\Delta(g) = g \otimes g$, $g \in \Gamma$. La paire $G = (C^*(\Gamma), \Delta)$ est un GQC, appelé *le dual de* Γ et noté $\widehat{\Gamma}$. La *version maximale* de tout groupe quantique compact *co-commutatif* (tel que $\sigma\Delta = \Delta$ où σ est la volte sur $C(G) \otimes C(G)$) est de ce type.

Woronowicz a démontré l'existence de l'analogue de la mesure de Haar.

Théorème 3.2 (Woronowicz [Wor87a, Wor98])**.** *Soit G un GQC. Il existe un unique état $h \in C(G)^*$, appelé* état de Haar*, tel que $(h \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes h)\Delta = h(\cdot)1$.*

Dans le cas d'un groupe compact, l'état de Haar est l'intégration suivant la mesure de Haar. Dans le cas du dual d'un groupe discret Γ, l'état de Haar est la trace canonique sur $C^*(\Gamma)$, qui n'est pas fidèle en général.

Nous noterons $C_r(G)$ (resp. $\mathrm{L}^\infty(G)$) la C*-algèbre (resp. l'algèbre de von Neumann) obtenue par construction GNS de l'état de Haar. Par la propriété d'invariance de l'état de Haar, le $*$-morphisme Δ se factorise en un $*$-morphisme, toujours noté Δ, de $C_r(G)$ vers $C_r(G) \otimes C_r(G)$. Ainsi $(C_r(G), \Delta)$ est un GQC appelé le *groupe quantique réduit de G*.

Définition 3.3 (Woronowicz [Wor87a, Wor98])**.** Soit G un GQC. Une *représentation unitaire de dimension n* est un unitaire $u = (u_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C}) \otimes C(G)$ tel que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \otimes u_{kj}.$$

Soit u (resp. v) une représentation de dimension n (resp. m). *L'espace des entrelaceurs* de u vers v est

$$\mathrm{Mor}(u,v)=\{T\in\mathcal{B}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^m)\,:\,(T\otimes 1)u=v(T\otimes 1)\}.$$

Les représentations u et v sont dites *équivalentes* s'il existe un opérateur inversible dans $\mathrm{Mor}(u,v)$ (dans ce cas il existe aussi un unitaire dans $\mathrm{Mor}(u,v)$ par décomposition polaire). Une représentation u est dite *irréductible* si $\mathrm{Mor}(u,u)=\mathbb{C}1$. Le produit tensoriel de u et v est la représentation :

$$u\otimes v=u_{13}u_{23}\in M_n(\mathbb{C})\otimes M_m(\mathbb{C})\otimes C(G)\simeq M_{nm}(\mathbb{C})\otimes C(G).$$

On définit également la somme directe de deux représentations de façon évidente.

Théorème 3.4 (Woronowicz [Wor87a, Wor98]). *Soit G un GQC. Toute représentation unitaire de G est équivalente à une somme directe de représentations unitaires irréductibles.*

Soit $\mathrm{Irr}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires irréductibles de G et, pour $x\in\mathrm{Irr}(G)$, soit u^x un représentant de x. L'espace vectoriel $\mathrm{Pol}(G)$, engendré par les coefficients u^x_{ij}, pour $x\in\mathrm{Irr}(G)$, est une sous-algèbre unifère involutive dense dans $C(G)$. Sa C*-algèbre enveloppante est notée $C_m(G)$. Comme $\Delta(\mathrm{Pol}(G))\subset\mathrm{Pol}(G)\odot\mathrm{Pol}(G)$, Δ se prolonge, par universalité, en un $*$-morphisme toujours noté Δ de $C_m(G)$ vers $C_m(G)\otimes C_m(G)$. Ainsi $(C_m(G),\Delta)$ est un GQC appelé le *groupe quantique maximal de G*. Par construction, on a un morphisme surjectif canonique $\lambda_G\,:\,C_m(G)\to C_r(G)$. Nous dirons que G est *co-moyennable* si λ_G est un isomorphisme.

La C*-algèbre $C_m(G)$ admet une représentation de dimension 1, $\varepsilon\,:\,C_m(G)\to\mathbb{C}$, appelée la *représentation triviale* ou la *co-unité*, définie par $\varepsilon(u^x_{ij})=\delta_{ij}$, pour tout $x\in\mathrm{Irr}(G)$ et tous $1\leq i,j\leq\dim(x)$. La co-unité est l'unique $*$-morphisme $\varepsilon\,:\,C_m(G)\to\mathbb{C}$ tel que $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta=\mathrm{id}$.

Nous dirons que G est de *co-type fini* ou bien que G est un *groupe quantique compact de matrices* si la catégorie des représentations de dimension finie de G est de type fini c'est-à-dire s'il existe une partie finie $E\subset\mathrm{Irr}(G)$ telle que pour toute représentation unitaire de dimension finie u, il existe $n\geq 1$ et $b_1,\dots,b_n\in\mathrm{Mor}(u_k,u)$, où u_k est un produit tensoriel d'éléments de E, tels que $\sum_k b_kb_k^*=\mathrm{id}$.

En plus d'introduire de nouveaux exemples spectaculaires de groupes quantiques, de développer la théorie générale des groupes quantiques compacts, Woronowicz a aussi étudié et obtenu une description complète de la théorie des représentations des groupes quantiques compacts $\mathrm{SU}_q(n)$ dans [Wor88]. Par la suite, de nouveaux exemples de groupes quantiques compacts ont été introduits par Wang : les groupes quantiques libres orthogonaux et unitaires [Wan95] ainsi que les groupes quantiques d'automorphismes de C*-algèbres de dimension finie [Wan98]. Van Daele et Wang ont également introduit les versions non-unimodulaires des groupes quantiques libres orthogonaux et unitaires [VDW96]. La description de la théorie des représentations de tous ces groupes quantiques compacts a été obtenue par Banica [Ban96, Ban97, Ban99] ce qui a permis par la suite d'obtenir de nombreux résultats sur les algèbres d'opérateurs associées à ces groupes quantiques.

3.1.1 Propriété T

Dans [Fim10] nous étudions la propriété (T) dans le cadre des groupes quantiques.

Définition 3.5 ([Fim10]). Soit G un GQC. On dit que G a la *co-propriété* (T) si toute représentation de $C_m(G)$ qui contient faiblement ε contient ε.

Si $G=\widehat{\Gamma}$ est le dual d'un groupe discret Γ alors G a la co-propriété (T) si et seulement si Γ a la propriété (T). Si G est un groupe compact alors G a la co-propriété (T) si et seulement si G est fini. Plus généralement, G est co-moyennable et a la co-propriété (T) si et seulement si $C(G)$ est de dimension finie.

Théorème 3.6 ([Fim10]). *Soit G a GQC tel que $C(G)$ soit séparable. Si G a la co-propriété (T) alors :*

1. *G est de co-type fini et son état de Haar est une trace.*
2. *Si H est un GQC tel qu'il existe un $*$-morphisme surjectif de $C(G)$ vers $C(H)$ qui entrelace les comultiplication alors H a la co-propriété (T).*

La première assertion du théorème généralise au cas non-commutatif le résultat de Kazhdan assurant qu'un groupe discret dénombrable avec la propriété (T) est de type fini. Le fait que l'état de Haar soit une trace n'est pas non plus surprenant car cela signifie que notre groupe quantique est *unimodulaire* ce qui est un résultat bien connu pour les groupes localement compact avec la propriété (T).

Il découle de l'assertion 2 du théorème précédent que, sauf dans les cas de dimension finie, les groupes quantiques libres orthogonaux, unitaires et de permutations n'ont pas la co-propriété (T). Le problème de construire un exemple non-trivial de groupe quantique discret ayant la propriété (T) est résolu plus tard, dans [FMP17].

3.1.2 K-moyennabilité

Le plus célèbre problème ouvert dans la théorie des algèbres d'opérateurs est certainement celui sur l'isomorphisme des facteurs de groupes libres qui pose le question de savoir si oui ou non les facteurs II_1 de groupes libres $\mathrm{L}(\mathbb{F}_n)$ et $\mathrm{L}(\mathbb{F}_m)$ sont isomorphes pour $n \neq m$. Dans le cadres des C*-algèbres pleines et réduites ce problème a été résolu depuis longtemps en calculant leurs groupes de K-théorie. En 1982, Cuntz [Cun82] a montré que $K_1(C^*(\mathbb{F}_n)) = \mathbb{Z}^n$ et Pimsner et Voiculescu [PV82] ont montré que $K_1(C_r^*(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}^n$. Il découle de ces calculs que les C*-algèbres réduites (resp. pleines) des groupes $\mathbb{F}_n$ sont deux à deux non-isomorphes pour $n \geq 1$. Le calcul de la K-théorie de la C*-algèbre réduite est très difficile, à l'opposé du calcul de Cuntz de la C*-algèbre maximal. De plus la méthode de Pimsner et Voiculescu ne s'applique pas au calcul de la K-homologie et des groupes de KK-théorie. Cuntz réalisa alors qu'il serait plus efficace et élégant de déduire le résultat sur la C*-algèbre réduite à partir du résultat sur la C*-algèbre maximale. C'est ainsi qu'il introduit dans [Cun83] la notion de K-moyennabilité.

Un groupe discret dénombrable Γ est dit *K-moyennable* si la surjection canonique $\lambda : C^*(\Gamma) \to C_r^*(\Gamma)$ est inversible dans $KK(C^*(\Gamma), C_r^*(\Gamma))$. En particulier $C^*(\Gamma)$ et $C_r^*(\Gamma)$ sont KK-equivalentes lorsque Γ est K-moyennable. Cuntz démontre dans [Cun83] que les groupes libres sont K-moyennabes. Julg et Valette montrent dans [JV84] que les groupes agissant sur un arbre avec des stabilisateurs moyennables sont K-moyennables. Pimsner [Pim86] généralisa ensuite ce résultat dans le cas où les stabilisateurs sont seulement K-moyennables.

Dans le cadre des C*-algèbres, Skandalis [Ska88] introduit une notion de K-nucléarité et Germain démontra [Ger96] que le produit libre réduit de deux C*-algèbres nucléaires est K-nucléaire.

Dans le cadre des groupes quantiques, les travaux de Baaj et Skandalis [BS89] sur la KK-théorie équivariante pour les actions de C*-algèbres de Hopf ont permis à Vergnioux [Ver04] d'introduire et d'étudier la K-moyennabilité pour les groupes quantiques localement compacts.

Un GQC G est dit *co-K-moyennable* si la surjection canonique $\lambda_G : C_m(G) \to C_r(G)$ est inversible dans $KK(C_m(G), C_r(G))$. Vergnioux démontre dans [Ver04] que le produit libre amalgamé de deux GQC co-moyennables est co-K-moyennable. La co-K-moyennabilité du groupe quantique libre orthogonal est démontré par Voigt dans [Voi11]. Le cas des groupes quantiques libres unitaires et de leurs produits libres avec des groupes quantiques libres orthogonaux est résolu par Vergnioux et Voigt dans [VV13]. Enfin Voigt démontre la co-K-moyennabilité du groupe quantique d'automorphismes d'une C*-algèbre de dimension finie dans [Voi12, Voi14]

Rappelons que, par la théorie de Bass-Serre, un groupe agissant sans inversion sur un arbre non-trivial est une itération de produits libres amalgamés et d'extensions HNN. Afin de généraliser le théorème de Julg et Valette il faut donc commencer par considérer le cas d'une extension HNN de GQC co-moyennable. Nous introduisons dans [Fim13] les extensions HNN de GQC.

Commençons par les extensions HNN de C*-algèbres introduites par Ueda [Ued05]. Soient A une C*-algèbre unifère, $B \subset A$ une sous-C*-algèbre unifère et $\theta : B \to A$ un $*$-morphisme unifère injectif. Nous noterons :

$$B_\epsilon = \begin{cases} \theta(B) & \text{si} \quad \epsilon = -1, \\ B & \text{si} \quad \epsilon = 1. \end{cases}$$

L'*extension HNN maximale* est la C*-algèbre unifère universelle engendrée par A et par un unitaire w tels que $wbw^* = \theta(b)$ pour tout $b \in B$. On la note $\mathrm{HNN}_m(A, B, \theta)$.

Supposons maintenant qu'il existe, pour $\epsilon \in \{-1, 1\}$, une espérance conditionnelle GNS fidèle $E_\epsilon : A \to B_\epsilon$. Il est alors possible de construire une extension HNN réduite qui vérifie également une propriété universelle.

Théorème 3.7 ([Fim13]). *Il existe une unique, à isomorphisme canonique près, C*-algèbre unifère P engendrée par A et un unitaire u et munie d'une espérance conditionnelle GNS fidèle $E : P \to A$ telle que*

1. *$ubu^* = \theta(b)$ pour tout $b \in B$,*
2. *Pour tous $n \geq 1$, $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$, $a_0, \ldots, a_k \in A$ tels que $E_{\epsilon_k}(a_k) = 0$ dès que $\epsilon_k \neq \epsilon_{k+1}$ on a $E(a_0 u^{\epsilon_1} \ldots u^{\epsilon_n} a_n) = 0$.*

La C*-algèbre du théorème précédent se note $\mathrm{HNN}_r(A, B, \theta)$ et s'appelle l'*extension HNN réduite*.

Supposons maintenant que G et H soient deux GQC tels qu'il y ait une inclusion unifère $C_r(H) \subset C_r(G)$ et un $*$-morphisme unifère et injectif $\theta : C_r(H) \to C_r(G)$ qui entrelacent les comultiplications. La théorie générale assure qu'il existe une espérance conditionnelle GNS fidèle de $C_r(G)$ sur $C_r(H)$ (resp. $\theta(C_r(H))$). De plus, l'inclusion et l'$*$-morphisme θ définissent également une inclusion et un $*$-morphisme injectif, toujours noté θ, au niveau des C*-algèbres maximales qui entrelacent les comultiplications. On peut donc considérer les C*-algèbres $P_r = \mathrm{HNN}_r(C_r(G), C_r(H), \theta)$ et $P_m = \mathrm{HNN}_m(C_m(G), C_m(H), \theta)$. Par la propriété universelle de P_m, il existe un unique $*$-morphisme unifère $\Delta : P_m \to P_m \otimes P_m$ tel que

$$\Delta(u) = u \otimes u \quad \text{et} \quad \Delta(a) = \Delta_G(a) \text{ pour tout } a \in C_m(G).$$

La paire (P_m, Δ) est un GQC que l'on appelle l'*extension HNN* que l'on note G_H^θ. Nous noterons également $\lambda : P_m \to P_r$ l'unique $*$-morphisme unifère tel que $\lambda(w) = u$ et $\lambda(a) = \lambda_G(a)$ pour tout $a \in C_m(G)$.

Théorème 3.8 ([Fim13]). *On a :*

1. *L'état de Haar de G_H^θ est $h_G \circ E \circ \lambda$, où $h_G \in C_m(G)^*$ est l'état de Haar de G.*
2. *La catégorie des représentations de G_H^θ est engendrée par* $\mathrm{Irr}(G)$ *et u.*
3. *La C*-algèbre réduite de G_H^θ est P_r, la maximale est P_m.*
4. *Si G est co-moyennable alors G_H^θ est co-K-moyennable.*

Par théorie de Bass-Serre, le théorème de Julg et Valette peut être énoncé de la façon suivante. Si Γ est le groupe fondamental d'un graphe de groupes $(\mathcal{G}, \Gamma_p, \Sigma_e)$ et si les Γ_p sont moyennables alors Γ est K-moyennable. Dans un travail en collaboration avec Freslon [FF14], nous construisons le groupe quantique fondamental d'un graphe de groupes quantiques.

Commençons par la construction de la C*-algèbre fondamentale d'un graphe de C*-algèbres. Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe. Nous noterons $\mathrm{E}(\mathcal{G})$ (resp. $\mathrm{V}(\mathcal{G})$) l'ensemble des arêtes (resp. sommets), $s : \mathrm{E}(\mathcal{G}) \to \mathrm{V}(\mathcal{G})$ l'application source et $\overline{e}$ l'arête opposée de $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$. L'application but est alors définie par $r(e) = s(\overline{e})$.

Définition 3.9 ([FF14]). Un graphe de C*-algèbres est uplet $(\mathcal{G}, (A_p)_{p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})}, (B_e)_{e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})}, (s_e)_{e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})})$ où

— $\mathcal{G}$ est un graphe connexe.
— A_p et B_e sont des C*-algèbres unifères et $B_e = B_{\overline{e}}$ pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$.
— $s_e : B_e \to A_{s(e)}$ est un $*$-morphisme unifère et fidèle.

On note $r_e : B_e \to A_{r(e)}$ l'application $r_e = s_{\overline{e}}$. Pour simplifier les notations nous désignerons un graphe de C*-algèbres par $(\mathcal{G}, A_p, B_e)$. Nous noterons également $B_e^s = s_e(B_e)$.

Fixons un sous-arbre maximal $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$. La *C*-algèbre fondamentale maximale* (relativement à $\mathcal{T}$) est la C*-algèbre unifère universelle engendrée par les A_p, $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$, et des unitaires w_e, $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$, avec les relations :

— pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$, $w_e^* = w_{\overline{e}}$,
— pour tous $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$, $b \in B_e$, $w_{\overline{e}} s_e(b) w_e = r_e(b)$,
— pour tout $e \in E(\mathcal{T})$, $w_e = 1$.

En utilisant la connexité de $\mathcal{G}$ il est facile de vérifier que la C*-algèbre fondamentale ne dépend pas du choix du sous-arbre maximal.

Supposons maintenant qu'il existe, pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$, une espérance conditionnelle GNS fidèle $E_e^s : A_e \to B_e^s$. Il est alors possible de construire la C*-algèbre fondamentale réduite qui vérifie également une propriété universelle.

Fixons $p_0 \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$. Une famille $\mathcal{F} = \{(\pi_p)_{p\in \mathrm{V}(\mathcal{G})}, (u_e)_{e\in\mathrm{E}(\mathcal{G})}\}$ de représentations fidèles sur des A_{p_0}-modules Hilbertiens $\pi_p : A_p \to \mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_p)$ et d'unitaires $u_e \in \mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_{r(e)}, \mathcal{H}_{s(e)})$ est dite *admissible* si,

$$u_e^* = u_{\overline{e}} \quad \text{et} \quad u_{\overline{e}}\pi_{s(e)}(s_e(b))u_e = \pi_{r(e)}(r_e(b)) \quad \text{pour tous} \quad e \in \mathrm{E}(\mathcal{G}),\ b \in B_e.$$

Soient $\mathcal{F} = \{(\pi_p)_{p\in \mathrm{V}(\mathcal{G})}, (u_e)_{e\in\mathrm{E}(\mathcal{G})}\}$ une famille admissible et $A_{\mathcal{F}}$ le sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_{p_0})$ engendré par $\pi_{p_0}(A_{p_0})$ et les opérateurs de la forme

$$\pi_{s(e_1)}(a_0)u_{e_1}\dots u_{e_n}\pi_{r(e_n)}(a_n),$$

où $n \geq 1$, $(e_1, \dots, e_n)$ est un chemin dans $\mathcal{G}$ de p_0 à p_0, $a_0 \in A_{p_0}$ et, pour $1 \leq k \leq n$, $a_k \in A_{r(e_k)}$. Comme $\mathcal{F}$ est admissible, $A_{\mathcal{F}}$ est une C*-algèbre. Un opérateur $a = \pi_{s(e_1)}(a_0)u_{e_1}\dots u_{e_n}\pi_{r(e_n)}(a_n) \in A_{\mathcal{F}}$ est dit *réduit* si, pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $E^s_{k+1}(a_k) = 0$ dès que $e_{k+1} = \overline{e_k}$. Nous dirons que la famille $\mathcal{F}$ est *réduite* s'il existe une espérance conditionnelle GNS fidèle $E : A_{\mathcal{F}} \to \pi_{p_0}(A_{p_0})$ telle que $E(a) = 0$ pour tout opérateur réduit $a \in A_{\mathcal{F}}$.

