L'ANALYSE MICROLOCALE DES FAISCEAUX

Pierre SCHAPIRA

Si l'analyse microlocale trouve son origine (autour des années 70) dans la théorie des équations aux dérivées partielles, son champ d'application s'est considérablement élargi depuis cette période, et elle apparaît maintenant (pas toujours explicitement) dans des domaines aussi divers que l'étude des singularités ou la représentation des algèbres de Lie. Nous nous proposons de décrire ici son interprétation en théorie des faisceaux, et de montrer comment la «théorie microlocale des faisceaux» permet aussi bien de traiter des problèmes de topologie algébrique que de retrouver les principaux résultats de la théorie des systèmes différentiels analytiques. Au coeur de cette théorie, le théorème d'involutivité est un peu l'analogue du principe d'incertitude.

Localement, une variété différentiable X n'est rien d'autre qu'un ouvert de l'espace ordinaire (à n dimensions) et la notion *d'espace tangent* à X est alors parfaitement intuitive: en chaque point de X on regarde les directions passant par ce point. Malheureusement pour l'intuition, beaucoup de phénomènes physiques ou mathématiques se décrivent non sur l'espace tangent mais sur son dual, *l'espace cotangent*: en chaque point de X, on regarde l'ensemble des demi-espaces passant par ce point. Cet espace cotangent est bien connu des physiciens (depuis Hamilton au début du siècle dernier): c'est ce qu'ils appellent *l'espace de phase* d'un système mécanique, et il est muni d'une structure très particulière que les mathématiciens qualifient de *structure symplectique*. Remarquons au passage que l'importance de l'espace cotangent n'a rien d'étonnant: la dualité tangent/cotangent ne fait que traduire la dualité observateur/observé.

Si la géométrie symplectique a donc une longue histoire, ce n'est que récemment (autour des années 65-70) qu'est apparue l'idée de traiter dans l'espace cotangent à X des objets mathématiques «vivant» naturellement dans la variété X. C'est ce qu'on appelle «faire de l'analyse microlocale». De nombreuses branches des mathématiques se prêtent ainsi à l'analyse microlocale, et d'ailleurs nombreux sont ceux qui en font sans le savoir.

Le domaine privilégié de l'analyse microlocale, et celui par lequel cette théorie s'est imposée, est la théorie des équations aux dérivées partielles. Si P est un opérateur différentiel sur X, le polynôme formé avec les dérivations de plus haut degré de P définit une fonction sur T^*X, l'espace cotangent à X, dont l'étude permet de contrôler le comportement des singularités des solutions de l'équation $Pu = 0$, u étant par exemple une distribution. Il est alors naturel de chercher à définir directement dans T^*X les singularités de u, et on obtient la notion de *front d'onde* d'une distribution (Sato, Hörmander).

Dans un autre ordre d'idées, supposons que l'on veuille étudier la topologie d'un ensemble analytique S plongé dans X. On peut pour cela *stratifier* S, c'est-à-dire le découper en variétés lisses et considérer la réunion des fibrés conormaux aux strates : c'est un ensemble *Lagrangien* de T^*X auquel il est possible d'adapter des méthodes classiques de la géométrie différentielle (la théorie de Morse) permettant de calculer des invariants topologiques importants comme par exemple *l'indice d'Euler-Poincaré* de S.

Ces deux exemples d'analyse microlocale s'intègrent en fait dans une théorie commune, la théorie microlocale des faisceaux.

Un peu d'histoire

C'est alors qu'il est prisonnier de guerre dans un camp d'officiers en Autriche que Jean Leray a établi les bases de ce qui allait devenir la théorie des faisceaux. Les idées de Leray sont à l'origine d'une rénovation de la topologie algébrique: André Weil s'en inspire pour obtenir une nouvelle démonstration, (qui a joué un rôle fondamental par la suite), des théorèmes de de Rham, et Henri Cartan y consacre plusieurs années de son séminaire à l'Ecole Normale Supérieure. Mais l'intérêt de la théorie des faisceaux n'est pas confiné à la topologie algébrique, et devient très vite, sous l'impulsion de Cartan et Jean-Pierre Serre, un outil fondamental de la géométrie analytique, puis avec Alexandre Grothendieck, de la géométrie algébrique.

