L'Ecole de Kyoto et l'Analyse Algébrique*

Pierre Schapira

Il n'est peut-être pas inutile de rapeller les grandes lignes dans lesquelles s'inscrit la venue de Masaki Kashiwara sur la Chaire Blaise Pascal, et je voudrais pour cela présenter un rapide panorama historique de la période qui va des annés 60 à nos jours.

L'Analyse Mathématique dans les années 50-70 était, particulièrement en France, sous l'influence directe de l'analyse fonctionnelle, fortement marquée par le succès de la théorie des distributions, et les personalités de Laurent Schwartz, Alexandre Dieudonné et Nicolas Bourbaki. On cherchait essentiellement des théorèmes d'existence et la plupart des démonstrations consistaient à définir "le bon espace fonctionnel", à démontrer une "inégalité a priori", et à appliquer le théorème de Hahn-Banach.

C'est dans ce contexte que Mikio Sato définit en 59-60 les hyperfonctions comme valeurs au bord de fonctions holomorphes. La méthode de Sato est radicalement nouvelle car elle n'utilise en aucune manière la notion de limite. Ses hyperfonctions ne sont des limites de fonctions dans aucun sens raisonnable, et l'espace des hyperfonctions n'a aucune topologie naturelle autre que grossière. Pour sa construction Sato invente en parallèle avec Grothendieck, la cohomologie locale, un outil purement algébrique. Il s'agit vraiment d'un regard sur l'analyse radicalement nouveau, une rupture épistémologique, aurait-on dit dans ces murs dans les années 70. Mais outre son originalité incontestable, l'approche de Sato a des implications profondes comme je vais tenter de l'expliquer.

La théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires à coefficients variables en était à ses tout débuts dans les années 65-70, et était "sous le choc" de l'exemple de Hans Lewi, qui montrait qu'une certaine équation (une équation extrêmement simple) n'avait pas de solutions, même locale, même dans l'espace des distributions. Chose bizarre aujourd'hui, le

*Chaires Internationales de Recherche Blaise Pascal. Conférence de clotûre, en l'honneur de Masaki Kashiwara, donnée à l'Ecole Normale Supérieure le 18/01/2001.

fait qu'une équation n'ait pas de solution était à l'époque un peu choquant. On pensait que c'était un défaut de la théorie, que les espaces que l'on avait construit n'étaient pas assez gros pour contenir ces solutions. Bien sûr, c'est au contraire souvent quand il y a un phénomène de ce genre (une "obstruction cohomologique") qu'il se passe des choses interessantes: l'absence de solutions est la manifestation d'un phénomène géométrique caché et profond. Dans le cas de l'équation de Hans Lewi, la géométrie cachée est "microlocale".

En mathématique comme en physique, pour traiter ce qui ce passe dans un espace (affine), on est amené à calculer dans l'espace dual. Une méthode pour cela, celle employée en analyse, est la transformée de Fourier. Mais cette transformation est fort peu locale, et se prête très mal au passage aux variétés. La méthode de Sato au contraire est beaucoup plus adaptée à ce passage: une variété réelle se complexifie, et au lieu de regarder le comportement à l'infini de la transformée de Fourier, on peut regarder "d'où viennent" les valeurs au bord. En termes techniques, on regarde le fibré cotangent comme le fibré conormal au réel dans le complexe.

C'est le début de l'Analyse Microlocale, inventée par Sato en 69, et qui a révolutionné l'analyse. Sato et ses deux étudiants de l'époque, Kashiwara et Kawai, publient en 73 un traité sur l'analyse microlocale des EDP, traité qui a certainement eu une influence considérable, même si la plupart des analystes n'y ont pas compris grand chose et, entrainés par Hörmander, ont su adapter la transformée de Fourier classique à ces nouvelles idées.

Le paysage mathématique des années 70-80 a donc considérablement changé: non seulement on traite les équations à coefficients variables, mais on traite des systèmes (des matrices, pas nécessairement carrées, nous allons y revenir) et on travaille microlocalement, i.e., dans l'espace cotangent, l'espace de phase des physiciens. Mais il y a vraiment deux écoles dans le monde: l'école C^∞ issue de l'analyse classique, et dont le chef de file est Hörmander qui a mis au point le calcul des opérateurs intégraux de Fourier, et l'école analytique, derrière Sato et fort peu representée en dehors du Japon et de la France.

La France était particulièrement bien placée pour comprendre les idées de Sato car celles-ci s'appuient à la fois sur celles de Jean Leray et celles d'Alexandre Grothendieck.

Comme Leray, Sato a compris qu'il faut chercher les singularités dans le complexe (même pour comprendre les phénomènes purement réels) et l'outil de base de l'analyse algébrique de Sato est la théorie des faisceaux, inventée par Leray en 1944 alors qu'il était prisonnier de guerre, mise au point par

Cartan et Serre, et rendue d'une efficacité redoutable par Grothentieck avec son formalisme des catégories dérivées et des "six opérations".