Deux familles admissibles $\mathcal{F} = \{(\pi_p)_{p\in \mathrm{V}(\mathcal{G})}, (u_e)_{e\in\mathrm{E}(\mathcal{G})}\}$ et $\mathcal{F}' = \{(\pi'_p)_{p\in \mathrm{V}(\mathcal{G})}, (u'_e)_{e\in\mathrm{E}(\mathcal{G})}\}$ sont dites *isomorphes* s'il existe un (unique) $*$-isomorphisme $\rho : A_{\mathcal{F}} \to A_{\mathcal{F}'}$ tel que $\rho(a) = \pi_{p_0}(a)$ pour tout $a \in A_{p_0}$ et,

$$\rho(\pi_{s(e_1)}(a_0)u_{e_1}\dots u_{e_n}\pi_{r(e_n)}(a_n)) = \pi'_{s(e_1)}(a_0)u'_{e_1}\dots u'_{e_n}\pi'_{r(e_n)}(a_n),$$

pour tout opérateur réduit $\pi_{s(e_1)}(a_0)u_{e_1}\dots u_{e_n}\pi_{r(e_n)}(a_n) \in A_{\mathcal{F}}$.

Théorème 3.10 ([FF14])**.** *Pour tout $p_0 \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$ fixé il existe une unique, à isomorphisme près, famille admissible réduite $\mathcal{F}_{p_0}$. De plus, $A_{\mathcal{F}_{p_0}}$ est exacte si et seulement si A_p est exacte pour tout $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$.*

La C*-algèbre $A_{\mathcal{F}_{p_0}}$ s'appelle la C*-algèbre fondamentale réduite. Elle ne dépend pas du choix de $p_0 \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$. Comme les représentations π_p sont fidèles, on supposera dans la suite que $A_p \subset \mathcal{L}_{A_{p_0}}(\mathcal{H}_p)$ et que $\pi_p = \mathrm{id}$.

Plaçons nous maintenant dans le cadre des GQC.

Définition 3.11 ([FF14])**.** Un graphe de GQC est un uplet $(\mathcal{G}, (G_p)_{p\in\mathrm{V}(\mathcal{G})}, (G_e)_{e\in\mathrm{E}(\mathcal{G})}, (s_e)_{e\in\mathrm{E}(\mathcal{G})})$ où

- $\mathcal{G}$ est un graphe connexe.
- G_p et G_e sont des GQC et $G_e = G_{\overline{e}}$ pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$.
- $s_e : C_m(G_e) \to C_m(G_{s(e)})$ est un $*$-morphisme unifère et fidèle qui entrelace les comultiplications.

Comme dans le cas des extensions HNN on obtient deux graphes de C*-algèbres $(\mathcal{G}, C_m(G_p), C_m(G_e))$ et $(\mathcal{G}, C_r(G_p), C_r(G_e))$ et, pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$, on a une espérance conditionnelle GNS fidèle canonique $E^s_e : C_r(G_{s(e)}) \to C_r(G_e)$. On peut donc considérer la C*-algèbre fondamentale maximale P_m du graphe de C*-algèbres $(\mathcal{G}, C_m(G_p), C_m(G_e))$ ainsi que la C*-algèbre fondamentale réduite P_r du graphe de C*-algèbres $(\mathcal{G}, C_r(G_p), C_r(G_e))$. Par propriété universelle de P_m, il existe un unique $*$-morphisme unifère $\Delta : P_m \to P_m \otimes P_m$ tel que

$$\Delta(u_e) = u_e \otimes u_e \text{ pour tout } e \in \mathrm{E}(\mathcal{G}) \quad \text{et} \quad \Delta(a) = \Delta_{G_p}(a) \text{ pour tous } a \in C_m(G_p),\ p \in \mathrm{V}(\mathcal{G}).$$

On obtient ainsi un GQC $G = (P_m, \Delta)$ que l'on appelle le *groupe quantique fondamental*. Nous noterons également $\lambda : P_m \to P_r$ l'unique $*$-morphisme unifère obtenu par propriété universelle vérifiant :

$$\lambda(a_o w_{e_1}\dots w_{e_n}a_n) = \lambda_{G_{p_0}}(a_0)u_{e_1}\dots u_{e_n}\lambda_{G_{p_0}}(a_n).$$

Nous dirons qu'un groupe GQC unimodulaire G est *co-hyperlinéaire* si $\mathrm{L}^\infty(G)$ se plonge dans un ultraproduit $\mathcal{R}^\omega$ du facteur hyperfini II_1 $\mathcal{R}$.

Théorème 3.12 ([FF14])**.** *Soit $(\mathcal{G}, G_p, G_e)$ un graphe de GQC et G le GQC fondamental en $p_0 \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$.*

1. *L'état de Haar de G est $h = h_{G_{p_0}} \circ E \circ \lambda$, où $h_{G_{p_0}}$ est la mesure de Haar sur G_{p_0}.*
2. *La catégorie des représentations de G est engendrée par $\mathrm{Irr}(G_p)$, pour $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$ et les u_e pour $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$.*
3. *La C*-algèbre réduite de G est P_r et la maximale est P_m.*
4. *G est unimodulaire si et seulement si G_p est unimodulaire pour tout $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$.*

5. *Si G est unimodulaire et G_e est co-moyennable pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$ alors G est co-hyperlinéaire si et seulement si G_p est co-hyperlinéaire pour tout $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$.*
6. *Si G est unimodulaire et $C(G_e)$ est de dimension finie pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$ alors G a la co-propriété de Haagerup (voir section 3.2.3) si et seulement si G_p a la co-propriété de Haagerup pour tout $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$.*
7. *Si G est unimodulaire et $C(G_e)$ est de dimension finie pour tout $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$ alors G est co-faiblement moyennable avec constante* 1 *si et seulement si G_p est co-faiblement moyennable avec constante* 1 *pour tout $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$.*

Le prochain théorème généralise le résultat de Julg et Valette au cas des groupes quantiques, modulo la théorie de Bass-Serre. Il n'existe pas de théorie de Bass-Serre pour les groupes quantiques. De plus, quelque soit la définition d'un groupe quantique agissant sans inversion sur un arbre, il est clair qu'il ne sera pas, en général, isomorphe à un groupe quantique fondamental d'un graphe de groupes quantiques car ce dernier admet beaucoup trop de représentations unitaire de dimension 1 (les u_e, $e \in \mathrm{E}(\mathcal{G})$). Un groupe quantique fondamental est en quelque sorte "trop co-commutatif " pour décrire tous les groupes quantiques agissant sur un arbre. Le résultat suivant donne quand même de nouveau exemples de GQC co-K-moyennables : les itérations d'extensions HNN et de produits libres amalgamés où les GQC initiaux sont co-moyennables.

Théorème 3.13 ([FF14]). *Soit $(\mathcal{G}, G_p, G_e)$ un graphe de GQC et G le GQC fondamental. Si G_p est co-moyennable pour tout $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$ alors G est co-K-moyennable.*

La preuve du théorème de Julg et Valette ne fonctionne pas dans le cas quantique. Pour démontrer le théorème précédent nous avons d'abord trouvé une autre preuve plus explicite pour les groupes puis nous l'avons adapté au cas quantique. Notre preuve ne fonctionne plus si l'on suppose que les G_p sont seulement co-K-moyennables. Plus tard et à l'aide de nouvelles techniques, je démontre dans [**?**] que le groupe quantique fondamental d'un graphe de groupes quantiques $(\mathcal{G}, G_p, G_e)$ est co-K-moyennable si et seulement si G_p est co-K-moyennable pour tout $p \in \mathrm{V}(\mathcal{G})$.

3.1.3 Solidité forte et propriété de Haagerup renforçée pour le groupe quantique libre orthogonal

Le premier groupe quantique non-trivial pour lequel la propriété de Haagerup (voir section 3.2.3.) a été démontrée est le groupe quantique libre orthogonal. Une preuve très élégante est donnée par Brannan dans [**?**]. Sachant que Vergnioux avait montré précédemment que tout cocyle propre à valeurs dans une représentation équivalente à une somme directe de copies de la régulière est toujours trivial, si l'on veut construire un cocyle propre qui donne la propriété de Haagerup, ce cocyle doit avoir ses valeurs dans une représentation qui n'est pas une somme directe de la régulière. Je construis dans [FV15], en collaboration avec Roland Vergnioux, ce cocycle propre à valeurs dans une représentation qui est "presque une somme directe de copies de la régulière" : c'est une représentation faiblement contenue dans la régulière ! Cela démontre la propriété $(HH)^+$ d'Ozawa-Popa et me permet également de montrer que le dual d'un groupe quantique libre orthogonal n'est pas intérieurement moyennable. J'en déduit également, en utilisant la méthode de déformation/rigidité de Popa et les techniques d'actions faiblement compactes d'Ozawa-Popa, une preuve simple du fait que l'algèbre de von Neumann d'un groupe quantique libre orthogonal est fortement solide.

3.1.4 Produit de graphe d'algèbres d'opérateurs et de groupes quantiques

Le produit de graphe [Gre90] est une construction de théorie des groupes introduite par Green dans sa thèse en 1990. Les exemples de base de cette construction sont les produits directs, les produits libres, les groupes de Coxeter et les groupes d'Artin dits *right angled*. Cette construction est une source importante d'exemples en théorie des groupes car elle préserve de nombreuses propriétés telles que la soficité, la propriété de Haagerup, de décroissance rapide ainsi que le fait d'être résiduellemment fini ou linéaire et bien d'autres encore.

Bien que toutes ces propriétés ont d'importantes conséquences en algèbres d'opérateurs, la construction du produit de graphe pour les algèbres d'opérateurs n'avait jamais été développée précédemment. L'étude de cette construction d'un point de vue algèbres d'opérateurs et des propriétés d'approximation du produit de graphe est l'objet principal de [FC17].

Étant donné un graphe simplicial $\mathcal{G}$ et une famille de groupes G_p, pour $p \in V(\mathcal{G})$, où $V(\mathcal{G})$ est l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$, le produit de graphe des G_p est le groupe G engendré par les groupes G_p et avec les relations supplémentaires faisant commuter tous les éléments de G_p avec tous les éléments de G_q lorsque p et q sont joints par une arête.

Je construis dans [FC17], en collaboration avec Martijn Caspers, le produit de graphe d'espaces de Hilbert, d'algèbres d'opérateurs (C*-algèbres et algèbres de von Neumann) et de groupes quantiques. Cette construction est faite pour être compatible avec la construction de Green : si G_p, $p \in V(\mathcal{G})$, est une famille de groupes et G leur produit de graphe alors le produit de graphe C*-algébrique maximal des C*-algèbres $C^*(G_p)$ est la C*-algèbre $C^*(G)$, le produit de graphe C*-algébrique réduit des C*-algèbres $C^*_r(G_p)$ (relativement aux traces canoniques) est $C^*_r(G)$ et le produit de graphe von Neumann des algèbres de von Neumann $\mathrm{L}(G_p)$ (relativement aux traces canoniques) est $\mathrm{L}(G)$.

Je calcule tous les ingrédients du produit de graphe en termes des données associées aux sommets : les ingrédients de la théorie de Tomita-Takesaki pour les algèbres de von Neumann, les commutants, représentations GNS, la théorie des représentations pour les groupes quantiques compacts. Je montre également, dans les cadres C*-algébriques pleins, réduits et von Neumann que tout produit de graphe se décompose récursivement comme un produit libre amalgamé dans un sens très précis. Ainsi, toutes les propriétés préservées par produit libre amalgamé le sont également par produit de graphe. Cependant, la propriété de Haagerup n'est pas préservé par produit libre amalgamé mais je démontre quand même le résultat suivant.

Théorème 3.14. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe simplicial au plus dénombrable et M_p, pour $p \in V(\mathcal{G})$, une algèbre de von Neumann. Soit M le produit de graphe.*

1. *Si chaque M_p est σ-finie alors M (qui est σ-finie) a la propriété de Haagerup si et seulement si M_p a la propriété de Haagerup pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.*
2. *Si, pour tout $p \in V(\mathcal{G})$, M_p est un facteur II_1 alors M est un facteur II_1.*

Notons que la preuve de la stabilité de la propriété de Haagerup donne, dans le cas des groupes, une nouvelle preuve, à mon avis plus simple que [AD14], de la stabilité de la propriété de Haagerup par produit de graphe de groupes. Cependant, étant donné que pour les groupes quantiques non Kac la propriété de Haagerup de l'algèbre de von Neumann n'est pas nécessairement équivalente à la propriété de Haagerup du groupe quantique, ce résultat ne suffit pas pour déduire la stabilité de Haagerup pour le produit de graphe des groupes quantiques. C'est pourquoi la première assertion du résultat suivant est non-triviale dans le cas non Kac.

Théorème 3.15. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe simplicial au plus dénombrable et G_p, pour $p \in V(\mathcal{G})$, une famille de groupes quantiques compacts. Soit G le produit de graphe.*

1. *$\widehat{G}$ a la propriété de Haagerup si et seulement si $\widehat{G}_p$ l'a pour tout $p \in V(\mathcal{G})$.*
2. *Si $\mathcal{G}$ est fini alors, si pour tout $p \in V(\mathcal{G})$, $\widehat{G}_p$ est un groupe classique à décroissance rapide ou bien un groupe quantique à croissance polynomiale alors $\widehat{G}$ est à décroissance rapide.*
3. *Si $\mathcal{G}$ n'a pas d'arêtes et si, pour tout $p \in V(\mathcal{G})$, $\widehat{G}_p$ est à décroissance rapide alors $\widehat{G} = *_{p\in V(\mathcal{G})}\widehat{G}_p$ est à décroissance rapide.*

3.1.5 Propriétés d'approximations des biproduits croisés compacts

Afin d'obtenir de nombreux exemples non-triviaux de groupes quantiques Kac a introduit la construction du biproduit croisé de groupes finis. Cette construction a depuis été étudiée dans différents contextes par de nombreux auteurs et sa formulation finale pour les groupes quantiques localement compacts est due à Vaes et Vainerman [VV03].

Soient G un groupe localement compact, μ une mesure de Haar à gauche et G_1, G_2 deux sous-groupes fermés de G. Nous dirons que (G_1, G_2) est un *couple assorti* si $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ et $\mu(G - G_1G_2) = 0$.

Lorsque (G_1, G_2) est un couple assorti, on peut écrire pour presque tout $g \in G_1$, $s \in G_2$, $gs = \alpha_g(s)\beta_s(g)$. On obtient ainsi deux applications définies presque partout et mesurables :

$$\begin{aligned} \alpha \,:\, G_1 \times G_2 \to G_2 \,:\, &\qquad (g,s) \to \alpha_g(s), \\ \beta \,:\, G_2 \times G_1 \to G_1 \,:\, &\qquad (s,g) \to \beta_s(g). \end{aligned}$$

On montre que α est une action de G_1 sur $\mathrm{L}^\infty(G_2)$ et β est une action de G_2 sur $\mathrm{L}^\infty(G_1)$. Vaes et Vainerman construisent dans [VV03] un groupe quantique localement compact (voir définition 3.26) $\mathbb{G}$, appelé *biproduit croisé*, tel que :

$$\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G}) = \mathrm{L}^\infty(G_2) \rtimes_\alpha G_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{L}^\infty(\widehat{\mathbb{G}}) = \mathrm{L}^\infty(G_1) \rtimes_\beta G_2.$$

Vaes et Vainerman démontrent que le biproduit croisé est compact si et seulement si G_1 est discret et G_2 est compact. Étant donné le manque de régularité (en général l'ensemble $G - G_1G_2$ peut-être non-vide et les actions α et β sont seulement définies presque partout), la construction du biproduit croisé est très technique.

Dans [FMP17], en collaboration avec Kunal Mukherjee et Issan Patri, j'étudie la construction du biproduit croisé $\mathbb{G}$ lorsque $\mathbb{G}$ est compact. Le premier résultat que j'obtiens est une régularité automatique de la paire (G_1, G_2) lorsque G_1 est discret et G_2 est compact.

Proposition 3.16. *Soit (G_1, G_2) une paire de sous groupes fermés d'un groupe localement compact H avec $G_1 \cap G_2 = \{1\}$ et $H \setminus G_1G_2$ de mesure de Haar nulle. Si G_1 est discret et G_2 est compact alors $G_1G_2 = H$. De plus, α est une action à gauche, continue, de G_1 sur l'espace topologique G_2 et la mesure de Haar de G_2 est α-invariante. Enfin, β est une action à droite, continue, de G_2 sur l'espace topologique G_1.*

Notons maintenant (Γ, G) une paire assortie avec Γ discret et G compact et α, β les actions de Γ et G respectivement. Nous noterons, pour $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \cdot g := \beta_g(\gamma)$. Comme β est une action continue de G sur l'espace topologique discret Γ, il est facile de vérifier que les ensemble $A_{r,s} := \{g \in G \,:\, r.g = s\}$ sont à la fois ouverts et fermés dans G. Donc les fonctions indicatrices $v_{r,s} := 1_{A_{r,s}}$ sont continues sur G. De plus, la compacité de G implique que toutes les β-orbites sont finies. Pour toute β-orbite $\gamma \cdot G \in \Gamma/G$ nous avons donc une matrice $v^{\gamma \cdot G} = (v_{r,s}) \in M_{|\gamma \cdot G|}(\mathbb{C}) \otimes C(G)$ et il est facile de vérifier que c'est une représentation unitaire de G et un unitaire magique (chaque ligne et chaque colonne est une partition de l'unité dans $C(G)$).

À l'aide de ces remarques, la construction du biproduit croisé devient très simple. Soient $A_m := \Gamma\,{}_{\alpha,m}\!\ltimes C(G)$ le produit croisé maximal et $A = \Gamma\,{}_\alpha\!\ltimes C(G)$ le produit croisé réduit, engendré par les unitaires canoniques u_γ, $\gamma \in \Gamma$ et l'image du morphisme $C(G) \to A$, que l'on note encore α. Comme la mesure de Haar (normalisée) μ sur G est α-invariante il existe une unique trace fidèle τ sur A telle que $\tau(u_\gamma \alpha(F)) = \delta_{g,1} \int_G F d\mu$ pour tous $g \in \Gamma$, $F \in C(G)$. Notons $\lambda \,:\, A_m \to A$ la surjection canonique.