Sans les outils de l'algèbre homologique, la théorie des faisceaux ne serait sans doute restée qu'une suite d'élégantes définitions. Là encore, c'est Leray qui ouvre la voie dans les années 45 en introduisant ses fameuses «suites spectrales» (étudiées ensuite par Koszul), mais ce n'est que dix ans plus tard, avec le livre de Cartan-Eilenberg puis avec l'article de Grothendieck au journal de Tohoku en 57, que naît vraiment la théorie moderne de la cohomologie. Celle-ci trouve son achèvement avec une théorie qui malgré son âge avancé (près de trente ans) continue de faire peur à de nombreux mathématiciens, c'est la «théorie des catégories dérivées», dûe à Grothendieck et développée par Jean-Louis Verdier. C'est dans ce cadre que la théorie des faisceaux prend toute sa force (ainsi d'ailleurs que bien d'autres théories mathématiques), et sans elle il n'aurait sans doute pas été possible à Verdier de formuler sa théorie de la dualité.

En 1969, afin de définir le front d'onde analytique des hyperfonctions, Mikio Sato introduit une nouvelle idée

Analyse et applications (URA 742 CNRS), Département de mathématiques, Université Paris XIII, Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse.

en théorie des faisceaux, celle de *microlocalisation*. Si X est une variété différentiable, et M une sous-variété, Sato associe à tout faisceau F sur X un faisceau (ou plus exactement un objet de la catégorie dérivée des faisceaux) sur le fibré conormal à M dans X, permettant ainsi d'étudier F au voisinage de chaque direction normale à M. Par exemple, si M est une variété analytique réelle, si X est un complexifié de M et si F est le faisceau O_X des fonctions holomorphes, on sait (il s'agit d'un autre travail de Sato, datant de 1960) qu'une hyperfonction u sur M est représentée par une somme de valeurs au bord de fonctions holomorphes dans des tubes de X qui s'appuient sur M. Avec la microlocalisation on peut décrire précisément ces tubes, définissant ainsi le front d'onde analytique de u. Remarquons pour les analystes que l'on peut aussi définir avec Hörmander le front d'onde d'une distribution en regardant les directions où (des variantes de) la transformée de Fourier de u est à décroissance rapide.

En 1982, Masaki Kashiwara et l'auteur, approfondissant l'idée de Sato, introduisent un nouvel outil, le microsupport des faisceaux. C'est un fermé conique de T^*X qui se révèlera être un ensemble involutif. Il est alors possible de travailler «microlocalement» avec les faisceaux sur une variété.

Faisceaux

Un *préfaisceau* F d'espaces vectoriels (sur un corps k fixé une fois pour toute) sur un espace topologique X est la donnée pour tout ouvert U de X d'un espace vectoriel $F(U)$, et pour toute inclusion ouverte $V \subset U$, d'une application linéaire, dite de restriction, de $F(U)$ dans $F(V)$, ces opérations de restriction vérifiant les conditions de compatibilité évidentes. On appelle section de F sur U un élément de $F(U)$. Un préfaisceau F est alors un *faisceau* si pour tout recouvrement ouvert $\cup_j U_j$ de U, toute famille de sections s_j sur U_j vérifiant les conditions de recollement naturelles définit une unique section s sur U.

Donnons quelques exemples. Sur un espace topologique X, le préfaisceau des fonctions continues à valeurs réelles (c'est-à-dire la donnée pour tout ouvert U de X de l'espace vectoriel des fonctions continues sur U à valeurs réelles, avec les opérations de restriction usuelles) est un faisceau, de même que sur une variété différentiable, le préfaisceau des fonctions différentiables est un faisceau: cela résulte de ce que les propriétés d'être continu ou différentiable sont des propriétés locales. Par contre, le préfaisceau des fonctions bornées sur X n'est pas un faisceau, puisqu'une fonction peut être localement bornée sans être bornée.

On définit aussi la notion de *morphisme de faisceaux* de F dans G: c'est la donnée pour tout ouvert U de X d'une application linéaire de $F(U)$ dans $G(U)$, ces applications «commutant» aux opérations de restriction, ce qui traduit leur caractère local. Il est alors possible de définir le noyau et le conoyau d'un morphisme de faisceaux, et l'on obtient ainsi la *catégorie abélienne* (voir ci-dessous) des faisceaux sur X.

Si Z est un fermé de U, avec U ouvert de X, on note $\Gamma_Z(U;F)$ l'ensemble des sections de F sur U «à support dans Z», c'est-à-dire dont la restriction à $U \backslash Z$ est nulle. On pose aussi $\Gamma(U;F) = \Gamma_U(U;F)$ $(= F(U))$. Une remarque fondamentale, au coeur de la théorie des faisceaux, est que le *foncteur* $\Gamma(X;*)$ (et *a fortiori* le foncteur $\Gamma_Z(U;*)$), qui à F associe $\Gamma(X;F)$, n'est pas *exact* (voir ci-dessous), ce qui traduit le fait qu'une propriété peut être vérifiée localement, c'est-à-dire au voisinage de chaque point, sans l'être globalement, sur l'espace tout entier.

