Leray et l'analyse algébrique

Pierre Schapira

Une bonne partie des mathématiques d'aujourd'hui utilise le langage des faisceaux, introduit par Jean Leray dans les années 45, et la cohomologie des faisceaux qui serait inopérante sans les suites spectrales elles aussi introduites par Leray (ou bien sans les catégories dérivées introduites quinze ans plus tard par Grothendieck).

Les faisceaux rendent compte de propriétés locales et leur cohomologie mesure l'obstruction à passer du local au global. Rien d'étonnant à ce que les équations aux dérivées partielles linéaires analytiques (EDPLA) se prêtent à ce langage, et dans le domaine complexe le problème essentiel est de comprendre la structure du faisceau des solutions holomorphes de l'équation homogène $Pf = 0$ (P désigne ici un opérateur différentiel sur une variété analytique complexe X) et en particulier de contrôler le domaine d'existence de f. L'idée centrale (qui peut sembler banale aujourd'hui) est que "les singularités se propagent le long des bicaractéristiques" de P. Pour donner corps à cette idée, il faut un outil de prolongement local de f, et c'est la "version précisée du théorème de Cauchy-Kovalevski" de Leray, qui donne une borne inférieure à la taille du domaine d'existence de la solution du problème de Cauchy en fonction de celle des données et du symbole principal de P. Ce résultat d'apparence très technique est la clef de toutes les EDPLA. Traduit en théorie des faisceaux, il dit que le micro-support du faisceau des solutions (un fermé de T^*X, l'espace cotangent à la variété X) est contenu dans la variété caractéristique de P, et sous cette forme, il s'étend facilement aux systèmes généraux d'EDP, i.e. aux $\mathcal{D}$-modules.

Un autre outil fondamental des EDPLA est la théorie des transformations intégrales, dont la transformation de Radon (la dualité projective) est le premier exemple. Une transformation intégrale sécrit $u(x) \mapsto \int u(x)k(x,y)dx$, et c'est donc la composée d'une image inverse, du produit par un noyau et d'une intégration. Leray donne un sens à ces opérations dans le domaine complexe et l'applique en particulier à la construction de solutions élémentaires. La théorie de Leray n'est pas facile, mais le langage des catégories dérivées (peut-être moins explicite mais souvent suffisant) permet de décrire le morphisme d'intégration trés simplement: si $f : Y \to X$ est un morphisme de variétés complexes de dimensions respectives d_Y et d_X, on peut lui associer fonctoriellement un morphisme $\int_f : \Omega_Y[d_Y] \to \Omega_X[d_X]$ (Ω_X désignant le faisceau des formes différentielles holomorphes de degré maximum). Le décalage $d_Y - d_X$ qui apparait montre bien qu'il serait vain d'espérer rester dans le cadre des fonctions et que ce sont des classes de cohomologie qu'il faut manipuler.

Ces questions d'analyse complexe traitée par Leray tout au long de son oeuvre sont au coeur de l'étude des EDP sur une variété réelle et l'idée que c'est la variété caractéristique complexe de l' opérateur et sa géométrie au voisinage du réel qui contrôle le comportement des solutions réelles est acceptée depuis les années 70/80. Les exemples des équations elliptiques (la variété caractéristique ne rencontre pas le conormal au réel) et des équations hyperboliques (les bicaractéristiques complexes sont "tangentes" au réel) en sont des illustrations.

Ainsi l'idée qui se dégage (c'est un avis personnel bien sûr, qui s'inscrit dans la vision de Sato de ce qu'il appelle l'"analyse algébrique"), est que la théorie des EDPLA se réduit pour une part essentielle à la géométrie de la variété caractéristique du système, une variété involutive de l'espace cotangent complexe (Sato-Kashiwara-Kawai) et à son interaction avec le fibré conormal au réel, ou plus généralement avec une variété Lagrangienne réelle associée aux objets que l'on étudie (cette variété remplaçant avantageusement les "espaces fonctionnels" des années 70). Les outils de cette réduction géométrique étant comme nous l'avons vu, la théorie des faisceaux, la version précisée du théorème de Cauchy-Kovalevski, le calcul différentiel complexe, pas mal d'algèbre (suites spectrales ou catégories dérivées), et une vision "microlocale" de l'affaire (l'espace cotangent).

Je ne crois pas minimiser l'importance de la contribution de Leray à cette page des Mathématiques en disant que ses idées s'éclairent et prennent toute leur force une fois combinées à celles de Grothendieck et de Sato.