En utilisant la propriété universelle du produit croisé maximal A_m, on construit un unique $*$-morphisme unifère $\Delta_m \,:\, A_m \to A_m \otimes A_m$ tel que

$$\Delta_m \circ \alpha = (\alpha \otimes \alpha) \circ \Delta_m \quad \text{et} \quad \Delta_m(u_\gamma) = \sum_{r \in \gamma \cdot G} u_\gamma \alpha(v_{\gamma,r}) \quad \text{pour tous } \gamma \in \Gamma.$$

Je montre alors le résultat suivant.

Théorème 3.17. *$\mathbb{G} = (A_m, \Delta_m)$ est un groupe quantique compact et l'on a :*

1. *L'état de Haar est $h = \tau \circ \lambda$.*
2. *Toute représentation irréductible de $\mathbb{G}$ est équivalente à une sous-représentation d'une représentation unitaire de $\mathbb{G}$ de la forme $V^{\gamma \cdot G} \otimes v$ pour $\gamma \cdot G \in \Gamma/G$ avec $V^{\gamma \cdot G} := \sum_{r,s \in \gamma \cdot G} e_{r,s} \otimes u_r \alpha(v_{r,s}) \in M_{|\gamma \cdot G|}(\mathbb{C}) \otimes A_m$ et $v = (\mathrm{id} \otimes \alpha)(u)$ où u est une représentation unitaire irréductible de G.*
3. *On a $C_m(\mathbb{G}) = A_m$, $C_r(\mathbb{G}) = A$, λ est la surjection canonique et $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ est le produit croisé von Neumann.*
4. *$\mathbb{G}$ est co-moyennable si et seulement si Γ est moyennable.*
5. *Si Γ est K-moyennable alors $\widehat{\mathbb{G}}$ est K-moyennable.*
6. *Si $\widehat{\mathbb{G}}$ a la propriété de Haagerup alors Γ a la propriété de Haagerup.*
7. *Si l'action $\Gamma \curvearrowright \mathrm{L}^\infty(G)$ est compact et Γ a la propriété de Haagerup alors $\widehat{\mathbb{G}}$ a la propriété de Haagerup.*

Le groupe quantique construit dans le théorème précédent est exactement le biproduit croisé construit dans [VV03] mais l'on voit que, grâce à la régularité de la paire (G_1, G_2) lorsque G_1 est discret et G_2 est compact, la construction du biproduit croisé et le calcul des ses représentations irréductibles devient très simple.

À l'aide de cette description, j'étudie ensuite la propriété (T) relative et la propriété de Haagerup relative pour la paire $(G, \mathbb{G})$. J'obtiens la caractérisation suivante qui généralise le résultat de Cornulier-Tessera [DCT11] valable pour un produit semi-direct avec un groupe abélien.

Théorème 3.18. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *La paire $(G, \mathbb{G})$ n'a pas la co-propriété (T) relative.*
2. *Il existe une suite $(\mu_n)_n$ de mesures de probabilités boréliennes sur G telle que*
   — $\nu_n(\{1\} = 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
   — $\mu_n \to \delta_1$ **-faiblement ;*
   — $\|\alpha_\gamma(\mu_n) - \mu_n\| \to 0$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$.

De plus, les assertions suivantes sont également équivalentes.

1. *La paire $(G, \mathbb{G})$ a la co-propriété de Haagerup.*
2. *Il existe une suite $(\mu_n)_n$ de mesures de probabilités boréliennes sur G telle que*
   — *La transformée de Fourier de* μ_n *est dans* $C_r^*(G)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
   — $\mu_n \to \delta_1$ **-faiblement ;*
   — $\|\alpha_\gamma(\mu_n) - \mu_n\| \to 0$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma$.

Au sujet de la propriété (T) j'obtiens le résultat suivant.

Théorème 3.19. *On a :*

1. *Si* $\widehat{\mathbb{G}}$ *a* (T) *alors* Γ *a* (T) *et* $G^\alpha := \{g \in G : \alpha_\gamma(g) = g$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma\}$ *est fini.*
2. *Si* $\widehat{\mathbb{G}}$ *a* (T) *et* α *est compact alors* Γ *a* (T) *et* G *est fini.*
3. *Si* Γ *a* (T) *et* G *est fini alors* $\widehat{\mathbb{G}}$ *a* (T).

Je donne également une méthode systématique pour construire des exemples explicites de biproduits croisés non-triviaux (tels que les actions α et β soient non-triviales) par déformation de paire assortie à l'aide de *morphismes tordus* et j'obtiens ainsi une série d'exemples satisfaisant différentes propriétés d'approximations. Notamment, j'obtiens les premiers exemples explicites de groupes quantiques discrets non-triviaux (c'est-à-dire ne provenant pas d'un groupe classique) qui ont la propriété (T). J'obtiens également les premiers exemples non-triviaux avec la co-propriété (T) relative et de nombreux exemples non-triviaux avec la propriété de Haagerup, la moyennabilité faible.

Pour construire de tels exemples, on considère la situation suivante. Soient $n, p \geq 3$ deux entiers naturels et l'on suppose également que p est premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps fini de cardinal p et $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$, $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ et $q : \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ la surjection canonique. On définit une action à droite de G sur Γ en posant $\beta_g(\gamma, h) = (\gamma, g^{-1}hg)$. Remarquons que β est non-triviale car G n'est pas abélien. On notera $H = \Gamma \rtimes_\beta G$ le groupe localement compact obtenu par produit semi-direct. Les deux inclusions canoniques de Γ et de G dans H en font une paire assortie (Γ, G) triviale : l'action de G sur Γ est β mais l'action de Γ sur G est triviale. Pour obtenir une paire non-triviale on la déforme à l'aide du morphisme de groupes $\chi : \Gamma \to G$, $\chi(\gamma, h) = q(\gamma)$. On définit $\Gamma_\chi := \mathrm{Graphe}(\chi) = \{(\gamma, \chi(\gamma)) : \gamma \in \Gamma\} \subset H$. Il est facile de vérifier que Γ_χ est un sous-groupe fermé (et discret) de H et que la paire (Γ_χ, G) est assortie et non-triviale : l'action de G sur Γ_χ est toujours β (après identification canonique de Γ_χ avec Γ en tant qu'espace topologique) et l'action de Γ_χ sur G est donnée par $\alpha_\gamma(g) = \chi(\gamma)g\chi(\gamma)^{-1}$, pour $g \in G$ et $\gamma \in \Gamma_\chi$. Cette action est non-triviale car G n'est pas abélien. On obtient donc un biproduit croisé non-trivial que l'on note $\mathbb{G}_{n,p}$. Par le théorème 3.19, $\widehat{\mathbb{G}}_{n,p}$ a la propriété (T). De plus, il est facile de calculer le spectre de la C*-algèbre $C_m(\mathbb{G}_{n,p})$ et on trouve $\mathrm{Sp}(C_m(\mathbb{G}_{n,p})) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, ou $d = pgcd(n, p-1)$. En particulier, les groupes quantiques compacts $\mathbb{G}_{p,p}$ sont deux à deux non-isomorphes, pour $p \geq 3$ premier, et leurs duaux ont la propriété (T).

Dans la dernière partie de ce travail, j'étudie les propriétés d'approximations pour un groupe quantique obtenu par produit croisé d'un groupe quantique compact par une action par automorphismes quantiques d'un groupe classique discret. J'obtiens l'analogue des théorèmes 3.18 et 3.19 et j'étudie aussi la moyennabilité faible et la propriété de décroissance rapide. Je donne enfin de nombreux exemples explicites non-triviaux de tels produits croisés avec les différentes propriétés d'approximations mentionnées précédemment.

3.1.6 Le produit en couronne libre

Le produit en couronne libre $G \int_* S_N^+$ d'un groupe quantique compact G par le groupe quantique de permutations S_N^+ a été introduit par Bichon [Bic04] comme une version quantique libérée du produit en couronne classique d'un groupe classique par le groupe des permutations S_N. La motivation initiale de Bichon était de décrire le groupe quantique des symétries de N copies d'un graphe fini en termes du groupe quantique des symétries du graphe initial et de S_N^+. Un premier exemple très simple est analysé dans [Bic04], c'est le produit en couronne libre de la forme $\widehat{\mathbb{Z}}_2 \int_* S_N^+$ et les représentations irréductibles sont calculées. Puis Banica et Vergnioux [BV09] étudient les produits en couronne libres $\widehat{\mathbb{Z}}_s \int_* S_N^+$ et ils calculent notamment les représentations irréductibles et les règles de fusion. Un grand pas en avant dans la généralisation de ces résultats est fait par Lemeux [Lem14] qui calcule la catégorie des représentations pour les produits en couronne libres de la forme $\widehat{\Gamma} \int_* S_N^+$ pour n'importe quel groupe discret Γ et enfin Lemeux et Tarrago [LT14] font le même calcul pour tous les produits en couronne libres $G \int_* S_N^+$ lorsque G est un groupe quantique compact de type Kac.

La question naturelle qui se pose alors est d'identifier le produit en couronne libre $S_M^+ \int_* S_N^+$ de deux groupes quantiques de permutations. Est-ce un groupe quantique de permutation ? La réponse est non mais il est démontré dans [BB07] que $S_M^+ \int_* S_N^+$ est un quotient très simple et explicite de S_{MN}^+. Il est également connu que le produit en couronne (classique) de deux groupes de symétries $G(X), G(Y)$ de deux graphes finis X, Y est, sous les bonnes hypothèses sur X et Y, un groupe de symétrie d'un autre graphe fini $X * Y$:

$$G(X) \int G(Y) \simeq G(X * Y).$$

C'est cette dernière identité qui est la motivation initiale de ce travail de recherche, en collaboration avec Lorenzo Pittau. Lorsque l'on cherche à donner un sens quantique à cette dernière égalité, le premier problème qui se pose est de donner un sens à un produit en couronnes libre $G \int_* \mathrm{Aut}^+(B, \psi)$ où G est un groupe quantique compact et $\mathrm{Aut}^+(B, \psi)$ est le groupe quantique d'automorphisme d'une C*-algèbre de dimension finie B munie d'un état ψ (c'est la généralisation quantique naturelle d'un groupe de symétrie de graphe).

Je définis dans [FP16] de tels produits en couronne libres et je calcule la catégorie des représentations en termes de partitions non-croisées décorées par les représentations irréductibles de G. J'en déduis de nombreux résultats sur la structure de ces produits en couronne libres.

Premièrement, les représentations irréductibles et les règles de fusion sont calculées : soit M le monoïde libre de base les mots dont les lettres sont $\mathrm{Irr}(G)$. On considère les trois opérations suivantes sur M :

- l'involution : $\overline{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = (\overline{\alpha}_n, \ldots, \overline{\alpha}_1)$;
- la concaténation : $(\alpha_1, ..., \alpha_k), (\beta_1, ..., \beta_l) = (\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l)$;
- la fusion de deux mots non-vides : $(\alpha_1, ..., \alpha_k).(\beta_1, ..., \beta_l)$est le multi-ensemble composé des mots $(\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \gamma, \beta_2, ..., \beta_l)$ où γ varie dans l'ensemble des sous-représentations possibles $\gamma \subset \alpha_k \otimes \beta_1$ et la multiplicité de chaque mot est donnée par $\dim \mathrm{Hom}(\gamma, \alpha_k \otimes \beta_1)$.

Théorème 3.20. *Si ψ est une δ-forme et $\dim(B) \geq 4$ alors l'ensemble des classes d'équivalences des représentations unitaires irréductibles de $G \int_* \mathrm{Aut}^+(B, \psi)$ peut être indexé par M et, en notant r_x l'irréductible correspondant à $x \in M$, on a :*

- *l'involution est donnée par $\overline{r}_x = r_{\overline{x}}$;*
- *les règles de fusion sont :*

$$r_x \otimes r_y = \sum_{\substack{x=u,t \\ y=\bar{t},v}} r_{u,v} \oplus \sum_{\substack{x=u,t \ y=\bar{t},v \\ u\neq\emptyset, v\neq\emptyset \\ w\in u.v}} r_w.$$

Deuxièmement, j'étudie la stabilité de l'équivalence monoïdale et des semi-anneaux de fusion sous la construction du produit en couronne libre.

Théorème 3.21. *Soient B, B' deux C*-algèbres de dimension finie munies des δ-formes ψ, ψ' respectivement et supposons $\dim(B), \dim(B') \geq 4$.*

1. *Si G_1 et G_2 sont deux GQC monoïdalement équivalents et $\delta = \delta'$ alors $G_1 \int_* \mathrm{Aut}^+(B, \psi)$ et $G_2 \int_* \mathrm{Aut}^+(B', \psi')$ sont monoïdalement équivalents.*

2. *Si les semi-anneaux de fusions de G_1 et G_2 sont isomorphes alors les semi-anneaux de fusions de $G_1 \int_* \mathrm{Aut}^+(B,\psi)$ et $G_2 \int_* \mathrm{Aut}^+(B',\psi')$ sont isomorphes.*

Troisièmement, j'étudie les propriétés algébriques et analytiques des algèbres d'opérateurs associées aux produits en couronne libres. Je renvoie le lecteur intéressé à [DCFY14] pour la définition de la propriété d'approximation centrale ACPAP qui est un renforcement à la fois de la moyennabilité faible avec constante 1 et de la propriété de Haagerup.

Théorème 3.22. *Soit ψ une δ-forme sur la C*-algèbre de dimension finie B et supposons $\dim(B) \geq 4$.*

1. *Si $\widehat{G}$ a la propriété centrale ACPAP alors le dual de $G \int_* \mathrm{Aut}(B,\psi)$ l'a aussi.*
2. *Si $\widehat{G}$ est exact alors le dual de $G \int_* \mathrm{Aut}(B,\psi)$ l'est aussi.*
3. *Si de plus G est Kac et $\dim(B) \geq 8$ alors $C_r(G \int_* \mathrm{Aut}(B,\psi))$ est simple avec trace unique.*

Notons que tout ces résultats se généralisent au cas où ψ n'est plus une δ-forme mais juste un état fidèle grâce à un résultat de décomposition en produit libre.

Finalement, voici le résultat principal de [FP16]. La preuve est très technique mais le résultat s'énonce de façon très simple.

Théorème 3.23. *On a un isomorphisme canonique :*

$$C_r(\mathrm{Aut}^+(B \otimes B', \psi \otimes \psi'))/I \simeq C_r(\mathrm{Aut}^+(B,\psi) \int_* \mathrm{Aut}^+(B',\psi')),$$

où I est l'idéal involutif fermé engendré par la relation $\mathrm{id}_B \otimes \eta_{B'}\eta_{B'}^* \in \mathrm{End}(U)$ et U est la représentation fondamentale de $\mathrm{Aut}^+(B \otimes B', \psi \otimes \psi')$.

Ceci généralise le résultat sur le produit en couronne libre de deux groupes quantiques de permutations énoncé précédemment.

3.1.7 Décroissance rapide et croissance pôlynomiale des bipoduits croisés

Ce travail, en collaboration avec H. Wang, est dans la continuité de [FMP17]. Nous étudions la stabilité, sous la construction du biproduit croisé, de deux propriétés importantes.

La première est la propriété de décroissance rapide (RD). Cette notion provient du travail fondateur [Haa78] de U. Haagerup dans lequel il découvre que la norme d'opérateurs dans la C*-algèbre réduite $C_r(\mathbb{F}_N)$ du groupe libre à N générateurs est majorée par une norme de Sobolev l^2 associée à la fonction longueur des mots sur $\mathbb{F}_N$. Ce phénomène frappant a en fait lieu dans de nombreux groupes de natures différentes. C'est Jolissaint [Jol90] qui isola cette propriété, l'appela (RD) et l'étudia de façon systématique. Cette propriété a maintenant de nombreuses applications dont certaines en KK-théorie : citons la percée de V. Lafforgue [Laf02] qui démontre que, pour une large classe de groupes, la propriété (RD) implique la validité de la conjecture de Baum-Connes.

L'autre propriété est la croissance polynomiale. Elle assure qu'il existe une fonction longueur pour laquelle le cardinal des boules de rayon k est majoré par un polynôme en k. Notons que, pour un groupe moyennable, la propriété (RD) est équivalente à la croissance polynomial.

Ces propriétés ont été définies et étudiées dans le cadre des groupes quantiques discrets par R. Vergnioux [**?**].

La construction du biproduit croisé associe, à une paire *assortie* (Γ, G), d'un groupe discrete Γ et une groupe compact G, un groupe quantique compact $\mathbb{G}$, appelé le biproduit croisé. Étant donné une fonction longueur l sur $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$, nous associons dans [?] de façon canonique une paire de fonctions longueurs (l_Γ, l_G) sur Γ et $\mathrm{Irr}(G)$ respectivement. Un telle paire satisfait des relations de compatibilité et toute paire de fonctions longueurs (l_Γ, l_G) sur Γ et $\mathrm{Irr}(G)$ satisfaisant ces relations permet de construire une fonction longueur sur $\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$. Nous dirons qu'un telle paire de fonction longueur est *assortie*. Nous montrons les résultats suivant.

Théorème 3.24. *[**?**] Soit $\mathbb{G}$ le biproduit croisé associé à la paire assortie (Γ, G) d'un groupe discrete Γ et un groupe compact G. Il y a équivalence :*

1. $\widehat{\mathbb{G}}$ *a (RD).*
2. *Il existe une paire assortie de fonctions longueurs* (l_Γ, l_G) *sur* $(\Gamma, \mathrm{Irr}(G))$ *telle que* (Γ, l_Γ) *et* $(\widehat{G}, l_G)$ *ont (RD).*

Rappelons que, pour un groupe quantique discret moyennable la croissance polynomiale équivaut à (RD). Ainsi, pour le groupe compact classique G on a l'équivalence $(\widehat{G}, l_G)$ a (RD) $\Leftrightarrow$ $(\widehat{G}, l_G)$ est à croissance polynomiale. Au sujet de la croissance polynomiale, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.25. *[**?**]*

1. $\widehat{\mathbb{G}}$ *est à croissance polynomiale.*
2. *Il existe une paire assortie de fonctions longueurs* (l_Γ, l_G) *sur* $(\Gamma, \mathrm{Irr}(G))$ *telle que* (Γ, l_Γ) *et* $(\widehat{G}, l_G)$ *sont à croissance polynomiale.*

La preuve de ces deux résultats est basée sur la classifications de représentations unitaires irréductibles d'un biproduit croisé que nous obtenons également dans [**?**] ainsi que les règles de fusion.