Explicitons ce phénomène sur un exemple. Soit $X = C\backslash\{0\}$, la droite complexe privée de l'origine, soit C_X le faisceau des fonctions localement constantes sur X à valeurs complexes et soit O_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X. La suite de faisceaux :

$$0 \to C_X \to O_X \to O_X \to 0$$

où la flèche $O_X \to O_X$ est la dérivation holomorphe, est une suite exacte, car d'une part une fonction holomorphe solution de l'équation $\frac{d}{dz}f = 0$ est localement constante et d'autre part on peut localement résoudre l'équation différentielle $\frac{d}{dz}f = g$.

Regardons les sections globales de ce complexe, autrement dit appliquons le foncteur $\Gamma(X;*)$. On obtient le complexe :

$$0 \to C \to \Gamma(X;O_X) \to \Gamma(X,O_X) \to 0,$$

qui lui n'est plus exact, car l'équation $\frac{d}{dz}f = 1/z$ n'ayant pas de solutions holomorphes sur $C\backslash\{0\}$, la flèche $\Gamma(X;O_X) \to \Gamma(X,O_X)$ n'est pas surjective. (Rappelons qu'une solution de cette équation est une détermination du logarithme et que la «fonction» $log(z)$ n'admet pas de détermination holomorphe sur $C\backslash\{0\}$.)

L'un des objets de la théorie des faisceaux est l'étude du «passage du local au global». Cette notion vague va prendre un sens précis grâce à la notion de foncteur dérivé. Nous venons de voir que le foncteur «sections globales», $\Gamma(X;*)$, n'était pas exact. On va alors définir pour tout faisceau F des groupes $H^j(R\Gamma(X;F))$ qui en un certain sens mesureront la non-exactitude de ce foncteur appliqué à F. Pour cela nous avons besoin d'outils algébriques.

Algèbre homologique

Une *catégorie* est une famille *d'objets* et de *morphismes* astreinte à vérifier un certain nombre d'axiomes. Par exemple, si A est un anneau, la famille des A-modules et des applications A-linéaires entre A-modules définit une catégorie, notée $Mod(A)$. Cette catégorie a des propriétés bien particulières, qui en font ce que l'on appelle une *catégorie abélienne*, et d'ailleurs toute catégorie abélienne est équivalente à une sous-catégorie d'une catégorie $Mod(A)$. La catégorie des faisceaux de k-espaces vectoriels sur un espace topologique X est une catégorie abélienne.

Considérons maintenant un *complexe* $F^\cdot$ dans une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, c'est-à-dire une suite $\{F^j\}(j \in \mathbb{Z})$ d'objets de $\mathcal{A}$ et de morphismes $u^j : F^j \to F^{j+1}$, tels que le composé $u^j o\, u^{j-1}$ de deux morphismes consécutifs soit le morphisme nul, autrement dit l'image de u^{j-1} est contenue dans le noyau de u^j. Le quotient de ce noyau par cette image est par définition le j-ème *objet de cohomologie* du complexe, noté $H^j(F^\cdot)$. On dit qu'un complexe est *exact* si tous ses objets de cohomologie sont nuls.

Un *foncteur* ϕ d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ dans une autre $\mathcal{A}'$ transforme les objets de $\mathcal{A}$ en objets de $\mathcal{A}'$, et de même pour les morphismes. Mais un foncteur ne transforme pas en général les suites exactes $0 \to F \to G \to H \to 0$ en suites exactes $0 \to \phi(F) \to \phi(G) \to \phi(H) \to 0$. Si cependant les suites $0 \to \phi(F) \to \phi(G) \to \phi(H)$ restent exactes, on dit que ϕ est exact à gauche. Supposant alors ϕ exact à gauche, on définit son foncteur dérivé à droite $R\phi$ de la manière suivante. Si F est un objet de $\mathcal{A}$, on commence par construire une suite exacte :

$$0 \to F \to F^o \to \cdots \to F^n \to \cdots,$$

où les F^j «se comportent bien» vis à vis du foncteur ϕ. Notons $F^{\cdot}$ le nouveau complexe :

$$0 \to F^o \to \cdots \to F^n \to \cdots.$$

La cohomologie du complexe $F^{\cdot}$ est nulle sauf en degré 0 où elle vaut justement F. On dit que F est *quasi-isomorphe* au complexe $F^{\cdot}$. Pour calculer le foncteur dérivé de ϕ appliqué à F, on remplace alors F par $F^{\cdot}$ et l'on applique ϕ, autrement dit on pose $R\phi(F) = \phi(F^{\cdot})$.