C'est André Martineau qui fait connaitre en France vers 1965 les hyperfonctions de Sato, et comme je m'interessai à diverses généralisations de la théorie des distributions, Jacques-Louis Lions, qui fut un temps très bref mon directeur de thèse, me dirige vers lui pour poursuivre celle-ci. C'est ainsi que je montre dans ma thèse que l'équation de Hans Lewi n'a toujours pas de solutions dans l'espace des hyperfonctions, et que suis invité par Sato au Japon où je rencontre Masaki Kashiwara en 1971.

Kashiwara avait soutenu sa thèse en 1970 à Tokyo. Cette thèse contenait les fondements et les principaux outils de la théorie des $\mathcal{D}$-modules, une théorie qui permet de traiter les systèmes d'EDP linéaires avec les outils de la géométrie algébrique. Un $\mathcal{D}$-module veut dire un module sur l'anneau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels, et un module sur un anneau veut essentiellement dire "un systèmes d'équations linéaires" à coefficients dans cet anneau. Il s'agit donc de traiter les systèmes (généraux) d'EDP linéaires. Cette théorie qui est aussi apparue simultanément à Moscou avec Joseph Bernstein, un élève de Gelfand, a rapidement eu un succès considérable dans plusieurs branches des mathématiques. Dans les années 70-80 Kashiwara obtient d'ailleurs à lui seul l'essentiel des résultats fondamentaux de la théorie, en particuler ceux concernant les systèmes holonomes, avec le théorème de constructibilité (en 1975), le théorème de l'indice (qui vient logiquement après celui de constructibilité, mais est publié en 1973 dans une Note de deux pages au Japon), le théorème sur la rationnalité des zéros de la b-fonction et sa théorie des systèmes holonomes réguliers.

La théorie des $\mathcal{D}$-modules "explose" dans le monde vers les années 80, à l'occasion du "Colloque Pervers", une colloque organisé à Luminy par Verdier et où la théorie des faisceaux pervers est apparue pour la première fois. Mais la théorie des $\mathcal{D}$-modules était bien connue en France dès les années 76-77, après que Kashiwara eut passé un an en France à l'Université Paris-Nord. Son séjour en France amorce une longue collaboration entre nous, collaboration quasi-ininterrompue qui n'empêche évidemment pas Kashiwara d'avoir bien d'autres champs d'activité, en physique mathématique et en théorie des représentations en particulier, comme en témoignera la conférence qui va suivre.

L'esprit de notre travail est celui du programme de Sato: attaquer des problèmes d'analyse avec les outils de la théorie des faisceaux et des $\mathcal{D}$-modules, avec un regard "fonctoriel", c'est à dire construire et étudier des objets qui se prêtent au jeu des six opérations (images directes, images inverses et produits, chaque opération ayant deux réalisations, par dualité). Pour résumer par un jeu de mot facile, il s'agit de remplacer l'analyse fonctionnelle par l'analyse fonctorielle.

On a ainsi construit ensemble une "théorie microlocale des faisceaux", renforçant encore le yoga Grothendickien "fonctions/faisceaux" et permettant de traiter les EDP linéaires sans équations et sans fonctions. On peut même aborder des questions plus fines de croissance, mais en utilisant les outils algébriques sophistiqués de SGA4, ind-objets, topologies de Grothendieck etc. Il semble que plus on veuille faire de l'analyse fine, plus les outils algébriques nécessaires soient lourds.

Peut-on dresser le bilan, après 40 ans d'existence, de l'apport de l'Analyse Algébrique? Evidemment, en ce qui me concerne, je trouve cet apport déterminant. L'Analyse Algébrique a permit de comprendre les systèmes d'équations, de travailler microlocalement, de chercher les singularités dans le domaine complexe, et de faisceautiser l'essentiel de la théorie, la dépouillant de sa technicité au profit d'une approche essentiellement géométrique.

Mais cette médaille a un revers, et il est frappant de voir le contraste entre l'efficacité des méthodes de l'analyse algébrique pour traiter la plupart des problèmes linéaires, et leur impuissance devant les problèmes non-linéaires. D'ailleurs l'écart qui séparait les deux écoles mathématiques des années 70 n'a fait que s'accroitre, l'école C^∞ s'etant en grande partie tournée vers l'analyse des EDP non linéaires, et l'autre école vers des pratiques de plus en plus algébriques.

Sans doute le monde non-linéaire n'est-il pas encore mûr pour une approche Grothendieckienne, c'est à dire une approche où les concepts remplacent les calculs, et sans doute faudra-t-il attendre encore très longtemps avant qu'il en soit ainsi.