3.2 Groupes quantiques localement compacts

Après les exemples de Drinfel'd [Dri85], Jimbo [Jim85] et Woronowicz [Wor87b], il est devenu important de développer une catégorie plus grande contenant à la fois les algèbres de Kac et les groupes quantiques compacts de Woronowicz. Le premier succès dans cette direction fut obtenu par Baaj et Skandalis qui développèrent un nouveau point de vue sur les groupes quantiques analytiques, les *unitaires multiplicatifs* [BS93]. Ils introduirent la notion d'unitaire multiplicatif *régulier* et *irréductible*, et leur théorie permit d'unifier les algèbres de Kac et les groupes quantiques compacts. Cependant, S. Baaj découvrit [Baa95, Baa92] que l'unitaire multiplicatif du groupe quantique $E(2)$ construit par S.L. Woronowicz [Wor91] n'est pas régulier. En 1996, S.L. Woronowicz [Wor96], proposa alors un axiome différent pour les unitaires multiplicatifs, appelé *maniabilité*. Tous les exemples connus de groupes quantiques analytiques semblaient posséder des unitaires multiplicatifs maniables. Les unitaires multiplicatifs maniables ne sont cependant pas la théorie finale des groupes quantiques localement compacts. En effet, les groupes usuels étant définis par un espace et une multiplication, il est naturel de définir les groupes quantiques par un espace quantique et une comultiplication. Une idée essentielle dans le développement de la théorie fut proposée par E. Kirchberg [Kir92] : une déformation de l'antipode par un *groupe d'échelle*, ce qui permit d'introduire une notion d'antipode non bornée et non définie partout. En utilisant cette idée, T. Masuda et Y. Nakagami [MN94] définirent en 1994 les *algèbres de Woronowicz*. Cette catégorie a une dualité et elle contenait à l'époque tous les exemples connus de groupes quantiques analytiques. Cependant, les axiomes sont très compliqués et beaucoup de propriétés que l'on aimerait obtenir comme théorèmes sont contenues dans les axiomes. En 1998, A. Van Daele [VD98] définit de façon purement algébrique une classe spéciale de groupes quantiques, appelé *groupes quantiques algébriques*, incluant tous les groupes quantiques compacts et discrets, et possédant une dualité. Contrairement à la théorie de T. Masuda et Y. Nakagami, les axiomes sont simples et beaucoup de propriétés attendues sont des théorèmes. Cependant, cette théorie est trop algébrique pour contenir tous les groupes quantiques localement compacts. L'un des axiomes de la théorie de T. Masuda et Y. Nakagami est l'invariance de la mesure de Haar par le groupe d'échelle. A. Van Daele [VD01] montra en 2001 que le groupe quantique $ax + b$ construit en 1999 par S.L. Woronowicz et S. Zakrzewski [WZ02], ainsi que le groupe quantique $az + b$ construit par Woronowicz [Wor01] en 2000, ne vérifient pas cet axiome : la mesure de Haar est seulement laissée relativement invariante par le groupe d'échelle. Ce fut au même moment que J. Kustermans et S. Vaes développèrent leur théorie des groupes quantiques localement compacts, aussi bien dans sa version C*-algébrique [KV00], que dans sa version algèbre de von Neumann [KV03]. Cette théorie a une dualité, les axiomes sont simples, la plupart des propriétés attendues sont des théorèmes, et elle contient tous les exemples connus de groupes quantiques analytiques. Notamment, la mesure de Haar est laissée seulement relativement invariante par le groupe d'échelle. Bien que cette théorie ne soit pas totalement satisfaisante -l'existence de la mesure de Haar est un axiome et non un théorème- c'est, pour le moment, la théorie la plus largement acceptée des groupes quantiques localement compacts.

Soient M une algèbre de von Neumann et φ un poids normal fidèle semi-fini (nfs) sur M. Nous utiliserons les notations standards $\mathcal{N}_\varphi = \{x \in M \,:\, \varphi(x^*x) < \infty\}$ et $\mathcal{M}_\varphi = \mathcal{N}_\varphi^* \mathcal{N}_\varphi$.

Définition 3.26 (Kustermans-Vaes [KV03]). Un groupe quantique localement compact (GQLC) est un uplet $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$, où M est une algèbre de von Neumann munie de poids nfs φ et ψ et $\Delta : M \to M \otimes M$ est un $*$-morphisme unifère normal, tel que

— Δ est co-associatif : $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$,

— φ est invariant à gauche : $\varphi((\omega \otimes \iota)\Delta(a)) = \omega(1)\varphi(a)$ pour tous $a \in \mathcal{M}_\varphi^+$, $\omega \in M_*^+$,

— ψ est invariant à droite : $\psi((\iota \otimes \omega)\Delta(a)) = \omega(1)\psi(a)$ pour tous $a \in \mathcal{M}_\psi^+$, $\omega \in M_*^+$.

Les GQLC contiennent à la fois les groupes localement compacts, leurs duaux ainsi que les GQC.

Soit G un groupe localement compact. Posons $M = \mathrm{L}^\infty(G)$, $\Delta : M \to M \otimes M$, $\Delta(F)(g, h) = F(gh)$ pour $F \in \mathrm{L}^\infty(G)$ et $g, h \in G$ et φ (resp. ψ) l'intégration contre la mesure de Haar à gauche (resp. à droite). On obtient ainsi un GQLC où M est commutative. Tout GQLC $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$ avec M commutative est de ce type.

Soit G un groupe localement compact. Posons $M = \mathrm{L}(G)$, $\Delta(\lambda_g) = \lambda_g \otimes \lambda_g$, $g \in G$ et $\varphi = \psi$ le poids de Plancherel. On obtient ainsi un GQLC co-commutatif. Tout GQLC co-commutatif est de ce type. De plus, lorsque G est abélien on a, par transformation de Fourier, $\mathrm{L}(G) \simeq \mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$, où $\widehat{G}$ est le groupe dual de G. Lorsque G n'est plus commutatif, le groupe dual de G n'est plus un groupe, c'est un groupe quantique que l'on note $\widehat{G} = (\mathrm{L}(G), \Delta, \varphi, \psi)$.

Soit G un GQC. Posons $M = \mathrm{L}^\infty(G)$. Par invariance de l'état de Haar, Δ se factorise en un $*$-morphisme normal $\Delta : M \to M \otimes M$ co-associatif. Posons $\varphi = \psi = h$, où h est l'unique extension normale de l'état de Haar de G à $\mathrm{L}^\infty(G)$. On obtient ainsi un GQLC. Tout GQLC avec $\varphi(1) < \infty$ est de ce type c'est pourquoi il est cohérent de définir un GQC comme un GQLC $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$ tel que $\varphi(1) < \infty$.

Lorsque $G = (M, \Delta, \varphi, \psi)$ est un GQLC nous noterons, par analogie avec les groupes localement compact et les GQC, $M = \mathrm{L}^\infty(G)$.

Soit G un GQLC avec un poids invariant à gauche φ. Représentons $\mathrm{L}^\infty(G)$ sur l'espace GNS de φ de telle sorte que $(\mathrm{L}^2(G), \mathrm{id}, \Lambda)$ soit une construction GNS pour φ. Cela signifie que $\mathrm{L}^2(G)$ est un espace de Hilbert tel que $\mathrm{L}^\infty(G) \subset \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))$, $\Lambda : \mathcal{N}_\varphi \to \mathrm{L}^2(G)$ est une application linéaire, injective et d'image dense telle que $x\Lambda(y) = \Lambda(xy)$ et $\langle \Lambda(x), \Lambda(y) \rangle = \varphi(y^*x)$ pour tous $x, y \in \mathcal{N}_\varphi$.

Kustermans et Vaes ont démontré [KV03] qu'il existe un unique opérateur unitaire $W \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G) \otimes \mathrm{L}^2(G))$ vérifiant

$$W^*(\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)) = (\Lambda \otimes \Lambda)(\Delta(y)(x \otimes 1)), \quad \forall x, y \in \mathcal{N}_\varphi.$$

W est appelé *l'unitaire multiplicatif de G*. C'est l'analogue quantique de la représentation régulière gauche d'un groupe localement compact. L'unitaire multiplicatif permet de reconstruire l'algèbre de von Neumann $\mathrm{L}^\infty(G)$ et implémente la comultiplication :

$$\mathrm{L}^\infty(G) = \left\{(\iota \otimes \omega)(W) \,|\, \omega \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))_*\right\}'', \quad \Delta(x) = W^*(1 \otimes x)W \text{ pour tout } x \in \mathrm{L}^\infty(G).$$

L'unitaire W permet de définir l'analogue des fonctions continues qui s'annulent à l'infini sur G : c'est la C*-algèbre notée $C_0(G)$ qui est égale à la fermeture pour la norme dans $\mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))$ de $\left\{(\iota \otimes \omega)(W) \,|\, \omega \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))_*\right\}$. On a en fait $W \in M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(\mathrm{L}^2(G)))$.

Le GQLC G a une *antipode* qui est l'unique opérateur $*$-ultrafortement fermé S de $\mathrm{L}^\infty(G)$ dans $\mathrm{L}^\infty(G)$ vérifiant :

— l'ensemble $\left\{(\iota \otimes \omega)(W) \,|\, \omega \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))_*\right\}$ est un cœur $*$-ultrafort pour S,

— $S((\iota \otimes \omega)(W)) = (\iota \otimes \omega)(W^*)$ pour tout $\omega \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))_*$.

L'antipode S a une *décomposition polaire* $S = R\tau_{-\frac{i}{2}}$, où R est un anti-automorphisme de $\mathrm{L}^\infty(G)$, appelé l'*antipode unitaire* et $(\tau_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathrm{L}^\infty(G)$, appelé le *groupe d'échelle*. On a la relation $\sigma(R \otimes R)\Delta = \Delta R$, où σ est la volte sur $\mathrm{L}^\infty(G) \otimes \mathrm{L}^\infty(G)$. Ainsi, le poids nfs φR est invariant à droite et on supposera toujours que $\psi = \varphi R$.

Il existe de plus une unique constante $\nu > 0$, appelée la *constante d'échelle* et un unique opérateur positif auto-adjoint δ sur $\mathrm{L}^2(G)$ affilié à $\mathrm{L}^\infty(G)$, appelé l'*élément modulaire*, tels que $[D\psi : D\varphi]_t = \nu^{\frac{it^2}{2}}\delta^{it}$. La constante d'échelle est également caractérisée par la propriété d'*invariance relative de φ par le groupe d'échelle* $\varphi \circ \tau_t = \nu^{-t}\varphi$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

L'unitaire W permet également de construire le groupe quantique dual. En effet, si l'on pose $\widehat{W} = \Sigma W^*\Sigma$, où Σ est la volte sur $\mathrm{L}^2(G) \otimes \mathrm{L}^2(G)$ et

$$\widehat{M} := \left\{(\omega \otimes \mathrm{id})(W) \, : \, \omega \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G))_*\right\}'' , \quad \widehat{\Delta}(x) = \widehat{W}^*(1 \otimes x)\widehat{W} \text{ pour tout } x \in \widehat{M}.$$

On peut alors construire deux poids nfs $\widehat{\varphi}$ et $\widehat{\psi}$ sur $\widehat{M}$ de telle sorte que $\widehat{G} = (\widehat{M}, \widehat{\Delta}, \widehat{\varphi}, \widehat{\psi})$ soit un GQLC, que l'on appelle le *groupe quantique dual de* G. L'opérateur $\widehat{W}$ est l'unitaire multiplicatif de $\widehat{G}$ et on a $W \in M(C_0(G) \otimes C_0(\widehat{G}))$. Lorsque G est un groupe localement compact, on retrouve le dual $\widehat{G} = (\mathrm{L}(G), \Delta, \varphi, \psi)$. De plus, le théorème de bidualité de Pontrjagin s'étend : $\widehat{\widehat{G}}$ est canoniquement isomorphe à G. Un GQLC est dit *discret* si $\widehat{G}$ est compact.

Notons que $\mathrm{L}^1(G) := \mathrm{L}^\infty(G)_*$ est une algèbre de Banach pour le produit de convolution $\omega * \mu := (\omega \otimes \mu)\Delta$, $\omega, \mu \in \mathrm{L}^\infty(G)_*$. Soient $\widehat{\lambda} : \mathrm{L}^1(G) \to C_0(\widehat{G})$ le morphisme d'algèbre de Banach défini par $\widehat{\lambda}(\omega) = (\omega \otimes \mathrm{id})(W)$ et $\mathrm{L}^1_*(G) = \{\omega \in \mathrm{L}^1(G) \, : \, \text{il existe } \theta \in \mathrm{L}^1(G) \text{ tel que } \widehat{\lambda}(\omega)^* = \widehat{\lambda}(\theta)\}$. Alors $\mathrm{L}^1_*(G)$ est une algèbre involutive pour l'involution $\omega^* = \theta$, où $\omega \in \mathrm{L}^1_*(G)$ et θ est tel que $\widehat{\lambda}(\omega)^* = \widehat{\lambda}(\theta)$, et on montre qu'elle est $*$-faiblement dense dans $\mathrm{L}^1(G)$. C'est de plus une algèbre de Banach involutive lorsque qu'on la munit de la norme $||\omega||_* := \mathrm{Max}\{||\omega||, ||\omega^*||\}$. Par construction la restriction de $\widehat{\lambda}$ à $\mathrm{L}^1_*(G)$ est un $*$-morphisme. Soit $C_{0m}(\widehat{G})$ la C*-algèbre enveloppante de $\mathrm{L}^1_*(G)$. Soit $\widehat{\lambda} \, : \, C_{0m}(\widehat{G}) \to C_0(\widehat{G})$ la surjection canonique. L'unitaire W admet une version "semi-universelle à droite", que l'on note $\mathbb{W}$, telle que $\mathbb{W} \in M(C_0(G) \otimes C_{0m}(\widehat{G}))$ et $(\mathrm{id} \otimes \widehat{\lambda})(\mathbb{W}) = W$.

La version duale de la construction précédente fournit la surjection canonique $\lambda \, : \, C_{0m}(G) \to C_0(G)$. Nous dirons que G est *co-moyennable* si λ est un isomorphisme. Nous dirons que G est *moyennable* si $\mathrm{L}^\infty(G)$ possède une moyenne invariante, c-à-d. un état $m \in \mathrm{L}^\infty(G)^*$ tel que

$$m((\omega \otimes \mathrm{id})\Delta(x)) = m((\mathrm{id} \otimes \omega)\Delta(x)) = \omega(1)m(x) \quad \text{pour tous} \quad \omega \in \mathrm{L}^1(G), \; x \in \mathrm{L}^\infty(G).$$

Bédos et Tuset [BT03] ont montré que la co-moyennabilité de G implique la moyennabilité de $\widehat{G}$. L'équivalence est vraie pour les GQC [Tom06]. C'est un problème ouvert pour les GQLC généraux.

3.2.1 Bifacteurs

Le but de cette section est d'expliquer la construction d'exemples explicites de groupes quantiques qui sont les plus éloignés possible des groupes classiques.

Soit G un GQLC. G provient d'un groupe si et seulement si l'une des deux algèbres $\mathrm{L}^\infty(G)$ ou $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ est commutative. A l'opposé, G est "le plus loin possible d'un groupe" si les deux algèbres $\mathrm{L}^\infty(G)$ et $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ sont des facteurs. Nous dirons que G est un *bifacteur* lorsque $\mathrm{L}^\infty(G)$ et $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ sont des facteurs. La formulation du problème que nous voulons résoudre est la suivante : étant donné une paire de types de facteurs (x_1, x_2) (au sens de la classification de Murray-von Neumann [MvN36] et de Connes [Con73]) existe-t-il un bifacteur G tel que $\mathrm{L}^\infty(G)$ soit de type x_1 et $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ soit de type x_2 (nous dirons dans ce cas que G est de type (x_1, x_2)) ? Il existe beaucoup d'exemples de type $(\mathrm{I}_\infty, \mathrm{I}_\infty)$: le groupe $az + b$ quantique de Woronowicz [Wor01] (voir section 3.2.2) ainsi que le biproduit croisé de tout couple assorti de groupes conjugués [BSV03]. Cependant, aucun n'exemple d'un autre type n'était connu avant notre travail [Fim07b].

Commençons par un résultat négatif.

Théorème 3.27 ([Fim07b]). *Soit G un GQLC tel que $\mathrm{L}^\infty(G)$ soit un facteur fini. Alors l'unique trace τ sur $\mathrm{L}^\infty(G)$ est l'état de Haar sur G. En particulier, G est compact et $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ n'est pas un facteur (sauf dans le cas trivial $\mathrm{L}^\infty(G) = \mathrm{L}^\infty(\widehat{G}) = \mathbb{C}$).*

Nous construisons ensuite, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, un bifacteur de type $(\mathrm{III}_\lambda, \mathrm{III}_\lambda)$. La même construction produit également des exemples de type $(\mathrm{I}_\infty, \mathrm{II}_\infty)$ et $(\mathrm{II}_\infty, \mathrm{II}_\infty)$. Notre construction, basée sur le biproduit croisé de Vaes et Vainermann [VV03], est une sorte de "produit tensoriel infini" d'une version p-adique de l'exemple de Baaj et Skandalis (voir [VV03]).

Afin de décrire nos exemples, nous rappelons maintenant la construction du biproduit croisé d'un couple assorti de groupes localement compacts qui a déjà été expliquée dans la section 3.1.5.

Soient G un groupe localement compact, μ une mesure de Haar à gauche et G_1, G_2 deux sous-groupes fermés de G. Nous dirons que (G_1, G_2) est un *couple assorti* si $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ et $\mu(G - G_1G_2) = 0$.

Lorsque (G_1, G_2) est un couple assorti, on peut écrire pour presque tout $g \in G_1, s \in G_2$, $gs = \alpha_g(s)\beta_s(g)$. On obtient ainsi deux applications définies presque partout et mesurables :

$$\begin{aligned} \alpha \,:\, G_1 \times G_2 \to G_2 \,: &\qquad (g,s) \to \alpha_g(s), \\ \beta \,:\, G_2 \times G_1 \to G_1 \,: &\qquad (s,g) \to \beta_s(g). \end{aligned}$$

On montre que α est une action de G_1 sur $\mathrm{L}^\infty(G_2)$ et β est une action de G_2 sur $\mathrm{L}^\infty(G_1)$. Vaes et Vainerman construisent dans [VV03] un GQLC G, appelé *biproduit croisé*, tel que :

$$\mathrm{L}^\infty(G) = \mathrm{L}^\infty(G_2) \rtimes_\alpha G_1 \quad \text{et} \quad \mathrm{L}^\infty(\widehat{G}) = \mathrm{L}^\infty(G_1) \rtimes_\beta G_2.$$

Passons maintenant à la description de nos exemples. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Lorsque p est un nombre premier, nous noterons $\mathbb{Q}_p$ le corps des rationnels p-adiques et $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques. Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble infini de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ le produit restreint, pour $p \in \mathcal{S}$, des $\mathbb{Q}_p$ relativement aux sous-groupes compacts ouverts $\mathbb{Z}_p$:

$$\mathcal{A}_\mathcal{S} = \prod_{p\in\mathcal{S}}{}' \left(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p\right).$$

$\mathcal{A}_\mathcal{S}$ est un anneau localement compact à base dénombrable d'ouverts. Le groupe des inversibles de $\mathcal{A}_\mathcal{S}$ est :

$$\mathcal{A}_\mathcal{S}^* = \prod_{p\in\mathcal{S}}{}' \left(\mathbb{Q}_p^*, \mathbb{Z}_p^*\right).$$

Le groupe $ax+b$ de $\mathcal{A}_\mathcal{S}$, $\mathcal{A}_\mathcal{S}^* \ltimes \mathcal{A}_\mathcal{S}$, contient les deux sous-groupes :

$$G_\mathcal{S}^1 = \{(a,0) \in G_\mathcal{S}\} \quad \text{et} \quad G_\mathcal{S}^2 = \{((a_p),(b_p)) \in G,\ a_p + b_p p = 1\ \forall p \in \mathcal{S}\}.$$

$G_\mathcal{S}^1$ est le sous-groupe qui fixe 0. $G_\mathcal{S}^2$ est, formellement, le sous-groupe qui fixe $\left(\frac{1}{p}\right)_{p\in\mathcal{S}}$. Nous montrons dans [Fim07b] que la paire $(G_\mathcal{S}^1, G_\mathcal{S}^2)$ est assortie. On obtient par biproduit croisé un GQLC que l'on note $G_\mathcal{S}$.