En fait, on peut faire encore mieux, et définir la *catégorie dérivée* de $\mathcal{A}$, notée $D^+(\mathcal{A})$. Supposons que dans la catégorie $\mathcal{A}$, tout objet F soit quasi-isomorphe à un complexe formé d'objets injectifs, c'est-à-dire d'objets se comportant bien vis à vis de tout foncteur exact à gauche. Passer à la catégorie dérivée $D^+(\mathcal{A})$ consiste essentiellement à remplacer les objets de $\mathcal{A}$ par des complexes formés d'objets injectifs.

Par exemple, si $\mathcal{A}$ est la catégorie des faisceaux de k-espaces vectoriels sur un espace topologique X, les objets injectifs sont les faisceaux *flasques*, c'est-à-dire ceux pour lesquels les opérations de restriction sont surjectives, et tout faisceau admet une résolution flasque (Godement).

Encadré 1

Le complexe de de Rham

Sur une variété différentiable X de dimension n, désignons par Ω_X^p le faisceau des formes différentielles de degré p, et par C_X le faisceau des fonctions localement constantes sur X. Le complexe de de Rham sur X est le complexe de faisceaux:

$$(*)\ 0 \longrightarrow C_X \longrightarrow \Omega_X^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega_X^n \longrightarrow 0,$$

où la flèche $\Omega_X^p \longrightarrow \Omega_X^{p+1}$ est la différentiation extérieure.

Le lemme de Poincaré assure que ce complexe est localement exact, (une forme différentielle fermée admet une primitive au voisinage de chaque point), c'est-à-dire exact au sens de la théorie des faisceaux.

Comme les faisceaux Ω_X^p se comportent bien pour le foncteur $\Gamma(X;*)$, (ceci résulte de l'existence de partitions de l'unité), on peut calculer les groupes de cohomologie $H^j(R\Gamma(X;C_X))$, notés aussi $H^j(X;C_X)$, en remplaçant le faisceau C_X par le complexe $0 \longrightarrow \Omega_X^0 \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Omega_X^n \longrightarrow 0$ et en appliquant le foncteur $\Gamma(X;*)$. On obtient ainsi que $H^j(X;C_X)$ est isomorphe au j-ième groupe de cohomologie du complexe :

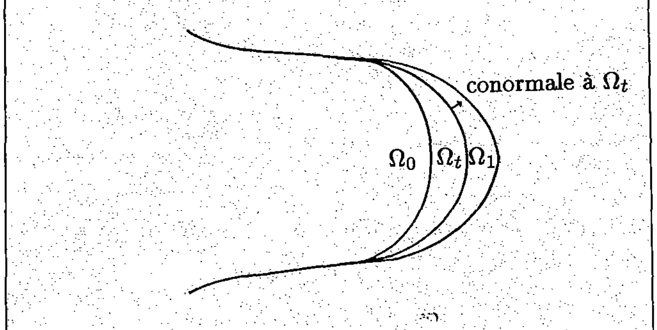
$$0 \longrightarrow \Gamma(X;\Omega_X^0) \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Gamma(X;\Omega_X^n) \longrightarrow 0.$$

Le complexe de de Rham offre donc un moyen explicite de calculer les invariants topologiques $H^j(X;C_X)$ de la variété X.

Micro-support

Supposons maintenant que X soit une variété différentiable, et notons T^*X son fibré cotangent (le dual du fibré tangent) et π la projection $T^*X \longrightarrow X$. Par exemple, si X est un espace vectoriel réel, alors $T^*X = X \times X^*$ où X^* désigne l'espace vectoriel dual de X.

Il arrive souvent en analyse que l'on veuille étendre l'espace des solutions d'une équation aux dérivées partielles définie sur un ouvert Ω_0 de X à un ouvert plus grand Ω_1. Ce problème est classique pour les solutions de l'équation des ondes, mais se pose aussi comme nous le verrons, dans de nombreuses autres situations. La technique de prolongement est alors toujours la même: on cherche une famille de déformations $\{\Omega_t\}, t \in [0,1]$, avec $\Omega_t \subset \Omega_{t'}$, pour $t < t'$, telle que l'on puisse prolonger la solution (supposée déjà prolongée à Ω_t) à travers la partie de la frontière de Ω_t contenue dans Ω_1, et ceci pour tout $t < 1$. Pour cela il faut que les conormales à la frontière de Ω_t ne rencontrent pas de «directions interdites».



Si les conormales à la frontière des Ω_t ne rencontrent pas de directions interdites, on peut "passer" de Ω_0 à Ω_1.

Figure 1

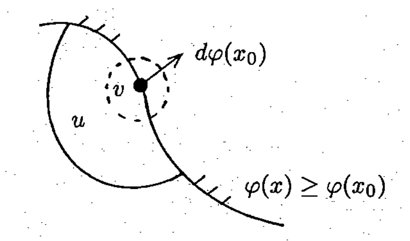
Considérons par exemple le cas d'une variété complexe X, et d'un opérateur différentiel holomorphe P sur X. Rappelons que le *symbole principal* $\sigma(P)$ de P désigne la partie homogène de plus haut degré de P considéré comme un polynôme par rapport aux dérivations et que la variété caractéristique de P est l'ensemble :

$$car(P) = \{(x;\xi) \in T^*X; \sigma(P)(x;\xi) = 0\}.$$

Si l'on veut prolonger les solutions holomorphes de l'équation $Pu = 0$, les directions interdites sont les directions caractéristiques de P; ce résultat, dû à Zerner, se déduit de la version précisée qu'a donnée Leray du théorème de Cauchy-Kowalevski.

Si l'on formalise dans le langage des faisceaux cette notion de «directions interdites», on est naturellement amené à introduire la notion de *micro-support* d'un faisceau F sur X. C'est un cône fermé de T^*X que l'on note $SS(F)$ et que l'on définit comme suit: un ouvert U de T^*X ne rencontre pas $SS(F)$ si pour toute fonction réelle ϕ de classe C^1 sur X et tout $x_o \in X$, tels que $(x_o; d\phi(x_o)) \in U, F$ n'admet pas au voisinage de x_o de sections (au sens des foncteurs dérivés) à support dans le demi-espace défini par ϕ, c'est-à-dire :

$$(R\Gamma_{\{x,\phi(x)\geq\phi(x_o)\}}(F))_{x_o} = 0.$$



Si $(x_o; d\phi(x_o)) \notin SS(F)$, alors la cohomologie de F à support dans le demi-espace $\{x; \phi(x) \geq \phi(x_o)\}$ est nulle en x_o. Par exemple si X est une variété complexe et si f est une solution holomorphe de l'équation $Pu = 0$ définie dans l'ouvert $\{x; \phi(x) < \phi(x_o)\}$ et si $\sigma(P)(x_o; d\phi(x_o)) \neq 0$, alors f se prolonge holomorphiquement à un voisinage V de x_o (Zerner).

Figure 2

Donnons tout de suite une première application de cette notion.

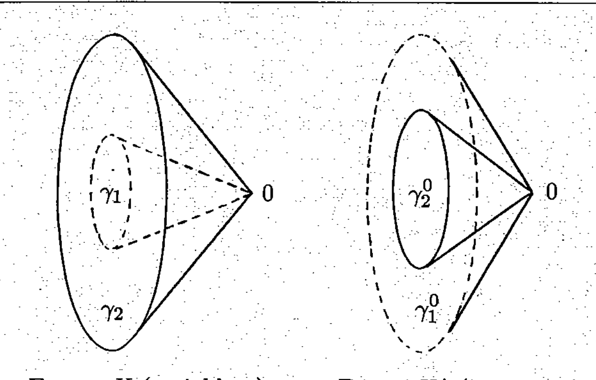
Si Z est une partie localement fermée de X, on lui associe un faisceau noté k_Z qui vaut 0 hors de Z et qui est constant de fibre k sur Z. On montre facilement que si Z est une sous-variété (lisse) fermée de X, le micro-support du faisceau k_Z est le fibré conormal $T^*_Z X$ à Z dans X. Dans le cas général, la notion de fibré conormal n'a a *priori* pas de sens, mais le micro-support du faisceau k_Z en est un substitut, que l'on peut calculer dans certaines situations.

Supposons par exemple que X soit un espace vectoriel réel et considérons un cône convexe fermé γ de X de sommet l'origine. Le cône polaire γ^o est défini par:

$$\gamma^o = \{\xi \in X^*; < x, \xi > \geq 0 \; \forall x \in \gamma\}.$$

On montre que le micro-support du faisceau k_γ au-dessus de 0 n'est autre que le cône γ^o, c'est-à-dire :

$$SS(k_\gamma) \cap \pi^{-1}(0) = \gamma^o.$$



Espace X (variable x) Espace X* (variable ξ)

"On ne peut pas être local à la fois en x et en ξ"

On peut visualiser ce principe en considérant des cônes γ_1 et γ_2 et leurs cônes polaires γ_1^o et γ_2^o : plus γ rétrécit plus γ^o grossit.