La preuve du théorème suivant s'appuie sur les résultats de Boca et Zaharescu [BZ00].

Théorème 3.28 ([Fim07b]). *Pour tout sous-ensemble infini $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$, $\mathrm{L}^\infty(G_\mathcal{S})$ est un facteur et $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G_\mathcal{S}}) \simeq \mathrm{L}^\infty(G_\mathcal{S}) \otimes \mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est le facteur hyperfini II_1. De plus,*

1. $\sum_{p\in\mathcal{S}} \frac{1}{p} < +\infty \Leftrightarrow \mu^+(\mathcal{A}_\mathcal{S} - \mathcal{A}_\mathcal{S}^*) = 0 \Leftrightarrow G_\mathcal{S}$ *est de type* $(\mathrm{I}_\infty, \mathrm{II}_\infty)$.
2. $\sum_{p\in\mathcal{S}} \frac{1}{p} = +\infty \Leftrightarrow \mu^+(\mathcal{A}_\mathcal{S}^*) = 0 \Leftrightarrow G_\mathcal{S}$ *est de type* $(\mathrm{III}, \mathrm{III})$.

De plus,

- *pour tout $\lambda \in [0,1]$, il existe un sous-ensemble infini $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ tel que $G_\mathcal{S}$ soit de type* $(\mathrm{III}_\lambda, \mathrm{III}_\lambda)$.
- *pour tout sous-groupe dénombrable K de $\mathbb{R}$ et pour tout sous-ensemble dénombrable Σ de $\mathbb{R} - K$, il existe un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathcal{P}$ tel que l'invariant T de Connes $T(\mathrm{L}^\infty(G_\mathcal{S}))$ contienne K et n'intersecte pas Σ.*

Une légère modification de l'exemple précédent permet d'obtenir un GQLC *auto-dual* (tel que $G \simeq \widehat{G}$) vérifiant les mêmes propriétés. Notons $\mathcal{K}_\mathcal{S}$ le sous-groupe de $\mathcal{A}_\mathcal{S}^*$ défini par le produit restreint suivant :

$$\mathcal{K}_\mathcal{S} = \prod_{p\in\mathcal{S}}{}' \left(\mathbb{Q}_p^*, 1 + p\mathbb{Z}_p\right),$$

On considère alors les deux sous-groupes suivant de $\mathcal{K}_\mathcal{S} \ltimes \mathcal{A}_\mathcal{S}$:

$$H_\mathcal{S}^1 = \mathcal{K}_\mathcal{S} \times \{0\} \quad \text{et} \quad H_\mathcal{S}^2 = \left\{ \left(a_p, \frac{1-a_p}{p}\right),\ (a_p) \in \mathcal{K}_\mathcal{S} \right\}.$$

Il est alors facile de vérifier que $(H_\mathcal{S}^1, H_\mathcal{S}^2)$ est un couple assorti. Soit $H_\mathcal{S}$ le biproduit croisé.

Proposition 3.29 ([Fim07b]). *Le groupe quantique $H_{\mathcal{S}}$ est auto-dual et vérifie* $\mathrm{L}^\infty(H_{\mathcal{S}}) \simeq \mathrm{L}^\infty(G_{\mathcal{S}}) \otimes \mathcal{R}$.

Il reste encore des paires de types de facteurs pour lesquels nous ne savons pas si un bifacteur existe.

Problème 3.30. Existe-t-il un bifacteur G avec $\mathrm{L}^\infty(G)$ un facteur semi-fini et $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ de type III ?

Problème 3.31. Construire pour tous $\lambda, \mu \in [0,1]$ un bifacteur de type $(\mathrm{III}_\lambda, \mathrm{III}_\mu)$.

Enfin, tous les exemples que nous avons construits sont des produits tensoriels infinis de facteurs de type I, en particulier, les facteurs obtenus sont tous moyennables.

Problème 3.32. Construire un bifacteur G de type $(\mathrm{III}, \mathrm{III})$ avec $\mathrm{L}^\infty(G)$ et/ou $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ non-moyennables.

3.2.2 Torsions et déformations de Rieffel

La torsion (en anglais *twisting*) est une procédure consistant à tordre la comultiplication d'un groupe quantique par un 2-cocycle pour produire un nouveau groupe quantique. En général ceci permet, partant du dual d'un groupe classique non abélien d'obtenir un groupe quantique ni commutatif ni co-commutatif. L'idée remonte à Drinfel'd [Dri90]. En 1993, le point de vue dual a été étudié par M.A. Rieffel [Rie93b, Rie93a, Rie95]. En 1994, M.B. Landstad étudia la torsion des duaux de groupes localement compacts [Lan94]. Une généralisation du point de vue de M.A. Rieffel à été donnée par S. Wang [Wan96]. Dans le cadre des algèbres de Kac, cette construction a été étudiée en 1998 par M. Enock et L. Vainerman [EV96]. Elle fut également beaucoup étudiée dans le cadre des algèbres de Hopf. Citons également J. Bichon, A. De Rijdt et S. Vaes [BDRV06] pour le cas des groupes quantiques discrets. Plus récemment, une généralisation des déformations de Rieffel a été étudiée par P. Kasprzak [Kas09]. Dans un travail en collaboration avec Vainermann [FV09] nous construisons la torsion et la déformation de Rieffel d'un GQLC dans un cadre très général. Il existe également de nombreux travaux très récents et ultérieurs à [FV09] de notamment Belmonte, Beltita, Kaschek, Mantoiu, Neumaier, Neshveyev et Tuset sur les déformations de Rieffel mais qui concernent uniquement les déformations de C*-algèbres et non les constructions de GQLC.

Soit G un GQLC muni de poids invariant à gauche et à droite φ et $\psi = \varphi \circ R$ ayant pour groupe modulaire σ et σ' respectivement. Soit $\Omega \in \mathrm{L}^\infty(G) \otimes \mathrm{L}^\infty(G)$ un *2-cocycle*, c'est-à-dire un unitaire tel que

$$(\Omega \otimes 1)(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Omega) = (1 \otimes \Omega)(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Omega).$$

Dans le cas commutatif, un 2-cocycle sur G est un 2-cocycle au sens classique c'est-à-dire une application mesurable $\Omega : G \times G \to \mathbb{S}^1$ telle que $\Omega(r,s)\Omega(rs,t) = \Omega(s,t)\Omega(r,st)$ pour presque tous $r, s, t \in G$.

Pour un GQLC général, l'équation de 2-cocycle assure que l'$*$-morphisme unifère normal $\Delta_\Omega = \Omega\Delta(\cdot)\Omega$ est co-associatif. Lorsque G est discret $(\mathrm{L}^\infty(G), \Delta_\Omega)$ admet une structure de groupe quantique discret [BDRV06]. Lorsque G n'est plus discret, il n'était pas connu, en général, avant notre travail [FV09], si la paire $(\mathrm{L}^\infty(G), \Delta_\Omega)$ admet une structure de GQLC. Dans [FV09] nous montrons que, sous certaines hypothèses, $(\mathrm{L}^\infty(G), \Delta_\Omega)$ est un bien un GQLC et nous calculons explicitement tous les ingrédients de ce GQLC, notamment ses poids invariants, ainsi que tous les ingrédients de son dual, qui apparaît comme une généralisation d'une déformation à la Rieffel. Il a depuis été démontré par de Commer, dans l'excellent travail [dC11], que $(\mathrm{L}^\infty(G), \Delta_\Omega)$ admet toujours une structure de GQLC. Cependant, le papier [dC11] ne contient aucune formule explicite pour les poids invariants ou les autres ingrédients de ce groupe quantique et de son dual.

Nous considèrerons dans la suite uniquement des 2-cocycles provenant d'un co-sous-groupe classique. Un groupe localement compact H est un *co-sous-groupe* d'un GQLC G si $\widehat{H}$ est un sous-groupe quantique fermé de $\widehat{G}$ c'est-à-dire s'il existe un $*$-morphisme unifère, normal et fidèle $\alpha : \mathrm{L}^\infty(H) \to \mathrm{L}^\infty(G)$ qui entrelace les comultiplications. Ainsi, tout 2-cocycle classique Ψ sur H produit un 2-cocycle $\Omega = (\alpha \otimes \alpha)(\Psi)$ sur G. Dans la suite nous supposerons que Ψ est un bicaractère continu sur H. En supposant de plus que σ agit trivialement sur l'image de α, Enock et Vainerman [EV96] ont démontré que φ est aussi Δ_Ω-invariant à gauche, ce qui permet de déduire que $(\mathrm{L}^\infty(G), \Delta_\Omega)$ est un GQLC. Ici, nous supposerons que σ agit par *translations* sur l'image de α c'est-à-dire, nous supposons qu'il existe un morphisme de groupes continu $t \mapsto \gamma_t$ de $\mathbb{R}$ vers H tel que $\sigma_t \circ \alpha(F) = \alpha(F(\cdot\gamma_t^{-1}))$ pour tous $F \in \mathrm{L}^\infty(H), t \in \mathbb{R}$. Dans ce que cas nous dirons que le co-sous-groupe H est *stable*. Pour un co-sous-groupe stable, σ' agit également par translations :

$$\sigma'_t \circ \alpha(F) = R \circ \sigma_{-t} \circ R \circ \alpha(F) = \alpha(F(\cdot\gamma_t^{-1})) = \sigma_t \circ \alpha(F) \quad \text{pour tous} \quad F \in \mathrm{L}^\infty(H), t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Lorsque $t \mapsto \gamma_t$ est non-trivial, φ n'est plus Δ_Ω-invariant à gauche et nous devons construire un nouveau poids sur $\mathrm{L}^\infty(G)$. Notons que $(t,s) \mapsto \Psi(\gamma_t, \gamma_s)$ est un bicaractère continu sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que $\Psi(\gamma_t, \gamma_s) = \lambda^{its}$. On peut alors définir, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les unitaires suivants de $\mathrm{L}^\infty(G)$:

$$u_t = \lambda^{i\frac{t^2}{2}} \alpha\left(\Psi(\cdot, \gamma_t^{-1})\right) \quad \text{et} \quad v_t = \lambda^{i\frac{t^2}{2}} \alpha\left(\Psi(\gamma_t^{-1}, \cdot)\right).$$

L'équation (1) implique alors que $(u_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un σ-cocycle et $(v_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un σ'-cocycle. Ainsi, la réciproque du théorème de Connes fournit deux poids nfs φ_Ω et ψ_Ω sur $\mathrm{L}^\infty(G)$ tels que :

$$u_t = [D\varphi_\Omega : D\varphi]_t \quad \text{et} \quad v_t = [D\psi_\Omega : D\psi]_t \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Nous noterons $W_\Omega^* = \Omega(\widehat{J} \otimes J)W\widetilde{\Omega}(\widehat{J} \otimes J)$ où J (resp. $\widehat{J}$) est la conjugaison modulaire de φ (resp. $\widehat{\varphi}$), W est l'unitaire multiplicatif de G et $\widetilde{\Omega} = (\alpha \otimes \alpha)(\widetilde{\Psi})$ avec $\widetilde{\Psi}(g,h) = \Psi(g^{-1}, gh)$ pour tous $g, h \in H$. Nous noterons également A (resp. B) le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $t \mapsto \alpha\left(\Psi(\cdot, \gamma_t^{-1})\right)$ (resp. $t \mapsto \alpha\left(\Psi(\gamma_t^{-1}, \cdot)\right)$). Notons que A et B sont des opérateurs positifs, auto-adjoints et affiliés à $\mathrm{L}^\infty(G)$.

Théorème 3.33 ([FV09]). *Le quadruplet $G_\Omega = (\mathrm{L}^\infty(G), \Delta_\Omega, \varphi_\Omega, \psi_\Omega)$ est un GQLC. De plus,*

1. *W_Ω est l'unitaire multiplicatif de G_Ω (suivant la construction de Vaes et Kustermans).*
2. *Le groupe d'échelle et la constante d'échelle sont $\tau_t^\Omega = \tau_t$, $\nu_\Omega = \nu$.*

Enfin, si H est abélien, on a :

3. *L'antipode unitaire est $R_\Omega = uR(\cdot)u^*$, où $u = \alpha(\Psi(\cdot^{-1}, \cdot))$.*
4. *L'élément modulaire est $\delta_\Omega = \delta A^{-1}B$.*
5. *L'antipode est $S_\Omega(x) = uS(x)u^*$ pour tout $x \in \mathcal{D}(S_\Omega) = \mathcal{D}(S)$.*

Il est également facile de vérifier que la torsion est continue dans le sens suivant. Si $x \mapsto \Psi_x$ est une application $*$-ultrafortement continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{L}^\infty(H \times H)$ telle que Ψ_x soit un bicaractère continu pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors, en notant W_x l'unitaire multiplicatif du groupe quantique tordu, l'application $x \mapsto W_x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{B}(\mathrm{L}^2(G) \otimes \mathrm{L}^2(G))$ est ultrafaiblement continue.

Nous calculons ensuite explicitement le dual d'un GQLC tordu lorsque le co-sous-groupe stable H est abélien et nous l'identifions à une déformation de Rieffel généralisée. Cette construction, proposée initialement par Rieffel [Rie93b], permet, partant d'une action de $\mathbb{R}^d$ sur une C*-algèbre A et d'un opérateur antisymétrique sur $\mathbb{R}^d$ de définir un nouveau produit et donne ainsi une nouvelle C*-algèbre, appelée la *déformation de Rieffel* de A. Dans [Rie93a, Rie95] cette construction est appliquée à la C*-algèbre des fonctions continues s'annulant à l'infini sur un groupe de Lie et produit une nouvelle C*-algèbre non-commutative sur laquelle Rieffel introduit une comultiplication, une antipode et une co-unité.

La dualité entre le twisting et la déformation de Rieffel apparaît déjà en 1994 dans le travail de Landstad [Lan94] mais à cette période la théorie générale des GQLC n'est pas encore totalement aboutie. Il faudra attendre 2006, pour que Kasprzak [Kas09] clarifie le lien de dualité entre la déformation de Rieffel et la torsion. Bien qu'à ce moment le théorie de Kustermans-Vaes est terminée, le travail de Kasprzak ne sort toujours pas du cadre des algèbres de Kac car sa construction n'est valable que pour le dual d'un groupe *classique* localement compact G tordu par un 2-cocycle sur un co-sous-groupe abélien *contenu dans le noyau de la fonction modulaire*. Dans ce cas, le groupe modulaire σ agit *trivialement* sur l'image de α, c'est le cadre d'Enock-Vainerman [EV96]. Nous construisons dans [FV09] la déformation de Rieffel de *n'importe quel* GQLC G déformé par un 2-cocycle sur un co-sous-groupe abélien qui est seulement supposé *stable*. On peut ainsi sortir du cadre des algèbres de Kac même si l'on part du dual d'un groupe classique G.

Nous supposerons dans la suite que H est un co-sous-groupe *abélien* stable d'un GQLC G et nous utiliserons les notations additives pour H. Pour $\gamma \in \widehat{H}$ on note $u_\gamma \in \mathrm{L}^\infty(H)$ la fonction définie par $u_\gamma(h) = \gamma(h)$, $h \in H$, et $L_\gamma = \alpha(u_\gamma) \in \mathrm{L}^\infty(G)$, $R_\gamma = JL_\gamma J \in \mathrm{L}^\infty(G)'$. On obtient une action $\beta : \widehat{H}^2 \curvearrowright \mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ en posant

$$\beta_{\gamma_1,\gamma_2}(x) = L_{\gamma_1} R_{\gamma_2} x R_{\gamma_2}^* L_{\gamma_1}^* \quad \text{pour tous} \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H},\, x \in \mathrm{L}^\infty(\widehat{G}).$$

Soit $N = \mathrm{L}^\infty(\widehat{G}) \rtimes_\beta \widehat{H}^2$ le produit croisé engendré par les unitaires $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H}$, et les $\pi(x)$, $x \in \mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$. On démontre qu'il existe un unique $*$-morphisme normal et unifère $\Gamma : N \to N \otimes N$ tel que

$$\Gamma(\lambda_{\gamma_1,\gamma_2}) = \lambda_{\gamma_1,0} \otimes \lambda_{0,\gamma_2} \quad \text{et} \quad \Gamma(\pi(x)) = (\pi \otimes \pi)\widehat{\Delta}(x) \quad \text{pour tous } \gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H},\ x \in \mathrm{L}^\infty(\widehat{G}).$$

Soit Ψ un bicaractère continu sur H. Pour $g \in H$ on note $\Psi_g \in \widehat{H}$ l'élément $\Psi_g(h) = \Psi(h, g)$, $h \in H$. Notons θ l'action duale de H^2 sur N. On définit l'action *l'action duale tordue* θ^Ψ de H^2 sur N par :

$$\theta^\Psi_{(g_1,g_2)}(x) = \lambda_{\Psi_{g_1},\Psi_{g_2}} \theta_{(g_1,g_2)}(x) \lambda^*_{\Psi_{g_1},\Psi_{g_2}} \quad \text{pour tous } g_1, g_2 \in H,\ x \in N.$$

Notons N_Ω l'algèbre des points fixes pour l'action θ^Ψ et observons que $\widehat{H}^2$ agit sur N_Ω par conjugaison par les unitaires $\lambda_{\gamma_1,\gamma_2}$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in \widehat{H}^2$. Nous noterons encore β cette action. Soient $\lambda_L : \mathrm{L}^\infty(H) \to N$ (resp. λ_R) l'unique $*$-morphisme normal et unifère tel que $\lambda_L(u_\gamma) = \lambda_{\gamma,0}$ (resp. $\lambda_R(u_\gamma) = \lambda_{0,\gamma}$) pour tout $\gamma \in \widehat{H}$ et $\Upsilon = (\lambda_R \otimes \lambda_L)(\widetilde{\Psi}^*)$. Nous démontrons que $\Gamma_\Omega = \Upsilon\Gamma(\cdot)\Upsilon^*$ est une comultiplication sur N_Ω.

Construisons maintenant un poids Γ_Ω-invariant à gauche sur N_Ω. Pour cela il nous faut d'abord observer que

$$\theta^\Psi_{(g_1,g_2)}(\lambda_{\gamma_1,\gamma_2}) = \theta_{(g_1,g_2)}(\lambda_{\gamma_1,\gamma_2}) = \overline{\langle\gamma_1, g_1\rangle\langle\gamma_2, g_2\rangle}\lambda_{\gamma_1,\gamma_2} \quad \text{pour tous} \quad g_1, g_2 \in H,\ \gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{H}.$$

Ainsi, il existe un isomorphisme canonique $N = \mathrm{L}^\infty(\widehat{G}) \rtimes_\beta \widehat{H}^2 \to N_\Omega \rtimes_\beta \widehat{H}^2$ entrelaçant l'action duale tordue θ^Ψ de H^2 sur N avec l'action duale de H^2 sur $N_\Omega \rtimes_\beta \widehat{H}^2$. Nous montrons que $t \mapsto w_t = \lambda^{-it^2}\lambda_R\left(\Psi(-\gamma_t, \cdot)\right)$ est un $\widetilde{\widetilde{\sigma}}$-cocycle, où $\widetilde{\widetilde{\sigma}}$ est le groupe modulaire du poids dual sur N de $\widehat{\varphi}$. Ainsi, il existe un unique poids nfs $\widetilde{\mu}_\Omega$ sur N tel que $w_t = [D\widetilde{\mu}_\Omega : D\widetilde{\widehat{\varphi}}]_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Nous montrons enfin que $\widetilde{\mu}_\Omega$ est θ^Ψ-invariant ce qui implique, par identification de N avec $N_\Omega \rtimes_\beta \widehat{H}^2$, qu'il existe un unique poids nfs μ_Ω sur N_Ω tel que le poids dual de μ_Ω soit $\widetilde{\mu}_\Omega$.

Théorème 3.34 ([FV09])**.** *$(N_\Omega, \Gamma_\Omega)$ est un GQLC et μ_Ω est un poids invariant à gauche. De plus ce GQLC est canoniquement isomorphe à $\widehat{G}_\Omega$.*

Remarque 3.35. Dans [Fim07a] nous construisons la déformation de Rieffel dans le cadre C*-algébrique que nous identifions à $C_0(\widehat{G}_\Omega)$. Nous déduisons également de notre construction que $C_0(\widehat{G})$ est nucléaire si et seulement si $C_0(\widehat{G}_\Omega)$ est nucléaire. Les preuves de ces résultats ne sont pas publiées mais l'article [FV08] contient une vue d'ensemble.

En appliquant cette construction de torsion/déformation de Rieffel, nous pouvons maintenant produire de nouveaux exemples très explicites de GQLC.

Soient H est un sous-groupe abélien fermé d'un groupe localement compact G et $\alpha : \mathrm{L}^\infty(\widehat{H}) \to \mathrm{L}(G)$ l'unique $*$-morphisme unifère, normal et fidèle tel que $\alpha(u_h) = \lambda^G_h$, pour tout $h \in H \subset G$, où λ^G est la représentation régulière à gauche de G. Le morphisme α entrelace les comultiplications. Le poids invariant à gauche (et à droite) sur $\mathrm{L}(G)$ est le poids de Plancherel pour lequel on a $\sigma_t(\lambda^G_g) = \delta^{it}_G(g)\lambda^G_g$, pour tout $g \in G$, où δ_G est la fonction modulaire de G. On obtient donc $\sigma_t \circ \alpha(u_g) = \alpha(u_g(\cdot - \gamma_t))$, où γ_t est le caractère de H défini par $\langle\gamma_t, g\rangle = \delta^{-it}_G(g)$. Comme l'espace vectoriel engendré par les u_h, pour $h \in H$, est ultrafaiblement dense dans $L^\infty(\widehat{H})$, on a $\sigma_t \circ \alpha(F) = \alpha(F(\cdot - \gamma_t))$, pour tout $F \in L^\infty(\hat{H})$. On peut donc, étant donné un bicaractère Ψ sur $\widehat{H}$, appliquer la construction de la torsion. La déformation de la mesure de Haar est non triviale lorsque H n'est pas dans le noyau de la fonction modulaire de G. Nous appliquons maintenant cette situation à deux cas concrets.

Pour notre premier exemple, nous considérons le groupe G des matrices 2×2 à coefficients complexes triangulaires supérieures de déterminant 1. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $\omega \in \mathbb{C}$, on note (z, ω) la matrice :

$$\begin{pmatrix} z & \omega \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Le module de G est donné par :

$$\delta_G((z, \omega)) = |z|^{-2}.$$

On peut donc considérer le sous-groupe abélien fermé des matrices diagonales $H = \mathbb{C}^*$ dans G, qui n'est pas dans le noyau de la fonction modulaire. Le morphisme γ_t à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}^*}$ est donné par $\langle \gamma_t, z\rangle = |z|^{2it}$. Identifions $\widehat{\mathbb{C}^*}$ avec $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$ de la façon suivante :

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^* \to \widehat{\mathbb{C}^*}, \quad (n, \rho) \mapsto \gamma_{n,\rho} = (re^{i\theta} \mapsto e^{i \ln r \ln \rho} e^{in\theta}).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit un bicaractère sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\Psi_x((n, \rho), (k, r)) = e^{ix(k \ln \rho - n \ln r)}.$$

On obtient par torsion une famille de GQLC G_x avec constante d'échelle et groupe d'échelle triviaux. On montre de plus que l'antipode n'est pas déformée. On note φ_x le poids invariant à gauche et δ_x l'élément modulaire. On note également φ le poids de Plancherel sur $\mathrm{L}(G)$. En utilisant les résultats sur la torsion ainsi que sur la déformation de Rieffel dans sa version C*-algébrique, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.36 ([FV08]). *On a :*
- $[D\varphi_x : D\varphi]_t = \lambda^G_{(e^{2ixt},0)}$, $\delta_x^{it} = \lambda^G_{(e^{-4ixt},0)}$.
- $G_{-x} \simeq G_x^{op}$ *et si* $x, y \geq 0$ *avec* $x \neq y$ *alors* G_x *et* G_y *ne sont pas isomorphes.*

Soit $q = e^{8x}$. *La* C^**-algèbre réduite duale* $C_0(\widehat{G}_x)$ *est engendrée par* 2 *opérateurs normaux* $\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\beta}$ *affiliés à* $C_0(\widehat{G}_x)$ *vérifiant* $\hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\alpha}\hat{\beta}^* = q\hat{\beta}^*\hat{\alpha}$. *La comultiplication* $\hat{\Delta}_x$ *sur* $C_0(\widehat{G}_x)$ *est donnée par*

$$\hat{\Delta}_x(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha} \quad et \quad \hat{\Delta}_x(\hat{\beta}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} \dot{+} \hat{\beta} \otimes \hat{\alpha}^{-1}.$$

Le dual $\widehat{G}_x$ de ce groupe quantique apparaît donc comme une déformation de l'algèbre des fonctions sur le groupe des matrices triangulaires supérieures de déterminant 1 : seule la relation de commutation entre les fonctions coordonnées est déformée, la comultiplication est formellement la même.

Pour notre second exemple, nous considérons $G = \mathbb{C}^* \ltimes \mathbb{C}$ le groupe $az + b$ et $H = \mathbb{C}^*$ le sous-groupe abélien fermé formé des éléments de la forme $(z, 0)$ avec $z \in \mathbb{C}^*$. On utilise le même bicaractère Ψ_x que précédemment sur $\widehat{H} = \widehat{\mathbb{C}^*}$ et l'on obtient par torsion une famille de GQLC G_x avec constante d'échelle et groupe d'échelle triviaux. On montre de plus que l'antipode n'est pas déformée.

Théorème 3.37 ([FV09]). *On a :*
- $[D\varphi_x : D\varphi]_t = \lambda^G_{(e^{itx},0)}$, $\delta_x^{it} = \lambda^G_{(e^{-2itx},0)}$.
- $G_{-x} \simeq G_x^{op}$ *et si* $x, y \geq 0$ *avec* $x \neq y$ *alors* G_x *et* G_y *ne sont pas isomorphes.*

L'algèbre de von Neumann duale $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G}_x)$ *est engendrée par deux opérateurs* $\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\beta}$ *affiliés tels que*
- $\hat{\alpha}$ *est normal,* $\hat{\beta}$ *est q-normal, c-à-d* $\hat{\beta}\hat{\beta}^* = q\hat{\beta}^*\hat{\beta}$,
- $\hat{\alpha}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\alpha}\hat{\beta}^* = q\hat{\beta}^*\hat{\alpha}$, *avec* $q = e^{4x}$.

La comultiplication est donnée par $\hat{\Delta}_x(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha}$ *et* $\hat{\Delta}_x(\hat{\beta}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} \dot{+} \hat{\beta} \otimes 1$.

Pour le dual $\widehat{G}_x$ on a donc déformé, comme pour le groupe quantique $az + b$ de Woronowicz [Wor01], la relation de commutativité entre les deux fonctions coordonnées α et β. La différence majeure avec le groupe quantique $az + b$ de Woronowicz est que l'on a aussi déformé la normalité de la seconde fonction coordonnée. De plus, notre exemple est un cas particulier d'une construction générale et non, comme l'a fait Woronowicz, une construction isolée, *à la main*.

Rappelons rapidement ce qu'est le groupe quantique $az+b$ de Woronowicz de paramètre $0 < q < 1$. Ce groupe quantique G est auto-dual, son algèbre de von Neumann $\mathrm{L}^\infty(G)$ est engendrée par deux opérateurs a et b normaux affiliés tels que $ab = q^2ba$ et $ab^* = b^*a$. Le spectre de a et b est $\mathbb{C}^q \cup \{0\}$, où $\mathbb{C}^q = \{z \in \mathbb{C}, \ |z| \in q^{\mathbb{Z}}\}$. La comultiplication est donnée par $\Delta(a) = a \otimes a$ et $\Delta(b) = a \otimes b \dot{+} b \otimes 1$. Le groupe modulaire σ du poids invariant à gauche φ est donné par $\sigma_t(a) = q^{-2it}a$ et $\sigma_t(b) = b$.

Notre dernier exemple est beaucoup plus original. C'est la torsion d'un objet qui est déjà non trivial : le groupe quantique $az + b$ de Woronowicz G de paramètre $0 < q < 1$.

Soit $\alpha : L^\infty(\mathbb{C}^q) \to \mathrm{L}^\infty(G)$ le *-morphisme unital, normal et fidèle donné par $\alpha(F) = F(a)$. Comme $\Delta(a) = a \otimes a$, on a $\Delta \circ \alpha = (\alpha \otimes \alpha) \circ \Delta_{\mathbb{C}^q}$. De plus,

$$\sigma_t \circ \alpha(F) = \sigma_t(F(a)) = F(\sigma_t(a)) = F(q^{-2it}a) = \alpha(F(\cdot\gamma_t^{-1})),$$

où $\gamma_t = q^{2it} \in \mathbb{C}^q$. Effectuons la torsion en utilisant la famille de bicaractères sur $\mathbb{C}^q$:

$$\Psi_x(q^{k+i\varphi}, q^{l+i\psi}) = q^{ix(k\psi - l\varphi)} \quad \text{pour} \quad x, k, l \in \mathbb{Z}.$$

On obtient des GQLC G_x. Notons $a = u|a|$ la décomposition polaire de a.

Théorème 3.38 ([FV09])**.** *On a*

- $\Delta_x(a) = a \otimes a$ *et* $\Delta_x(b) = u^{-x+1}|a|^{x+1} \otimes b \dot{+} b \otimes u^x|a|^{-x}$.
- $[D\varphi_x : D\varphi]_t = |a|^{-2ixt}$, $\delta_x = |a|^{4x+2}$ *et l'antipode n'est pas déformée.*
- *Pour tout* $x, y \in \mathbb{N}$, *si* $x \neq y$, *alors* G_x *et* G_y *ne sont pas isomorphes ; si* $x \neq 0$, *alors* G_x *et* G_{-x} *ne sont pas isomorphes.*

L'algèbre de von Neumann duale $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G}_x)$ *est engendrée par deux opérateurs affiliés* $\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\beta}$ *tels que*

- $\hat{\alpha}$ *est normal,* $\hat{\beta}$ *est p-normal, c-à-d,* $\hat{\beta}\hat{\beta}^* = p\hat{\beta}^*\hat{\beta}$,
- $\hat{\alpha}\hat{\beta} = q^2\hat{\beta}\hat{\alpha}$ *et* $\hat{\alpha}\hat{\beta}^* = p\hat{\beta}^*\hat{\alpha}$, *avec* $p = q^{-4x}$.

La comultiplication est donnée par $\hat{\Delta}_x(\hat{\alpha}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\alpha}$ *et* $\hat{\Delta}_x(\hat{\beta}) = \hat{\alpha} \otimes \hat{\beta} \dot{+} \hat{\beta} \otimes 1$.

Pour le dual on déforme de cette façon la relation de commutativité entre a et b^* ainsi que la normalité de la “seconde coordonnée” b. Par contre on ne change pas la relation $ab = q^2ba$.

3.2.3 Propriété de Haagerup

Après les résultats de Brannan [Bra12, Bra13] sur la propriété de Haagerup des algèbres de von Neumann des groupes quantiques libres orthogonaux, unitaires et de permutations ainsi que ceux de Lemeux [Lem13a, Lem13b] pour les produits en couronnes libres d'un groupe de permutations quantiques par un groupe fini, il est devenu important d'entreprendre une étude systématique de la propriété de Haagerup pour les GQLC. C'est ce que nous faisons dans le papier [DFSW16], écrit en collaboration avec Daws, Skalski et White.

Soit G un GQLC. Une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert H est un unitaire $U \in M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H))$ tel que $(\Delta \otimes \mathrm{id})(U) = U_{13}U_{23}$. Une représentation U est dite *mélangeante* si, pour tous $\xi, \eta \in H$, $(\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi,\eta})(U) \in C_0(G)$. On dit qu'une représentation unitaire U *a des vecteurs presque invariants* s'il existe une suite généralisée de vecteurs unitaires (ξ_α) dans H telle que $(\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi_\alpha})(U) \to 1$ $*$-faiblement dans $\mathrm{L}^\infty(G)$.

La notion de propriété (T) s'étend naturellement aux GQLC. Nous dirons qu'un GQLC a la propriété (T) si toute représentation unitaire ayant des vecteurs presque invariants a un vecteur invariant non-nul (c-à-d un vecteur $\xi \in H$ non nul tel que $(\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi,\eta})(U) = \langle \xi, \eta \rangle 1$ pour tout $\eta \in H$). Cette définition est cohérente avec celle des GQC : un CQG G a la co-propriété (T) si et seulement si $\widehat{G}$ a la propriété (T) dans le sens précédent.

Définition 3.39 ([DFSW16])**.** Soit G un GQLC. On dit que G a *la propriété de Haagerup* s'il existe une représentation unitaire mélangeante avec des vecteurs presque invariants.

Remarque 3.40. Soit G un GQLC.

1. Si $\widehat{G}$ est co-moyennable alors G a la propriété de Haagerup ([BT03]).
2. G est compact si et seulement si il possède à la fois la propriété (T) et la propriété de Haagerup (évident d'après la définition).

Nous ne savons pas si un GQLC moyennable a toujours la propriété de Haagerup. C'est vrai pour les groupes quantiques discrets. Ce serait vrai en général si la réponse au problème de l'équivalence entre la moyennabilité de G et la co-moyennabilité de $\widehat{G}$ était positive.

Dans la suite nous supposerons que $C_0(G)$ est séparable. Fixons un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie. Soit $\mathrm{Rep}_G(H) \subset \mathcal{U}(M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H)))$ l'ensemble des représentations unitaires de G dans H. Comme $C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H)$ est séparable, $\mathcal{U}(M(C_0(G) \otimes \mathcal{K}(H)))$ est un groupe Polonais pour la topologie stricte et, $\mathrm{Rep}_G(H)$ étant fermé pour la topologie stricte, on déduit que $\mathrm{Rep}_G(H)$ est un espace Polonais. Nous montrons dans [DFSW16] que beaucoup de caractérisations classiques de la propriété de Haagerup sont encore valables dans le cas quantique.

Théorème 3.41 ([DFSW16]). *Soit G un GQLC. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *G a la propriété de Haagerup.*
2. *L'ensemble des représentations unitaires mélangeantes sur H est dense dans $\mathrm{Rep}_G(H)$.*
3. *Il existe une suite généralisée d'états $(\omega_i)_{i\in\mathcal{I}}$ sur $C_{0m}(\widehat{G})$ telle que $((\mathrm{id}\otimes\omega_i)(\mathbb{W}))_{i\in\mathcal{I}}$ soit une unité approchée de $C_0(G)$.*

Nous démontrons également que la propriété de Haagerup passe aux sous-groupes quantiques fermés de G, lorsque G est co-moyennable. L'hypothèse de co-moyennabilité de G n'est pas excessive car elle est vérifiée pour G discret et G un groupe localement compact classique.

Soit M une algèbre de von Neumann (à prédual séparable) munie d'un poids nfs φ. Nous dirons que M *a la propriété de Haagerup* s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications normales complètements positives $\theta_n : M \to M$ telle que $\varphi\circ\theta_n \leq \theta_n$, l'extension L^2 $T_n : \Lambda_\varphi(x) \mapsto \Lambda_\varphi(\theta_n(x))$ est compacte pour tout $n\in\mathbb{N}$ et la suite (T_n) converge fortement vers l'identité. La propriété de Haagerup ne dépend pas du choix de φ [CS13a, OR13] (voir également [Jol02] dans le cas fini et en ne considérant que des traces normales fidèles). Choda a montré qu'un groupe discret dénombrable Γ a la propriété de Haagerup si et seulement si $\mathrm{L}(\Gamma)$ l'a également. Ce résultat est faux dans le cas d'un groupe localement compact non-discret. En effet, Connes [Con76] a montré que si G est un groupe localement compact connexe séparable alors $\mathrm{L}(G)$ est injective et a donc la propriété de Haagerup [OR13]. Par exemple $\mathrm{L}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))$ est injective pour tout $n\geq 1$ mais $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ n'a pas la propriété de Haagerup dès que $n\geq 3$. Nous généralisons le résultat de Choda dans le cas unimodulaire.

Théorème 3.42 ([DFSW16]). *Soit G un groupe quantique discret. Si G a la propriété de Haagerup alors $\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ l'a également. La réciproque est vraie lorsque G est unimodulaire.*

Nous ne savons pas si le résultat précédent est encore valable dans le cas non-unimodulaire. Le théorème précédent assure que les résultats de Brannan [Bra12, Bra13] et de Lemeux [Lem13a, Lem13b] impliquent que les duaux des groupes quantiques unimodulairs libres orthogonaux, unitaires et de permutations ainsi que les duaux des produits en couronnes libres d'un groupe de permutations quantiques avec un groupe fini ont la propriété de Haagerup au sens de la définition 3.39.

Dans les cas non-unimodulaires, l'algèbre de von Neumann $\mathrm{L}^\infty(G)$, lorsque G est le dual d'un groupe quantique libre orthogonal, unitaire ou d'automorphisme d'une C*-algèbre de dimension finie, a encore la propriété de Haagerup [dCFY13]. Ce résultat est obtenu en utilisant l'invariance par équivalence monoïdale d'une version plus forte, dite *centrale*, de la propriété de Haagerup. Un cas particulier d'équivalence monoïdale est la torsion. Comme pour la co-propriété (T), un corollaire immédiat du théorème 3.42, est l'invariance par certaines torsions de la propriété de Haagerup.