Figure 3

Remarquons que si l'on diminue γ, on augmente γ^o. On ne peut donc pas sur cet exemple diminuer le support du faisceau sans augmenter (dans l'espace dual) son micro-support. Il s'agit là d'un phénomène général, qui est l'équivalent du *principe d'incertitude*: si l'on note x la variable de l'espace X et ξ celle de l'espace dual, ce principe s'énonce grossièrement en disant qu'on ne peut pas être local à la fois en x et en ξ.

Le principe d'incertitude se traduit en théorie des faisceaux par le *théorème d'involutivité* (voir la définition de cette notion en encadré) qui s'énonce:

si F est un faisceau sur X, son micro-support est un ensemble involutif de T^*X.

Sans rentrer dans les détails de la définition de l'involutivité, notons que tout ensemble conique Λ de T^*X involutif et contenu dans une hypersurface d'équation $\{f = 0\}$, est invariant par le flot Hamiltonien H_f. Par exemple si Λ est contenu dans l'ensemble $\{\xi_1 = 0\}$, alors Λ est invariant en x_1.

La notion de micro-support permet de travailler «microlocalement» avec les faisceaux. On peut donner un sens précis à cette assertion, en «localisant» la catégorie dérivée des faisceaux, et en considérant comme nuls sur une partie S de T^*X les faisceaux dont le micro-support ne rencontre pas S. Il est alors possible de développer la théorie des faisceaux de ce point de vue.

Encadré 2

Involutivité

La géométrie symplectique est née avec Hamilton, au début du 19ème siècle. C'est la version mathématique de la *mécanique Hamiltonnienne*, qui consiste à associer à un système mécanique un *espace de phase*, c'est-à-dire une variété symplectique. Signalons au passage que la motivation initiale de Hamilton était l'optique et l'étude des caustiques.

Une *structure symplectique* sur un espace vectoriel E est la donnée d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur E. Cette forme permet d'identifier E et son dual E^*, et si λ est un sous-espace vectoriel de E on peut donc considérer son orthogonal λ^o comme un sous-espace vectoriel de E. Si λ contient λ^o on dit que λ est *involutif.* Si on a égalité, on dit que λ est *Lagrangien.*

Une *variété symplectique* est une variété dont l'espace tangent en chaque point est muni d'une structure symplectique. L'exemple modèle de variété symplectique est celui du fibré cotangent T^*X à une variété différentiable X. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ désigne un système de coordonnées sur X, et si l'on note par $(x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n)$ les coordonnées locales sur T^*X, la structure symplectique sur T^*X est donnée par la 2-forme $\sum_j d\xi_j \wedge dx_j$.

Si Λ est une sous-variété de T^*X on dit que Λ est involutive s'il en est ainsi de son espace tangent en chaque point, et l'on définit de même la notion de variété Lagrangienne. Il résulte du théorème de Frobenius que les variétés involutives sont munies d'un feuilletage naturel, les feuilles (dont la dimension est égale à la codimension de Λ) étant appelées «feuilles bicaractéristiques». Par exemple, si Λ est la sous-variété d'équation $\{\xi_1 = \xi_2 = 0\}$, les feuilles sont obtenues en fixant toutes les coordonnées sauf x_1 et x_2.

L'exemple type de variété Lagrangienne est celui du fibré conormal à une sous-variété. Si Z est la sous-variété d'équation $\{x_n = 0\}$, son fibré conormal $T^*_Z X$ est défini par les équations $\{\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = x_n = 0\}$.

Remarquons que la dimension d'une variété involutive est au moins égale à la dimension de X. En particulier une variété involutive ne peut pas être «trop petite».

Faisceaux constructibles

Cette notion, introduite par Grothendieck, joue un rôle chaque jour plus important, à l'interface de l'analyse et de la topologie. Nous allons l'exposer pour une variété analytique réelle, mais d'autres cadres (variétés analytiques complexes, algébriques, etc.) sont bien sûr possibles.

Un faisceau F sur une variété est *constructible* s'il existe une stratification de X par des variétés analytiques, $X = \sqcup_\alpha X_\alpha$, telle que F soit localement constant et de rang fini sur chaque strate X_α. De tels faisceaux apparaissent naturellement, par exemple dès que l'on prend les «images directes» des faisceaux constants.