Corollaire 3.43 ([DFSW16]). *Soient G un groupe quantique discret unimodulaire et K un groupe abélien tel que $\mathrm{L}^\infty(\widehat{K})\subset\mathrm{L}^\infty(\widehat{G})$ et que l'inclusion entrelace les comultiplications. Soient σ un bicaractère continu sur $\widehat{K}$ et G_σ le groupe quantique (discret) tordu par σ. Si G a la propriété de Haagerup alors G_σ l'a également.*

Nous montrons également dans [DFSW16] que la propriété de Haagerup est stable par produit libre de groupes quantiques discrets sans hypothèse d'unimodularité (le cas unimodulaire découle directement du théorème 3.42 et des résultats de [Boc93, Jol02]).

Nous donnons maintenant, dans le cas discret, la version quantique de la caractérisation de la propriété de Haagerup en termes d'existence d'une fonction propre conditionnellement de type négatif et de celle en termes d'existence d'une action affine isométrique et propre sur un espace de Hilbert réel.

Soit G un groupe quantique discret. Notons $\widehat{\varepsilon} : C_m(\widehat{G}) \to \mathbb{C}$ la co-unité. Un *semi-groupe d'états* sur $C_m(\widehat{G})$ est une famille $(\mu_t)_{t\geq 0}$ d'états sur $C_m(\widehat{G})$ telle que $\mu_0 = \widehat{\varepsilon}$, $\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t$ pour tous $s,t\geq 0$ et $\mu_t \to \widehat{\varepsilon}$ $*$-faiblement quand $t\to 0$.

Nous dirons qu'une application linéaire $L : \mathrm{Pol}(\widehat{G}) \to \mathbb{C}$ est une *fonctionnelle génératrice* sur G si L est auto-adjointe, $L(1) = 0$ et L est *conditionnellement de type négatif* c-à-d, $L(a^*a)\leq 0$ pour tout $a\in\mathrm{Pol}(\widehat{G})$ tel que $\widehat{\varepsilon}(a) = 0$. Nous dirons de plus que L est *symétrique* si la matrice $L_x = (L(u^x_{ij}))_{ij}$ est auto-adjointe pour tout $x \in \mathrm{Irr}(\widehat{G})$. Lorsque L est symétrique nous dirons que L est *propre* si, pour tout $C > 0$, il existe une partie finie $F \subset \mathrm{Irr}(\widehat{G})$ telle que $L_x \geq C1$ pour tout $x \in \mathrm{Irr}(\widehat{G}) \setminus F$.

Un *cocycle* sur G est une application linéaire $c : \mathrm{Pol}(\widehat{G}) \to H$, où H est un espace de Hilbert muni d'une représentation (unifère) $\pi : C_m(\widehat{G}) \to \mathcal{B}(H)$ telle que

$$c(ab) = \pi(a)c(b) + c(a)\widehat{\varepsilon}(b) \quad \text{pour tous} \quad a, b \in \mathrm{Pol}(\widehat{G}).$$

Un cocycle c est dit *réel* si $\langle c(a), c(b)\rangle = \langle c(\widehat{S}(b^*)), c(\widehat{S}(a)^*)\rangle$ pour tous $a, b \in \mathrm{Pol}(\widehat{G})$, où $\widehat{S}$ est l'antipode sur $C_m(\widehat{G})$. Un cocyle est dit *propre* si, pour tout $C > 0$, il existe une partie finie $F \subset \mathrm{Irr}(\widehat{G})$ telle que $c_x^* c_x \geq C1$ pour tout $x \in \mathrm{Irr}(\widehat{G}) \setminus F$, où c_x est la matrice $c_x = (c(u_{ij}^x))_{ij}$.

Théorème 3.44 ([DFSW16])**.** *Soit G un groupe quantique discret. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *G a la propriété de Haagerup.*
2. *Il existe un semi-groupe d'états $(\mu_t)_{t\geq 0}$ sur $C_m(\widehat{G})$ tel que $a_t = (\mathrm{id} \otimes \mu_t)(\mathbb{W}) \in c_0(G)$ pour tout $t > 0$ et a_t converge vers 1 strictement quand t tend vers 0.*
3. *G admet une fonctionnelle génératrice symétrique et propre.*
4. *G admet un cocycle réel propre.*

4 KK-théorie des C*-algèbres

En cherchant à généraliser les résultats obtenus dans [FF14] au cas des groupes quantiques K-moyennables, je me suis aperçu que l'essence de la preuve de K-moyennabilité résidait dans le fait que la surjection canonique de la C*-algèbre fondamentale maximale vers la C*-algèbre fondamentale réduite est inversible en KK-théorie et que ceci devrait être valable pour tout graphe de C*-algèbre, sans structure de groupe quantique sous-jacente. Dans le cas des produits libres de C*-algèbres nucléaires amalgamé sur $\mathbb{C}$ et avec des états GNS-fidèles, ce résultat a été démontré par Germain dans les années 90.

Dans [FG20] je démontre, en collaboration avec Emmanuel Germain, que, en présence d'espérances conditionnelles, la surjection canonique du produit libre amalgamé plein vers le produit libre amalgamé réduit est bien une équivalence en KK-théorie. Ce résultat est valable même lorsque les espérances conditionnelles ne sont pas *GNS-fidèles* mais dans ce cas le produit libre amalgamé réduit doit être remplacé par un nouveau produit libre amalgamé, que je construis et étudie dans [FG20], et que j'appelle le produit libre amalgamé *vertex-reduced*. La preuve que je donne est extrêmement simple, et même plus simple que la preuve de Germain dans le cas des produits libres de C*-algèbres nucléaires avec un amalgame trivial et des états GNS-fidèles : c'est juste une astuce de rotation.

Les outils développés pour cette preuve me permettent de démontrer une conjecture attribuée à Cuntz et datant des années 80 : la suite exacte longue en KK-théorie satisfaite par un produit libre amalgamé. Lorsque les amalgames sont triviaux et les C*-algèbres sont nucléaires, cette suite exacte à été démontrée par Germain puis, par Thomsen lorsque les amalgames sont de dimension finie.

Enfin, dans [FG18] je généralise, en collaboration avec Emmanuel Germain, tous les énoncés précédents au cas des C*-algèbres fondamentales de graphes de C*-algèbres. Le fait que ces énoncés soient valables même lorsque les espérances conditionnelles ne sont pas GNS-fidèles est crucial car cela nous permet de déduire qu'un groupe quantique fondamental associé à un graphe de groupes quantiques est co-K-moyennable si et seulement si tous les groupes quantiques initiaux le sont. Nos résultats généralisent, unifient et simplifient grandement tous les résultats obtenu précédemment sur le sujet.

Références

[AD14] Y. Antolín and D. Dreesen, *The Haagerup property is stable under graph products*, Prépublication arXiv :1410.6238 (2014).

[Avs11] S. Avsec, *Strong solidity of the q-Gaussian Algebras for all* $-1 < q < 1$, Prépublication arXiv :1110.4918 (2011).

[Baa92] S. Baaj, *Représentation régulière du groupe quantique* $\mathrm{E}_\mu(2)$, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **314** (1992), 1021–1026.

[Baa95] ———, *Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz*, Astérisque **232** (1995), 11–48.

[Ban23] S. Banach, *Sur le problème de la mesure*, Fund. Math. **4** (1923), 7–33.

[Ban96] T. Banica, *Théorie des représentations du groupe quantique compact libre* $O(n)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), no. 3, 241–244.

[Ban97] ———, *Le groupe quantique compact libre* $U(n)$, Comm. Math. Phys. **190** (1997), no. 1, 143–172.

[Ban99] ———, *Symmetries of a generic coaction*, Math. Ann. **314** (1999), no. 4, 763–780.

[BB07] Teodor Banica and Julien Bichon, *Free product formulae for quantum permutation groups*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), no. 3, 381–414. MR 2329759 (2009h :16047)

[BDRV06] J. Bichon, A. De Rijdt, and S. Vaes, *Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups*, Commun. Math. Phys. **262** (2006), 703–728.

[BHR12] R. Boutonnet, C. Houdayer, and S. Raum, *Amalgamated free product type* III *factors with at most one Cartan subalgebra*, to appear in Compos. Math. (2012).

[Bic04] Julien Bichon, *Free wreath product by the quantum permutation group*, Algebr. Represent. Theory **7** (2004), no. 4, 343–362. MR 2096666 (2005j :46043)

[Boc93] F. Boca, *On the method of constructing irreducible finite index subfactors of Popa*, Pacific J. Math. **161** (1993), no. 2, 201–231.

[Bou12] R. Boutonnet, *On solid ergodicity for Gaussian actions*, J. Funct. Anal. **263** (2012), no. 4, 1040–1063.

[Bou13] ———, *W*-superrigidity of mixing Gaussian actions of rigid groups*, Adv. Math. **244** (2013), 69–90.

[Bra12] M. Brannan, *Approximation properties for free orthogonal and free unitary quantum groups*, J. Reine Angew. Math. **672** (2012), 223–251.

[Bra13] Michael Brannan, *Reduced operator algebras of trace-preserving quantum automorphism groups*, Doc. Math. **18** (2013), 1349–1402. MR 3138849

[BS89] S. Baaj and G. Skandalis, *C*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante*, K-theory **2** (1989), no. 6, 683–721.

[BS93] ———, *Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algèbres*, Ann. Sci. École Norm. Supér. **26** (1993), no. 4, 425–488.

[BSV03] S. Baaj, G. Skandalis, and S. Vaes, *Non-Semi-Regular Quantum Groups Coming from Number Theory*, Commun. Math. Phys. **235** (2003), 139–167.

[BT03] E. Bédos and L. Tuset, *Amenability and co-amenability for locally compact quantum groups*, Int. J. Math. **14** (2003), no. 8, 865–884.

[BV09] Teodor Banica and Roland Vergnioux, *Fusion rules for quantum reflection groups*, J. Noncommut. Geom. **3** (2009), no. 3, 327–359. MR 2511633 (2010i :46109)

[BV12] M. Berbec and S. Vaes, *W*-superrigidity for group von Neumann algebras of left-right wreath products*, À paraître dans Proc. Lond. Math. Soc. (2012).

[BZ00] F.P. Boca and A. Zaharescu, *Factors of type* III *and the distribution of prime numbers*, Proc. London Math. Soc. **80** (2000), no. 1, 145–178.

[CFW81] A. Connes, J. Feldman, and B. Weiss, *An amenable equivalence relation is generated by a single transformation*, Ergodic Theory Dynam. Systems **1** (1981), 431–450.

[CH12] I. Chifan and C. Houdayer, *Bass-Serre rigidty results in von Neumann algebras*, Duke Math. J. **153** (2012), no. 1, 23–54.

[Cha12] V. Chaynikov, *Properties of hyperbolic groups : free normal subgroups, quasi- convex subgroups and actions of maximal growth*, PhD thesis, Vanderbilt University (2012).

[CIK13] I Chifan, A. Ioana, and Y. Kida, *W*-superrigidity for arbitrary actions of central quotients of braid groups*, Prépublication arXiv :1307.5245 (2013).

[Con73] A. Connes, *Une classification des facteurs de type* III, Ann. Sci. ENS **6** (1973), 133–252.

[Con76] ______, *Classification of injective factors*, Groups Geom. Dyn. **104** (1976), 73–115.

[Cor09] Y. de Cornulier, *Infinite conjugacy classes in groups acting on trees*, Groups Geom. Dyn. **3** (2009), 267–277.

[CP13] I. Chifan and J. Peterson, *Some unique group-measure space decomposition results*, Duke Math. J. **162** (2013), no. 11, 1923–1966.

[CS13a] M. Caspers and A. Skalski, *The Haagerup property for arbitrary von Neumann algebras*, Prépublication arXiv :1312.1491 (2013).

[CS13b] I Chifan and T. Sinclair, *On the structural theory of* II_1 *factors of negatively curved groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **46** (2013), no. 1, 1–33.

[CSU13] I Chifan, T. Sinclair, and B. Udrea, *On the structural theory of* II_1 *factors of negatively curved groups, II : Actions by product groups*, Adv. Math. **245** (2013), 208–236.

[Cun82] J. Cuntz, *The K-groups for free products of C*-algebras*, Proc. Symp. Pure Math. **38** (1982), 81–83.

[Cun83] ______, *K-theoretic amenability for discrete groups*, J. Reine Angew. Math. **344** (1983), 180–195.

[Dab10] Y. Dabrowski, *A Free Stochastic Partial Differential Equation*, Prépublication arXiv :1008.4742 (2010).

[dC11] K. de Commer, *Galois objects and cocycle twisting for locally compact quantum groups*, J. Operator Theory **66** (2011), no. 1, 59–106.

[dCFY13] K. de Commer, A. Freslon, and M. Yamashita, *CCAP for universal discrete quantum groups*, À paraître dans Comm. Math. Phys. (2013).

[DCFY14] Kenny De Commer, Amaury Freslon, and Makoto Yamashita, *CCAP for universal discrete quantum groups*, Comm. Math. Phys. **331** (2014), no. 2, 677–701, With an appendix by Stefaan Vaes. MR 3238527

[DCT11] Y. De Cornulier and R. Tessera, *A characterization of relative Kazhdan Property T for semi direct products with abelian groups*, Ergodic Theory and Dynam. Systems **31** (2011), 793–805.

[DFSW16] M. Daws, P. Fima, A. Skalski, and S. White, *The Haagerup property for locally compact quantum groups*, J. Reine Angew. Math. **711** (2016), 198–229.

[DI12] Y. Dabrowski and A. Ioana, *Unbounded derivations, free dilations and indecomposability results for* II_1 *factors*, Prépublication arXiv :1212.6425 (2012).

[Dix90] J.D. Dixon, *Most finitely generated permutation groups are free*, Bull. Lond. Math. Soc. **22** (1990), 222–226.

[Dri85] V.G. Drinfel'd, *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation*, Sov. Math. Dokl. **32** (1985), 256–258.

[Dri90] ______, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad. Math. J. **1** (1990), 1419–1457.

[ER63] P. Erdös and A. Rényi, *Asymmetric graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **14** (1963), 295–315.

[ES73] M. Enock and J.M. Schwartz, *Une dualité dans les algèbres de von Neumann*, C. R. Acad. Sc. Paris **277** (1973), 683–685.

[ES75] ______, *Une dualité dans les algèbres de von Neumann*, Supp. Bull. Soc. Math. France Mémoire **44** (1975), 1–144.

[ES92] ______, *Kac Algebras and Duality of Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[EV93] M. Enock and J.M. Vallin, *C*-algèbres de Kac et algèbres de Kac*, Proc. London Math. Soc. (3) **66** (1993), 619–650.

[EV96] M. Enock and L. Vainerman, *Deformation of a Kac algebra by an abelian subgroup*, Commun. Math. Phys. **178** (1996), no. 3, 571–596.

[Eym64] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France **92** (1964), 181–236.

[FC17] P. Fima and M. Caspers, *Graph products of operator algebras*, J. Noncommut. Geom. (2017), no. 1, 367–411.

[FF14] P. Fima and A. Freslon, *Graphs of quantum groups and K-amenability*, Adv. Math. **260** (2014), 233–280.

[FG18] P. Fima and E. Germain, *The KK-theory of fundamental C*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), 7051–7079.

[FG20] ———, *The KK-theory of amalgamated free products*, Adv. Math. **369** (2020).

[Fim07a] P. Fima, *Constructions et exemples de groupes quantiques localement compacts*, Ph.D. thesis, Université de Caen Basse-Normandie, 2007.

[Fim07b] ———, *On locally compact quantum groups whose algebras are factors*, J. Funct. Anal. **244** (2007), no. 1, 78–94.

[Fim10] ———, *Kazhdan's property T for discrete quantum groups*, Internat. J. Math. **21** (2010), no. 1, 47–65.

[Fim11] ———, *A note on the von Neumann algebra of a Baumslag-Solitar group*, C. R. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. Ser. 1, 25–27.

[Fim13] ———, *K-amenability of HNN extensions of amenable discrete quantum groups*, J. Funct. Anal. **265** (2013), no. 4, 507–519.

[Fim14] ———, *Amenable, transitive and faithful actions of groups acting on trees*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **24** (2014), no. 1, 1–17.

[FLMMM20] P. Fima, F. Le Maître, J. Melleray, and S. Moon, *Homogeneous actions on Urysohn spaces*, To appear in Colloquium Mathematicum (2020).

[FLMMS20] P. Fima, F. Le Maître, S. Moon, and Y. Stalder, *High transitivity for more groups acting on trees*, preprint arXiv :2003.11116 (2020).

[FM77] J. Feldman and C.C. Moore, *Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras I and II*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977), 289–324, 325–359.

[FMP17] P. Fima, K. Mukherjee, and I. Patri, *On compact bicrossed products*, J. Noncommut. Geom. **11** (2017), 1521–1591.

[FMS15] P. Fima, S. Moon, and Y. Stalder, *Highly transitive actions of groups acting on trees*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 12, 5083–5094.

[FMS20] ———, *Homogeneous actions on the Random Graph*, To appear in groups, Geom. and Dyn (2020).

[FP16] P. Fima and L. Pittau, *The free wreath product of a compact quantum group by a quantum automorphism group*, J. Funct. Anal. **271** (2016), 1996–2043.

[Fur99] A. Furman, *Orbit equivalence rigidity*, Ann. of Math. **150** (1999), 1083–1108.

[Fur11] ———, *A survey of measured group theory*, Eds. B. Farb and D. Fisher, The University of Chicago Press, 2011.

[FV08] P. Fima and L. Vainerman, *A locally compact quantum group of upper triangular matrices*, Ukrainian Math. J. **60** (2008), no. 4, 564–577.

[FV09] ———, *Twisting and Rieffel's deformations of locally compact quantum groups. Deformation of the Haar measure*, Comm. Math. Phys. **286** (2009), no. 3, 1011–1050.

[FV12] P. Fima and S. Vaes, *HNN extensions and unique group measure space decomposition of* II_1 *factors*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 5, 2601–2617.

[FV15] P. Fima and R. Vergnioux, *On a cocycle in the adjoint representation of the orthogonal free quantum groups*, Int. Math. Res. Notices **2015** (2015), 10069–10094.

[Gab10] D. Gaboriau, *Orbit equivalence and Measured Group Theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III, Hindustan Book Agency, 2010, pp. 1501–1527.

[Ge98] L. Ge, *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras, II*, Ann. of Math. **147** (1998), 143–157.

[Ger96] E. Germain, *KK-theory of reduced free-product C*-algebras*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 3, 707–724.

[GG13] S. Garion and Y. Glasner, *Highly transitive actions of Out($\mathbb{F}_n$)*, Groups Geom. Dyn. **7** (2013), no. 2, 357–376.

[GGS19] T. Gelander, Y. Glasner, and G. Soĭfer, *Maximal subgroups of countable groups, a survey*, preprint arXiv :1909.09361 (2019).

[GJ03] S.R. Gal and Januszkiewicz, *New a-T-menable HNN-extension*, J. Lie Theory **13** (2003), no. 2, 383–385.

[GM91] A. M. W. Glass and S. H. McCleary, *Highly transitive representations of free groups and free products*, Bull. Austral. Math. Soc.. **43** (1991), no. 2, 19–36.

[GM07] Y. Glasner and N. Monod, *Amenable action, free products and a fixed point property*, Bull. Lond. Math. Soc. **39** (2007), no. 1, 138–150.

[GN05] R. Grigorchuk and V. Nekrashevych, *Amenable actions of non amenable groups*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg Otdel. Math. Inst. Steklov (POMI) **326** (2005), 85–96.

[Gre69] F. P. Greenleaf, *Invariants means on topological groups and their applications*, Van Nostrand Mathematical Studies, vol. 16, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969.

[Gre90] E.R. Green, *Graph products*, PhD thesis, University of Leeds (1990).

[Gun92] S. V. Gunhouse, *Highly transitive representations of free products on the natural numbers*, Arch. Math. **58** (1992), no. 1, 435–443.

[Haa78] U. Haagerup, *An example of a nonnuclear C*-algebra which has the metric approximation property*, Ivent. Math. **50** (1978), 279–293.

[Hic92] K. K. Hickin, *Highly transitive Jordan representations of free products*, J. London Math. Soc. **46** (1992), 81–91.

[HO16] M. Hull and D. Osin, *Transitivity degrees of countable groups and acylindrical hyperbolicity*, Isr. J. Math. **216** (2016), 307–353.

[Hou10a] C. Houdayer, *Strongly solid group factors which are not interpolated free group factors*, Math. Ann. **346** (2010), no. 4, 969–989.

[Hou10b] ———, *Structural results for free Araki-Woods factors and their continuous cores*, J. Inst. Math. Jussieu **9** (2010), no. 4, 741–767.

[HPV13] C. Houdayer, S. Popa, and V. Vaes, *A class of groups for which every action is W*-superrigid*, Group Geom. Dyn.. **7** (2013), no. 3, 577–590.

[HR11] C. Houdayer and E. Ricard, *Approximation properties and absence of Cartan subalgebra for free Araki-Woods factors*, Adv. Math. **228** (2011), 764–802.

[HS11] C. Houdayer and D. Shlyakhtenko, *Strongly solid* II_1 *factors with an exotic MASA*, Int. Math. Res. Not. (2011), no. 3, 1352–1380.

[HSS14] U. Haagerup, T. Steenstrup, and R. Szwarc, *Grundzuge der Mengenlehre*, von Veit, Leipzig (1914).

[HV12] C. Houdayer and S. Vaes, *Type* III *factors with unique Cartan decomposition*, À paraître dans J. Math. Pures Appl. (2012).

[Ioa11a] A. Ioana, *Cocycle superrigidity for profinite actions of property (T) groups*, Duke Math. J. **157** (2011), no. 2, 337–367.

[Ioa11b] ———, *W*-superrigidity for Bernoulli actions of property (T) groups*, J. of the AMS **24** (2011), 1175–1226.

[Ioa12a] ———, *Cartan subalgebras of amalgamated free product* II_1 *factors*, Prépublication arXiv :1207 :0054 (2012).

[Ioa12b] ———, *Classification and rigidity for von Neumann algebras*, À paraître dans Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Krakow, 2012), 2012.

[Ioa12c] ———, *Compact actions and uniqueness of the group measure space decomposition of* II_1 *factors*, J. Funct. Anal. **262** (2012), no. 10, 4525–4533.

[IPV13] A. Ioana, S. Popa, and S. Vaes, *A class of supper rigid group von Neumann algebras*, Ann. of Math. **178** (2013), no. 2, 231–286.

[Iso12] Y. Isono, *Examples of factors which have no Cartan subalgebras*, Prépublication arXiv :1209.1728 (2012).

[Iso13a] ———, *On bi-exactness of discrete quantum groups*, Prépublication arXiv :1308.5103 (2013).

[Iso13b] ———, *Weak exactness for C*-algebras and application to condition (AO)*, J. Funct. Anal. **264** (2013), no. 4, 964–998.

[Jim85] M. Jimbo, *A q-difference analogue of* $\mathrm{U}(g)$ *and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys. **10** (1985), 63–69.

[Jol90] P. Jolissaint, *Rapidly decreasing functions in reduced C*-algebras of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 167–196.

[Jol02] ———, *Haagerup property for finite von Neumann algebras*, J. Operator Theory **48** (2002), no. 3, 549–571.

[JV84] P. Julg and A. Valette, *K-theoretic amenability for* $SL_2(Q_p)$*, and the action on the associated tree*, J. Funct. Anal. **58** (1984), no. 2, 194–215.

[Kac61] G.I. Kac, *Generalization of the group principle of duality*, Soviet Math. Dokl. **2** (1961), 581–584.

[Kac65] ———, *Ring groups and the principle of duality,* I, II, Trans. Moscow Math. Soc. (1963, 1965), 291–339, 94–126.

[Kas09] P. Kasprzak, *Rieffel deformation via crossed-product*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 5, 1288–1332.

[Kid10] Y. Kida, *Measure equivalence rigidity of the mapping class group*, Ann. of Math. **171** (2010), no. 3, 1851–1901.

[Kid11] ———, *Rigidity of amalgamated free products in measure equivalence*, J. Topol. **4** (2011), no. 3, 687–735.

[Kir92] E. Kirchberg, , Lecture at the conference Invariants in operator algebras, Copenhagen (1992).

[Kit12] D. Kitroser, *Highly transitive actions of surface groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 3365–3375.

[Kre63] M.G. Krein, *Hermitian-positive kernels on homogeneous spaces,* I, II, Am. Math. Soc. Transl. **34** (1963), 69–108, 109–164.

[Kri76] W. Krieger, *On ergodic flows and the isomorphism of factors*, Math. Ann. **223** (1976), 19–70.

[KV73] G.I. Kac and L.I. Vainerman, *Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras*, Soviet Math. Dokl. **14** (1973), 1144–1148.

[KV74] ———, *Nonunimodular ring-groups and Hopf-von Neumann algebras*, Math. USSR Sbornik **23** (1974), 185–214.

[KV00] J. Kustermans and S. Vaes, *Locally compact quantum groups*, Ann. Sci. ENS **33** (2000), no. 6, 837–934.

[KV03] ———, *Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting*, Math. Scand. **92** (2003), no. 1, 68–92.

[Laf02] V. Lafforgue, *K-théorie bivariante pour les algèbres de Banach et conjevture de Baum-Connes*, Invent. Math. **149** (2002), 1–95.

[Lan94] M.B. Landstad, *Quantization arising from abelian subgroups*, Int. J. Math. **5** (1994), 897–936.

[LBMB20] A. Le Boudec and N. Matte Bon, *Triple transitivity and non-free actions in dimension one*, preprint arXiv :1906.05744 (2020).

[Leb01] H. Lebesgue, *Sur une généralisation de l'intégrale définie*, C. R. Acad. Sci. Paris **132** (1901), 1025–1028.

[Lem13a] F. Lemeux, *Haagerup property for quantum reflexion groups*, À paraître dans proceedings of the AMS. (2013).

[Lem13b] ______, *The fusion rules of some free wreath product quantum groups and applications*, Prépublication arXiv :1311.6115 (2013).

[Lem14] François Lemeux, *The fusion rules of some free wreath product quantum groups and applications*, J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 7, 2507–2550. MR 3250372

[LT14] François Lemeux and Pierre Tarrago, *Free wreath product quantum groups : the monoidal category, approximation properties and free probability*, preprint arXiv :1411.4124 (2014).

[McD77] T. P. McDonough, *A permutation representation of a free group*, Quart. J. Math. Oxford. **28** (1977), 353–356.

[MN94] T. Masuda and Y. Nakagami, *A von Neumann algebra framework for the duality of the quantum groups*, Publ. RIMS, Kyoto University **30** (1994), 799–850.

[MO15] A. Minasyan and D.. Osin, *Acylindrical hyperbolicity of groups acting on trees*, Math. Ann. **362** (2015), 1055–1105.

[Mol91] D.I. Moldavanskii, *On the isomorphisms of Baumslag-Solitar groups*, Ukrain. Mat. Zh. **43** (1991), 1684–1686.

[Moo10] S. Moon, *Amenable actions of amalgamated free products*, Groups, Geometry and Dynamics **4** (2010), no. 2, 309–332.

[Moo11a] ______, *Amenable actions of amalgamated free products of free groups over a cyclic subgroup and generic property*, Ann. Math. Blaise Pascal **18** (2011), no. 2, 287–296.

[Moo11b] ______, *Permanent properties of amenable, transitive and faithful actions*, Bull. Belgian Math. Soc. Simon Stevin **18** (2011), no. 2, 287–296.

[MS13] S. Moon and Y. Stalder, *Highly transitive actions of free products*, Algebr. Geom. Topol. **13** (2013), 589–607.

[MvN36] F.J. Murray and J. von Neumann, *On rings of operators*, Ann. of Math. **37** (1936), 716–808.

[MvN43] ______, *On rings of operators. IV.*, Ann. of Math. **44** (1943), 116–129.

[OP04] N. Ozawa and S. Popa, *Some prime factorization results for type II_1 factors*, Invent. Math. **156** (2004), no. 2, 223–234.

[OP10a] ______, *On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra*, Ann. of Math. **172** (2010), no. 1, 713–749.

[OP10b] ______, *On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra II*, American J. Math. **132** (2010), no. 3, 841–866.

[OR13] M. Okayasu and Tomatsu R., *The Haagerup approximation property for arbitrary von Neumann algebras*, PrÃ©publication arXiv :1312.1033 (2013).

[Oza04] N. Ozawa, *Solid von Neumann algebras*, Acta Math. **192** (2004), 111–117.

[Oza06a] ______, *A Kurosh-type theorem for type* II_1 *factors*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 97560.

[Oza06b] ______, *Boundary amenability of relatively hyperbolic groups*, Topology Appl. **153** (2006), no. 14, 2624–2630.

[Oza09] ______, *An example of a solid von Neumann algebra*, Hokkaido Math. J. **38** (2009), no. 3, 557–561.

[Pet09a] J. Peterson, *Examples of group actions which are virtually W*-superrigid*, Prépublication arXiv :1002.1745 (2009).

[Pet09b] ______, L^2*-rigidity in von Neumann algebras*, Invent. Math. **175** (2009), 417–433.

[Pim86] M.V. Pimsner, *KK-groups of crossed products by groups acting on trees*, Invent. Math. **86** (1986), no. 3, 603–634.

[Pop83] S. Popa, *Orthogonal pairs of $*$-algebras and finite von Neumann algebras*, J. Operator Theory **9** (1983), no. 2, 253–268.

[Pop06] ______, *Strong rigidity of* II_1 *factors arising from malleable actions of w-rigid groups, I and II.*, Invent. Math. **165** (2006), 260–408, 409–452.

[Pop07a] ______, *Cocycle and orbit equivalence superrigidity for malleable actions of w-rigid groups*, Invent. Math. **170** (2007), 243–295.

[Pop07b] ______, *Deformation and rigidity for group actions on von Neumann algebras*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), vol. I, European Mathematical Society Publishing House, 2007, pp. 445–477.

[Pop08] ______, *On the superrigidity of malleable actions with spectral gap*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 981–1000.

[PS12] J. Peterson and T. Sinclair, *On cocycle superrigidity for Gaussian actions*, Erg. Th. and Dyn. Sys. **32** (2012), no. 1, 249–272.

[PV82] M.V. Pimsner and D.V. Voiculescu, *K-groups of reduced crossed products by free groups*, J. Operator Theory **8** (1982), no. 1, 131–156.

[PV10] S. Popa and S. Vaes, *Group measure space decomposition of* II_1 *factors and W*-superrigidity*, Invent. Math. **182** (2010), 371–417.

[PV11] ______, *Cocycle and orbit superrigidity for lattices in* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ *acting on homogeneous spaces*, Geometry, rigidity, and group actions. Chicago lectures in Math. (2011), 419–451.

[PV13a] ______, *Unique Cartan decomposition for* II_1 *factors arising from arbitrary actions of free groups*, À paraître dans Acta Math. (2013).

[PV13b] ______, *Unique Cartan decomposition for* II_1 *factors arising from arbitrary actions of hyperbolic groups*, À paraître dans Crelle's Journal (2013).

[Rad64] R. Rado, *Universal graphs and universal functions*, Acta Arith. **9** (1964), 393–407.

[Rie93a] M. Rieffel, *Compact quantum groups associated with toral subgroups*, Contemp. Math. Phys. **145** (1993), 465–491.

[Rie93b] ______, *Deformation quantization for actions of* $\mathbb{R}^d$, Memoirs A.M.S. **506** (1993).

[Rie95] ______, *Non compact quantum groups associated with abelian subgroups*, Comm. Math. Phys. **171** (1995), no. 1, 181–201.

[Sha05] Y. Shalom, *Measurable group theory*, Proceedings of the 4th European Congress of Mathematics (Stockholm, 2004), European Mathematical Society Publishing House, 2005, pp. 391–423.

[Shl00] D. Shlyakhtenko, *Prime type* III *factors*, Proc. Nat. Acad. Sci. **97** (2000), 12439–12441.

[Shl04] ______, *Some estimates for non-microstates free entropy dimension with applications to q-semicircular families*, Int. Math. Res. Not. **51** (2004), 2757–2772.

[Shl09] ______, *Lower estimates on microstates free entropy dimension*, Anal. PDE **2** (2009), no. 2, 119–146.

[Sin11] T. Sinclair, *Strong solidity of group factors from lattices in* $\mathrm{SO}(n,1)$ *and* $\mathrm{SU}(n,1)$, J. Funct. Anal. **260** (2011), no. 11, 3209–3221.

[Ska88] G. Skandalis, *Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz)*, K-theory **1** (1988), no. 6, 549–573.

[Sta06] Y. Stalder, *Moyennabilité intérieure et extensions HNN*, Ann. Inst. Fourier **56** (2006), no. 2, 309–323.

[Sti59] W.F. Stinespring, *Integration theorems for gauges and duality for unimodular locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 15–56.

[Tan38] T. Tannaka, *Uber den Dualitatssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen*, Tohoku Math. J. **45** (1938), 1–12.

[Tar29] A. Tarski, *Sur les fonctions additives dans les classes abstraites et leur application au problème de la mesure*, C. R. Soc. Sc. Varsovie **22** (1929), 114–117.

[Tat66] N. Tatsuuma, *A duality theorem for locally compact groups,* I, II, Proc. Japan Acad. **41, 42** (1965, 1966), 878–882, 46–47.

[Tom06] R. Tomatsu, *Amenable discrete quantum groups*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), no. 4, 949–964.

[Ued05] Y. Ueda, *HNN extensions of von Neumann algebras*, J. Funct. Anal. **225** (2005), no. 2, 383–426.

[Ury27] P. Urysohn, *Sur un espace métrique universel. I,II*, Bull. Sci. Math., II. Sér. **51** (1927), 43–64.

[Vae07] S. Vaes, *Rigidity results for Bernoulli actions and their von Neumann algebras (after S. Popa)*, Séminaire Bourbaki, exposé 961. Astérisque **311** (2007), 237–294.

[Vae10] ———, *Rigidity for von Neumann algebras and their invariants*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Hyderabad, 2010), vol. III, Hindustan Book Agency, 2010, pp. 1624–1650.

[Vae13] ———, *One-cohomology and the uniqueness of the group measure space decomposition of a* II_1 *factor*, Mathematische Annalen **355** (2013), 661–696.

[Val85] J.M. Vallin, *C*-algèbres de Hopf et C*-algèbres de Kac*, Proc. London Math. Soc. **50** (1985), no. 3, 131–174.

[vD90] E. K. van Douwen, *Measures invariant under actions of* $\mathbb{F}_2$, Topology Appl. **34** (1990), no. 1, 53–68.

[VD98] A. Van Daele, *An algebraic framework for group duality*, Adv. in Math. **140** (1998), 323–366.

[VD01] ———, *The Haar measure on some locally compact quantum groups*, Preprint K.U.Leuven (2001).

[VDW96] A. Van Daele and S. Wang, *Universal quantum groups*, Internat. J. Math. **7** (1996), 255–264.

[Ver04] R. Vergnioux, *K-amenability for amalgamated free products of amenable discrete quantum groups*, J. Funct. Anal. **212** (2004), no. 1, 206–221.

[vN29] J. von Neumann, *Zur allgemeinen theorie des masses*, Fund. Math. **13** (1929), 73–116.

[Voi96] D.V. Voiculescu, *The analogues of entropy and of Fishers information measure in free probability theory, III*, GAFA, Geom. funct. Anal.. **6** (1996), 172–199.

[Voi11] C. Voigt, *The Baum-Connes conjecture for free orthogonal quantum groups*, Adv. Math. **227** (2011), 1873 – 1913.

[Voi12] ———, *Quantum SU(2) and the Baum-Connes conjecture. Operator algebras and quantum groups*, Banach Center Publ. **98** (2012), 1.

[Voi14] ———, *On the structure of quantum automorphism groups*, Prépublication arXiv :1411.1939 (2014).

[VV03] S. Vaes and L. Vainerman, *Extensions of locally compact quantum groups and the bicrossed product construction*, Adv. in Math. **175** (2003), 1–101.

[VV07] S. Vaes and R. Vergnioux, *The boundary of universal discrete quantum groups, exactness and factoriality*, Duke Math. J. **140** (2007), no. 1, 35–84.

[VV13] R. Vergnioux and C. Voigt, *The K-theory of free quantum groups*, Math. Ann. (2013).

[Wan95] S. Wang, *Free products of compact quantum groups*, Comm. Math. Phys. **167** (1995), no. 3, 671–692.

[Wan96] ———, *Deformation of Compact Quantum Groups via Rieffel's Quantization*, Commun. Math. Phys. **178** (1996), no. 3, 747–764.

[Wan98] ———, *Quantum symmetry groups of finite spaces*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), no. 1, 195–211.

[Wor87a] S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613–665.

[Wor87b] ———, *Twisted* SU(2) *group. An example of a non-commutative differential calculus*, Publ. RIMS, Kyoto University **23** (1987), 117–181.

[Wor88] ———, *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted SU(N) groups*, Invent. Math. **93** (1988), no. 1, 35–76.

[Wor91] ———, *Quantum* E(2) *group and its Pontryagin dual*, Lett. Math. Phys. **23** (1991), 251–263.

[Wor96] ———, *From multiplicative unitaries to quantum groups*, Int. J. Math. **7** (1996), no. 1, 127–149.

[Wor98] ———, *Compact quantum groups*, in 'Symétries quantiques' (Les Houches, 1995). North-Holland, Amsterdam (1998), 845–884.

[Wor01] ———, *Quantum 'az+b' group on complex plane*, Int. J. Math. **12** (2001), 461–503.

[WZ02] S.L. Woronowicz and S. Zakrzewski, *Quantum 'ax+b' group*, Review in Mathematical Physics **14** (2002), 797–828.

[Zim80] R.J. Zimmer, *Strong rigidity for ergodic actions of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **112** (1980), 511–529.

[Zim84] ———, *Ergodic theory and semi simple Lie groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhauser Verlag, Basel, 1984.

Pierre FIMA, Maître de Conférences HDR
Université de Paris, Sorbonne Université, CNRS, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, IMJ-PRG, F-75013, Paris, France
Adresse e-mail : pierre.fima@imj-prg.fr