Un problème important est de calculer *l'indice d'Euler-Poincaré* de ces faisceaux, c'est-à-dire (supposant F à support compact) de calculer l'entier :

$$\chi(X;F) = \sum_i (-1)^i dim(H^i(X;F)).$$

L'analyse microlocale permet de donner une réponse élégante à cette question.

On montre d'abord qu'un faisceau F est constructible si et seulement si (mis à part la condition de finitude) son micro-support Λ est un ensemble sous-analytique Lagrangien de T^*X. En un point générique p de Λ, Λ est le fibré conormal à une sous-variété Y de X et F est microlocalement isomorphe au faisceau k_Y^d, pour un entier d qui est la «multiplicité» de F en p. Kashiwara a alors montré que le micro-support de F muni de ses multiplicités définissait un *cycle Lagrangien* dont le nombre d'intersections avec le cycle Lagrangien associé à la section nulle calculait l'indice. Comme le nombre d'intersections de deux cycles est invariant par déformation de ces cycles (invariance par homotopie), on peut par exemple remplacer la section nulle par l'ensemble $\Lambda_\phi = \{(x; d\phi(x)); x \in X\}$, et on peut choisir la fonction ϕ pour que Λ_ϕ rencontre Λ là où Λ est lisse, et ce, transversalement. La fonction ϕ joue le rôle d'une «fonction de Morse» vis à vis de l'ensemble Lagrangien Λ, et l'on peut parler de «théorie de Morse microlocale». (Le cas classique correspond à celui où F est le faisceau constant sur X et donc où $SS(F)$ est la section nulle.)

Variété caractéristique et micro-support

Supposons maintenant que X soit une variété analytique complexe, et désignons par $\mathcal{D}_X$ le faisceau d'anneaux (non commutatifs) des opérateurs différentiels holomorphes sur X. Un «système d'équations aux dérivées partielles» $\mathcal{M}$ sur X est un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent. Il est localement représenté comme le conoyau d'une matrice d'opérateurs différentiels (opérant à droite):

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X^{N_0}/\mathcal{D}_X^{N_1} \cdot P_0$$

La théorie des $\mathcal{D}_X$-modules assure que $\mathcal{M}$ admet localement une résolution libre de type fini dont la longueur est au plus égale à la dimension complexe de X, c'est-à-dire $\mathcal{M}$ est quasi-isomorphe à un complexe libre:

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X^{N_n} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{D}_X^{N_1} \xrightarrow[P_0]{} \mathcal{D}_X^{N_0} \longrightarrow 0,$$

où les flèches sont définies par des matrices P_j d'opérateurs différentiels opérant à droite.

Le complexe des solutions holomorphes de ce module, c'est-à-dire l'objet $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ est alors représenté par le complexe :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^{N_0} \xrightarrow[P_0]{} \mathcal{O}_X^{N_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{O}_X^{N_n} \longrightarrow 0,$$

où les flèches sont les matrices P_j opérant à gauche.

Par exemple, dans le cas le plus simple «d'une équation à une inconnue», $Pu = v$, $\mathcal{M}$ est le module $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X \cdot P$ et le complexe de ses solutions holomorphes est simplement le complexe :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow[P]{} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

Un $\mathcal{D}_X$-module cohérent $\mathcal{M}$ admet une variété caractéristique notée $car(\mathcal{M})$. Si $\mathcal{M}$ admet un seul générateur u sa variété caractéristique est l'intersection des variétés caractéristiques des opérateurs P qui annulent u; dans le cas général, on prend la réunion des variétés caractéristiques d'un système de générateurs.

La théorie du micro-support permet de traiter les solutions des $\mathcal{D}_X$-modules grâce au théorème suivant. Soit $\mathcal{M}$ un module cohérent et F le complexe de ses solutions holomorphes, c'est-à-dire $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$; on a alors l'égalité :

$$(*)\ SS(F) = car(\mathcal{M}).$$

L'inclusion de $SS(F)$ dans $car(\mathcal{M})$ est la plus utile pour les applications, et sa démonstration n'est pas difficile. Par un argument algébrique classique, on se ramène au cas où $\mathcal{M}$ correspond à une équation à une inconnue, et le résultat se déduit alors du théorème de Cauchy-Kowalevski précisé, dû à Leray. L'inclusion inverse fait intervenir des outils plus lourds comme le faisceau des opérateurs microlocaux de Sato-Kashiwara-Kawaï. Il serait intéressant d'avoir une démonstration élémentaire de cette inclusion.

Un résultat fondamental de la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles est que la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent est un ensemble conique fermé analytique *involutif* de l'espace cotangent. Ce théorème d'involutivité admet maintenant trois démonstrations de nature très différente. La première est celle de Sato-Kashiwara-Kawaï, et est analytique (elle utilise les opérateurs microdifférentiels). La seconde est dûe à Gabber et est purement algébrique: elle n'utilise que la structure d'anneau filtré de $\mathcal{D}_X$. La troisième enfin, dûe à Kashiwara et à l'auteur, est plus géométrique, puisqu'elle déduit le résultat du théorème d'involutivité du micro-support dans le cas réel.

Il est possible d'obtenir de nombreux résultats d'équations aux dérivées partielles analytiques en utilisant l'égalité $(*)$ et des théorèmes généraux sur les faisceaux. Par exemple si M est une variété analytique réelle de complexifié X, le complexe des solutions analytiques réelles du système $\mathcal{M}$ n'est autre que le complexe $F|_M$, la restriction à M du complexe F, alors que le complexe des solutions hyperfonctions du système est (à une orientation et un «décallage» près) le complexe $R\Gamma_M(F)$, la cohomologie à support dans M du complexe F. On montre facilement (dans un contexte purement réel qui n'a rien à voir avec les équations aux dérivées partielles) que si l'on fait l'hypothèse :

$$(**)\ SS(F) \cap T_M^*X \subset T_X^*X$$

alors ces deux complexes sont isomorphes.

Si l'on utilise l'inclusion de $SS(F)$ dans $car(\mathcal{M})$, cette hypothèse est vérifiée dès que les directions caractéristiques du système $\mathcal{M}$ sont purement imaginaires, autrement dit que le système $\mathcal{M}$ est *elliptique*. On a donc ainsi déduit le théorème classique de régularité des solutions des équations elliptiques du seul théorème de Cauchy-Kowalevski, et ce, par des considérations purement géométriques.

En fait, on peut traiter de cette façon la plupart des problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients analytiques, comme les systèmes hyperboliques, la propagation des singularités, les problèmes aux limites et la diffraction (avec des obstacles non réguliers) etc. L'idée est toujours la même: au lieu de considérer séparément d'un côté l'opérateur différentiel P (ou le système $\mathcal{M}$), et de l'autre le faisceau sur lequel agit P (les fonctions holomorphes, les hyperfonctions, etc.), on considère le complexe $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ et on décide d'oublier que l'on a affaire à des équations aux dérivées partielles, de même que l'on décide d'oublier la structure complexe de X pour ne garder en mémoire que le micro-support de F, c'est-à-dire la variété caractéristique de $\mathcal{M}$. On évite ainsi bien des difficultés techniques, comme l'utilisation des opérateurs microdifférentiels ou des transformations canoniques quantifiées.

Cette méthode a évidemment ses limites: il n'est pas question de contrôler la croissance des solutions (la transformation de FBI de Sjöstrand est alors l'outil adéquat) ni de traiter des problèmes non linéaires, même si certains outils géométriques issus de la théorie des faisceaux ont trouvé avec Bony et Lebeau des applications non linéaires.

Conclusion

La théorie des faisceaux semble être un langage bien adapté pour traiter la partie géométrique (au sens naïf du terme) de nombreux problèmes mathématiques. Cette géométrie ne prend toute sa force que dans le cadre microlocal où le théorème d'involutivité impose une certaine «rigidité». Nous espérons avoir montré ici comment cette théorie pouvait éclairer certains aspects de la topologie algébrique aussi bien que des équations aux dérivées partielles, mais d'autres branches des mathématiques (en particulier la théorie des représentations des algèbres de Lie) devraient pouvoir se prêter à cette analyse.

POUR EN SAVOIR PLUS

On trouvera un exposé complet de la théorie des faisceaux (incluant les catégories dérivées, le point de vue microlocal, les applications à la topologie algébrique et aux équations aux dérivées partielles, etc.) dans le livre:

Kashiwara (M.) & Schapira (P.), *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 292, Springer-Verlag, 1990.

En ce qui concerne la géométrie symplectique et ses liens avec la physique, voir l'excellent livre:

Guillemin (V.) & Sternberg (S.), *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge University Press, 1984.

Un point de vue voisin de celui évoqué ici sur les faisceaux constructibles est développé dans:

Goresky (M.) & MacPherson (R.), *Stratified Morse Theory*, Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 1988.